

1 1
1 0 2
1 0 0 4

Leibniz
Universität
Hannover

Nichtlineare Schrödingergleichung

Kyle Poland und Alexander Hahn

Inhalt

- Allgemeines
- Herleitung & Bedeutung
- Lösungsmethodik
- Solitonenlösungen
- Self-Phase Modulation / Kerr-Effekt
- Anwendungen
- Ginzburg-Landau-Gleichung
- Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Allgemeines

- nichtlinear:
 - Eingangssignal \approx Ausgangssignal
 $\Rightarrow f(u + v) \neq f(u) + f(v)$
 - kubische Nichtlinearität
- integrabel in 1D
- viele verschiedene Lösungen

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Allgemeines

- 1950 Ginzburg-Landau

$$\partial_t\psi = (1 + i\alpha)\partial_x^2\psi + \psi - (1 + i\beta)|\psi|^2\psi$$

- 1964 Cioa & Talanov:
 - Selbstfokussierung
 - Propagation nichtlineare Medien

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Herleitung & Bedeutung

- nichtlineares Medium mit Störung $\zeta(x, t)$

$$\zeta(x, t) = \Psi e^{ikx - i\omega t}$$

- Nichtlinearität in Amplitude

$$\zeta(x, t) = \Phi(x, t)e^{i(k_0x - \omega_0t)}$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Herleitung & Bedeutung

- Koeffizientenvergleich:

$$\Psi e^{ikx - i\omega t} = \Phi(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$$

$$\Rightarrow \Phi(x, t) = \Psi e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]}$$

- ω um k_0 entwickeln und einsetzen:

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Herleitung & Bedeutung

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

- mit:

- Gruppengeschwindigkeit $v_G = \frac{\partial\omega}{\partial k}$

- Dispersionskoeffizient $\alpha = \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}$

- Nichtlinearität $\Gamma = \frac{\partial\omega}{\partial\Phi}$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Herleitung & Bedeutung

- viele exakte & explizite Lösungen
⇒ Präzise Vorhersagen
- Dissipation
- Dispersion
- Nichtlinearität

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Lösungsmethodik

- Inverse Streumethode

$$\begin{array}{ccc}
 q(x, 0) & \xrightarrow{\text{Forward Integral Equations}} & S(k, 0) = \left\{ \rho(k, 0), \quad \{k_j, C_j(0)\}_{j=1}^J \right\} \\
 & & \downarrow \text{Simple ODE} \\
 q(x, t) & \xleftarrow{\text{Riemann-Hilbert Equations}} & S(k, t) = \left\{ \rho(k, t), \quad \{k_j, C_j(t)\}_{j=1}^J \right\}
 \end{array}$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Lösungsmethodik

- Numerische Methoden
 - Räumliche Entwicklung
 - Zeitliche Entwicklung

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Lösungsmethodik

- Räumliche Entwicklung
 - Aufteilen: Linear - Nichtlinear
 - Lösungen fouriertransformieren
 - kombinieren
 - Rücktransformieren

$$\Rightarrow \Phi(x + dx, t)$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Lösungsmethodik

- Zeitliche Entwicklung
 - Aufteilen: Linear - Nichtlinear
 - Als Operatoren ausdrücken \hat{D} - \hat{N}
 - Wellenansatz:

$$\Phi(x, t) = e^{it(\hat{D} + \hat{N})} \cdot \Phi(x, 0)$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Lösungsmethodik

- Zeitliche Entwicklung
 - Aus Wellenansatz:

$$\Phi(x, t) = e^{it(\hat{D} + \hat{N})} \cdot \Phi(x, 0)$$

- kleines Zeitintervall dt

$$\Phi(x, t + dt) \approx e^{i \cdot dt(\hat{D} + \hat{N})} \cdot \Phi(x, t)$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Lösungsmethodik

- Zeitliche Entwicklung
 - Fouriertransformieren
 - Raumableitung \rightarrow Wellenzahl
 - Rücktransformieren

$$\Rightarrow \Phi(x, t + dt)$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Solitonenlösungen

- Solitonen:
 - formstabiler Wellenzug
 - nichtlineare Effekte
- allgemeine Form:

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Solitonenlösungen

$$0 = \underbrace{-i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right)}_{\text{gewöhnliche SG}} - \underbrace{\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi}_{\text{Dispersion 2. Art}} + \underbrace{\Gamma|\Phi|^2\Phi}_{\text{Nichtlinearität}}$$

- Substitution:

$$\Phi(z, t) \rightarrow \Phi(z, T) \text{ mit } T = t - \frac{z}{v_G}$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Solitonenlösungen

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

- Suche Solitonenlösungen:

$$\Phi(z, T) \simeq E_0\Psi(T)e^{-i\Theta(z)}$$

- $\Psi(T)$ Form Gaußkurve (Einhüllende)

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Solitonenlösungen

$$0 = -i\frac{\partial}{\partial x}\Phi - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

- Suche Solitonenlösungen:

$$\Phi(z, T) \simeq E_0\Psi(T)e^{-i\Theta(z)}$$

- $\Psi(T)$ Form Gaußkurve (Einhüllende)

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Self-Phase Modulation

- Vereinfachter Fall: Dispersion = 0

⇒ keine Solitonen

$$\Rightarrow 0 = -i\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi := R(z, T)$$

- Nachrechnen:

$$\rightarrow R^* \cdot \Phi - R \cdot \Phi^* = \frac{\partial}{\partial x}|\Phi|^2 = 0$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Self-Phase Modulation

- $|\Phi|^2$ nicht ortsabhängig!
 $\Rightarrow \Phi(z, T) = f_0(T)e^{-i\Theta(z, T)}$
- Einsetzen in DGL
 $\Rightarrow \Theta$ orts- und zeitabhängig

$$\Phi(z, T) = f_0(T)e^{-i\Gamma|f_0(T)|^2 z}$$

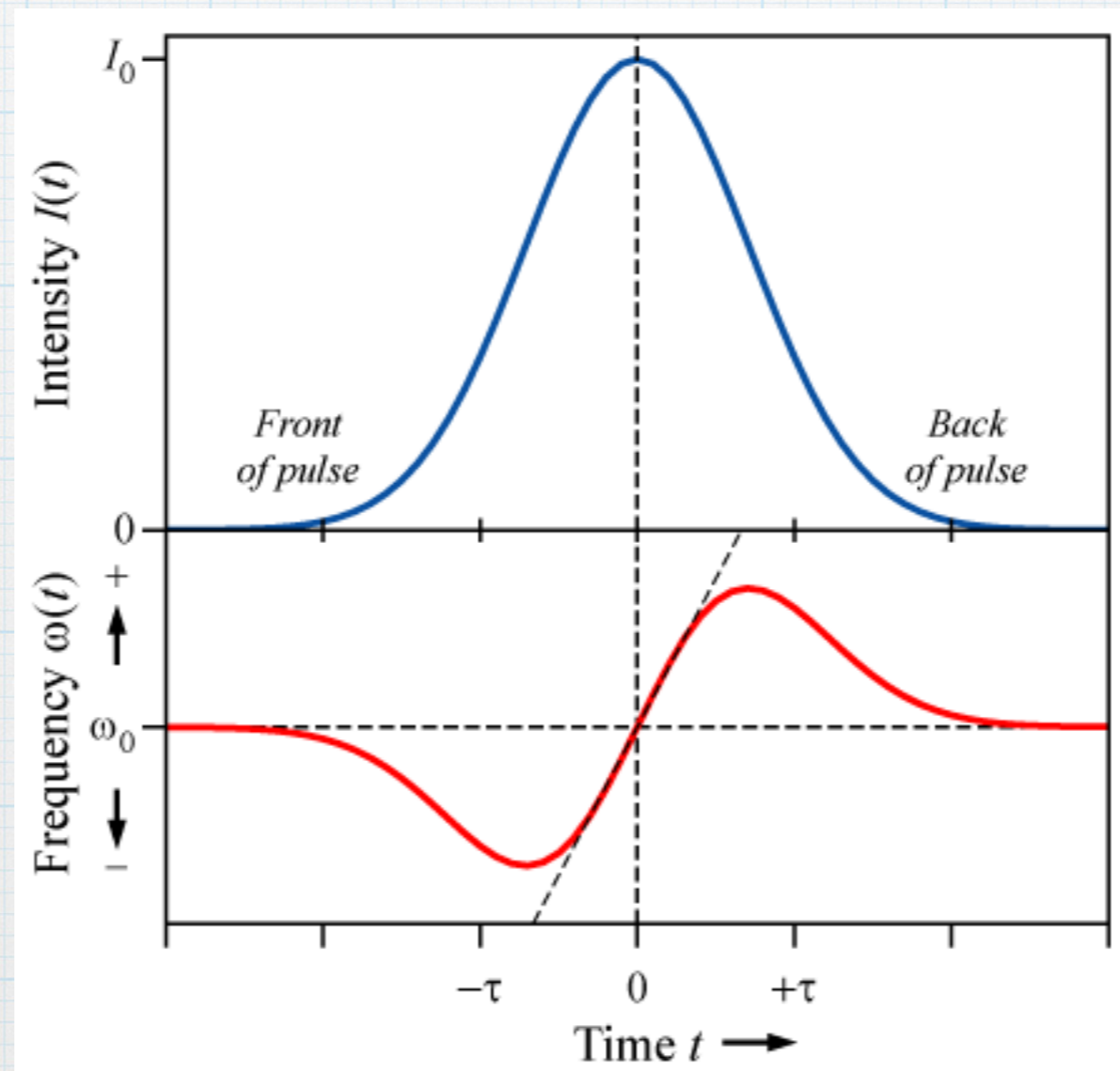
$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Kerr-Effekt

- Brechungsindex für hohe Intensitäten
- $n \rightarrow n(I)$
 - intensitätsabhängige Phasengeschwindigkeit
 - symmetrische Frequenzaufspaltung

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Kerr-Effekt



$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Anwendungen

- Supraleiter: Ginzburg Landau
- Bose-Einstein-Kondensat: Gross-Pitaevski
- Schwerewellen
- Plasma-Oszillation
- α -Helix
- Strahlung Ionosphäre...

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Anwendungen

- universal:
 - Wellenpakete in nichtlinearen Medien

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Ginzburg-Landau

$$\partial_t\Phi = (1 + i\alpha)\partial_x^2\Phi + \Phi - (1 + i\beta)|\Phi|^2\Phi$$

- Supraleiter + Suprafluide
 - Supraleiter: kein elektrischer Widerstand
 - Suprafluide: Flüssigkeit ohne innere Reibung, unendlich hohe Wärmeleitfähigkeit, keine Entropie

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Ginzburg-Landau

$$\partial_t\Phi = (1 + i\alpha)\partial_x^2\Phi + \Phi - (1 + i\beta)|\Phi|^2\Phi$$

- Lösung für Supraleiter mit Ansatz:

$$\Phi(s) = \frac{A}{\cosh^{\frac{1}{m}}(Bs)}$$

$$\Rightarrow q(x, t) = \frac{A}{\cosh^{\frac{1}{m}}[B(x - vt)]} e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Gross-Pitaevskii

$$i\partial_t\Phi = -\frac{1}{2}\partial_x^2\Phi + V(x)\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

- Aus Ginzburg-Landau für elektrisch neutrale Teilchen
- Bose-Einstein-Kondensat
- Bose-Einstein Statistik:

$$n(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{kT}\right) - 1}$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Gross-Pitaevskii

$$i\partial_t\Phi = -\frac{1}{2}\partial_x^2\Phi + V(x)\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

- Was passiert für $T \rightarrow 0$?

$$n(E) \rightarrow \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{0}\right) - 1} \rightarrow 0$$

- Zusätzlich: $E \rightarrow 0$

$$n(E) \rightarrow \frac{1}{\exp\left(\frac{0}{0}\right) - 1} \rightarrow \frac{1}{1 - 1} \rightarrow \infty$$

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Gross-Pitaevskii

$$i\partial_t\Phi = -\frac{1}{2}\partial_x^2\Phi + V(x)\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

- Alle Bosonen im Grundzustand
- ununterscheidbar:
 - ein Superteilchen
- Aggregatzustand
- makroskopischer Quanteneffekt

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Gross-Pitaevskii

$$i\partial_t\Phi = -\frac{1}{2}\partial_x^2\Phi + V(x)\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

- Lösung für Solitonen:

$$q(x, t) \propto \frac{1}{\cosh(f(x, t))} e^{f(x, t)}$$

→ Materiewellenpakete aus
delokalisierten Atomen

$$0 = -i\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{1}{v_G}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

Gross-Pitaevskii

$$i\partial_t\Phi = -\frac{1}{2}\partial_x^2\Phi + V(x)\Phi + \Gamma|\Phi|^2\Phi$$

- Forschung an LUH:
 - Schwerefeld Erde
 - Überprüfung Äquivalenzprinzip