



Korteweg-DeVries Gleichung

Von Bente Hansen und Dorian Hagenah



Inhalt

- 1. Historischer Überblick
- 2. Russels Experimente
- 3. Mathematische Grundlagen
- 4. Rayleighs Lösung
- 5. Boussniesq Lösung
- 6. Herleitung der Kdv
- 7. Lösungen
- 8. Stabilität
- 9. FPU-Problem
- 10. Periodische Wellen
- 11. Ausblick



1.

- I. „Ich beobachtete die Bewegung eines Bootes, das von einem Pferdespann ziemlich rasch einen engen Kanal entlang gezogen wurde, als das Boot plötzlich anhielt, nicht jedoch die Wassermenge im Kanal, die das Boot in Bewegung gesetzt hatte; sie sammelte sich rund um den Schiffsbug in einem Zustand wilder Erregung, ließ das Schiff dann plötzlich hinter sich und bewegte sich mit hoher Geschwindigkeit vorwärts und nahm dabei die Form einer großen einzelnen Erhöhung an, ein abgerundeter, glatter, wohldefinierter Haufen Wasser, der entlang dem Kanal anscheinend ohne Formveränderung oder Geschwindigkeitsabnahme seinen Lauf nahm.
- II. Ich begleitete die Welle auf meinem Pferd und überholte sie, während sie sich immer noch mit einer Geschwindigkeit von etwa 8 oder 9 Meilen pro Stunde bewegte, wobei sie die ursprüngliche Gestalt von etwa 30 Fuß Länge und ein bis eineinhalb Fuß Höhe beibehielt
- III. Die Höhe nahm allmählich ab und nachdem ich das ganze für etwa ein oder zwei Meilen beobachtet hatte, verlor ich sie in den Windungen des Kanals aus den Augen.“



1.Historie

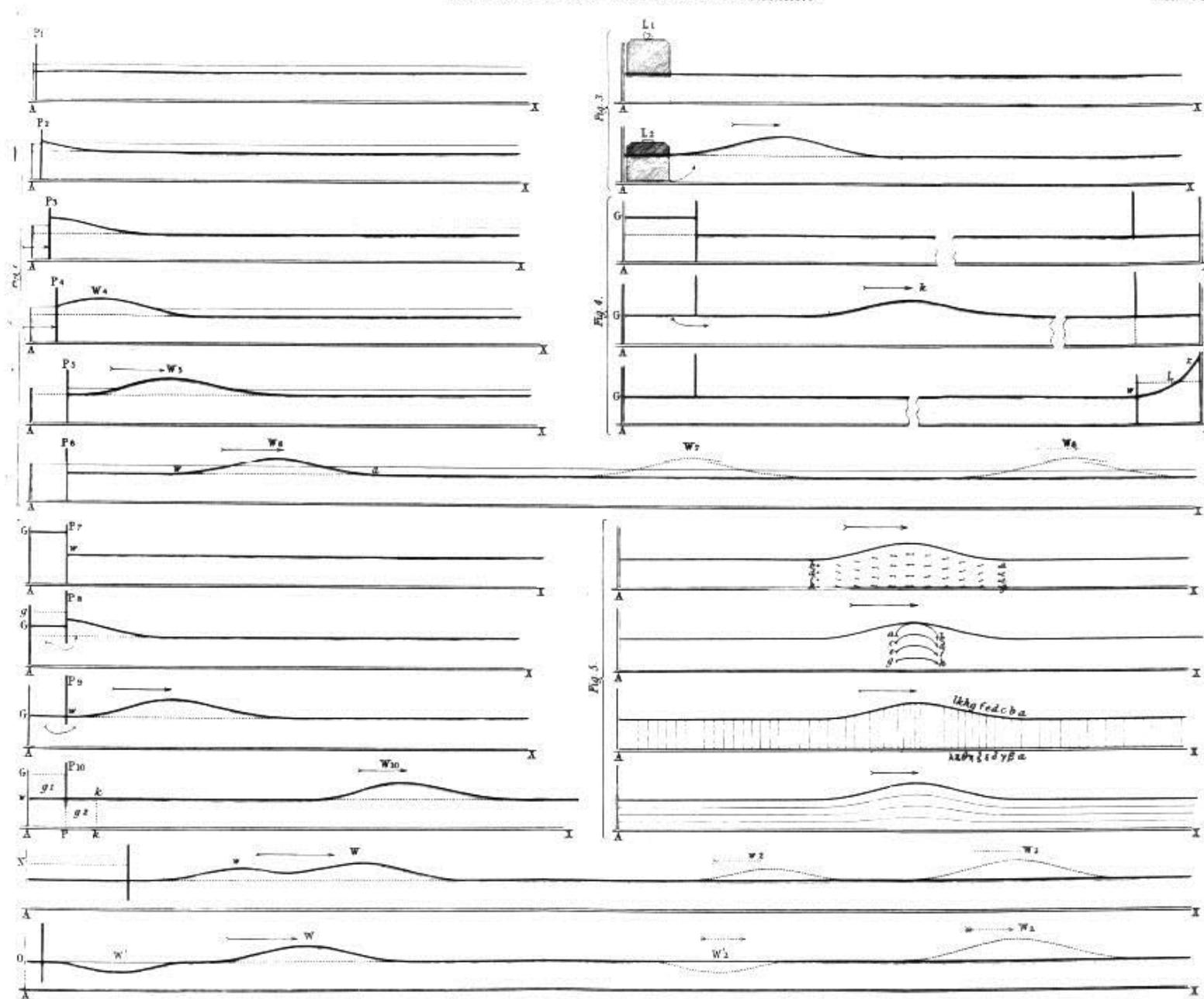
- I. 1834 John Scott Russel beobachtet Solitonenwelle
- II. 1871 und 1876 Wellengleichungen von Boussinesq und Rayleigh
- III. 1895 Veröffentlichung der Korteweg-de Vries-Gleichung
- IV. 1955 FPU Experiment → nichtlineare Störung verteilt sich auf gekoppelte Systeme nicht gleichmäßig
- V. Lösung der KdV mit inverser Streutheorie der Quantenmechanik



2.Russels Experimente

- I. Voraussetzungen:
 - seichtes Wasser
 - lange Wellen
 - wirbelfrei
 - inkompressibles Fluid

2.





2.Beobachtungen

- I. langsam abnehmende Amplitude
- II. stationäre Welle
- III. Volumen der Welle = Volumen des verdrängten Wassers
- IV. Geschwindigkeit, Höhe der Welle und Wassertiefe

3. Nichtlineare DGL

I. $m * a_{tan} = -m * g * \sin(\varphi(t))$ Fadenpendel

II. $\left(\frac{v''}{(1-v'^2)}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{-M_b}{El}$ Verformung durch Biegemoment

III. $\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ Korteweg-de Vries-Gleichung

IV. Lösungsansätze

- Potenzreihenentwicklung
- numerische Lösung
- Exakte Lösung durch Trochoidal Theorie

3.Partielle DGL

I. Eigenschaften

- Abhängigkeit von mindestens 2 Variablen
- Ableitungen nach mindestens 2 Variablen treten auf
- die Terme werden am gleichen Punkt ausgewertet

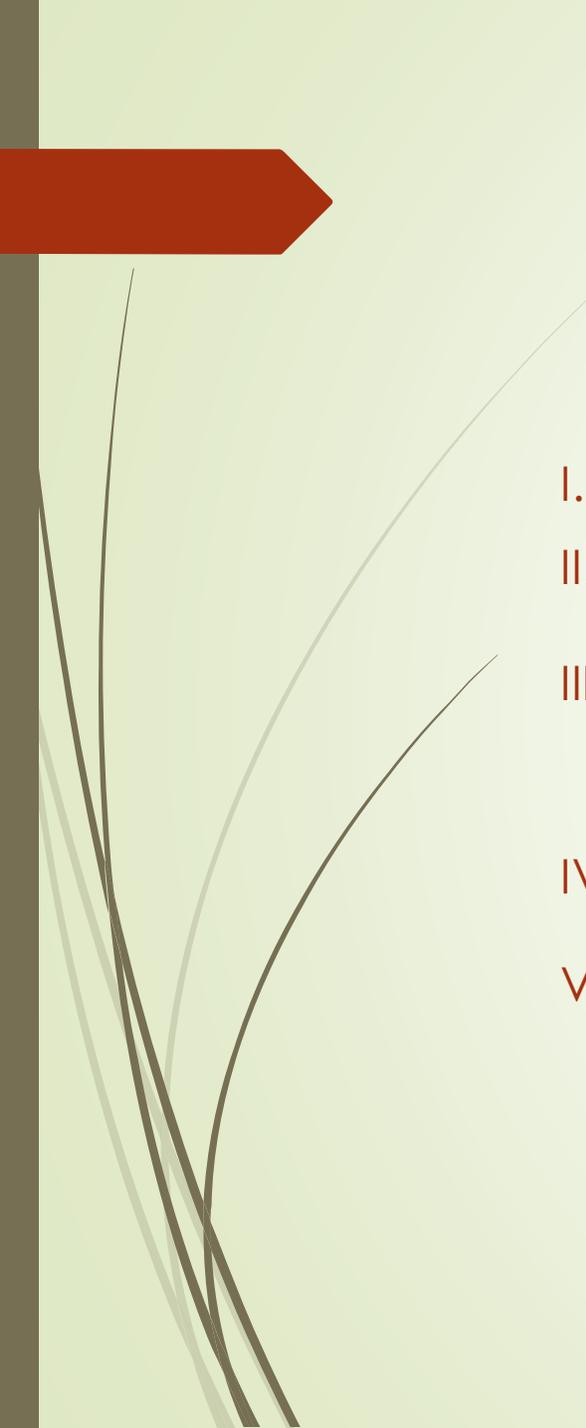
II. Bsp: $\Delta\psi = 0$ (Laplacegleichung)

- $\frac{\partial u}{\partial t} + c * \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (Transportgleichung)



3.

- I. bei zusätzlicher Nichtlinearität
- II. Besondere Eigenschaften:
- III. Chaotisches Verhalten
- IV. Solitonen als Lösungen
- V. Fraktale
- VI. Turbulenzen

- 
- I. Stokes: permanente Wellen sind sinusoidal
 - II. Rayleigh und Boussinesq unabhängig voneinander die Lösung
 - III.
$$h(x) = h_0 \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3h_0}{4H^3}} x\right)$$
 - IV. Ansatz:
 - V.
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = gk \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

3. Eigenschaften der Kdv

- I. $\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$
- II. vollständig integrabel
- III. stabile Lösungen
- IV. Solitonen als Lösungen
- V. Amplitude, Geschwindigkeit und Wassertiefe hängen direkt voneinander ab $v^2 = g(a + h)$
- VI. Solitonen besitzen immer maximale Höhe
- VII. unendlich viele Erhaltungsgrößen

Rayleighs Lösungsweg

- I. Ansatz: $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = f(x) - \frac{y^2}{2!} f''(x) + \frac{y^4}{4!} f^{(4)}(x) - \dots$
- II. $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -yf(x) - \frac{y^3}{3!} f^{(3)}(x) - \dots$
- III. mit $y = H + h(x)$
- IV. $\tilde{\omega} := \frac{-2p-c}{\rho} = 2g(H + h) + u_s^2 + v_s^2$
- V. $0 = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \frac{3}{H^3} h^2(h - h_0)$
- VI. Lösung: $h(x) = h_0 \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3h_0}{4H^3}} x\right)$

Boussinesqs Lösungsweg

- I. Ansatz: $\varphi = f(x) - \frac{y^2}{2!} f''(x) + \frac{y^4}{4!} f^{(4)}(x) - \dots$ mit $y = H + h(x, t)$
- II. $0 = gh + \frac{1}{2}(u_s^2 + v_s^2) + \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + \chi(t) = 0$
- III. $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + gH \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]$
- IV. $\psi(x, t) = h \left(\omega - \sqrt{gH} \right) - \frac{\sqrt{gH}}{2} \left(\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)$
- V. Wellengeschwindigkeit $\omega(x, t) = \sqrt{gH} + \sqrt{gH} \left(\frac{3h}{4H} + \frac{H^2}{6h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)$
- VI. $\frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} Hh + \frac{1}{2} h^2 + \frac{H^3}{9} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) = 0$



Überblick

- I. Was gibt es für Lösungen ?
 - II. Wie sehen diese aus ?
 - III. Solitonen und deren Eigenschaften
- 

Vorbereitung

I.
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{2}{3} \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0$$

II. Durch geeignete Wahl von Konstanten:

III. $u = k_0 \zeta + k_1$, $X = k_2 x + k_3$, $T = k_4 t + k_5$

IV. Erhalten wir $6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$



Lösungen



- I. Rayleigh findet Lösung für Russels Welle
- II. $h(x) = h_0 \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3h_0}{4H^3}} x\right)$
- III. [Mathematica Veranschaulichung von Quelle](#)
- IV. Bäcklund
- V. Numerische Näherung
- VI. Computersimulation

Herleiten der Lösung

I. Im bewegten System : $\xi = x - \left(\sqrt{gH} - \sqrt{\frac{g}{H}} \alpha \right) t$, $\tau = t$

II. $\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} h^2 + \frac{3}{2} \alpha h + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right) = 0$

III. $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} h^2 + \frac{3}{2} \alpha h + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right) = 0$

IV. $\frac{dh}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{-h^2(h+2\alpha)}{\sigma}}$

V. $h(\xi) = h_2 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{h_2}{4\sigma}} \xi \right)$

Stabilität

- I. Dispersion und Brechung halten sich in Waage
- II. $0 = u_t + u_x + uu_x + u_{xxx}$
- III. Nichtlinearer Term
- IV. Dispersionsterm

Stabilität

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} h^2 + \frac{3}{2} \alpha h + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right) = 0$$

I. Wir betrachten $h(\xi) = \bar{h} \operatorname{sech}^2(p \xi)$

II. Und bekommen:

$$h(\xi) = h_2 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{h_2}{4\sigma}} \xi \right)$$

III.
$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = 3 \sqrt{\frac{g}{H}} \bar{h} p (4\sigma p^2 - \bar{h}) \left[-\operatorname{sech}^2(p\xi) + \frac{2}{3} \frac{\alpha + 2\sigma p^2}{4\sigma p^2 - \bar{h}} \right] \operatorname{sech}^2(p\xi) \tanh(p\xi)$$

IV.
$$\alpha = 4\sigma p^2 - \frac{3}{2} \bar{h}$$

V.
$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial \tau} = 3 \sqrt{\frac{g}{H}} \bar{h} p (4\sigma p^2 - \bar{h}) \operatorname{sech}^2(p\xi) \tanh^3(p\xi)$$

VI. Mit $p = \sqrt{\frac{\bar{h}}{4\sigma}}$ also $\alpha = -\frac{1}{2} \bar{h}$

VII.
$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow \text{Stabile Welle (Oben in Grün)}$$

Stabilität

$$p < \sqrt{\frac{\bar{h}}{4\sigma}}$$

- I. Front steiler
- II. Rückseite Weniger steil

$$p > \sqrt{\frac{\bar{h}}{4\sigma}}$$

- I. Front weniger steil
- II. Rückseite steiler

Soliton



Gebrochene Welle

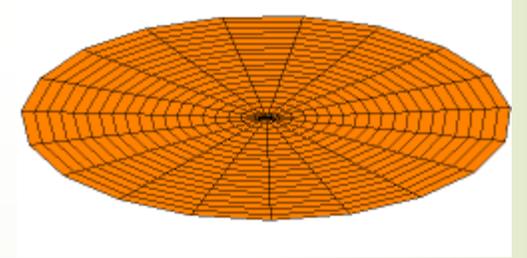


Dispersion

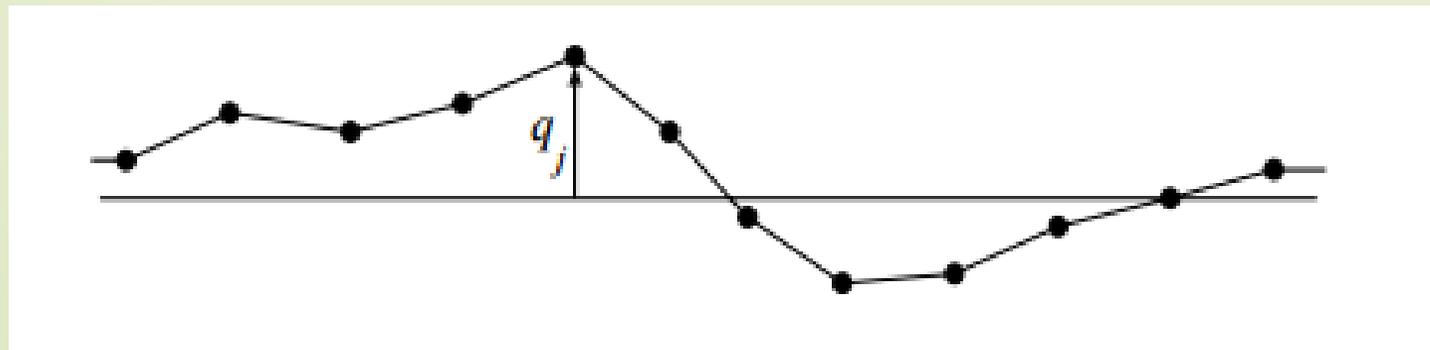




Fermi–Pasta–Ulam problem



- I. Nichtlineare Schwache WW Kopplung einer Atomkette
- II. Hinzufügen von Energie in Form von Normalmoden
- III. Erwartungen: Nach hinreichend langer Zeit Einstellung eines Gleichgewichtes
- IV. Ziel: Messung dieses Zeitpunktes
- V. Beobachtungen : Periodisch , Energie wird in verschiedene Moden Verteilt , kehrt aber in den Ursprungszustand zurück





Beziehung zwischen Kdv und FPU- Problem

- I. Durch genauere Untersuchung der Kdv in Bezug auf FPU wurde ermittelt dass sie ein Hamilton System beschreibt und dass sich ihre Solitonen wie Elastische Stöße verhalten
- II. Zuerst vermuteter Zusammenhang von Solitonen und Fast Periodischem Verhalten durch mehr Solitonen Lösung der Kdv-E

Periodische Wellen

I. $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} h^2 + \frac{3}{2} \alpha h + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right) = 0$

II. $c_1 + \frac{1}{2} h^2 + \frac{3}{2} \alpha h + \frac{1}{3} \sigma \frac{d^2 h}{d\xi^2} = 0$

III. $c_2 + 6c_1 h + h^3 + 2\alpha h^2 + \sigma \left(\frac{dh}{d\xi} \right)^2 = 0$

$$\mu^2 + 2\alpha\mu + 6c_1$$

IV. $y = H_0 + \tilde{h}(\xi)$

V. $\frac{d\tilde{h}}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{1}{\sigma} (\tilde{h} + k) \tilde{h} (l - \tilde{h})}$

$$\tilde{h} = l \cos^2 \chi$$

VI. Cnoidal Wave $\tilde{h}(\xi) = l \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{l+k}{4\sigma}} \xi \right)$

Cnoidal Wave

I. Modus: $\sqrt{\frac{l}{l+k}}$

II. Period : $4K = \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} (1-M^2 t^2)^{-1/2} dt$

III. Wellenlänge = $4K \sqrt{\frac{\sigma}{l+k}}$

$k \rightarrow 0, \quad h(\xi) = h_2 \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{h_2}{4\sigma}} \xi\right)$

IV. Großes k $\rightarrow \tilde{h}(\xi) = l \cos^2\left(\sqrt{\frac{l+k}{4\sigma}} \xi\right)$



Anwendungen

- 
- I. Anwendungen
 - II. klassische Flachwasserwellen
 - III. interne Gravitationswellen
 - IV. Wellen in rotierender Atmosphäre
 - V. Druckwellen von Flüssigkeit-Gasblasen-Gemischen
 - VI. Datenübertragung in Glasfaserkabeln
 - VII. Neurowissenschaften



Ausblick

- I. Die Kdv Gleichung lässt sich als Lax Paar darstellen , da sie unendlich oft integrierbar ist.
- II. Anwendung für Solitonen in kontinuierlichen Medien
- III. $L_t = [P, L]$ $L = -\partial_x^2 + u$ $P = -4\partial_x^3 + 3(u\partial_x + \partial_x u)$
- IV. Kann als Hamilton System geschrieben werden



Quellen



- I. <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/soliton1b.gif>
- II. <http://t1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSSZM4YTH0csnrkV5q6JzF9O82JPUamTKBVS1OHuw9ysq96yXgSTNwNjgU>
- III. <http://demonstrations.wolfram.com/SolitonsFromTheKortewegDeVriesEquation/>
- IV. <https://math.temple.edu/~prisebor/KdV.pdf>
- V. <http://www.few.vu.nl/~brink/Springer.pdf>
- VI. http://www.scholarpedia.org/article/Fermi-Pasta-Ulam_nonlinear_lattice_oscillations#fig:FPUoriginalrecurrence.jpg
- VII. The Fermi Pasta Ulam Problem: A Status Report
- VIII. Nonlinear Wave Equations : Analytic and Computational Techniques
- IX. <http://www.macs.hw.ac.uk/~chris/wave.jpg>