

# Ein-Dimensionale Abbildungen

## Logistische Abbildung

Alexander Kranz

Proseminar: Theoretische Physik

25. Juni 2014

# Gliederung

1. Motivation
2. Definition
3. Analyse von 1D-Abbildungen
  - Fixpunkte
  - Cobweb Plot
4. Logistische Abbildung
  - Definition
  - Periodizität
  - Liapunov Exponent
  - Universalität
5. Lorenz Map
6. Fazit

# Gliederung

1. Motivation
2. Definition
3. Analyse von 1D-Abbildungen
  - Fixpunkte
  - Cobweb Plot
4. Logistische Abbildung
  - Definition
  - Periodizität
  - Liapunov Exponent
  - Universalität
5. Lorenz Map
6. Fazit

# Motivation

Bisher:

Differentialgleichungen  $\rightarrow$  stetige Funktionen

- Werkzeug zur Analyse von Differentialgleichungen
- Modell natürlicher Phänomene: Digital Elektronik, Wirtschafts- und Finanztheorie, Populationswachstum
- Einfache Beispiele für Chaos

# Gliederung

1. Motivation

2. Definition

3. Analyse von 1D-Abbildungen

- Fixpunkte
- Cobweb Plot

4. Logistische Abbildung

- Definition
- Periodizität
- Liapunov Exponent
- Universalität

5. Lorenz Map

6. Fazit

# 1D-Abbildungen

## Definition

Sei  $f$  eine stetige Funktion und  $x_n \in \mathbb{R}$ . Dann ist die rekursive Abbildung

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

eine **eindimensionale Abbildung** der reellen Achse auf sich selber.

- Diskrete Zeit
- Punktmenge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  heißt Orbit
- Beispiel:  $x_{n+1} = \cos(x_n)$

# Gliederung

1. Motivation
2. Definition
3. Analyse von 1D-Abbildungen
  - Fixpunkte
  - Cobweb Plot
4. Logistische Abbildung
  - Definition
  - Periodizität
  - Liapunov Exponent
  - Universalität
5. Lorenz Map
6. Fazit

# Fixpunkte

Fixpunkte erfüllen

$$\begin{aligned}f(x^*) &= x^* \\ \Rightarrow x_{n+1} &= f(x_n) = f(x^*) = x^*\end{aligned}$$

Stabilität:

$$\begin{aligned}x^* + \eta_{n+1} &= x_{n+1} = f(x^* + \eta_n) = f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + \mathcal{O}(\eta^2) \\ \Rightarrow \eta_{n+1} &\approx f'(x^*)\eta_n \quad \text{mit } \lambda = f'(x^*) \\ \Rightarrow \eta_n &= \lambda^n \eta_0\end{aligned}$$

# Fixpunkte

Fixpunkte erfüllen

$$\begin{aligned}f(x^*) &= x^* \\ \Rightarrow x_{n+1} &= f(x_n) = f(x^*) = x^*\end{aligned}$$

Stabilität:

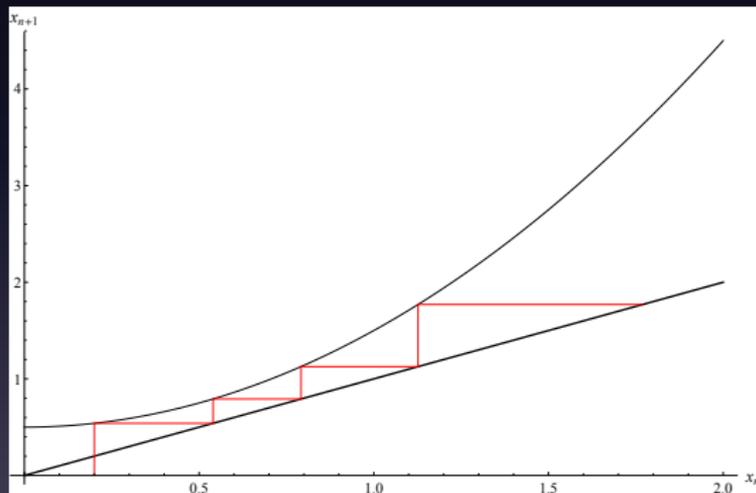
$$\begin{aligned}x^* + \eta_{n+1} &= x_{n+1} = f(x^* + \eta_n) = f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + \mathcal{O}(\eta^2) \\ \Rightarrow \eta_{n+1} &\approx f'(x^*)\eta_n \quad \text{mit } \lambda = f'(x^*) \\ \Rightarrow \eta_n &= \lambda^n \eta_0\end{aligned}$$

Somit gibt es nur stabile Fixpunkte wenn  $|\lambda| = |f'(x^*)| < 1$ , für  $|\lambda| = |f'(x^*)| = 1$  erhalten wir keine Aussage.

Vgl.: Für DGLs muss  $|f'(x^*)| \leq 0$

# Cobweb Plot

- Werkzeug zur qualitativen Untersuchung von 1D rekursiven Abbildungen
- Nützlich wenn lineare Analyse nicht funktioniert



$$\lambda > 0$$

# Cobweb - Beispiel 1

$x_{n+1} = \sin(x_n)$  hat Fixpunkt bei  $x^* = 0$

# Cobweb - Beispiel 1

$x_{n+1} = \sin(x_n)$  hat Fixpunkt bei  $x^* = 0$

aber:  $f'(0) = \cos(0) = 1$

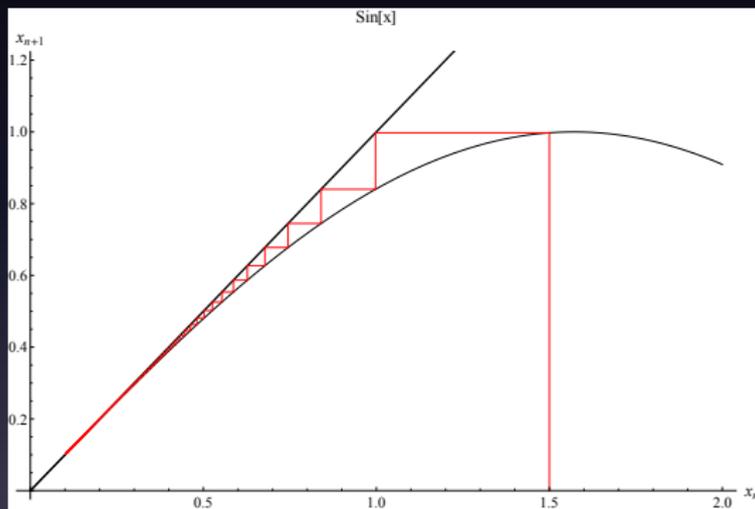
⇒ nicht linear analysierbar

# Cobweb - Beispiel 1

$x_{n+1} = \sin(x_n)$  hat Fixpunkt bei  $x^* = 0$

aber:  $f'(0) = \cos(0) = 1$

⇒ nicht linear analysierbar



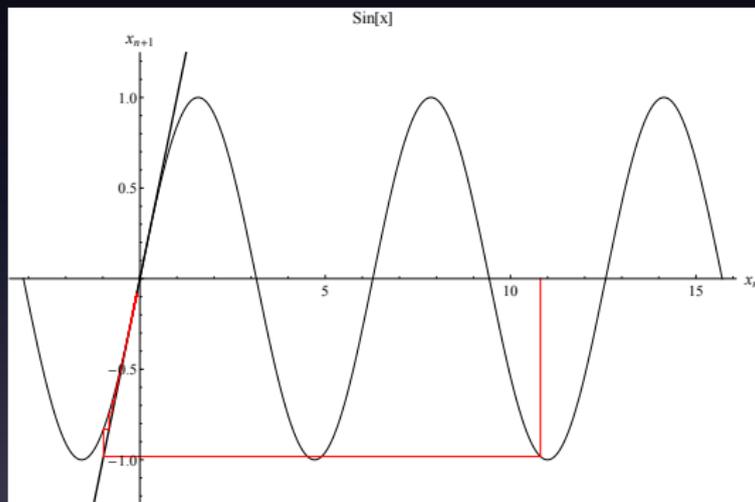
$\lambda > 0$

# Cobweb - Beispiel 1

$x_{n+1} = \sin(x_n)$  hat Fixpunkt bei  $x^* = 0$

aber:  $f'(0) = \cos(0) = 1$

⇒ nicht linear analysierbar



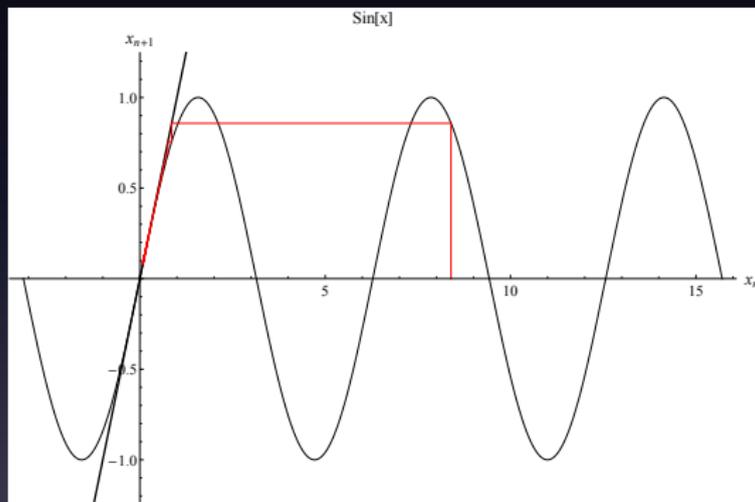
$$\lambda > 0$$

# Cobweb - Beispiel 1

$x_{n+1} = \sin(x_n)$  hat Fixpunkt bei  $x^* = 0$

aber:  $f'(0) = \cos(0) = 1$

⇒ nicht linear analysierbar



$$\lambda > 0$$

# Cobweb - Beispiel 2

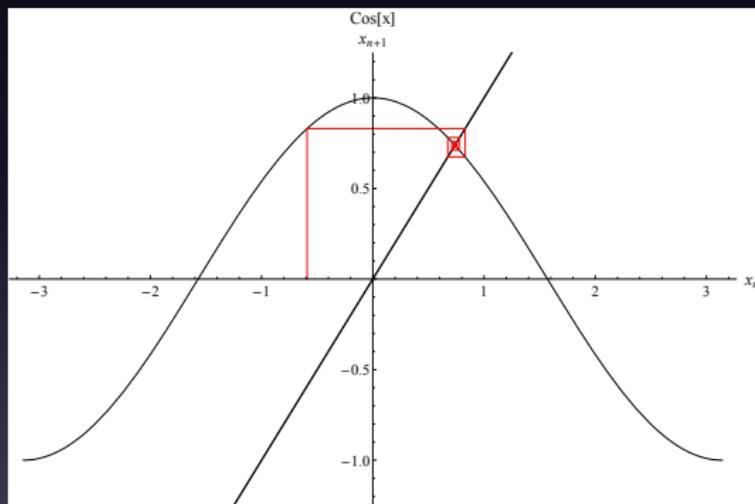
$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

# Cobweb - Beispiel 2

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$
$$x_n \rightarrow ? \text{ für } n \rightarrow \infty$$

# Cobweb - Beispiel 2

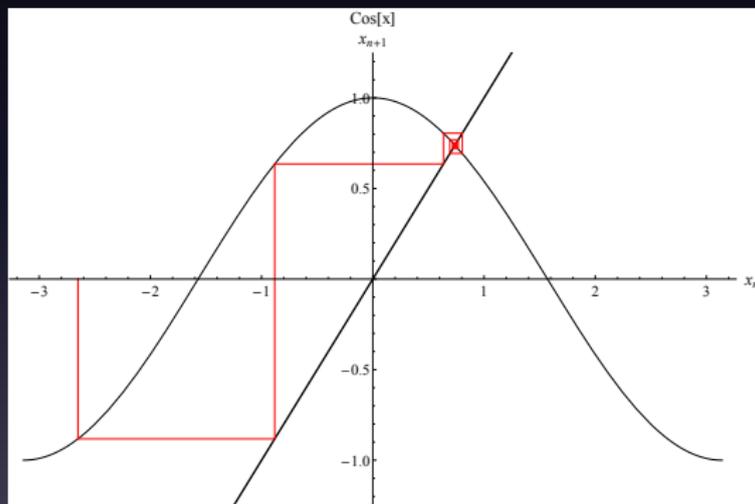
$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$



$$\lambda < 0$$

# Cobweb - Beispiel 2

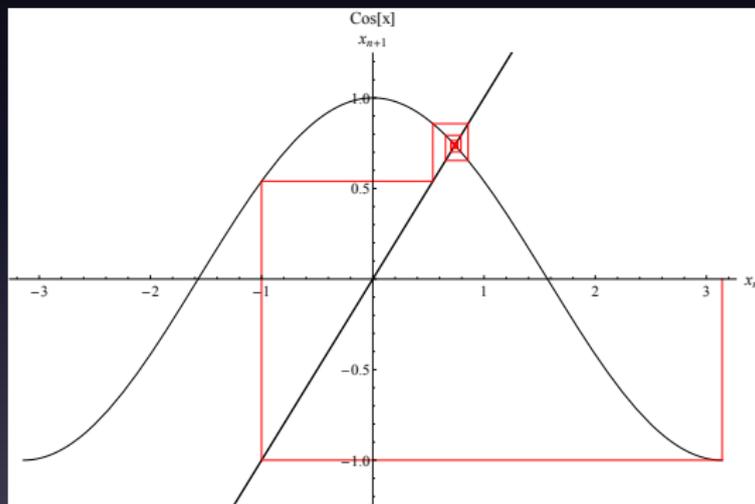
$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$



$$\lambda < 0$$

# Cobweb - Beispiel 2

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

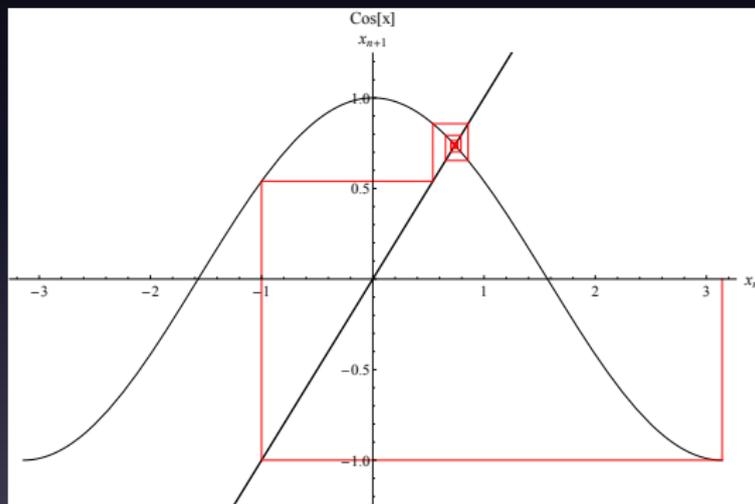


$$\lambda < 0$$

# Cobweb - Beispiel 2

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

$$x_n \rightarrow 0,739\dots$$



$$\lambda < 0$$

# Gliederung

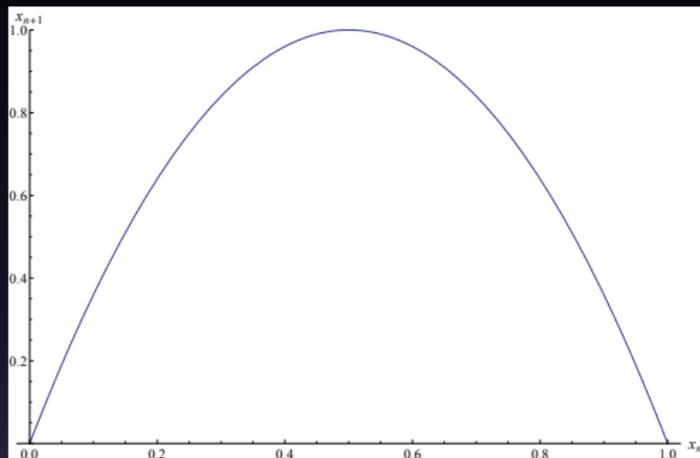
1. Motivation
2. Definition
3. Analyse von 1D-Abbildungen
  - Fixpunkte
  - Cobweb Plot
4. Logistische Abbildung
  - Definition
  - Periodizität
  - Liapunov Exponent
  - Universalität
5. Lorenz Map
6. Fazit

# Logistische Abbildung

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Analog zur logistischen Gleichung für Wachstum
- Diskrete Zeit
- $x_n \geq 0$  : Maß für die Population der n-ten Generation, dimensionslos
- $r \geq 0$  : Spezifische Wachstumsrate
- Wertebereich:  $0 \leq r \leq 4$  und  $0 \leq x \leq 1$

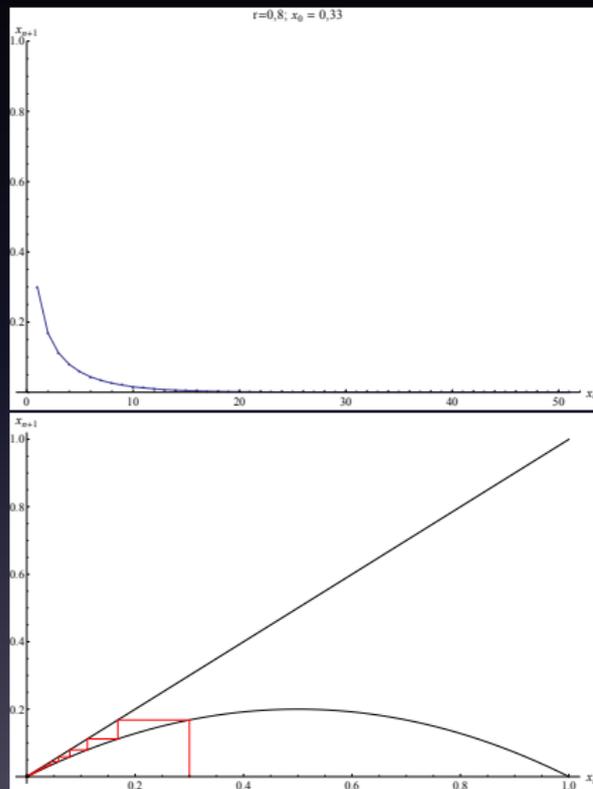
# Logistische Abbildung



Logistische Abbildung für  $r = 4$   
mit Maximum von  $r/4$  bei  $x = \frac{1}{2}$

# Verdopplung der Perioden

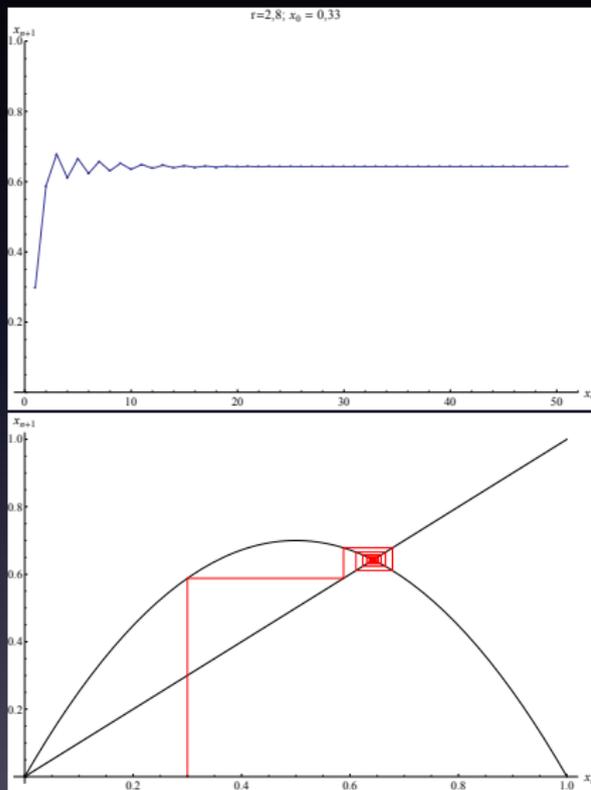
$$r < 1$$
$$x_n \rightarrow 0$$



# Verdopplung der Perioden

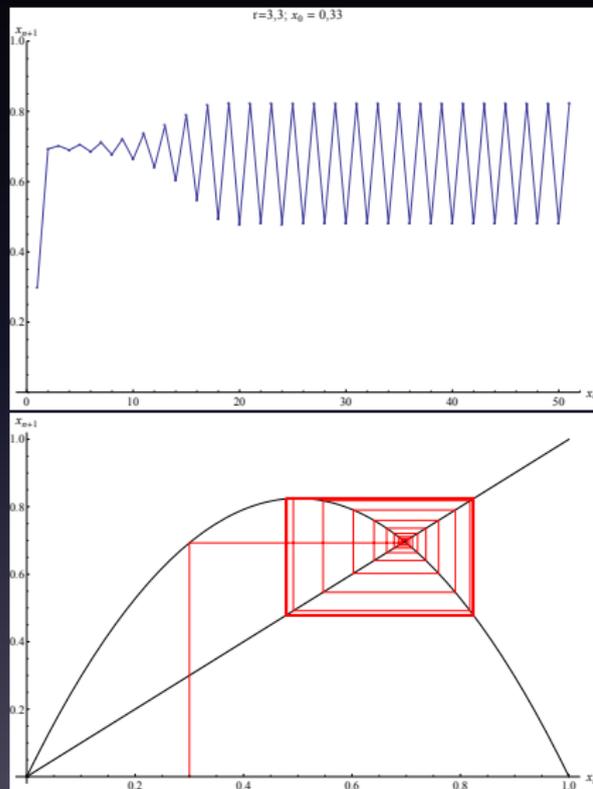
$$1 < r < 3$$

$$x_n \rightarrow x^*$$



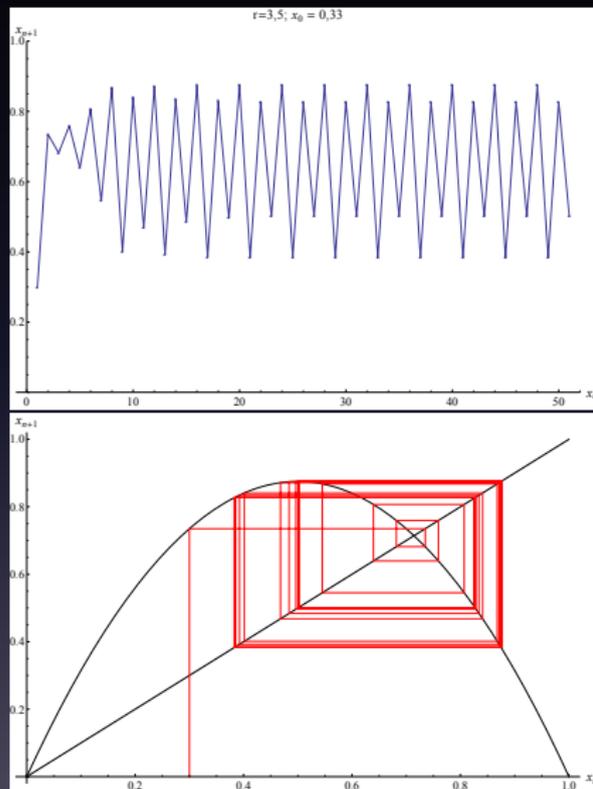
# Verdopplung der Perioden

- $r > 3$
- $x_n$  oszilliert zwischen 2 Werten
- ein 2-Zyklus hat sich gebildet



# Verdopplung der Perioden

- $r > 3$
- $x_n$  osziliert zwischen 4 Werten
- ein 4-Zyklus hat sich gebildet



# Verdopplung der Perioden

$r$	Perioden
3	2
3,449	4
3,54409	8
3,5644	16
3,56859	32
$\vdots$	$\vdots$
3.569946	$\infty$

$$0 \leq r \leq 4$$

# Chaos und periodische Fenster

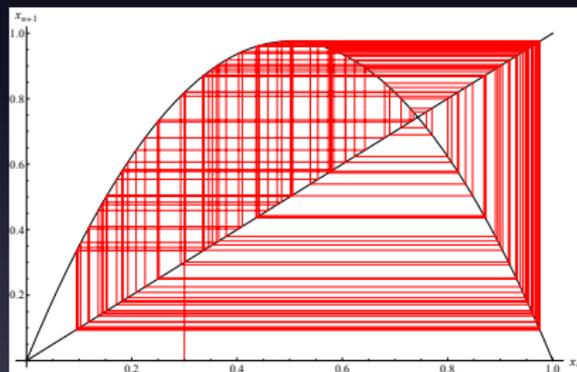
Was passiert für  $3,569946 < r \leq 4$ ?

# Chaos und periodische Fenster

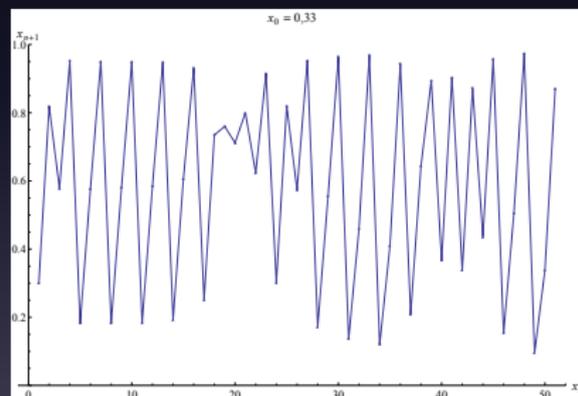
Was passiert für  $3,569946 < r \leq 4$ ?

Für die meisten  $r$ , keine Fixpunkte oder periodische Orbits

→ aperiodisches Verhalten.



Cobweb Plot  $r = 3,9$



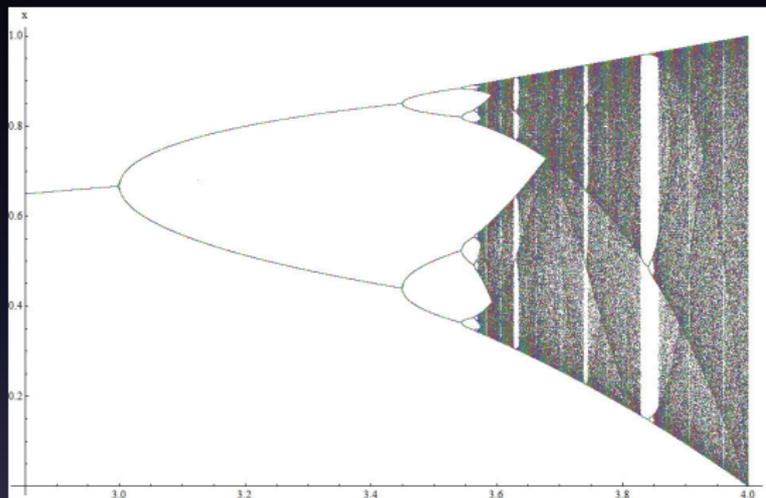
Logistische Abbildung  $r = 3,9$

# Chaos und periodische Fenster

Erstellung:

Plotte  $x_{301} - x_{600}$  für  
verschiedene  $r$  mit  
beliebiger  
Anfangsbedingung  
 $x_0$ .

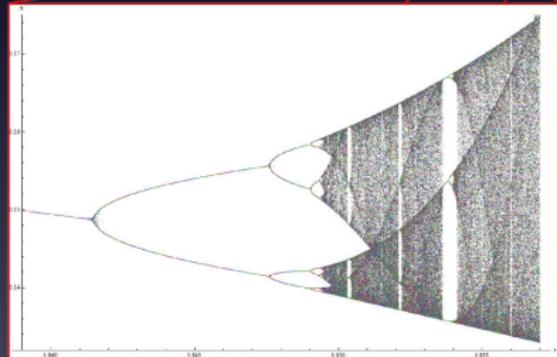
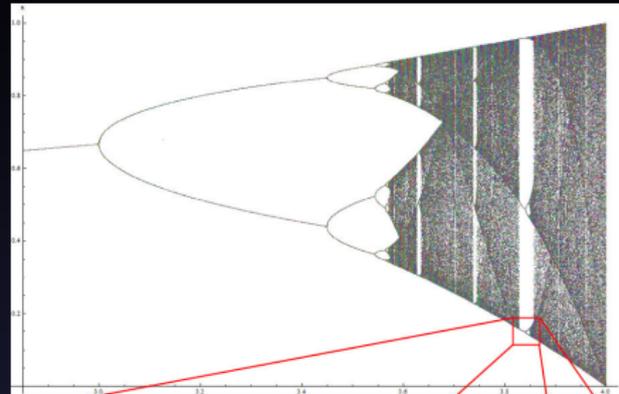
Die ersten 300  
Iterationen werden als  
Störung weg  
gelassen.



Orbit-Diagramm der Logistischen Abbildung

# Chaos und periodische Fenster

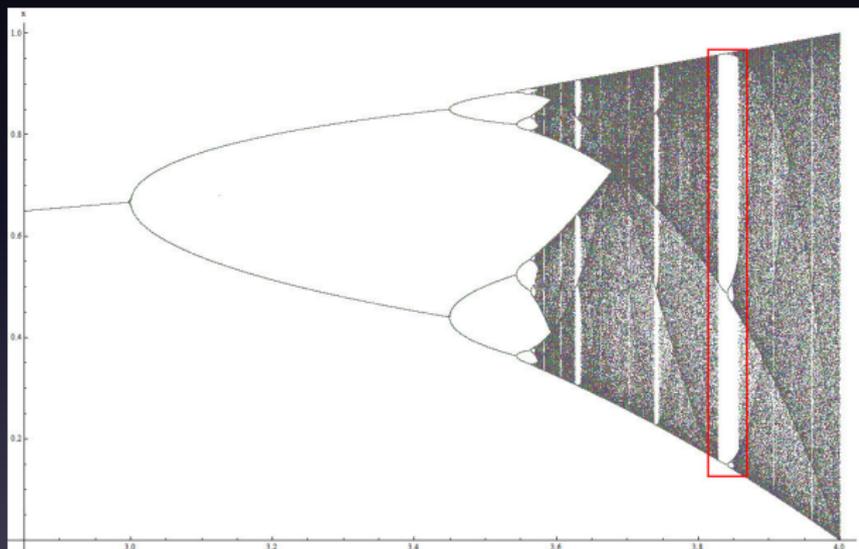
Die Abbildung reproduziert sich in periodischen abständen selber.



# Periodische Fenster

Wie entstehen periodische Fenster?

Betrachte 3-Zyklus bei  $3,8284 \leq r \leq 3,8415$



# Periodische Fenster

$$x_{n+3} = f^3(x) = f(f(f(x)))$$

$$f(a) = b; f(b) = c; f(c) = a \Rightarrow f^3(a) = a$$

Gesucht: Fixpunkte der dritten iterierten Abbildung

Analytisch schwer lösbar, daher Graphische Lösung:

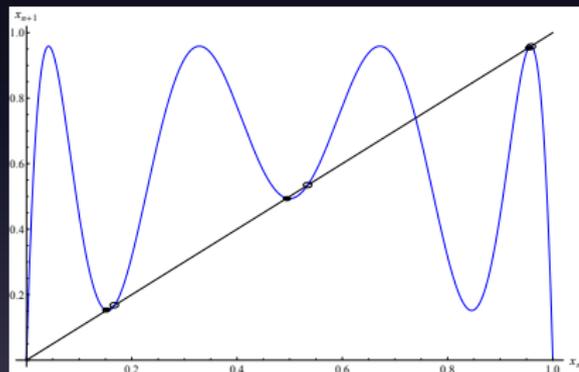
# Periodische Fenster

$$x_{n+3} = f^3(x) = f(f(f(x)))$$

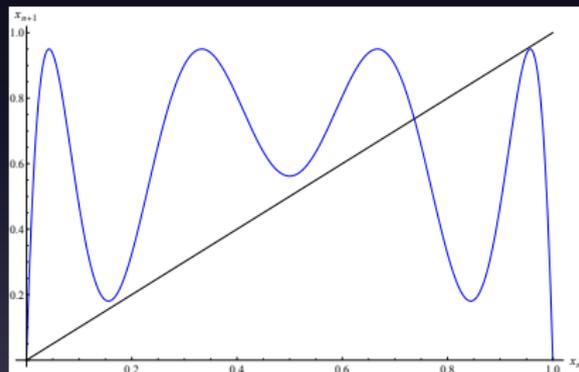
$$f(a) = b; f(b) = c; f(c) = a \Rightarrow f^3(a) = a$$

Gesucht: Fixpunkte der dritten iterierten Abbildung

Analytisch schwer lösbar, daher Graphische Lösung:



$f^3(x)$  für  $r = 3,835$



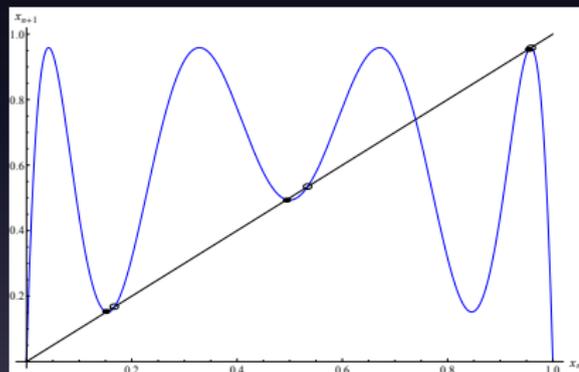
$f^3(x)$  für  $r = 3,8$

# Periodische Fenster

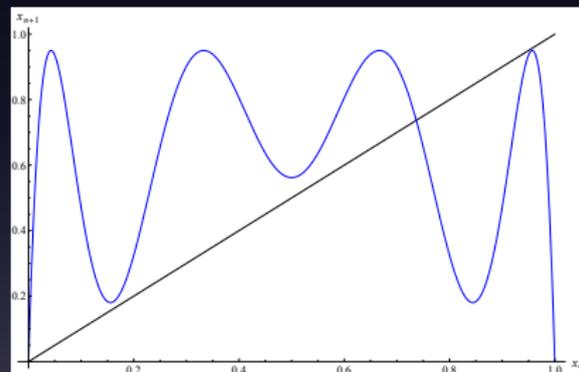
Zwischen  $r = 3,8$  und  $r = 3,835$  wird  $f^3(x)$  tangential

⇒ Sattelpunkt-Bifurkation

Exakt bei  $r = 1 + \sqrt{8} \approx 3,8284$



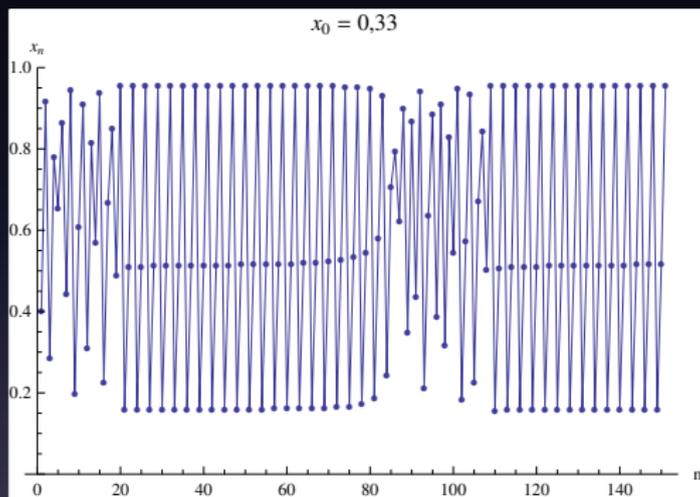
$f^3(x)$  für  $r = 3,835$



$f^3(x)$  für  $r = 3,8$

# Periodizität

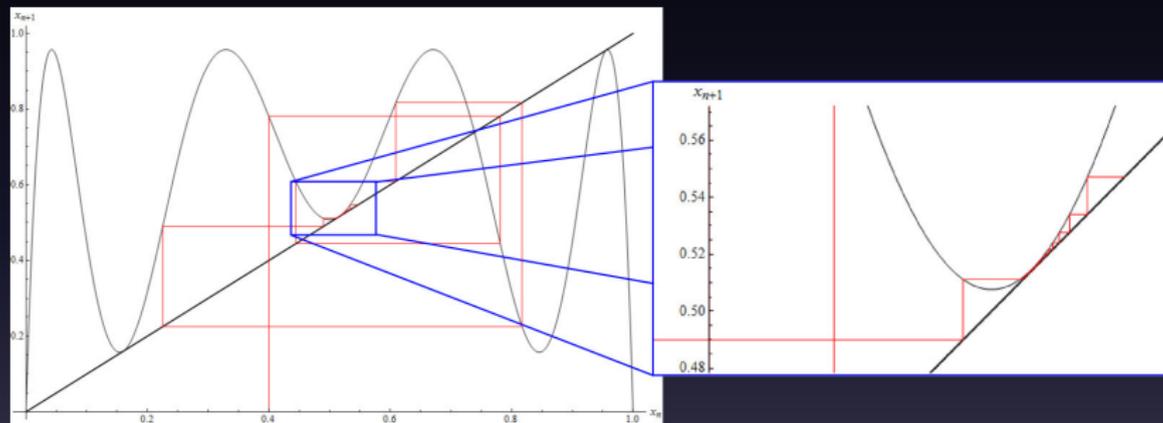
Für  $r$  etwas kleiner als  $1 + \sqrt{8}$  hat das System ein interessantes Verhalten.



Logistische Abbildung  $r = 3,8282$

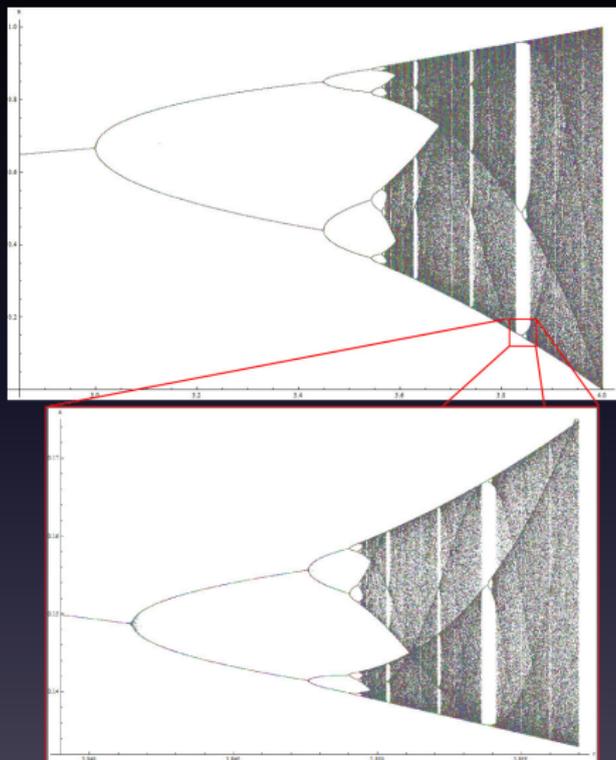
# Periodizität

Für  $r$  etwas kleiner als  $1 + \sqrt{8}$  hat das System ein interessantes Verhalten.



Cobweb Plot für  $f^3(x)$   $r = 3,8282$

# Perioden-Dopplung in den Fenstern



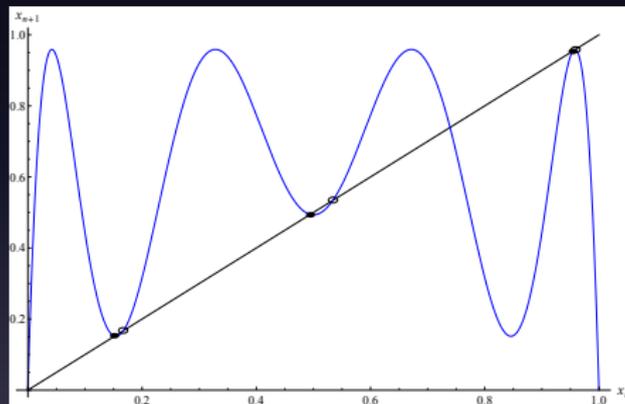
Orbit-Diagramm der Logistischen Abbildung

# Perioden-Dopplung in den Fenstern

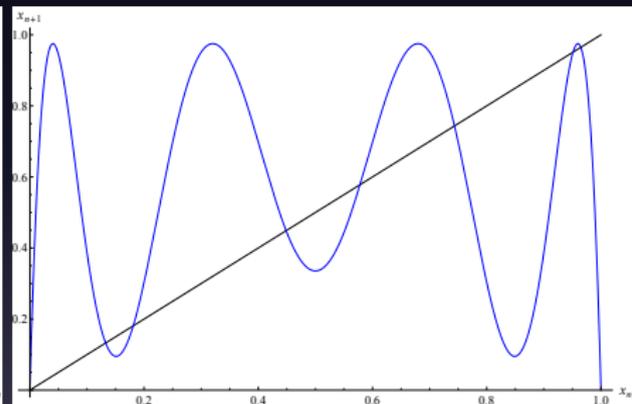
Wird  $r$  erhöht ändert sich  $(f^3)'(x)$ .

Erreicht die Steigung  $\pm 1$  entsteht eine Flip-Bifurkation

$\Rightarrow$  Verdopplung der Perioden



$r = 3.835$



$r = 3.9$

# Liapunov Exponent

Anfangsbedingung:  $x_0$

Punkt neben der Anfangsbedingung:  $x_0 + \delta_0$

Nach n Iterationen:  $|\delta_n| \approx |\delta_0|e^{n\lambda}$

$\lambda$  bezeichnet den Liapunov Exponenten

$$\lambda = \begin{cases} < 0 & \text{stabil} \\ > 0 & \text{instabil} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Positive  $\lambda$  sind ein Zeichen für Chaos.

$\lambda$  kann wie folgt berechnet werden:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}$$

# Liapunov Exponent

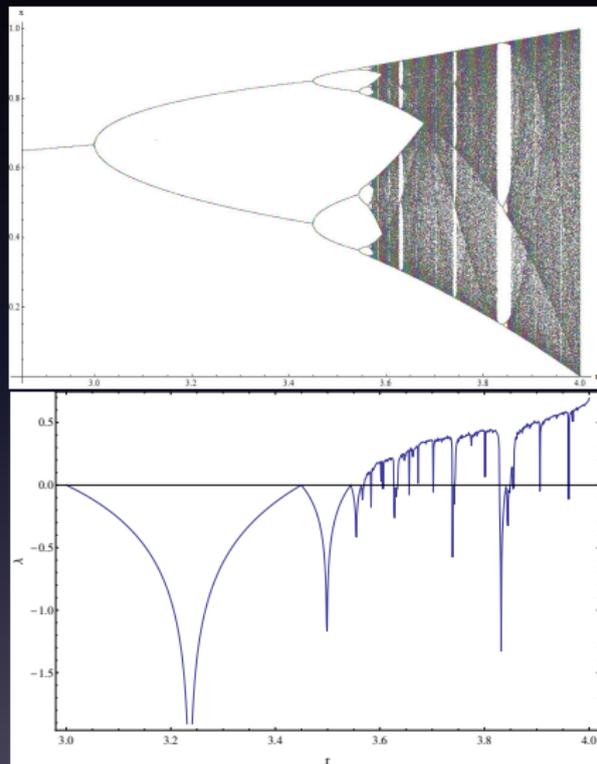
Erstellung:

Berechne  $x_n$  für 10.000 Iterationen. Einsetzen in  $\ln|f'(x_n)| = \ln|r - 2x_n|$  und der Summe hinzufügen.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|r - 2x_n| \right\}$$

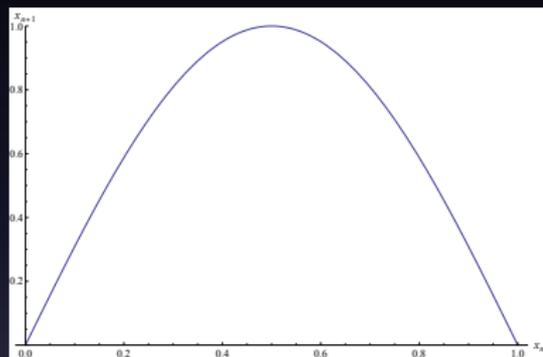
Die ersten 300  $x_n$  werden vernachlässigt.

Orbit-Diagramm (Oben) und Liapunov Exponent (Unten) der logistischen Abbildung

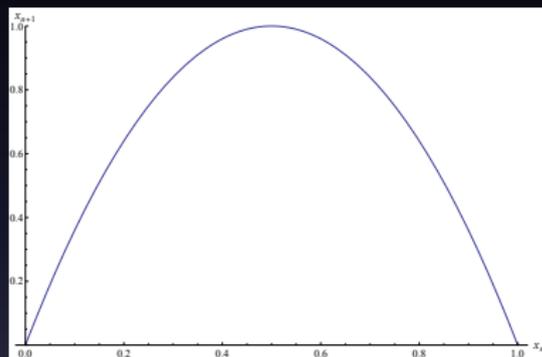


# Universalität

$$x_{n+1} = r \sin(\pi x_n)$$



$$x_{n+1} = r \sin(\pi x_n) \text{ für } r = 1$$

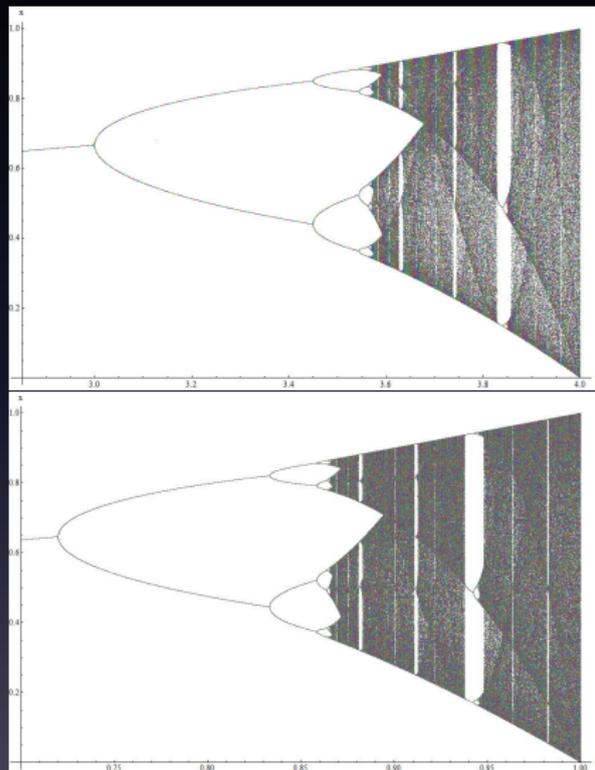


$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \text{ für } r = 4$$

Unimodale Abbildung: konkav, nur ein Maximum

# Universalität

Orbit-Diagramme für  
 $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  (Oben)  
und  
 $x_{n+1} = r \sin(\pi x_n)$  (Unten)



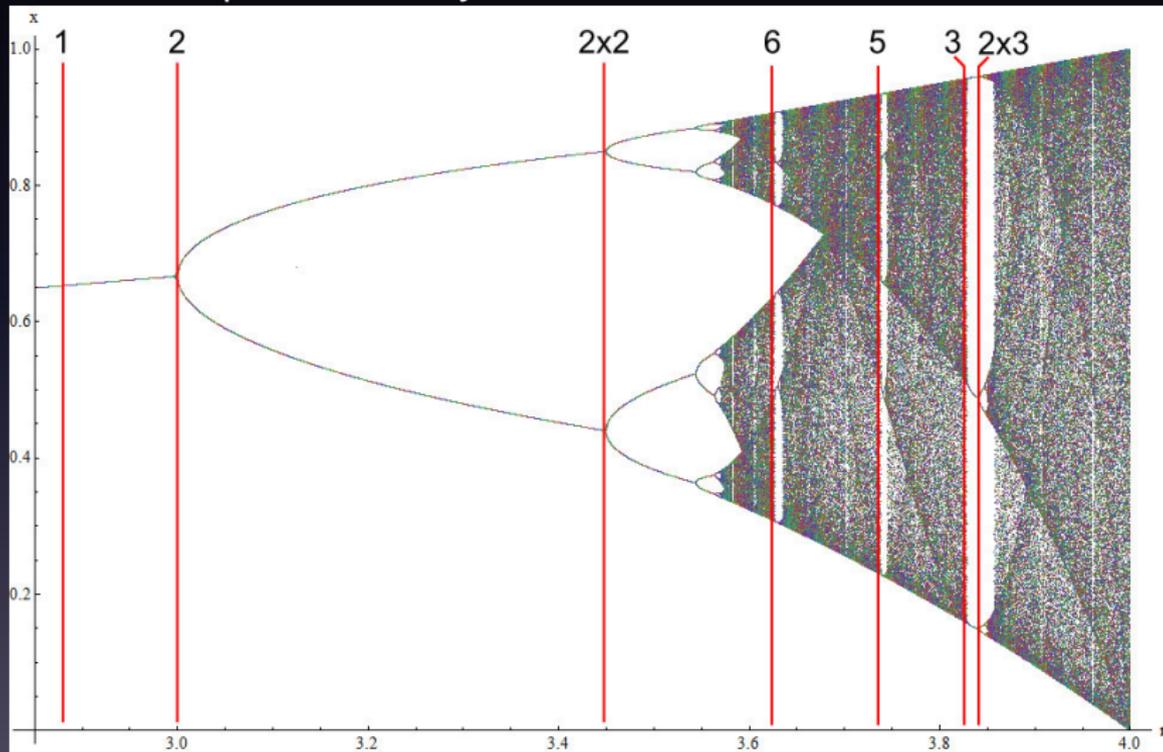
# Universalität

Für unimodalen Abbildungen der Form  $x_{n+1} = r f(x_n)$  mit  $f(0) = f(1) = 0$  gilt:

- Die Reihenfolge stabiler Lösungen ist unabhängig von der unimodalen Funktion
- Die Reihenfolge der periodischen attraktoren ist immer die gleiche: U-Sequenz

# Universalität

U-Sequenz bis 6-Zyklus: 1,2,2x2,6,5,3,2x3



# Universalität

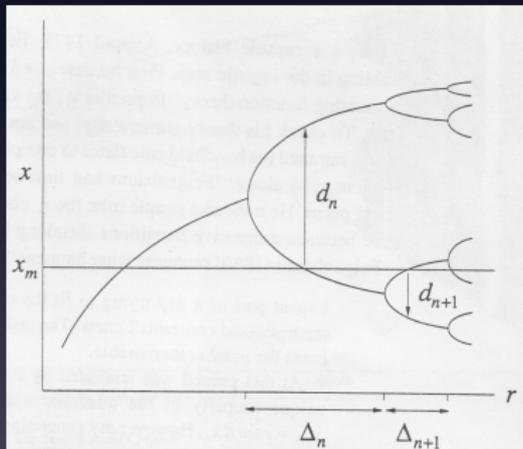
Feigenbaum-Konstanten:

Abstand benachbarter Perioden konvergiert:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \approx 4,669$$

Ähnlicher Skalierungsfaktor für die Breite der Gabelungen:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} \approx -2,5029$$



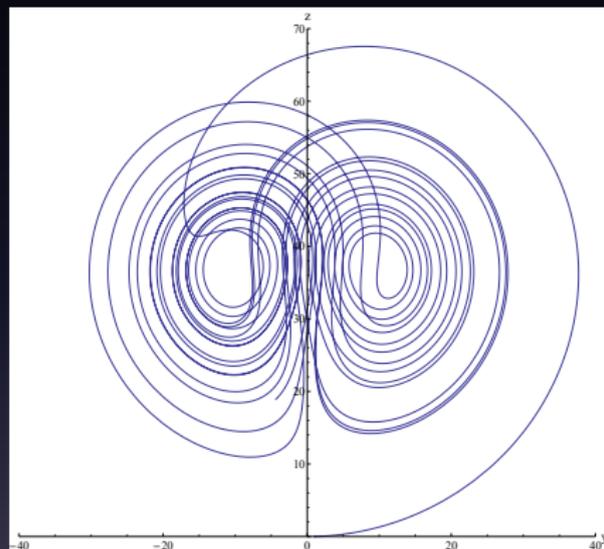
Entnommen aus Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos Kap.10

# Gliederung

1. Motivation
2. Definition
3. Analyse von 1D-Abbildungen
  - Fixpunkte
  - Cobweb Plot
4. Logistische Abbildung
  - Definition
  - Periodizität
  - Liapunov Exponent
  - Universalität
5. Lorenz Map
6. Fazit

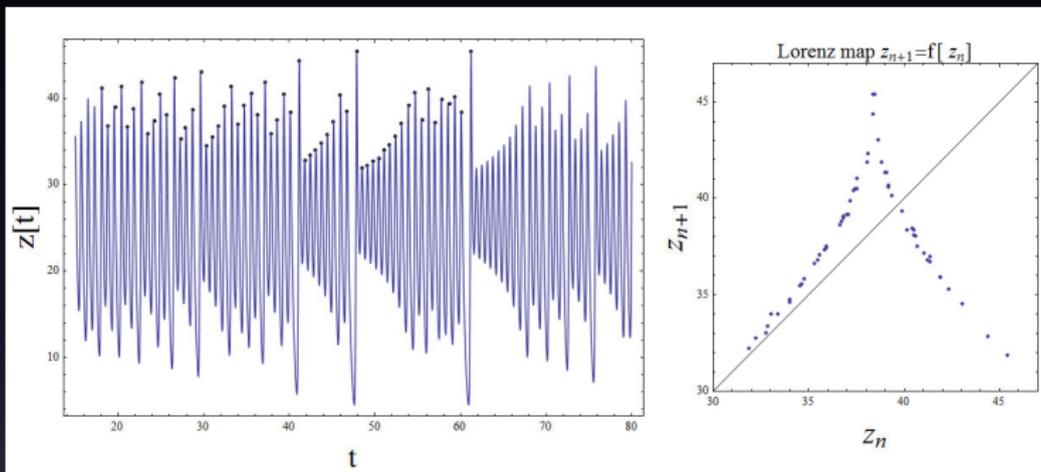
# Lorenz Map

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) & \sigma &= 10 \\ \dot{y} &= rx - y - xz & b &= \frac{8}{3} \\ \dot{z} &= xy - bz & r &= 38\end{aligned}$$



Lorenz-Attraktor  
(2D-Projektion)

# Lorenz Map



Lorenz Map

$|f'(z)| > 1 \Rightarrow$  keine stabilen Grenzzykel

# Gliederung

1. Motivation
2. Definition
3. Analyse von 1D-Abbildungen
  - Fixpunkte
  - Cobweb Plot
4. Logistische Abbildung
  - Definition
  - Periodizität
  - Liapunov Exponent
  - Universalität
5. Lorenz Map
6. Fazit

# Fazit

- 1D-Abbildungen sind trotz simpler Funktionen sehr chaotisch
- Sie eignen sich gut für die Analyse von dynamischen Systemen

Vielen dank für ihre Aufmerksamkeit!

Literatur:

Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos Kap.9-10