

Bifurkationen III

4. Juni 2014

Jasper Venneberg

Gliederung

- ❖ Hopf-Bifurkationen II
- ❖ Globale Bifurkationen
- ❖ Beispiel: Josephson-Kontakt

Subkritische Hopf-Bifurkationen

❖ Beispiel

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + (x^2 + y^2)(x - y) \\ \dot{y} = x + \mu y + (x^2 + y^2)(x + y) \end{cases}$$

❖ In Polarkoordinaten

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 \\ \dot{\theta} = 1 + r^2 \end{cases}$$

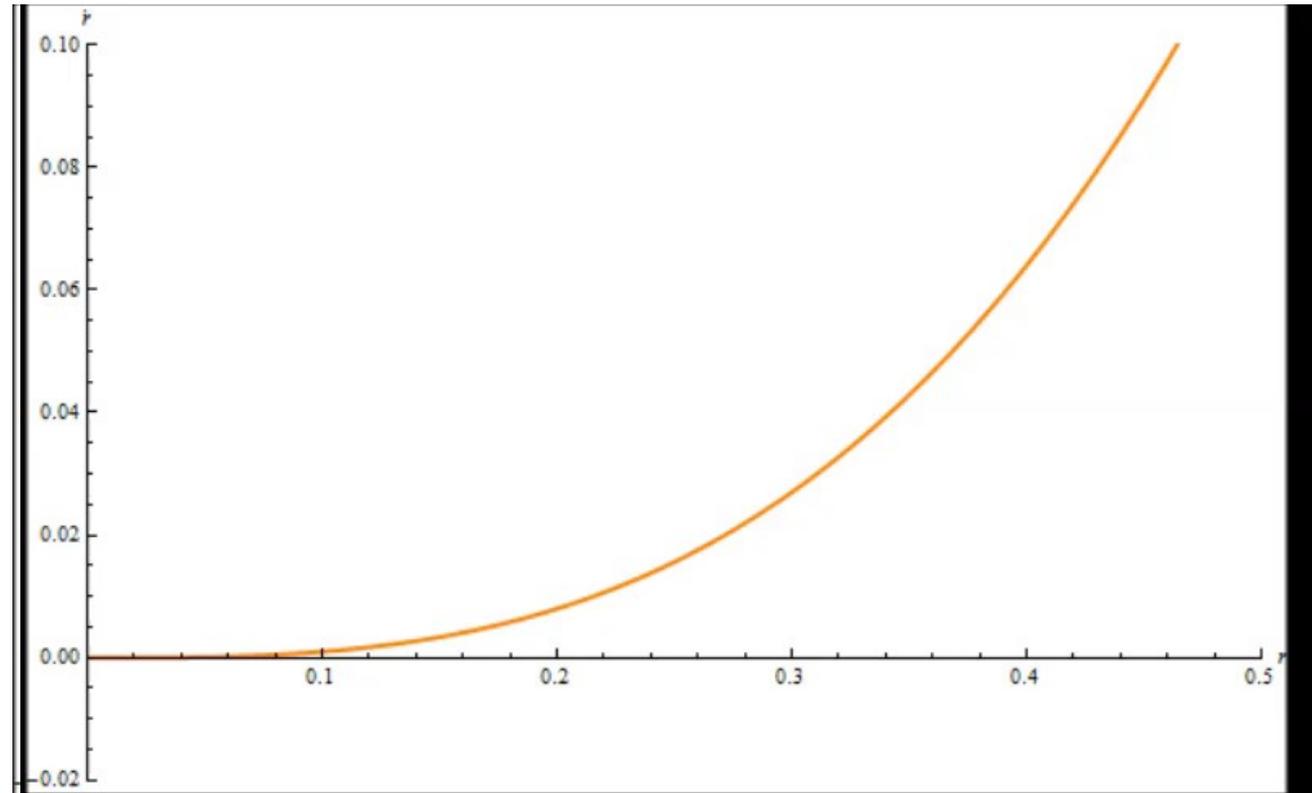
❖ Fixpunkte/Grenzyklen?

➤ Betrachte den Radialfluss $\dot{r} = \mu r + r^3$

❖ $\mu < 0$

❖ $\mu = 0$

❖ $\mu > 0$



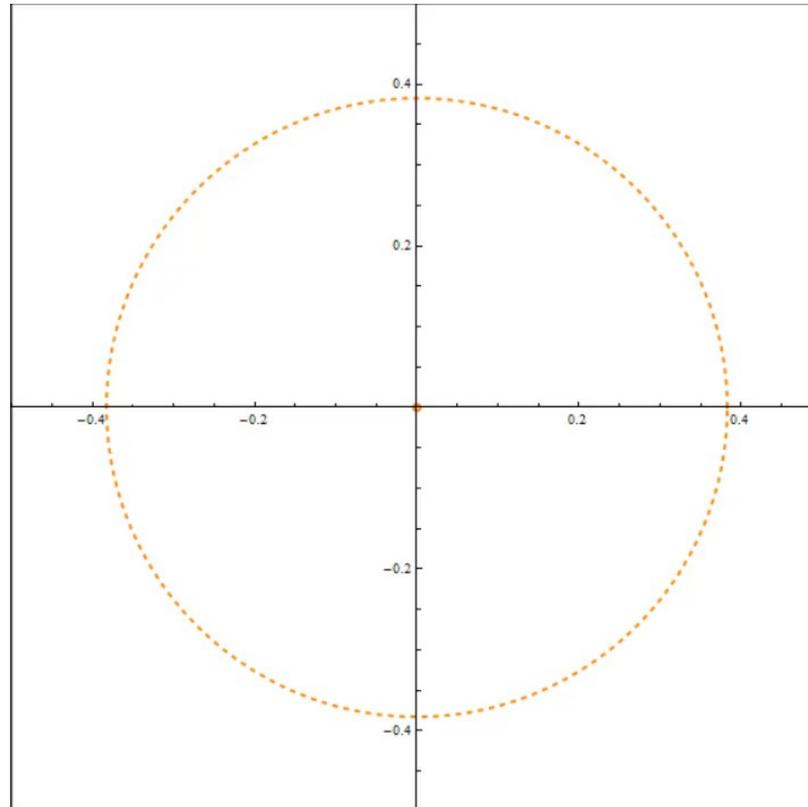
➤ Untersuche resultierenden Fixpunkt und

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 \\ \dot{\theta} = 1 + r^2 \end{cases}$$

❖ $\mu < 0$

❖ $\mu = 0$

❖ $\mu > 0$



Qualitativ:

- ❖ Für alle μ existiert genau ein Fixpunkt $(x^*, y^*) = (0,0)$.
- ❖ $\mu < 0$: Stabiler Fixpunkt und instabiler Grenzzyklus
- ❖ $\mu = 0$: Grenzzyklus destabilisiert Fixpunkt
- ❖ $\mu > 0$: Instabiler Fixpunkt

Analytisch:

❖ Bifurkation bei $(x^*, y^*, \mu_c) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + O(x^3, y^3) \\ \dot{y} = x + \mu y + O(x^3, y^3) \end{cases}$$

❖ Jacobi-Matrix im Ursprung

$$J|_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \mu \pm i$$

➤ Hopf-Bifurkation

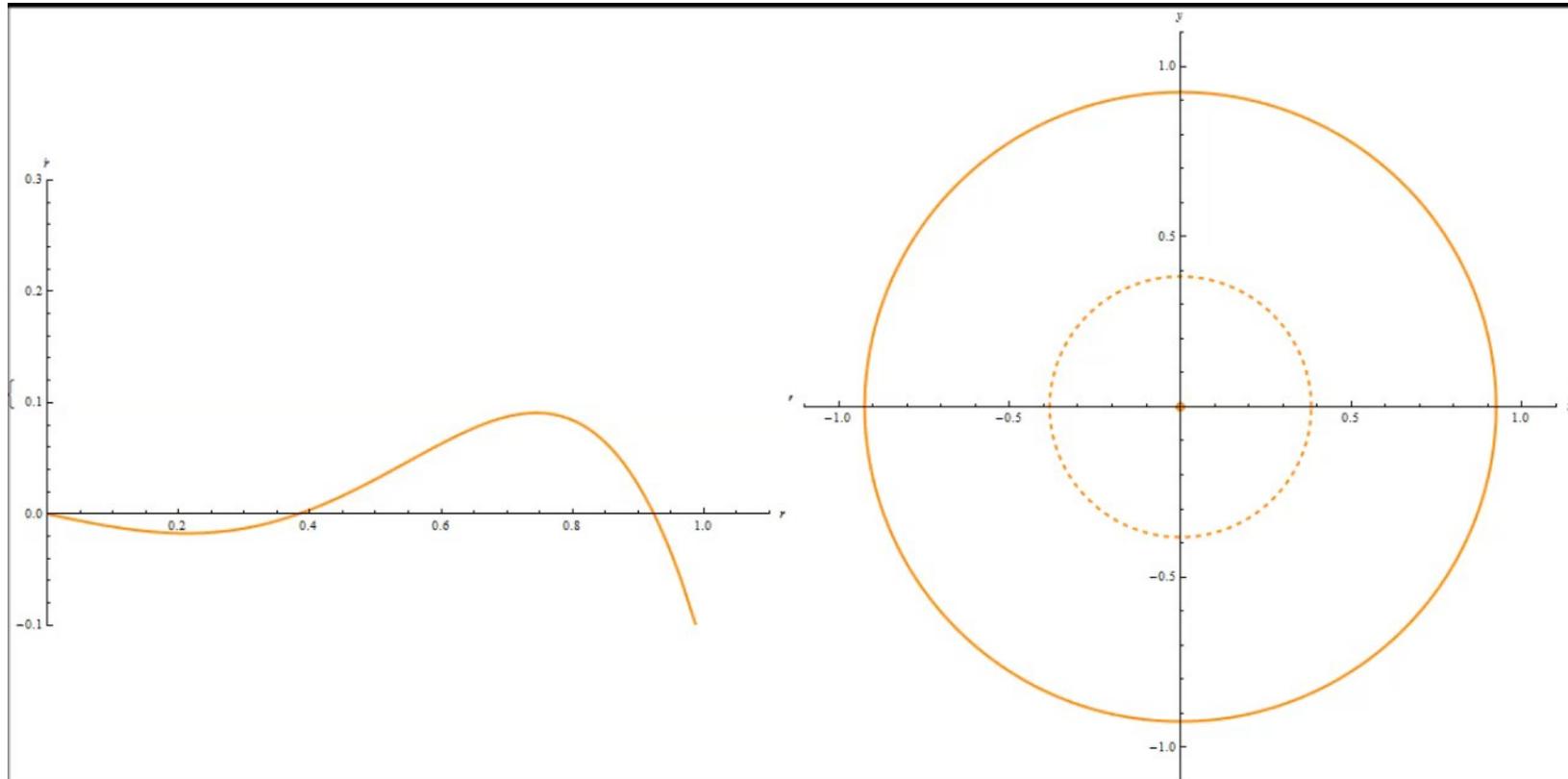
Physikalischer Fall

❖ Zusätzlicher, stabilisierender Term

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} = 1 + r^2 \end{cases}$$

➤ Ferner Attraktor (hier: stabiler Grenzzyklus)

➤ Mit stabilisierendem Grenzyklus $\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} = 1 + r^2 \end{cases}$



Zusammenfassung

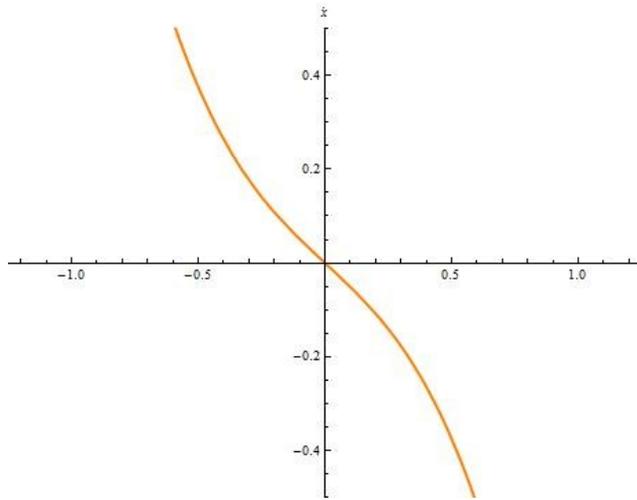
- ❖ Stabiler Fixpunkt wird von instabilem Grenzzyklus destabilisiert, Grenzzyklus verschwindet
- ❖ Eigenwerte von $J|_{(x^*, y^*)}$ passieren gleichzeitig die imaginäre Achse
- ❖ In Realität existiert ferner Attraktor

Gliederung

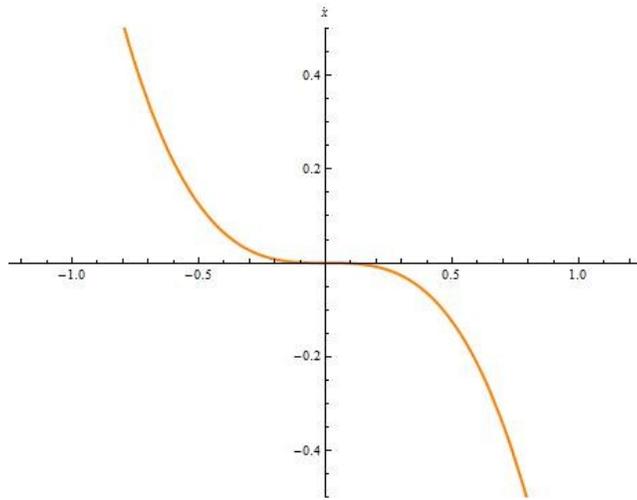
- ✓ Hopf-Bifurkationen II
- ❖ Globale Bifurkationen
- ❖ Beispiel: Josephson-Kontakt

Lokale Bifurkationen

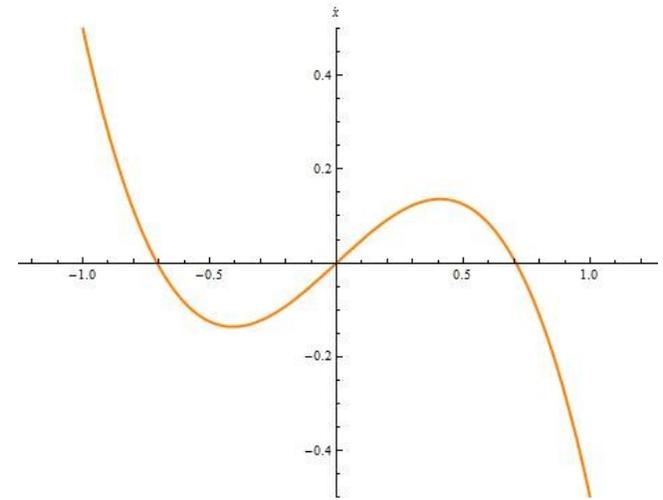
❖ Sei $\dot{x} = \mu x - x^3$



$\mu < 0$



$\mu = 0$



$\mu > 0$

Globale Bifurkationen

- ❖ „Bifurkationen in größerem Maßstab“
- ❖ Gattungen
 - Sattel-Knoten-Bifurkationen von Zyklen
 - Unendlich-periodische Bifurkationen
 - Homoklinische Bifurkationen

Sattel-Knoten-Bifurkationen von Zyklen

❖ Erneut

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} = 1 + r^2 \end{cases}$$

❖ Neuer Parameterbereich von $\mu < 0$

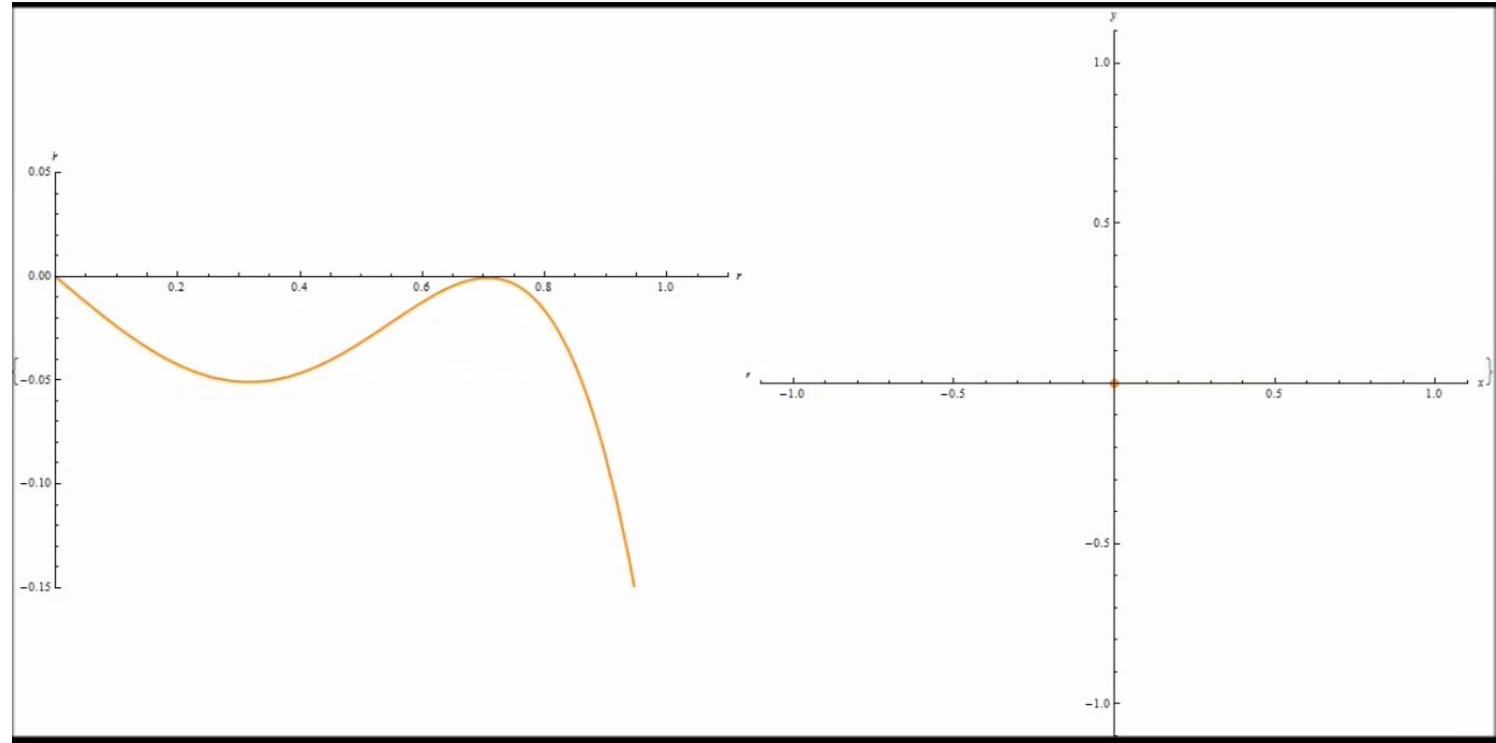
❖ Stabiler Fixpunkt bei $(x^*, y^*) = (0,0)$ nicht an Bifurkation beteiligt

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} = 1 + r^2 \end{cases}$$

$$\diamond -\frac{1}{4} < \mu < 0$$

$$\diamond \mu = -\frac{1}{4}$$

$$\diamond \mu < -\frac{1}{4}$$



Zusammenfassung

- ❖ Grenzyklen verschwinden nach Kollision
- ❖ Umfasst kompletten Bereich des Zyklus
- Globale Bifurkation

Unendlich-periodische Bifurkationen

❖ Betrachte (für $\mu \geq 0$):

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = \mu - \sin \theta \end{cases}$$

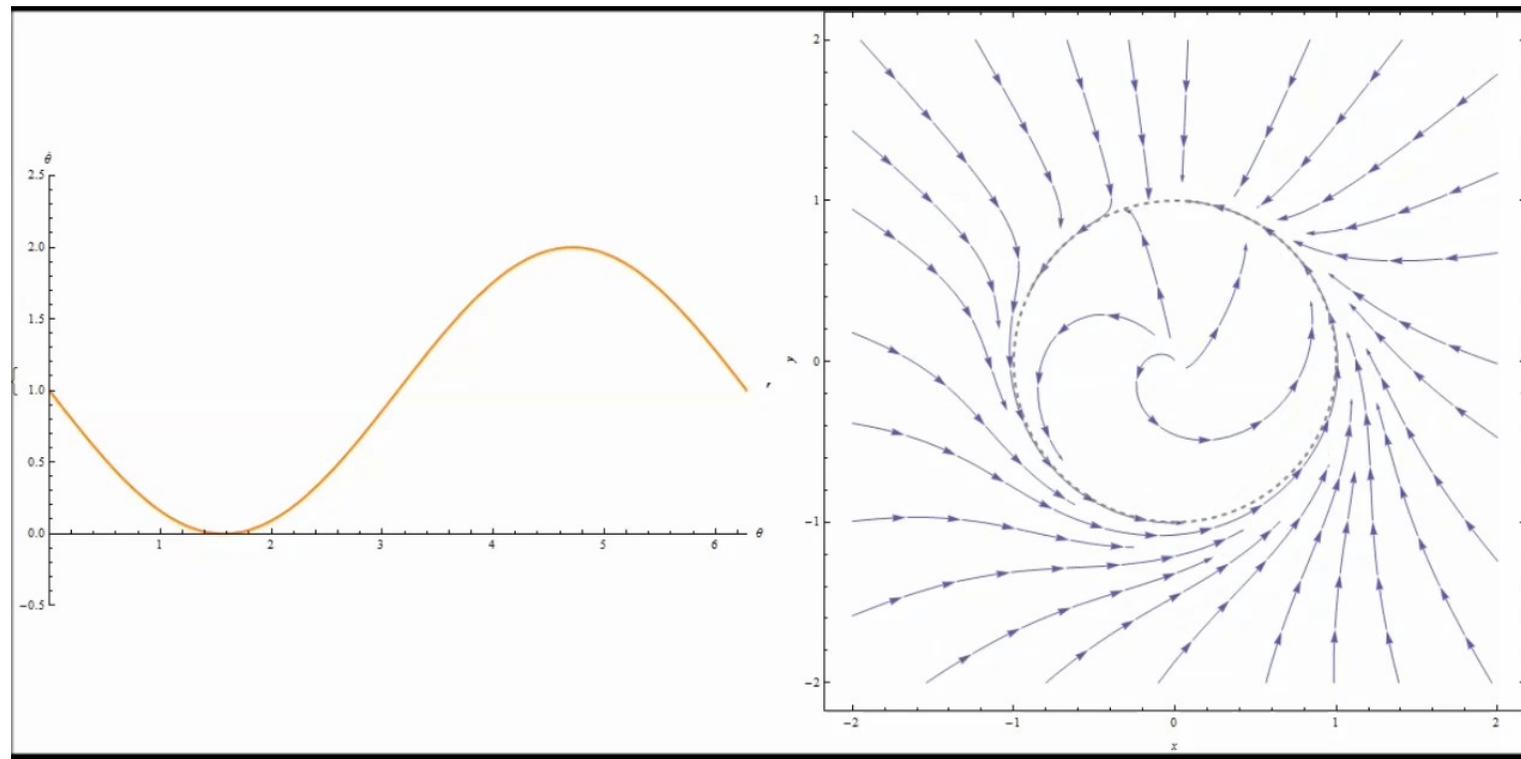
❖ $\dot{r} = 0$ für $r = 0$ und $r = 1$

❖ $\dot{\theta}$ kann für $\mu \leq 1$ verschwinden

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = \mu - \sin \theta \end{cases}$$

❖ $1 < \mu$

❖ $\mu \leq 1$



Zusammenfassung

- ❖ Periode auf Grenzzyklus wird größer und schließlich unendlich
- ❖ Fixpunkte entstehen aus dem Nichts
- ❖ Grenzzyklus verschwindet
- Globale Bifurkation

Homoklinische Bifurkationen

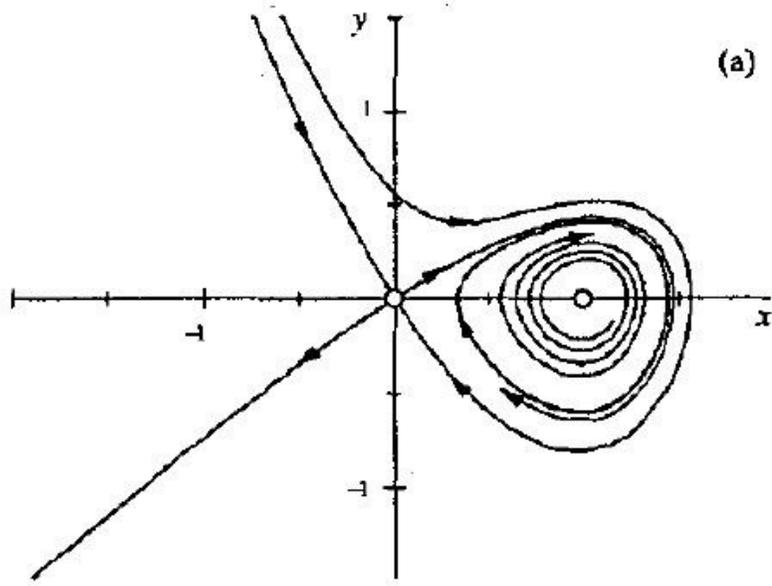
❖ Homoklinischer Orbit

❖ Beispiel

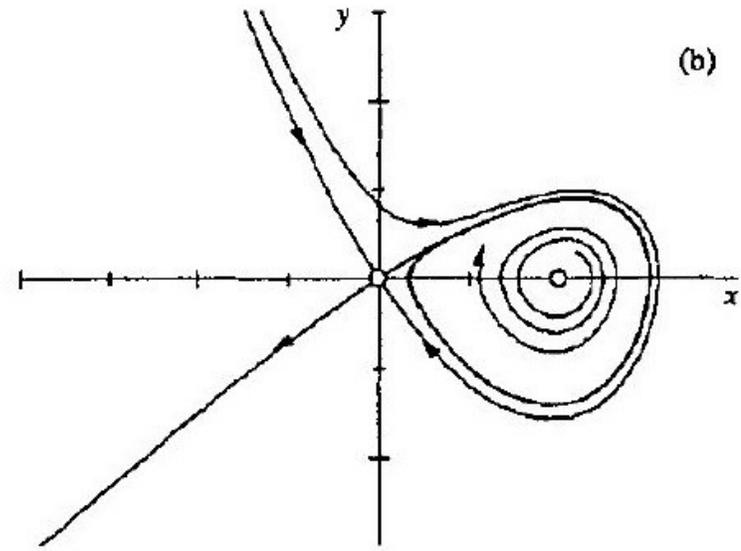
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu y + x - x^2 + xy \end{cases}$$

❖ Fixpunkt bei $(x^*, y^*) = (0,0)$ und $(x^*, y^*) = (1,0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu y + x - x^2 + xy \end{cases}$$

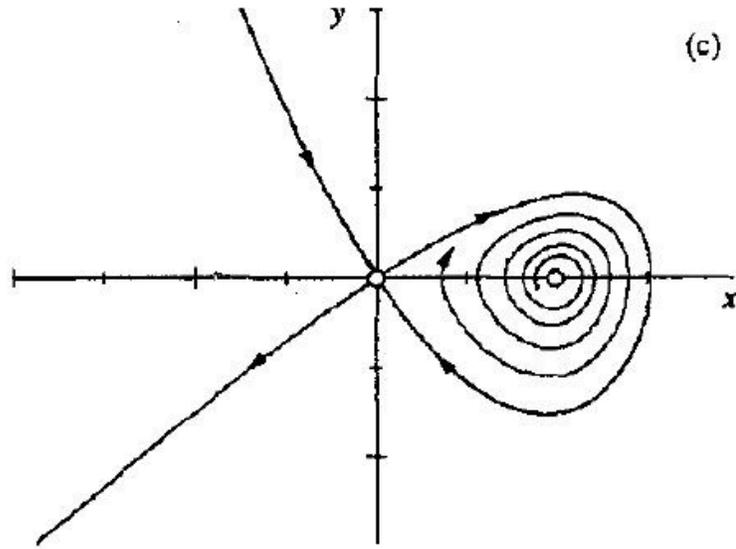


$$\mu < \mu_c$$

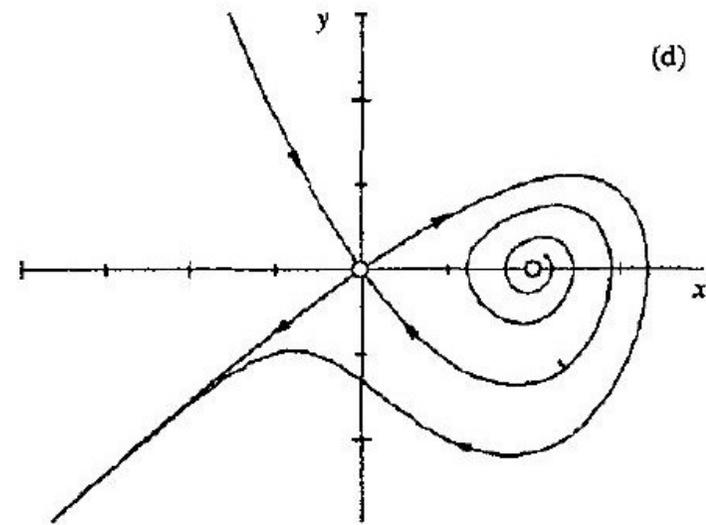


$$\mu < \mu_c$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu y + x - x^2 + xy \end{cases}$$



$$\mu = \mu_c (= -0,8645)$$



$$\mu > \mu_c$$

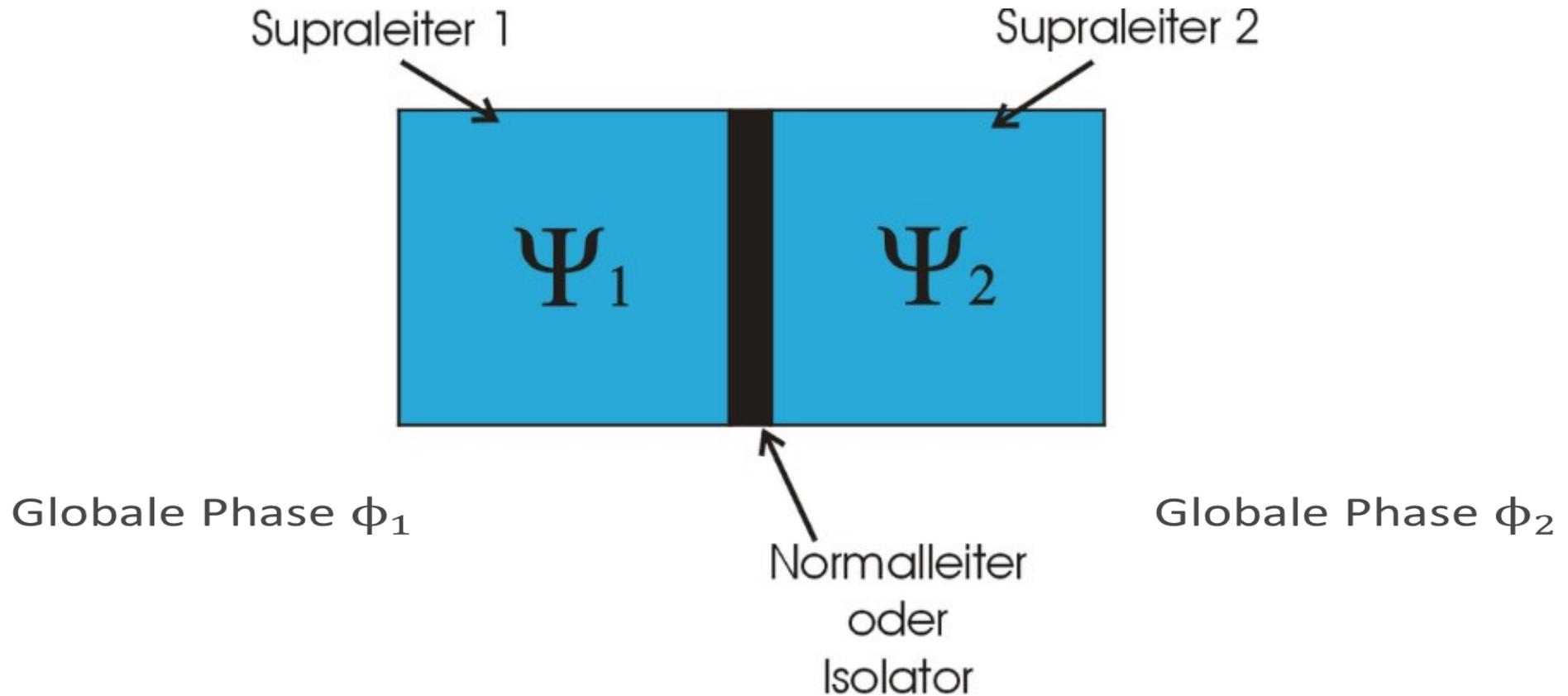
Zusammenfassung

- ❖ Stabiler Grenzzyklus und Sattelpunkt kollidieren
- ❖ Grenzzyklus verschwindet
- ❖ Homoklinischer Orbit entsteht, System verliert Stabilität
- Globale Bifurkation

Gliederung

- ✓ Hopf-Bifurkationen II
- ✓ Globale Bifurkationen
- ❖ Beispiel: Josephson-Kontakt

Beispiel: Josephson-Kontakt



Untersuchung der Phasendifferenz

- ❖ Differentialgleichung zur Phasendifferenz $\phi = \phi_1 - \phi_2$

$$\phi'' + \alpha\phi' + \sin \phi = I$$

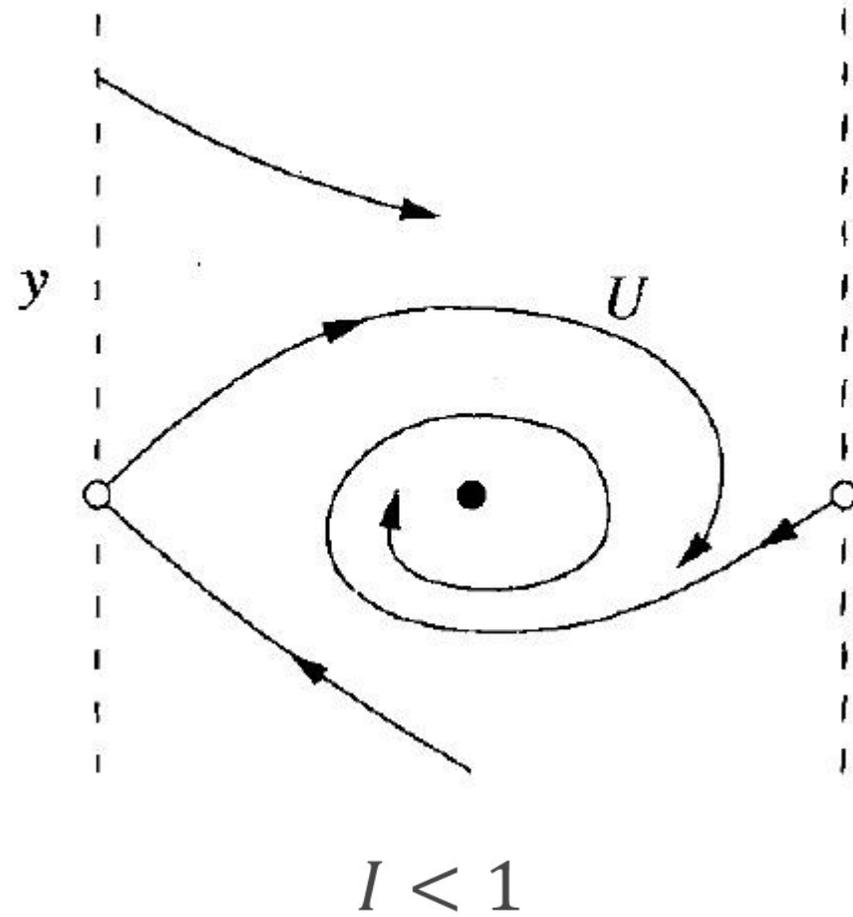
- ❖ Alternativ mit $y = \phi'$

$$\begin{cases} \phi' = y \\ y' = I - \sin \phi - \alpha y \end{cases}$$

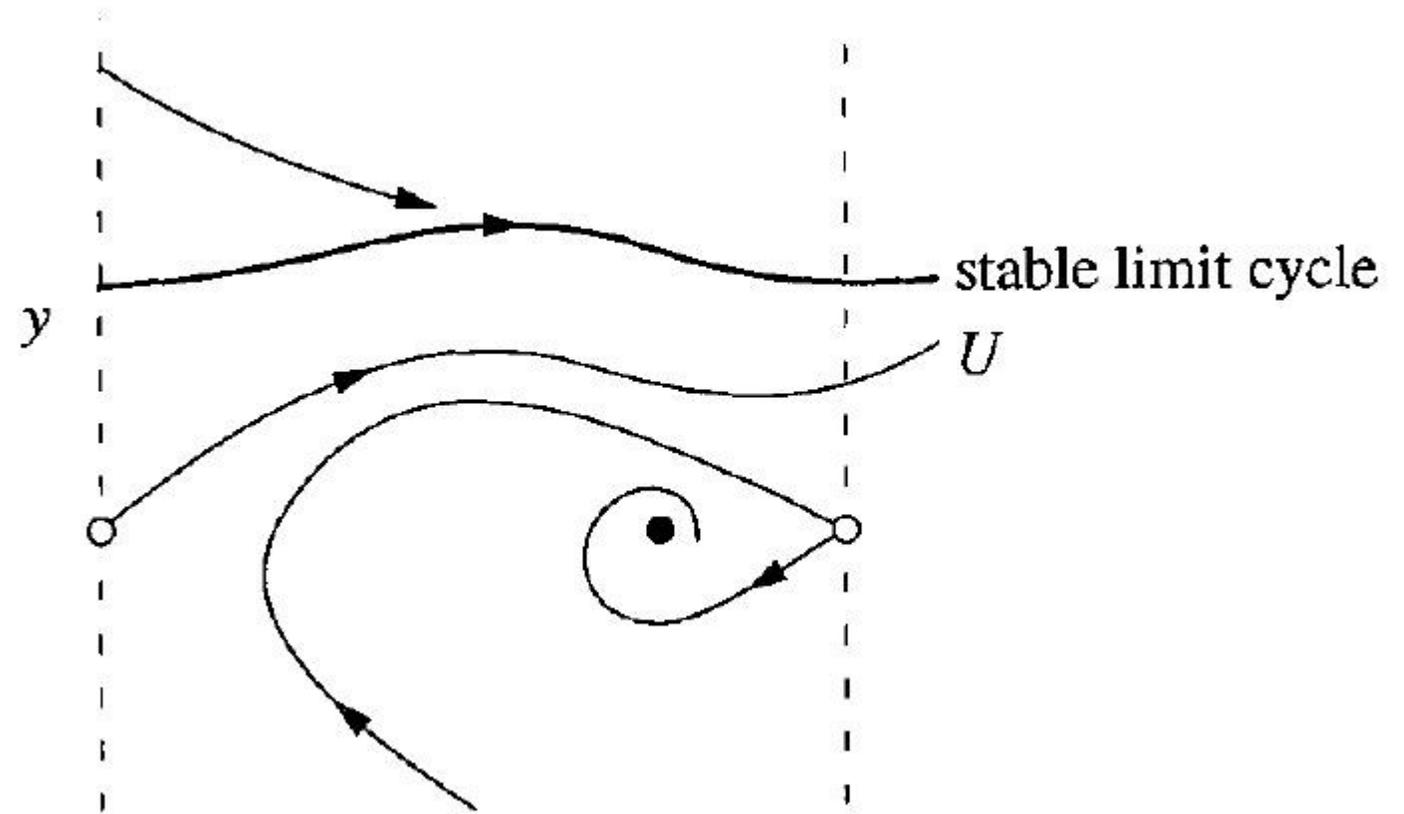
- ❖ Fixpunkte $(\phi', y') = (0,0)$

$$\phi' = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ und } y' = 0 \Rightarrow \sin \phi = I$$

$$\begin{cases} \phi' = y \\ y' = I - \sin \phi - \alpha y \end{cases}$$

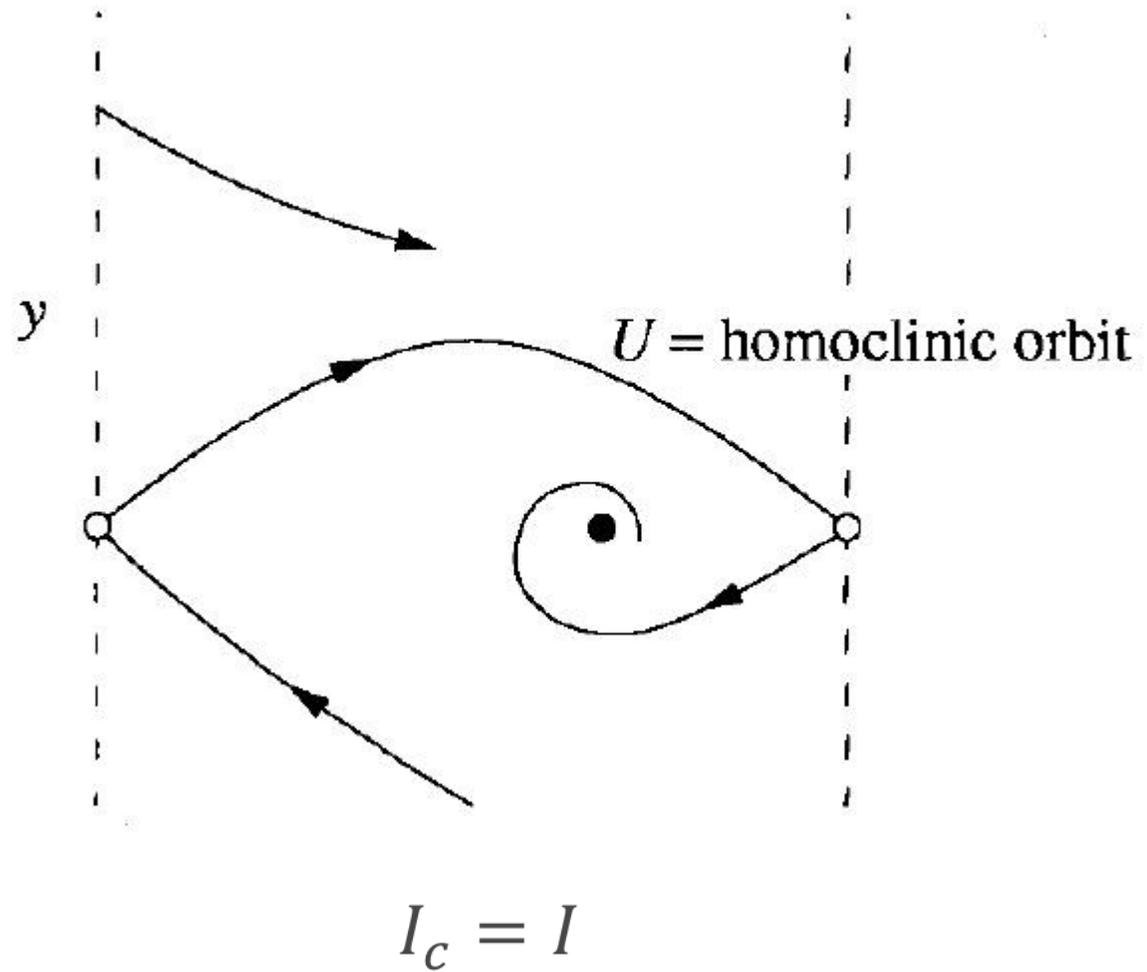


$$\begin{cases} \phi' = y \\ y' = I - \sin \phi - \alpha y \end{cases}$$



$$I_c < I < 1$$

$$\begin{cases} \phi' = y \\ y' = I - \sin \phi - \alpha y \end{cases}$$



Zusammenfassung

- ❖ Fixpunkte \Rightarrow Supraleitung, Grenzzyklus \Rightarrow Normalleitung
- ❖ Bistabiler Bereich $I_c < I < 1$
- ❖ Homoklinische Bifurkation zerstört Grenzzyklus
- ❖ Spannungshysterese

Gliederung

- ✓ Hopf-Bifurkationen II
- ✓ Globale Bifurkationen
- ✓ Beispiel: Josephson-Kontakt

Vielen Dank für die
Aufmerksamkeit!
