Chaos

Das Lorenz-System

Roman Kossak

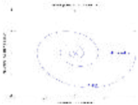
18.06.2014

Gliederung

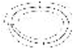
- Motivation
- Eigenschaften
  - Volumenkontraktion
  - Linearität, Symmetrie, Fixpunktanalyse
- numerische Beispiele
- Exponentielle Divergenz
- Definition: Chaos

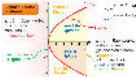
Motivation

- 1D - Fixpunkte asymptotisch stabil oder instabil



- 2D - Betrachtung der Phasenebene $\Rightarrow$ Fixpunktanalyse





- 3D $\Rightarrow$ Übergang zu Lorenz Gleichungen

Lorenz-Gleichungen

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

E. Lorenz

mit σ = Prandl Zahl, r = Rayleigh Zahl

Wobei σ, r, b > 0

Volumenkontraktion

Dissipatives System $\Rightarrow$ Volumenkontraktion

für t $\rightarrow \infty$ folgt V $\rightarrow$ 0

Beweis:

$$\dot{V} = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV$$

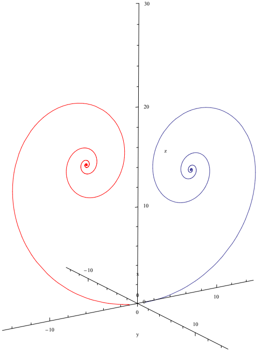
$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}[\sigma(y-x)] + \frac{\partial}{\partial y}[rx - y - xz] + \frac{\partial}{\partial z}[xy - bz] = -(\sigma + 1 + b)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -(\sigma + 1 + b) V$$

$$\Rightarrow V(t) = V(0) e^{-(\sigma+1+b)t}$$

einfache Eigenschaften

- Nichtlinearität bei xz und xy
- Symmetrie $(x, y) \to (-x, -y)$
  Wenn (x, y, z) eine Lösung ist, dann auch $(-x, -y, z)$



Fixpunkte

- Fixpunkte aus Gleichgewichtszustand $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$
  - Ursprung (0,0,0) für alle Parameter
  - $x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}, z = r - 1 \rightarrow$ Entstehung von symmetrischen Fixpunkten C^+ und C^-
- lineare/globale Stabilität des Ursprungs
- Stabilität von C^+ und C^-

lineare Stabilität am Ursprung

Betrachtung des linearisierten Systems:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x)\\ \dot{y} &= rx-y\\ \dot{z} &= -bz\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ z entkoppelt, $z(t\to\infty)\to 0$

In Matrixform ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sigma & \sigma\\ r & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Rightarrow \text{spur}\, M = -\sigma - 1 \text{ und } \det M = \sigma(1-r)$$

$\Rightarrow$ **Ursprung ist stabiler Fixpunkt für r $<$ 1**

globale Stabilität am Ursprung

Satz:

Für $r < 1$ läuft jede Trajektorie für t$\rightarrow \infty$ in den Ursprung

$\Rightarrow$ globale Stabilität

Ursache: Volumenkontraktion und somit weder Grenzzyklen noch chaotisches Verhalten

Stabilität von C^+ und C^-

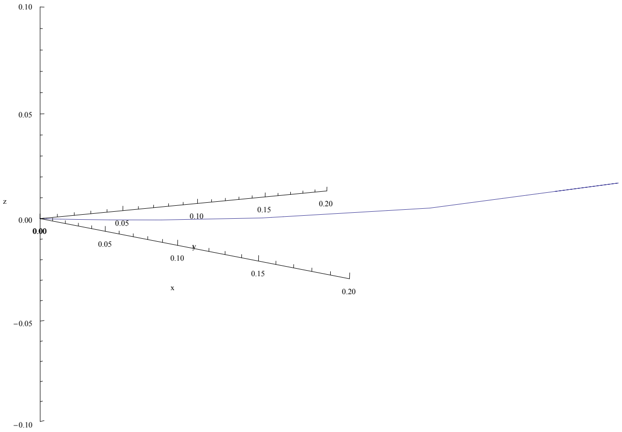
C^+, C^- Fixpunkte für $r > 1$: $x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}, z = r - 1$

- für $1 < r < r_H \Rightarrow$ lineare Stabilität
- für $r = r_H \Rightarrow$ subkritische Hopfbifurkation
- für $r > r_H \Rightarrow$ instabile Grenzzyklen um die Fixpunkte

$r_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$

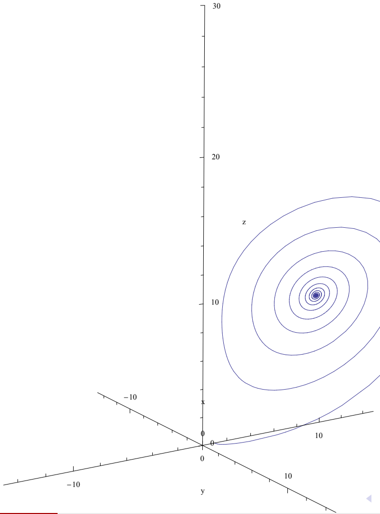
Beispiel r = 0.5

$\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$, Ursprung stabil



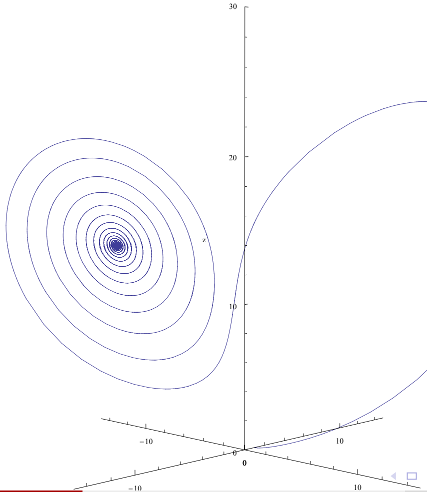
Beispiel r = 12

$\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$, stabile Fixpunkte C^{+}, C^{-}



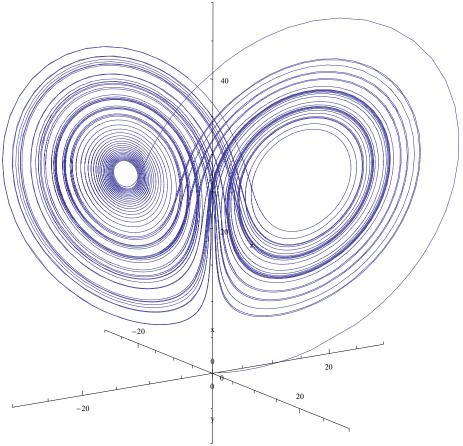
Beispiel r = 15

$\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$, stabile Fixpunkte C^+, C^-, transientes Chaos



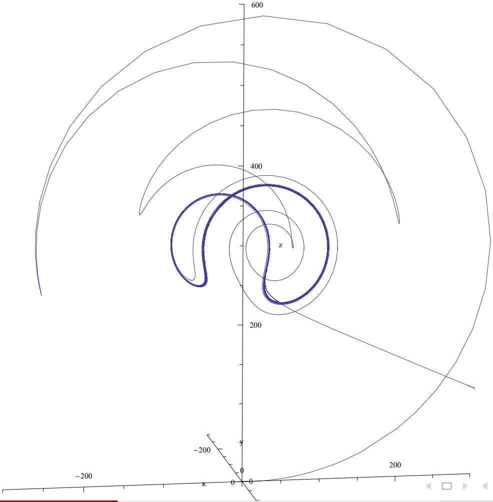
Beispiel r = 28

$\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$, seltsamer Attraktor

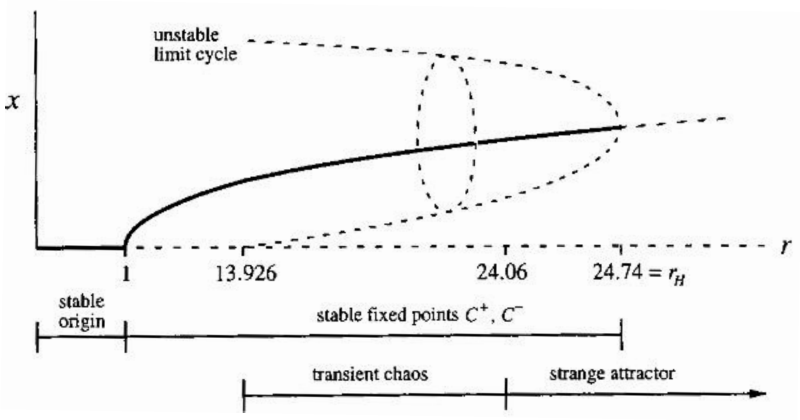


Beispiel r = 300

$\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$, transientes Chaos, periodische Bewegung

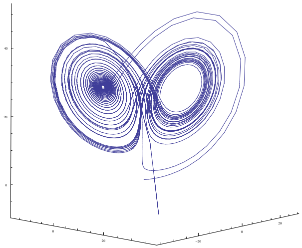


Verhalten bei Variation von r

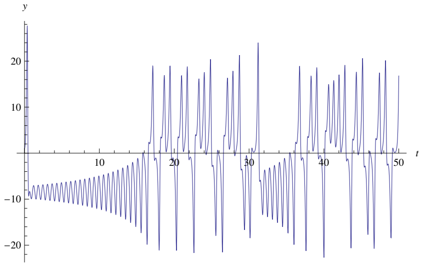


Seltsamer Attraktor

Parameterbetrachtung $\sigma = 10$, $r = 28$ und $b = \frac{8}{3}$

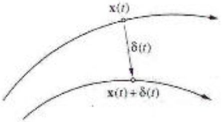


Lorenz-Butterfly



Exponentielle Divergenz von nahen Trajektorien

- sensible Abhängigkeit von Anfangsbedingungen

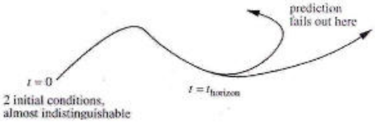


- exponentielle Bahnänderung numerisch ermittelt

  $\Rightarrow \|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| e^{\lambda t}$ mit λ : positiver Ljapunow Exponent

- Messungenauigkeit a

  $\Rightarrow t_{horizon} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{\|\delta_0\|}$



Beispiel zur expo. Divergenz

Beispiel: Messungenauigkeit $a = 10^{-3}$ und Abschätzung des Messwertes auf $\|\delta_0\| = 10^{-7}$ genau

$$\Rightarrow t_{horizon} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = \frac{1}{\lambda} \ln(10^4) = \frac{4 \ln 10}{\lambda}$$

Verbesserung der Abschätzung um den Faktor 10^6:

$$\Rightarrow t_{horizon} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-13}} = \frac{1}{\lambda} \ln(10^{10}) = \frac{10 \ln 10}{\lambda}$$

Beispiel zur expo. Divergenz

Beispiel: Messungenauigkeit $a = 10^{-3}$ und Abschätzung des Messwertes auf $\|\delta_0\| = 10^{-7}$ genau

$$\Rightarrow t_{horizon} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = \frac{1}{\lambda} \ln(10^4) = \frac{4 \ln 10}{\lambda}$$

Verbesserung der Abschätzung um den Faktor 10^6:

$$\Rightarrow t_{horizon} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-13}} = \frac{1}{\lambda} \ln(10^{10}) = \frac{10 \ln 10}{\lambda}$$

Verbesserung der vorausgesagten Länge nur um Faktor

2.5?!?!?

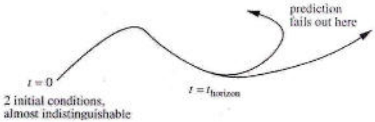
Definition: Chaos

Chaos ist ein aperiodisches Langzeitverhalten in einem deterministischen System, das sensible Abhängigkeit von Anfangsbedingungen aufweist.

- aperiodisches Langzeitverhalten
- deterministisch
- sensible Abhängigkeit von Anfangsbedingungen

Fazit

- chaotisches Verhalten ⇒ aperiodisches Verhalten, sensibel von Anfangsbedingungen abhängig
- exponentielle Divergenz von Trajektorien ⇒ Vorhersage von meteorologischen Systemen sind somit zeitlich begrenzt



Ende

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!

Quellen

- Nonlinear dynamics and chaos, Steven H. Strogatz 1994
- John H. *Die Erforschung des Chaos*, Vieweg 1995
- *CHAOS - Bausteine der Ordnung*, Springer-Verlag
- E. N. Lorenz - Deterministic nonperiodic flow - Journal of Atmospheric Sciences 1963