Das Dreikörperproblem

Proseminar Theoretische Physik

Alexander Müller

02.07.2014

Gliederung

- **Allgemeines**
- **Circular Restricted Problem**
- **Stabilität im allgemeinen Dreikörperproblem**
- **Periodische Lösungen**

Motivation

Problem:

Bewegung dreier Punktmassen unter Gravitationsgesetz

- System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}, \qquad U = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|}, \qquad U = -V$$

Im Allgemeinen nicht analytisch lösbar

- Näherungen, qualitative Untersuchungen

Anwendung:

Untersuchung von Planetenbahnen, Positionierung von Satelliten

Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Gleichungen invariant unter:

- Zeittranslationen
- Boosts
- Translationen, Rotationen

Erhaltungsgrößen:

- Die (hamiltonsche) Gesamtenergie $H = \frac{1}{2} \| y \|^2 - U(x)$
- Der Gesamtimpuls $P = \sum_{1 \le i \le p} m_i \dot{\vec{r}}_i$
- Der Gesamtdrehimpuls $C = \sum_{1 \le i \le 3} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$

Mit $y = \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}}_1 \\ \dot{\vec{r}}_2 \\ \dot{\vec{r}}_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix}$

Homographische Lösungen

Zentralkonfiguration:

Eine Konfiguration x heißt zentral, wenn jeder Massenpunkt eine zum Schwerpunkt wirkende Kraft erfährt.

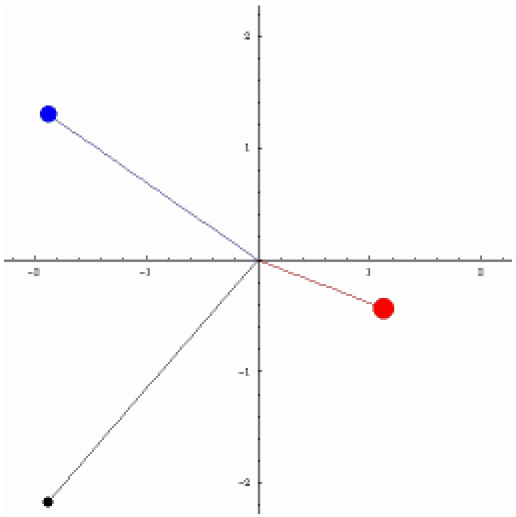
$$\Rightarrow \quad \sum_j m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|^3} = \lambda\left(\vec{r}_i - \vec{r}_s\right), \qquad \vec{r}_s \equiv Schwerpunkt\,, \qquad \lambda < 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_j m_j \left(\frac{1}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right|^3} + \frac{\lambda}{M} \right)\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right) = 0, \qquad M \equiv Gesamtmasse$$

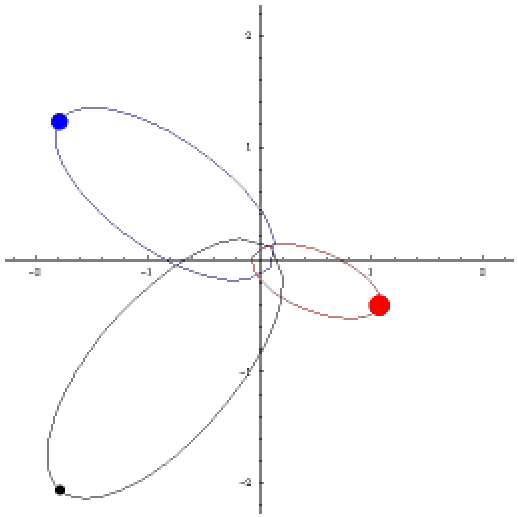
- Bei einer nicht kollinearen Konfiguration bilden die Massenpunkte für alle festen Zeiten t gleichseitige Dreiecke.

Homographische Lösungen

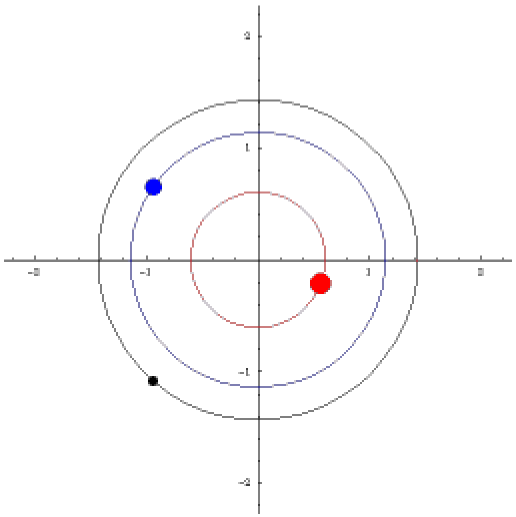
- Für Zentralkonfigurationen gibt es exakte Lösungen und es gilt
  - Massenpunkte bewegen sich auf Keplerbahnen
  - Exzentritäten ϵ aller Bahnen für eine Lösung gleich



$\epsilon=1$



$\epsilon=0.9$



$\epsilon=0$

Gestörtes Zweikörperproblem

Koordinatentransformation

$$X_0 = x_0, \quad X_j = x_j - x_0, \quad Y_0 = y_0 + \mu y_1 + \mu y_2, \quad Y_j = y_j, \quad j = 1,2 \quad (Poincaré)$$

Hamiltonfunktion transformiert zu

$$H = \sum_{1 \le j \le 2} \left(\frac{\|Y_J\|^2}{2\tilde{m}_j} - \frac{\tilde{m}_j M_j}{\|X_j\|} \right) + \mu \left(\frac{Y_1 Y_2}{m_0} - \frac{m_1 m_2}{\|X_1 - X_2\|} \right) = H_0 + \mu R, \quad M_j = m_0 + \mu m_j, \quad \tilde{m}_j = \frac{m_0 m_j}{M_j}$$

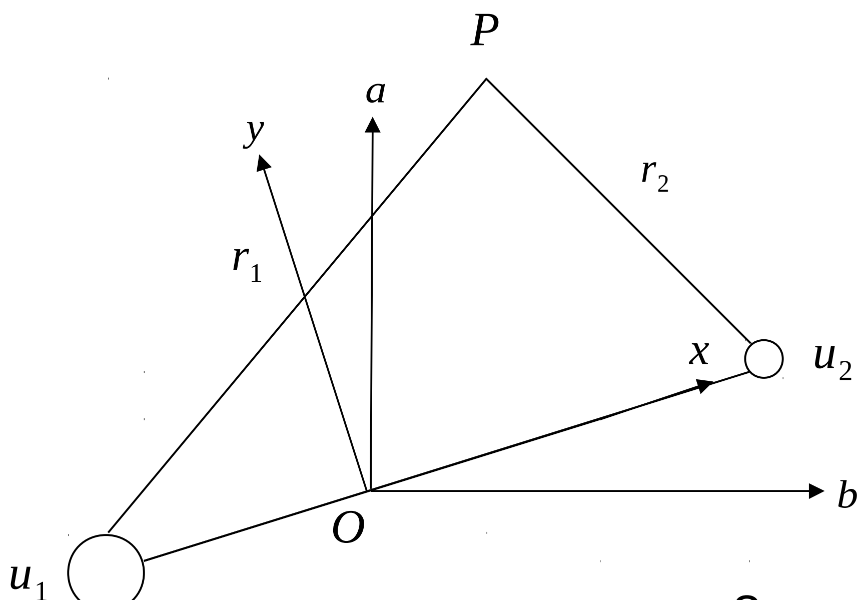
für Massen $m_0, \ \mu m_1, \ \mu m_2$ und $Y_0 = 0$

- Zwei ungekoppelte Keplerprobleme mit einer Störung

Circular Restricted Problem

- Störung wird vor allem für $m_0 \gg \mu m_j\,, \quad j=1,2$ analysiert
  - Problem: Sonne-Planet-Planet
  - Im Grenzfall $m_2 \rightarrow 0$ wird z.B. Sonne-Erde-Mond betrachtet
  - Circular Restricted Problem

- Man wählt folgendes Koordinatensystem:



$$O \equiv Ursprung \equiv Schwerpunkt$$
$$u_1 = Gm_1\,, \quad u_2 = Gm_2$$

Positionen der großen Massen m_1, m_2:

$$\vec{r}_{m1} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{r}_{m2} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1^{\,2} = (x + u_2)^2 + y^2\,, \quad r_2^{\,2} = (x - u_1)^2 + y^2$$

Jacobi Konstante und Hill Region

- Bewegung von $m_3 \equiv 0$ soll analysiert werden
  - Annahme: Bewegung von m_1, m_2 zirkular, System rotiert mit
  - Feste Position

- Gesamtenergie ist konstant
  - Region konstanter Energie
  - algebraische Gleichung
  - Jacobi Konstante C_j

Jacobi Konstante und Hill Region

Herleitung der Jacobi Konstante:

Beschleunigung im festen System:

$$\ddot{a} = u_1 \frac{a_1 - a}{r_1^{\,3}} + u_2 \frac{a_2 - a}{r_2^{\,3}} \quad (1), \quad \ddot{b} = u_1 \frac{b_1 - b}{r_1^{\,3}} + u_2 \frac{b_2 - b}{r_2^{\,3}} \quad (2)$$

Wechsel zwischen festen und rotierenden Koordinaten erfolgt durch Drehung

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) \\ \sin(nt) & \cos(nt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) \\ \sin(nt) & \cos(nt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\,\dot{y} - n^2 x \\ \ddot{y} + 2n\,\dot{x} - n^2 y \end{pmatrix} \quad (4)$$

Jacobi Konstante und Hill Region

- Einsetzen von $\ddot{a}$, $\ddot{b}$ und $r_1^2 = (x + u_2)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - u_1)^2 + y^2$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} - 2\mathrm{n}\,\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (5), \qquad \ddot{y} + 2\mathrm{n}\,\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (6)$$

mit $$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{u_1}{r_1} + \frac{u_2}{r_2}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}\,\ddot{x} + \dot{y}\,\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\dot{y} = \frac{dU}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\mathrm{U} - C_j$$

Jacobi Konstante und Hill Region

Also folgt

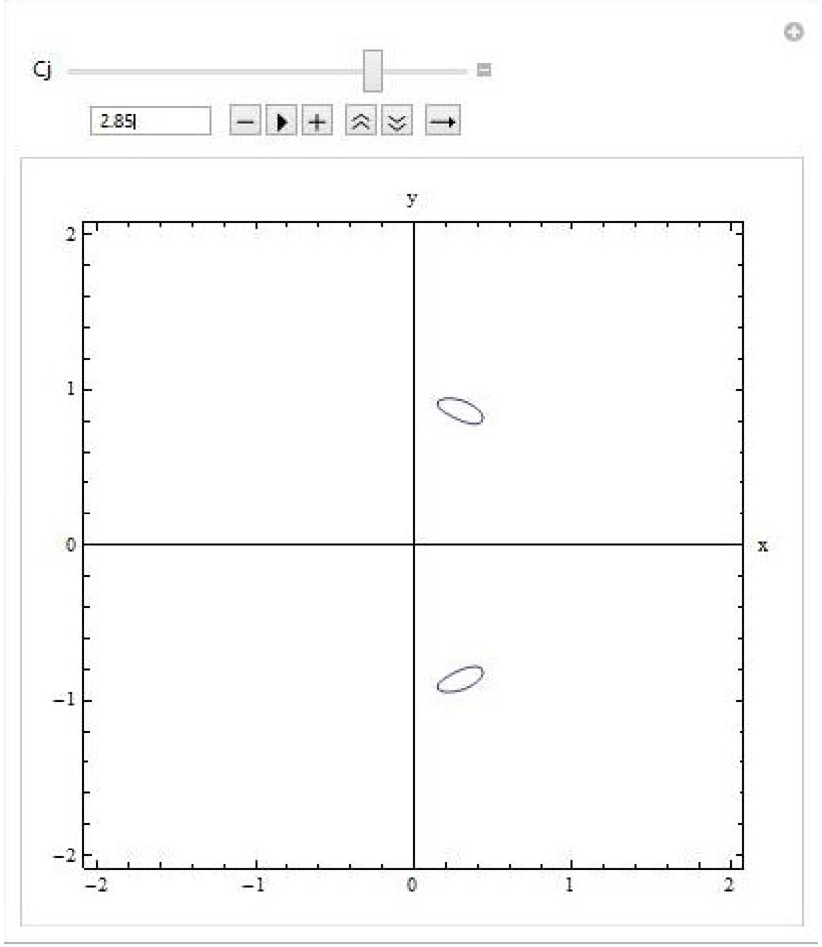
$$C_j = 2\mathrm{U} - v^2 = n^2\left(x^2 + y^2\right) + 2\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

- Definiert Hill Region (außerhalb dieser keine Bewegung möglich)
- Bestimmung der Begrenzung der Region: $\dot{x} = \dot{y} = 0$

$$\overset{\dot{x}=\dot{y}=0}{\Rightarrow} \qquad C_j = n^2\left(x^2 + y^2\right) + 2\left(\frac{u_1}{r_1} + \frac{u_2}{r_2}\right)$$

Jacobi Konstante und Hill Region

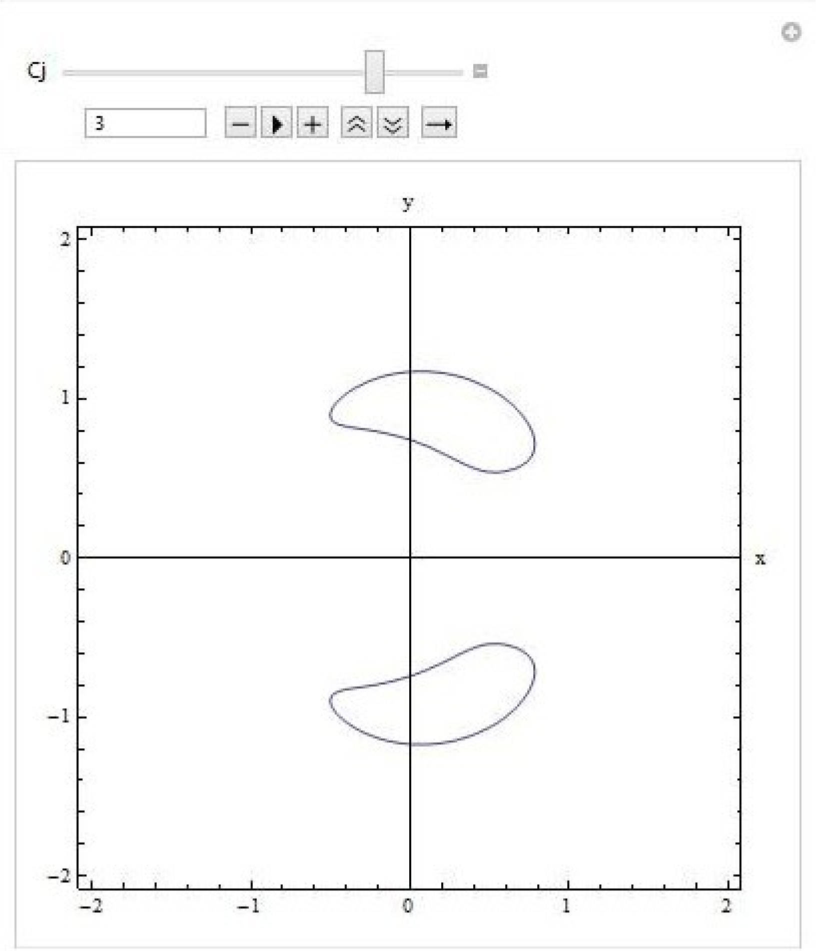
Die Hill Region für unterschiedliche Werte der Jacobi Konstante:



$C_j = 2.85$

Jacobi Konstante und Hill Region

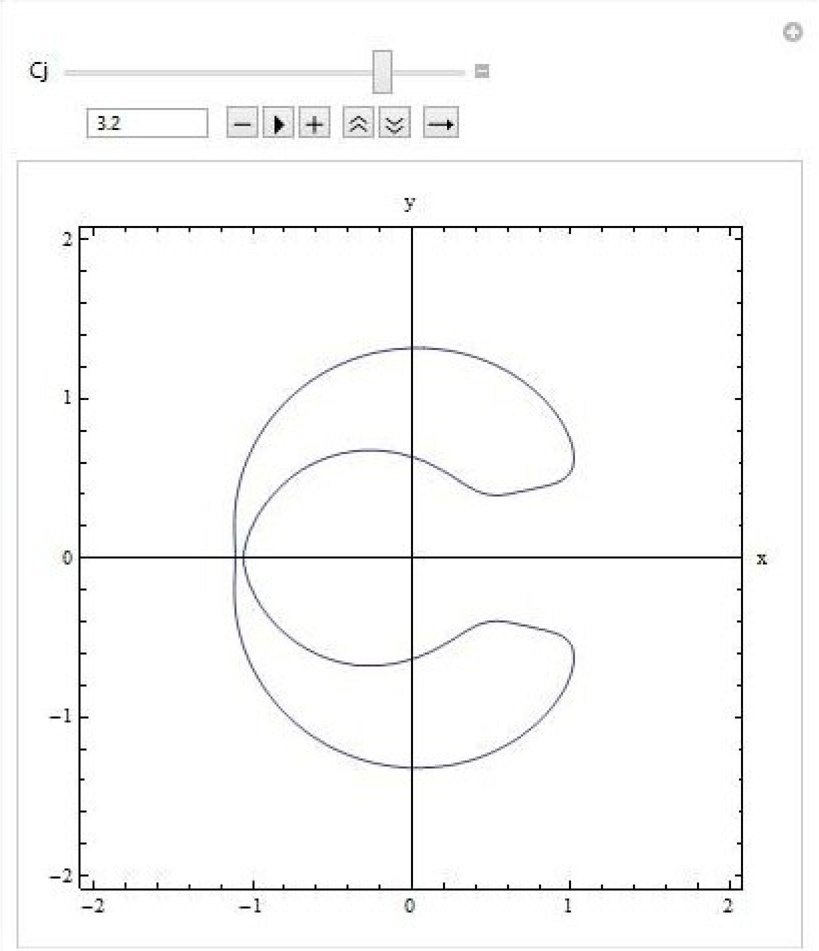
Die Hill Region für unterschiedliche Werte der Jacobi Konstante:



$C_j = 3$

Jacobi Konstante und Hill Region

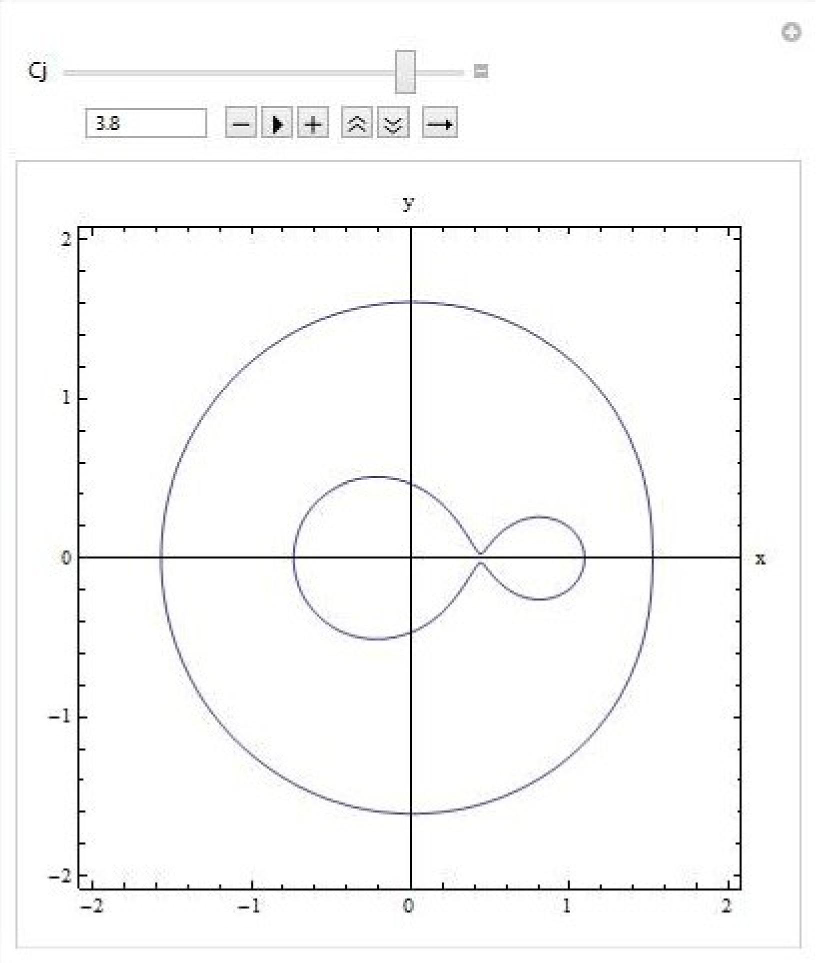
Die Hill Region für unterschiedliche Werte der Jacobi Konstante:



$C_j = 3.2$

Jacobi Konstante und Hill Region

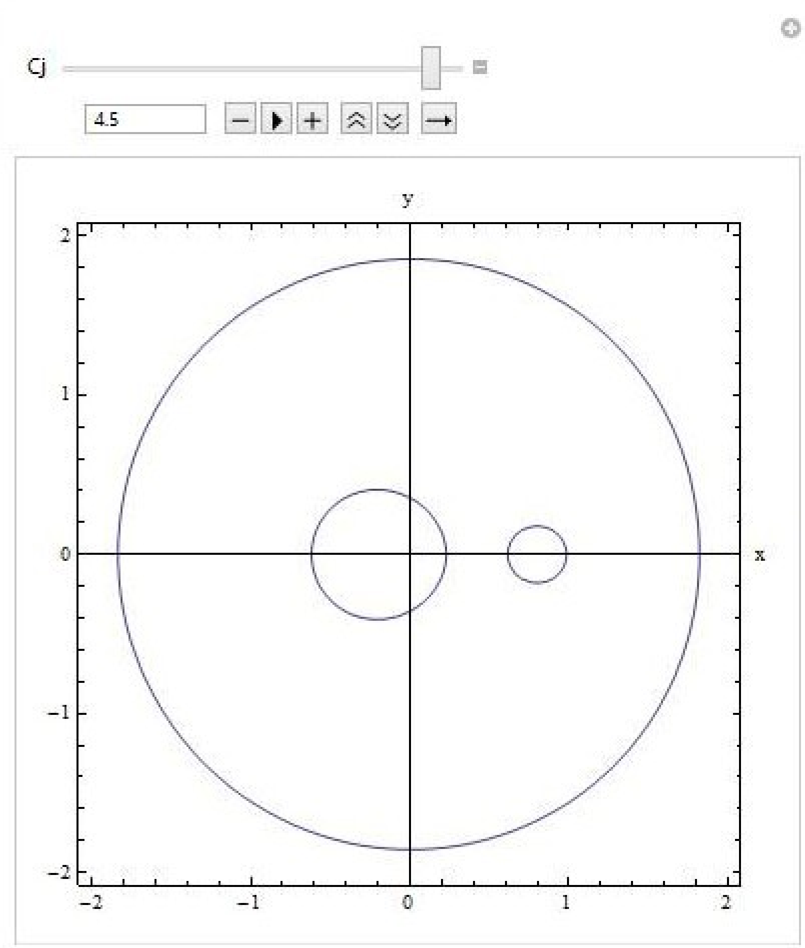
Die Hill Region für unterschiedliche Werte der Jacobi Konstante:



$C_j = 3.8$

Jacobi Konstante und Hill Region

Die Hill Region für unterschiedliche Werte der Jacobi Konstante:



$C_j = 4.5$

Equilibrien und Stabilität

Nun sollen die Equilibrien des Systems berechnet werden

$$\dot{x}=\ddot{x}=\dot{y}=\ddot{y}=0$$

Setze $u_1+u_2=1$

Ausgedrückt durch die Radien r_1, r_2 ergibt sich für U

$$U=u_1\left(\frac{1}{r_1}+\frac{r_1^2}{2}\right)+u_2\left(\frac{1}{r_2}+\frac{r_2^2}{2}\right)-\frac{1}{2}u_1u_2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}-2\mathrm{n}\,\dot{y}=0=\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \ddot{y}+2\mathrm{n}\,\dot{x}=0=\frac{\partial U}{\partial y}$$

Equilibrien und Stabilität

Also

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial y}=0$$

Nach Ausrechnen der Ableitungen:

$$u_1\left(-\frac{1}{r_1^2}+r_1\right)\frac{x+u_2}{r_1}+u_2\left(-\frac{1}{r_2^2}+r_2\right)\frac{x-u_1}{r_2}=0 \quad (7)$$

$$u_1\left(-\frac{1}{r_1^2}+r_1\right)\frac{y}{r_1}+u_2\left(-\frac{1}{r_2^2}+r_2\right)\frac{y}{r_2}=0 \quad (8)$$

Equilibrien und Stabilität

Und damit

$$\Leftrightarrow \quad u_1\left(-\frac{1}{r_1^2}+r_1\right)=0, \qquad u_2\left(-\frac{1}{r_2^2}+r_2\right)=0 \qquad (y\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}-u_2, \qquad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad L_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-u_2\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}, \quad L_5=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-u_2\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

Diese Equilibrien bilden die Spitzen zweier gleichschenkliger Dreiecke.

Equilibrien und Stabilität

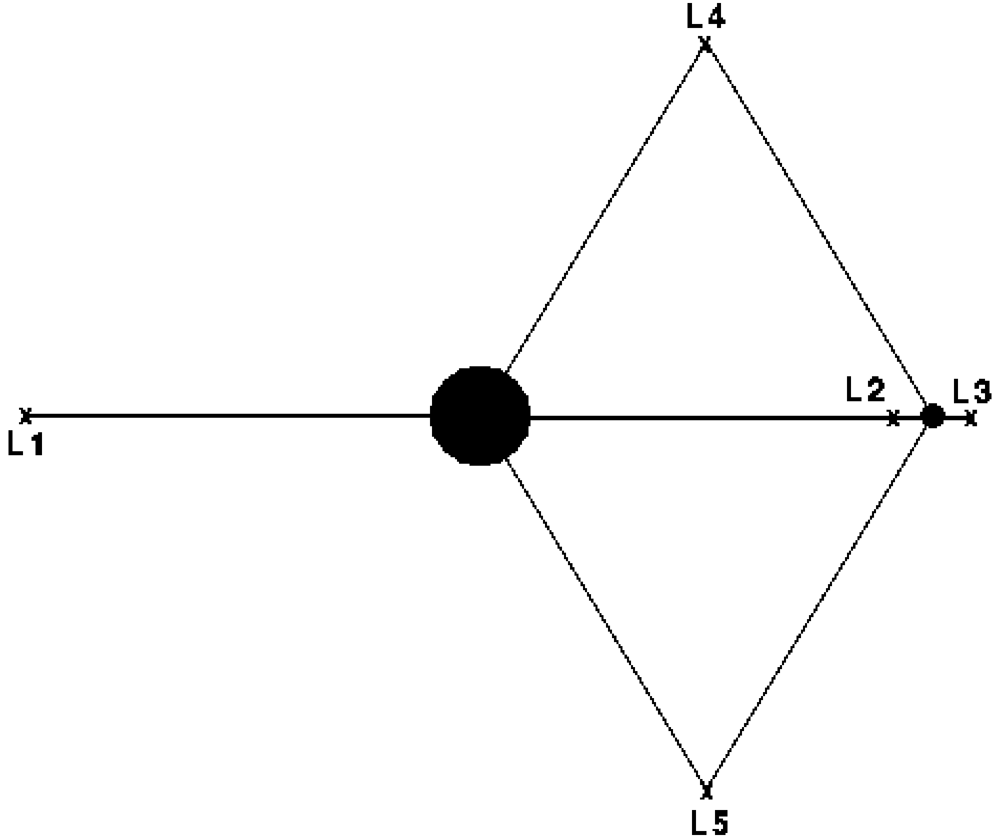
Für $y=0$ ergibt sich

$$r_2=\alpha-\frac{1}{3}\alpha^2-\frac{1}{9}\alpha^3-\frac{23}{81}\alpha^4+o(\alpha^5),\qquad \alpha=\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{\frac{1}{3}},\qquad r_1=1-r_2\qquad (L_1)$$

$$r_2=\alpha+\frac{1}{3}\alpha^2-\frac{1}{9}\alpha^3-\frac{31}{81}\alpha^4+O(\alpha^5),\qquad r_1=1+r_2\qquad (L_2)$$

$$r_1=1+\beta,\qquad r_2=2+\beta,\qquad \beta=\frac{7}{12}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)+\frac{7}{12}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2-\frac{13223}{20736}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^3+O\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^4\qquad (L_3)$$

Equilibrien und Stabilität



Equilibrien und Stabilität

Überprüfung auf lineare Stabilität

- Betrachtung von linearisiertem U
- Bewegung in kleiner Umgebung der Equilibrien

$\Rightarrow \qquad x = x_{L4} + \delta x, \qquad y = y_{L4} + \delta y$

$$\delta \ddot{x} - 2n\,\delta \dot{y} = \delta x \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{L4} + \delta y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} \right)_{L4}$$

$$\delta \ddot{y} + 2n\,\delta \dot{x} = \delta x \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} \right)_{L4} + \delta y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{L4}$$

Equilibrien und Stabilität

Bewegungsgleichungen in Matrixdarstellung

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\ddot{x} \\ \delta\ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xxL4} & U_{xyL4} & 0 & 2\mathrm{n} \\ U_{xyL4} & U_{yyL4} & -2\mathrm{n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \end{pmatrix}$$

Stabilität soll in Abhängigkeit der Massen analysiert werden

- Konvention $G(m_1 + m_2) = 1$ aufgehoben

Equilibrien und Stabilität

Für die Ableitungen ergibt sich

$$U_{xxL4}=\frac{1}{4}\frac{G(m_1+m_2)}{r_1^3}-n^2,\quad U_{yyL4}=\frac{5}{4}\frac{G(m_1+m_2)}{r_1^3}-n^2,\quad U_{xyL4}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}K\frac{G(m_1+m_2)}{r_1^3},\quad K=\pm\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4}n^2 & -\frac{3\sqrt{3}}{4}Kn^2 & 0 & 2\mathrm{n} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}Kn^2 & -\frac{9}{4}n^2 & -2\mathrm{n} & 0 \end{pmatrix}$$

Equilibrien und Stabilität

Es ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda = \pm i \frac{n}{2} \sqrt{\left(2 - \sqrt{\left(27K^2 - 23\right)}\right)}, \qquad \sigma = \pm i \frac{n}{2} \sqrt{\left(2 + \sqrt{\left(27K^2 - 23\right)}\right)}$$

Forderung: Eigenwerte imaginär

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{m_1}{m_2} \geq \frac{25 + 3\sqrt{69}}{2}$$

L_4 und L_5 sind also nur stabil, wenn die eine Masse wesentlich größer ist als die andere!

Equilibrien und Stabilität

Analog für die anderen Equilibrien

$$\lambda = \pm n\sqrt{(1+2\sqrt{7})}, \qquad \sigma = \pm i\, n\sqrt{(2\sqrt{7}-1)} \qquad (L_{1,}\, L_2)$$

$$\lambda = \pm n\sqrt{\frac{3\mathrm{m}_1}{8\mathrm{m}_2}}, \qquad \sigma = \pm i\, n\sqrt{7} \qquad (L_3)$$

- Es kommt jeweils ein positiver Eigenwert vor
- Die Equilibrien auf der x-Achse sind dynamisch instabil

Stabilität im allgemeinen Problem

Dritte Masse ist nicht mehr vernachlässigbar klein

- Unterscheidung zwischen Arten von Stabilität
- Hill- Stabilität
- Sundman- Stabilität

Hill- und Sundmann- Stabilität

Eine Masse m_i heißt Hill- stabil, falls

$$|\vec{r}_i| < C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall t$$

und Sundman- stabil bezüglich eines Sterns m_j, falls

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| < C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall t$$

Sundman- Stabilität gibt also eine Bindungsbedingung an, während Hill- Stabilität lediglich fordert, dass die Masse das System nicht verlässt.

Sundman Gleichung

Untersuchung von Sundman- Stabilität

- Sundman Gleichung

$$\left(U-C\right)J-B=\frac{\dot{J}}{8}, \quad J\equiv Trägheitsmoment\, des\, Systems$$

Analog zur Bestimmung einer Hill Region

$$\dot{J}=0$$

$$\Rightarrow \left(U-C\right)J=B$$

Sundman Gleichung

Es sind zu lösen

$$\frac{\partial S}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial z}=0, \quad S=(U-C)J$$

Analog zum Circular Restricted Problem ergeben sich Punkte $S_1 - S_5$

Sundman Gleichung

mit

$$S_i = \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \\ \frac{G\,m_1\,m_2}{2C} + \frac{G\,m_2\,m_3}{2C\sqrt{(x_i-1)^2}} \; \frac{G\,m_3\,m_1}{2c\sqrt{x_i^2}} \end{pmatrix} \qquad i=1,2,3\,, \qquad S_{4,5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ G\,\frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3}{2C} \end{pmatrix}$$

Es folgt aus der Abhängigkeit

$$B_i = \frac{G^2}{4MC}\left(m_1 m_2 + m_2 m_3 (r_{23})_i^2 + m_3 m_1 (r_{31})_i^2\right)\left(m_1 m_2 + m_2 \frac{m_3}{(r_{23})_i} + m_3 \frac{m_1}{(r_{31})_i}\right)^2$$

dass nur für $B < B_2$ Sundman- Stabilität möglich ist.

Periodische Lösungen

Qualitative Untersuchung Periodischer Lösungen (Poincaré)

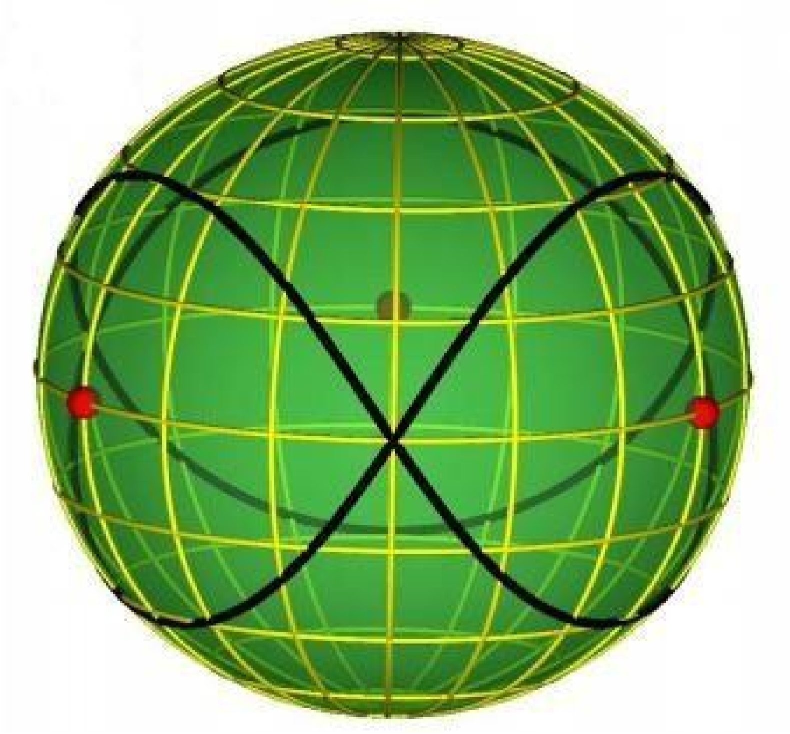
- Gliederung in Familien von Lösungen
- Topologische Untersuchung

Übertragung der Koordinaten in relatives Koordinatensystem

$$\rho^2, \quad \lambda^2, \quad R=\sqrt{\rho^2+\lambda^2}, \quad \rho=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2), \quad \lambda=\frac{1}{\sqrt{6}}(x_1+x_2-2x_3)$$

- Es ergeben sich sogenannte Shape Spheres

Periodische Lösungen



Topologische Untersuchung

- Betrachtung periodischer Lösungen ohne Kollision
- Projektion der Sphäre auf Ebene
  - ein Pol (=Nordpol) verschwindet ins Unendliche

- Periodische Lösungen bilden freie Gruppe
  - Erzeuger a, b der freien Gruppe mit
    - a : Umlauf rechter Pol (mit Uhrzeigersinn)
    - b : Umlauf linker Pol (gegen Uhrzeigersinn)

Topologische Untersuchungen

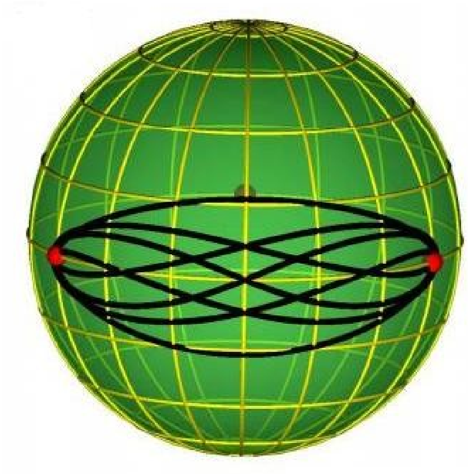
- Geometrische Klassen:
  - I) Achsensymmetrie bzgl. Äquator und Nullmeridian
  - II) Punktsymmetrie am „Ursprung“

- Algebraische Klassen:
  - A) Die Äquivalenzklasse $a \Leftrightarrow a^{-1}$ und $b \Leftrightarrow b^{-1}$
  - B) $a^{-1} \Leftrightarrow b^{-1}$ und $a \Leftrightarrow b$
  - C) weder A noch B

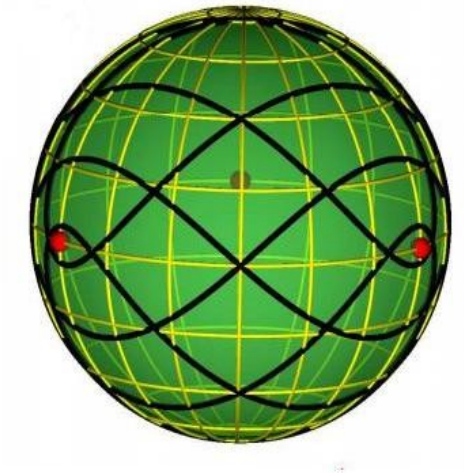
A korrespondiert immer mit I und C immer mit II, B kann mit beiden geometrischen Klassen korrespondieren.

Topologische Untersuchungen

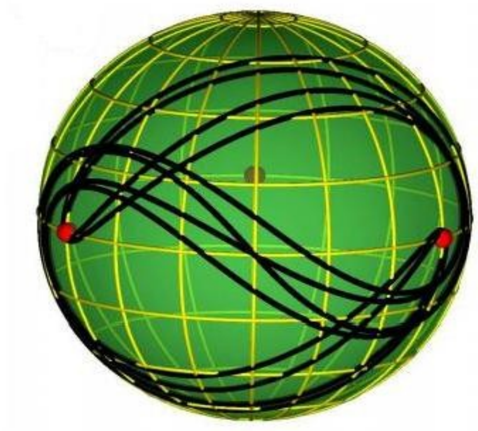
I.A



I.B



II.C



Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!

Quellen

- http://www.scholarpedia.org/article/Three_body_problem
- http://arxiv.org/pdf/1303.0181v1.pdf
- Danby, John. Fundermentals of Celestial Mechanics: The Macmillan Company, 1970
- Donnison J.R., Williams I.P., 1983, Celest. Mech., 31, 123.