Fixpunkte und Stabilitätsanalyse

Themenüberblick

- Motivation
- 1D-Probleme
- Bifurkationen
- 2D-Probleme
  - Fixpunkttypen
  - Lotka-Volterra-Modelle

Motivation

- Bisher: Lineare Dynamik
- Jetzt: Nichtlineare Systeme
- Ohne explizite Lösung

$\longrightarrow$ Fixpunkte !!!

1D-Probleme

- Betrachte Systeme der Form $\dot{x} = f(x)$

- Einfaches Beispiel: $\dot{x} = \sin x$

- Explizite Lösung der DGL mit Separation

$$\frac{dx}{dt} = \sin x \quad \Rightarrow \quad t = \ln \left| \frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x_0} \right|$$

$$x(t=0) = x_0$$

1D-Probleme

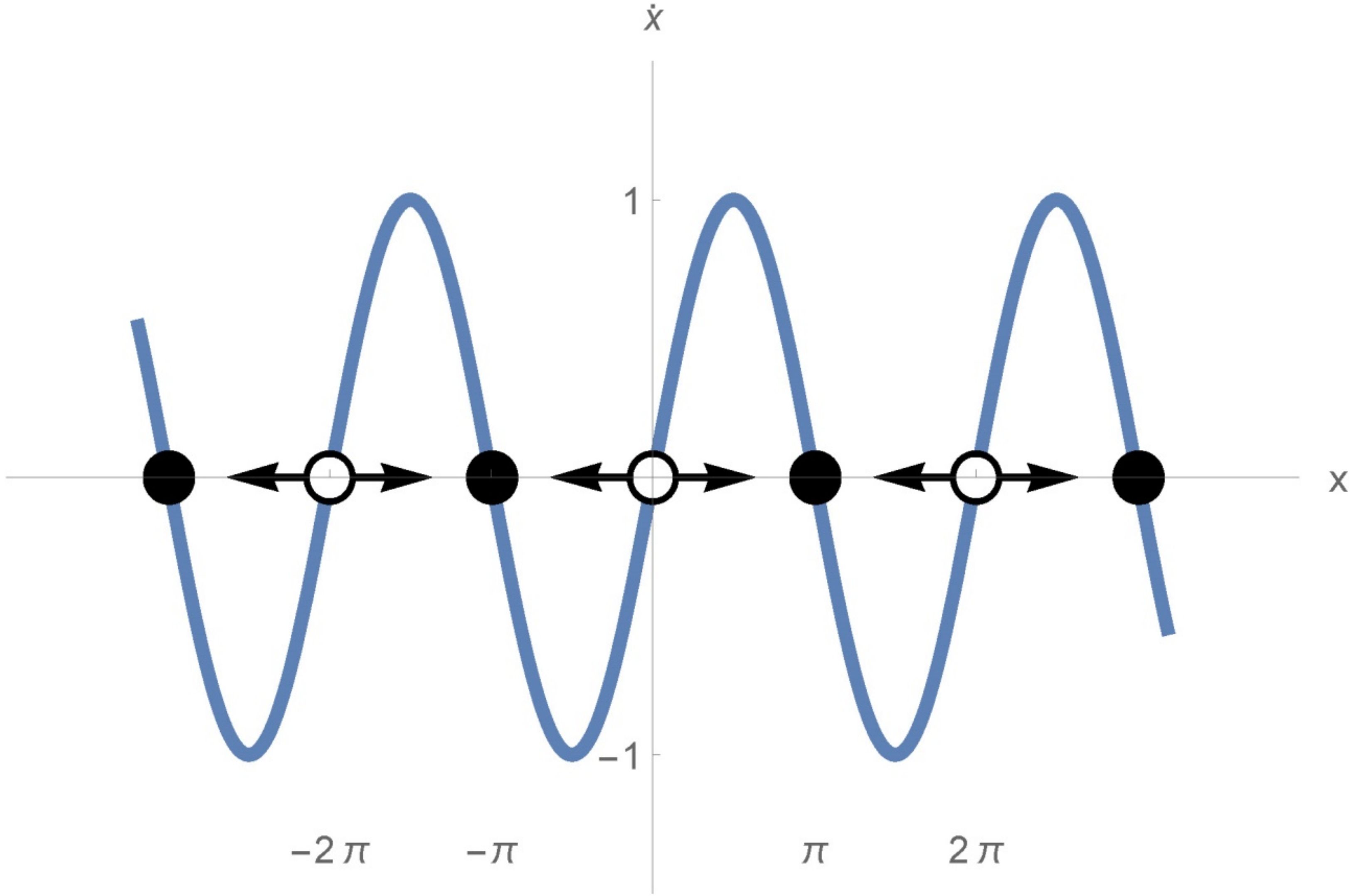
- Stattdessen: Graphische Analyse

$\longrightarrow$ $f(x)$ als Vektorfeld auf x-Achse

- Graphische Darstellung:
  i. $\dot{x} > 0 \Leftrightarrow$ Pfeil nach rechts
  ii. $\dot{x} < 0 \Leftrightarrow$ Pfeil nach links

- Fixpunkt bei $\dot{x} = 0 = f\left(x^*\right)$

1D-Probleme



1D-Probleme

- Graphisches Stabilitätskriterium:
  i. Stabil $\Leftrightarrow$ Pfeile zeigen nach innen ●
  ii. Instabil $\Leftrightarrow$ Pfeile zeigen nach außen ○

- Quantitative Analyse auch möglich?

$\longrightarrow$ Lineare Stabilitätsanalyse

1D-Probleme

- Ansatz: $\eta(t) = x(t) - x^*$
- Taylor $\longrightarrow$ $\dot{\eta} \cong f(x^*) + \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2)$

- $f'(x^*) \neq 0$ $\longrightarrow$ $\dot{\eta} \cong \eta f'(x^*)$

- Lösung: $\eta(t) = \eta_0 \, e^{f'(x^*) \cdot t}$

1D-Probleme

- Lineares Stabilitätskriterium:
  i. Stabil $\Leftrightarrow \quad f'(x^*) < 0$

  ii. Instabil $\Leftrightarrow \quad f'(x^*) > 0$

1D-Probleme

- Zurück zum Beispiel $\dot{x} = \sin x$
- Fixpunkt, wenn $f(x) = \sin x = 0$

$$\longrightarrow \quad x^* = k\pi$$

$$f'(x^*) = \cos k\pi = \begin{cases} 1, & k \text{ gerade} \\ -1, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

1D-Probleme

- Zurück zum Beispiel $\dot{x} = \sin x$
- Fixpunkt, wenn $f(x) = \sin x = 0$

$$\longrightarrow \quad x^* = k\pi$$

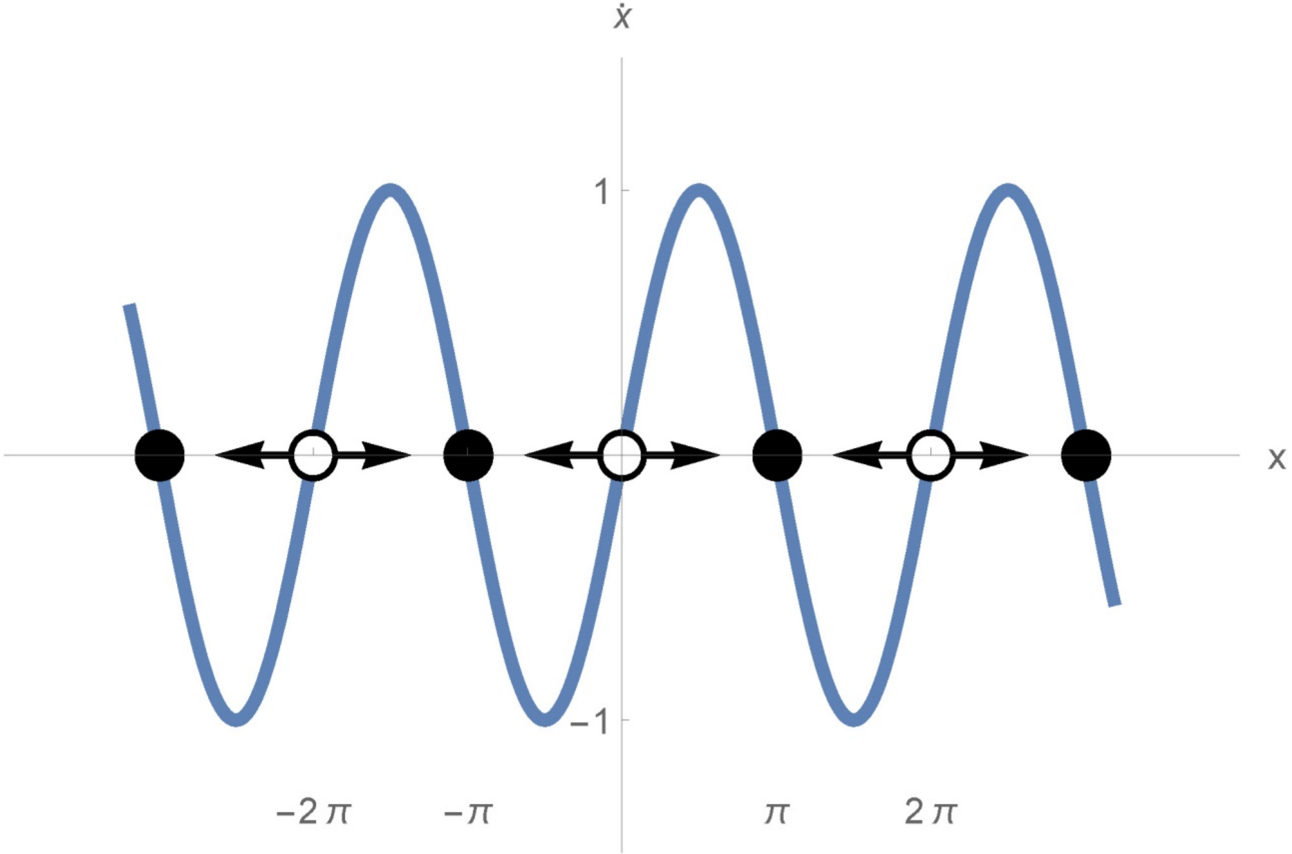
$$f'(x^*) = \cos k\pi = \begin{cases} 1, & k \text{ gerade} \\ -1, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$1, k$ gerade $\rightarrow$ instabil

$-1, k$ ungerade $\rightarrow$ stabil

1D-Probleme

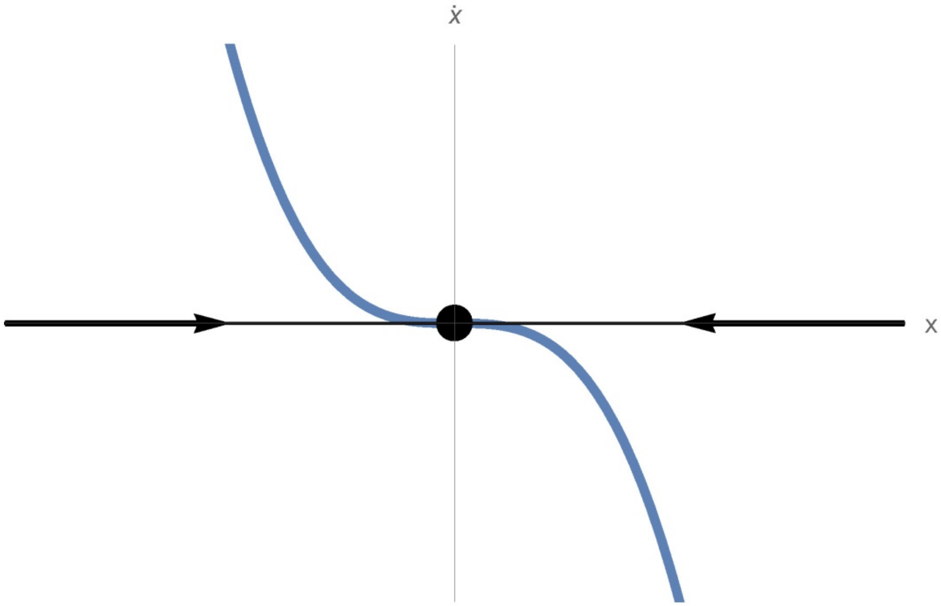
- Erinnerung:



1D-Probleme

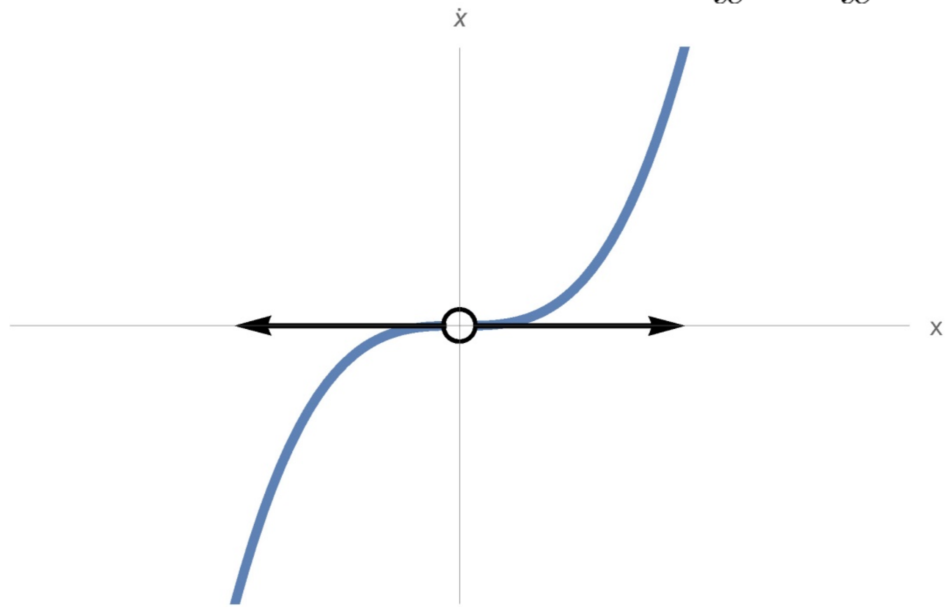
- Bemerkung: Was passiert bei $f'(x^*) = 0$?

$\dot{x} = -x^3$



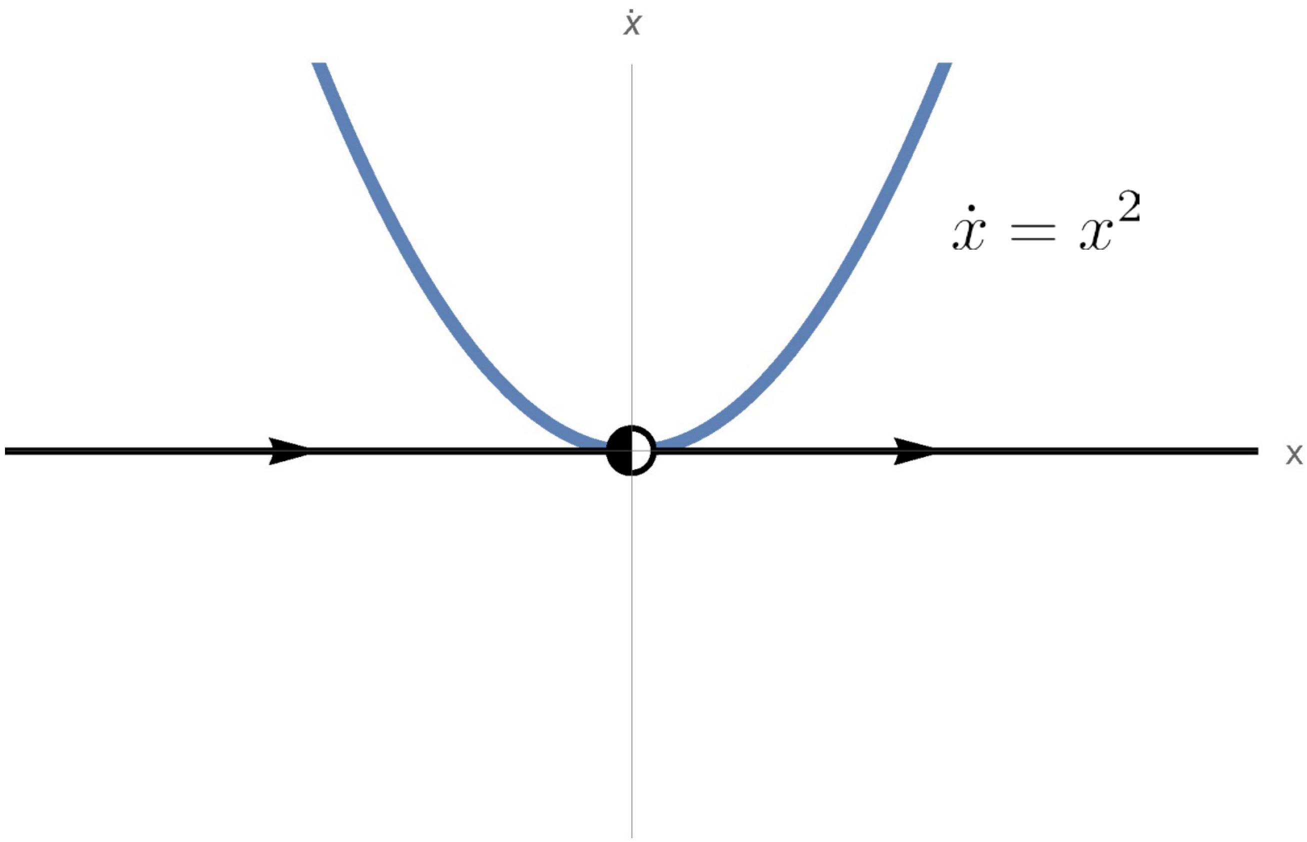
stabil

$\dot{x} = x^3$



instabil

1D-Probleme



- Hier ist $x^* = 0$ halbstabiler Fixpunkt

Bifurkationen

- Übersicht:
  - Sattel-Knoten-Bifurkationen
  - Transkritische Bifurkationen
  - Pitchfork-Bifurkationen
    - Superkritische Bifurkationen
    - Subkritische Bifurkationen
  - Nicht perfekte Bifurkationen
  - Beispiele

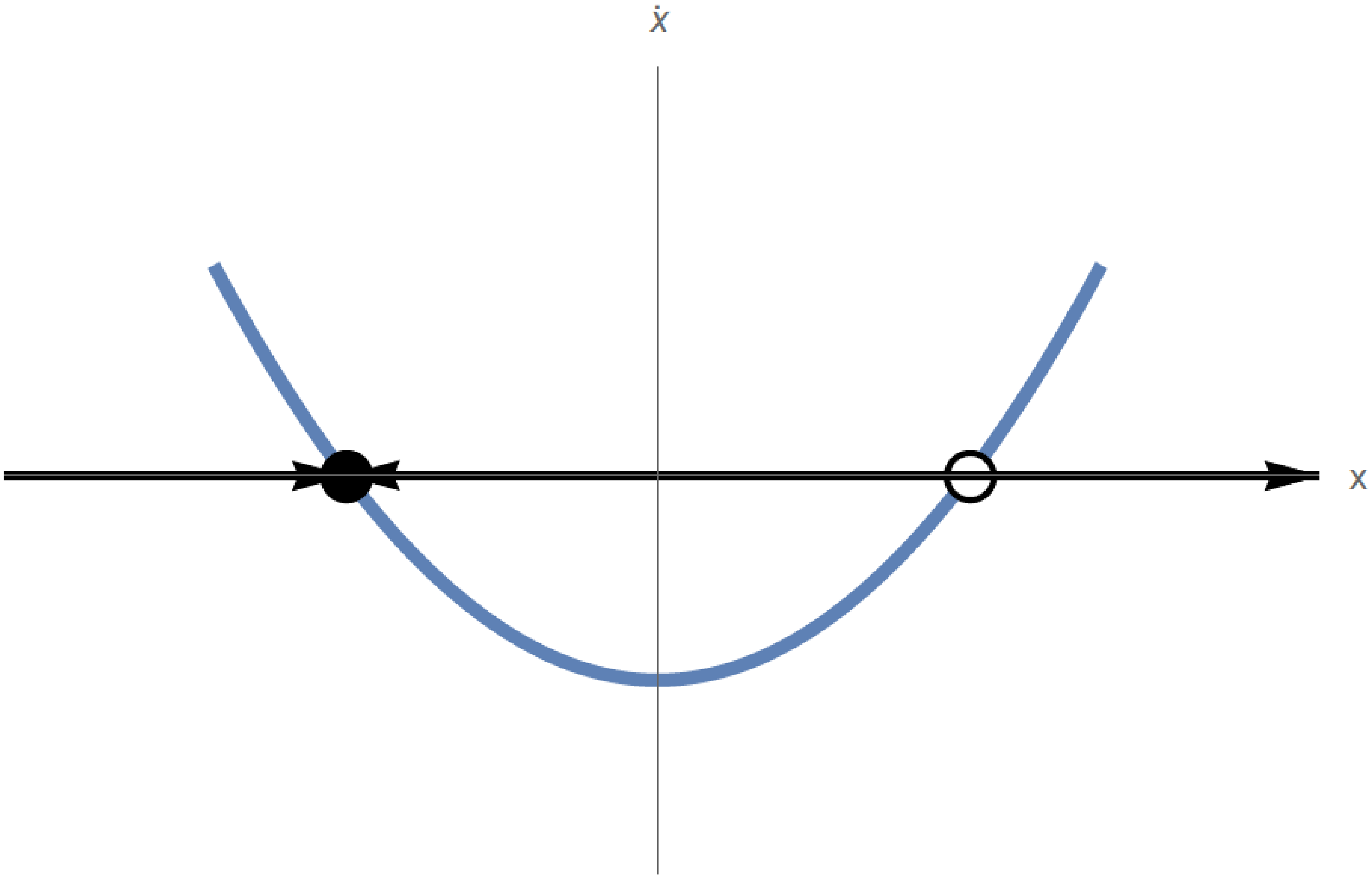
Was sind Bifurkationen

- Bis jetzt: „simple“ 1D-Probleme
  - Dynamik der Vektorfelder sehr eingeschränkt
- Nun: Abhängigkeit von Parametern
  - Struktur des Verlaufs ändert sich
  - Fixpunkte werden „zerstört“ oder „erschaffen“
- Änderungen in der Dynamik heißen „Bifurkationen“
- Parameterwerte an denen sie auftreten „Bifurkationspunkt“
- Bifurkationen liefern Modelle für Verstärkung und Instabilität

Sattel-Knoten-Bifurkation

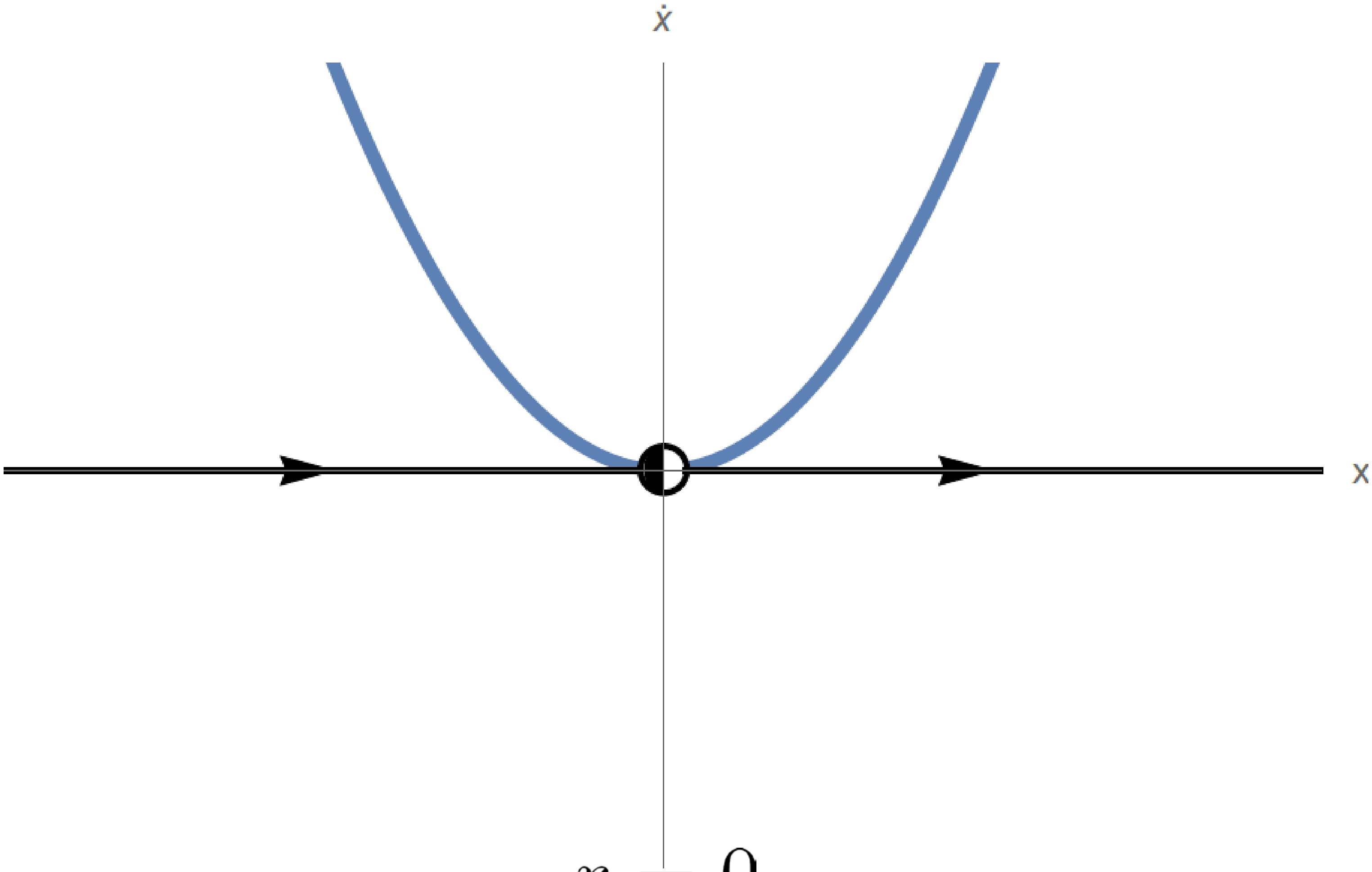
- Fixpunkte für $r \leq 0$ bei $x_{1,2}{}^* = \pm\sqrt{r}$
- Bei Variation des Parameters bewegen sich Fixpunkte aufeinander zu und annihilieren sich
- Normalform $\dot{x} = r + x^2$
- $\exists$ unterschiedliche Fälle

Fall 1:



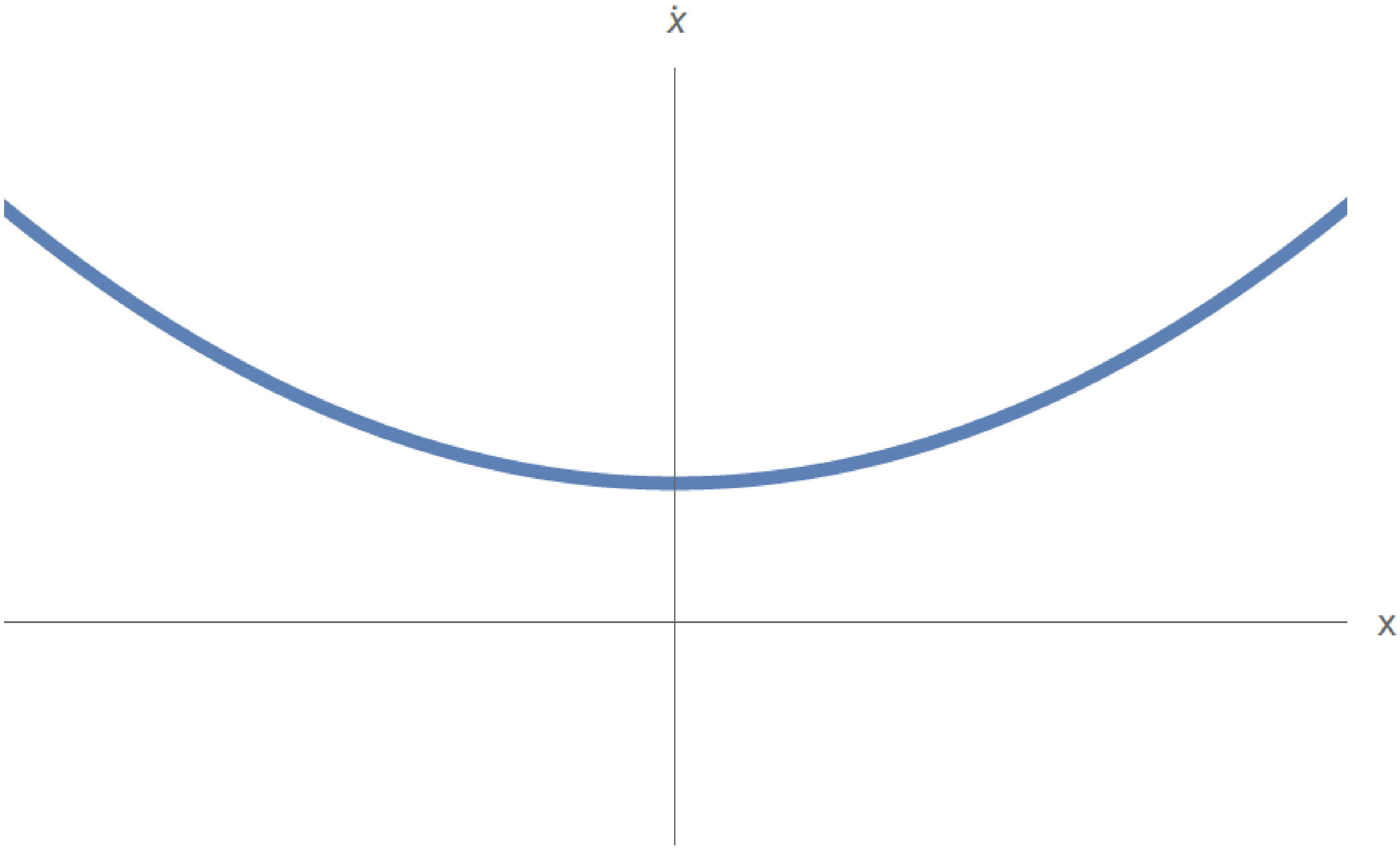
$$r < 0$$

Fall 2:



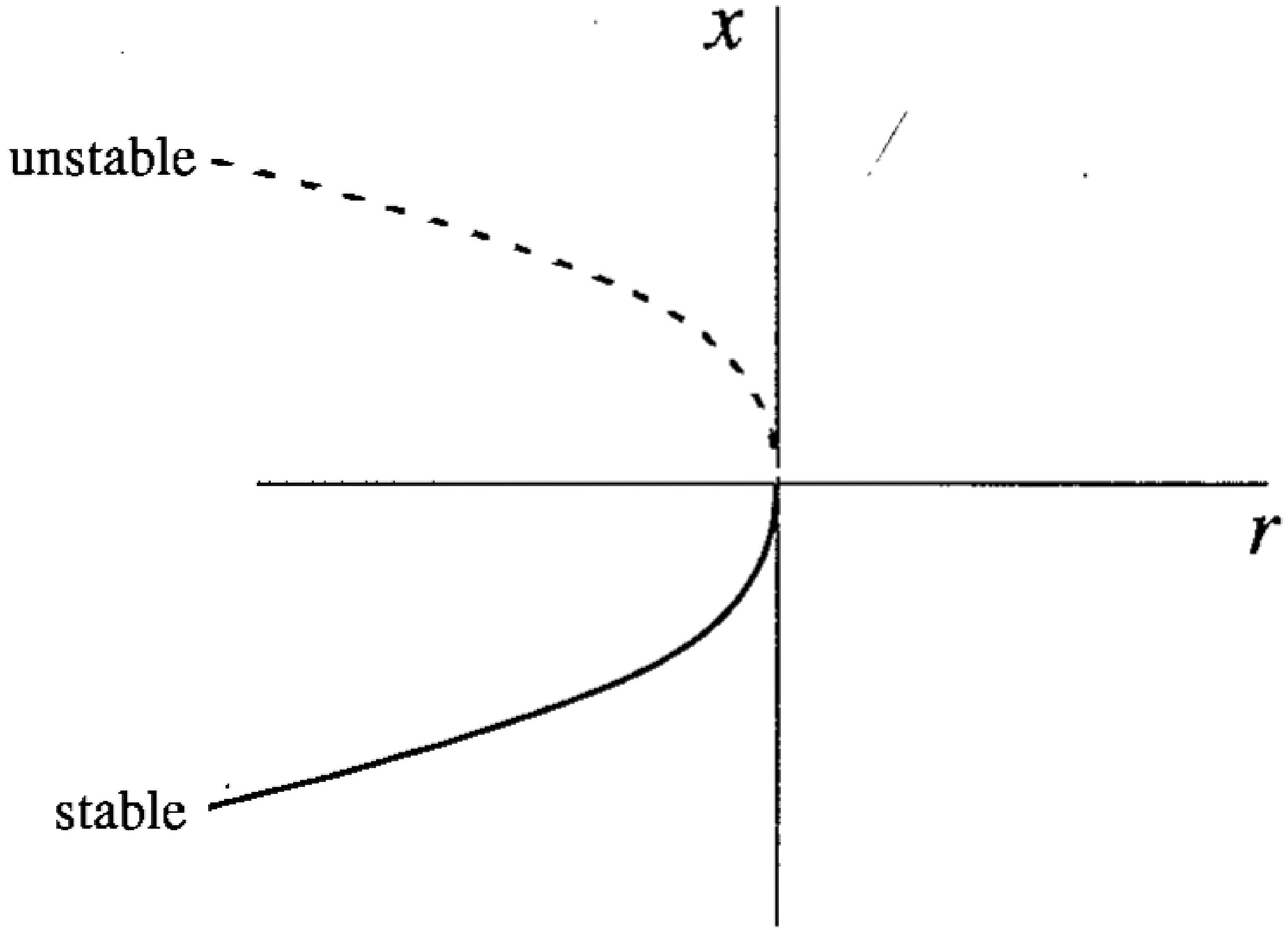
$$r = 0$$

Fall 3:



$$r > 0$$

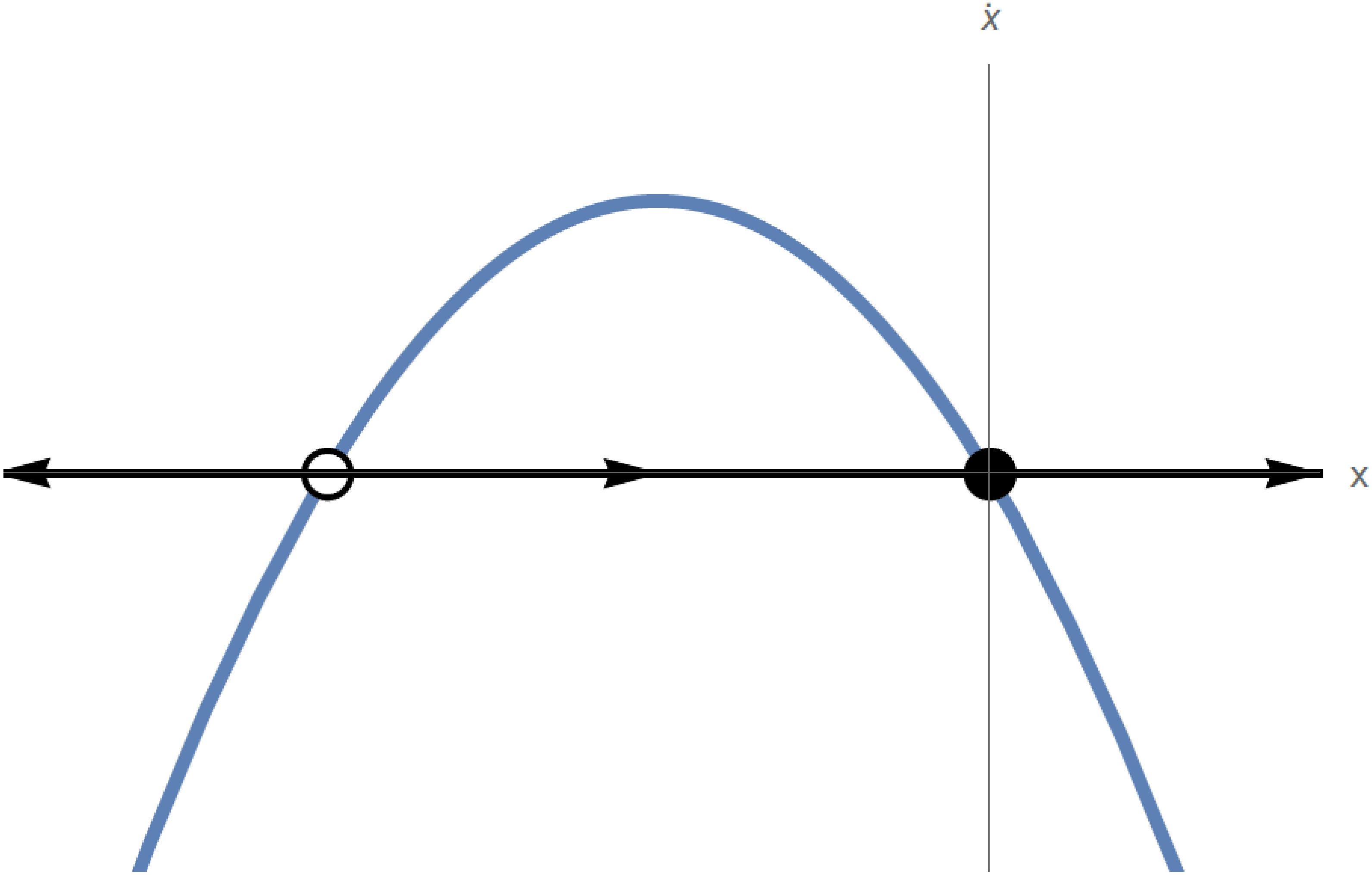
Bifurkationsdiagramm



Transkritische Bifurkationen

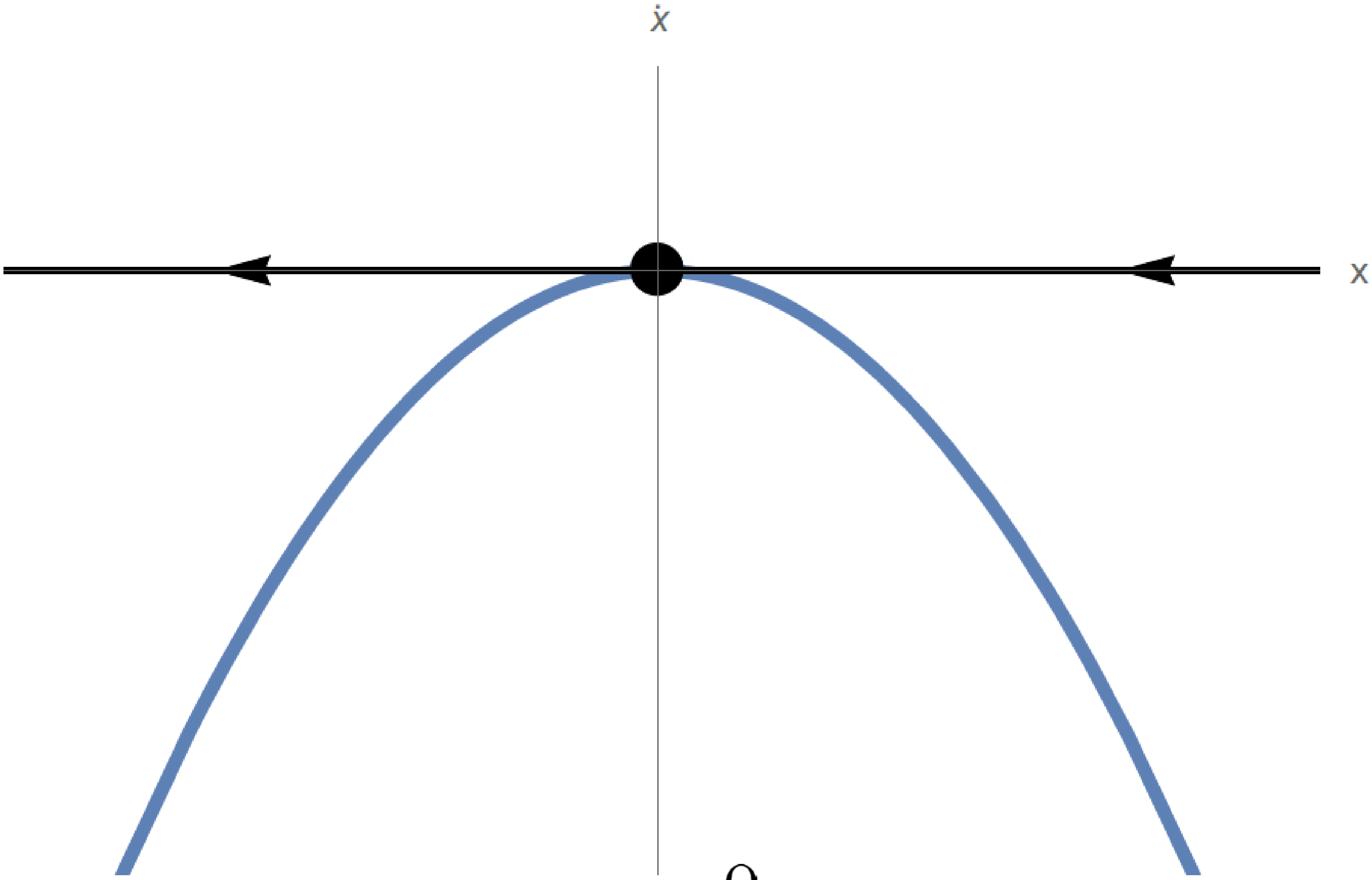
- Es gibt Modelle in denen ein Fixpunkt für alle Parameterwerte existieren „muss“
- Dieser Fixpunkt kann jedoch seine Stabilität ändern
- Für solche Modelle werden transkritische Bifurkationen verwendet
- Normalform $\dot{x} = rx - x^2$

Fall 1:



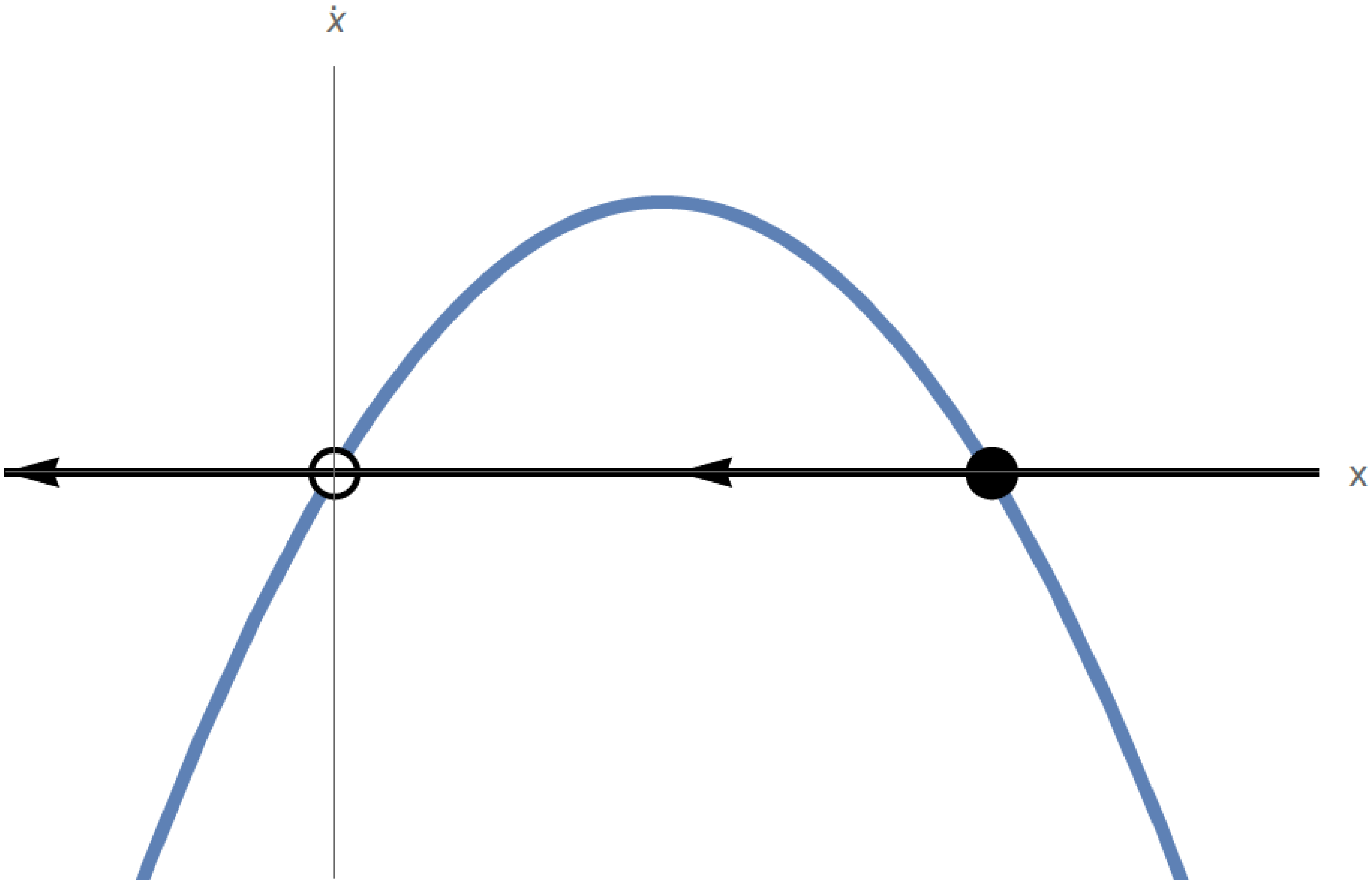
$r < 0$

Fall 2:



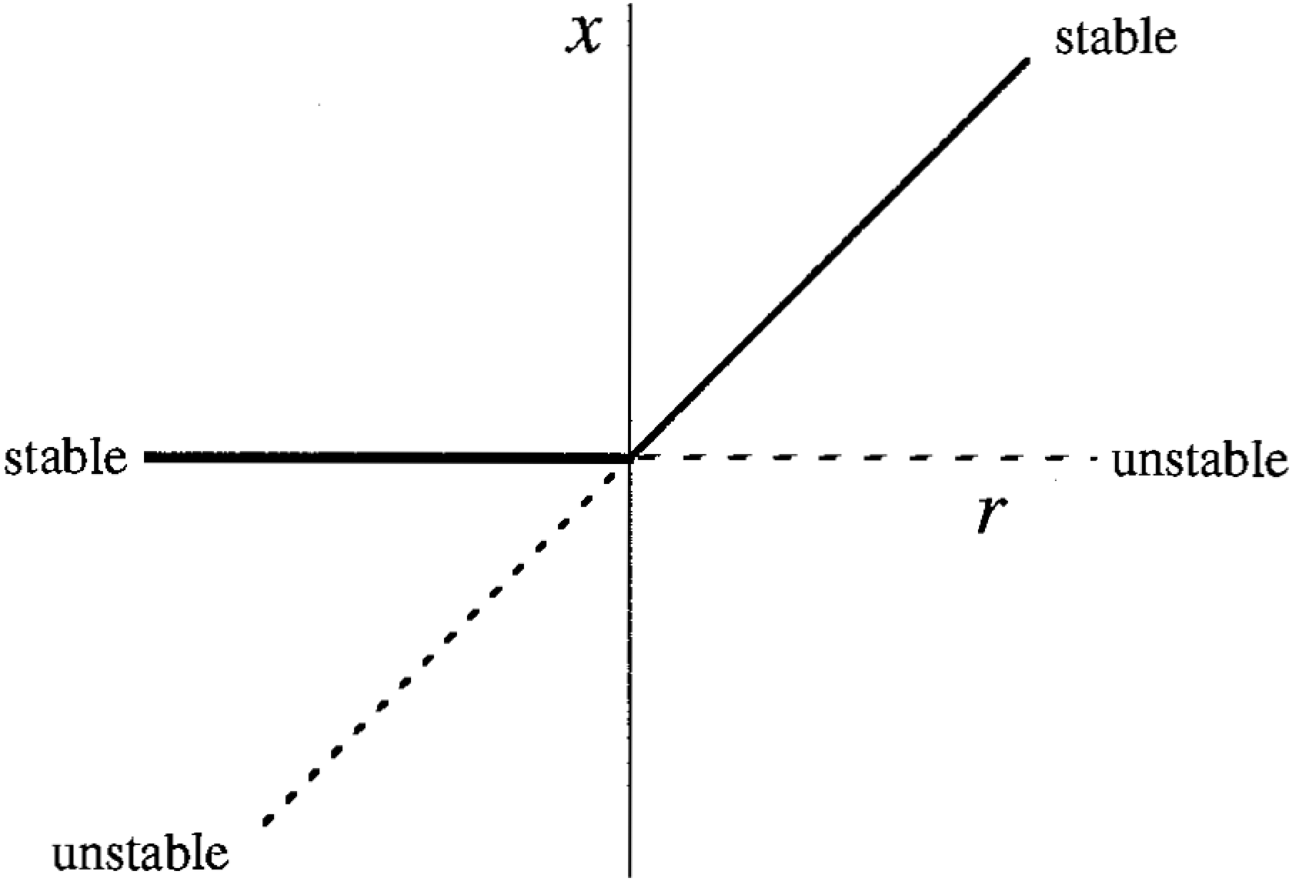
$$r = 0$$

Fall 3:



$$r > 0$$

Bifurkationsdiagramm



Pitchfork Bifurkation

- Modell für Systeme mit Symmetrie
- Es gibt 2 Arten dieser Bifurkation
  - Superkritische Pitchfork Bifurkation
  - Subkritische Pitchfork Bifurkation

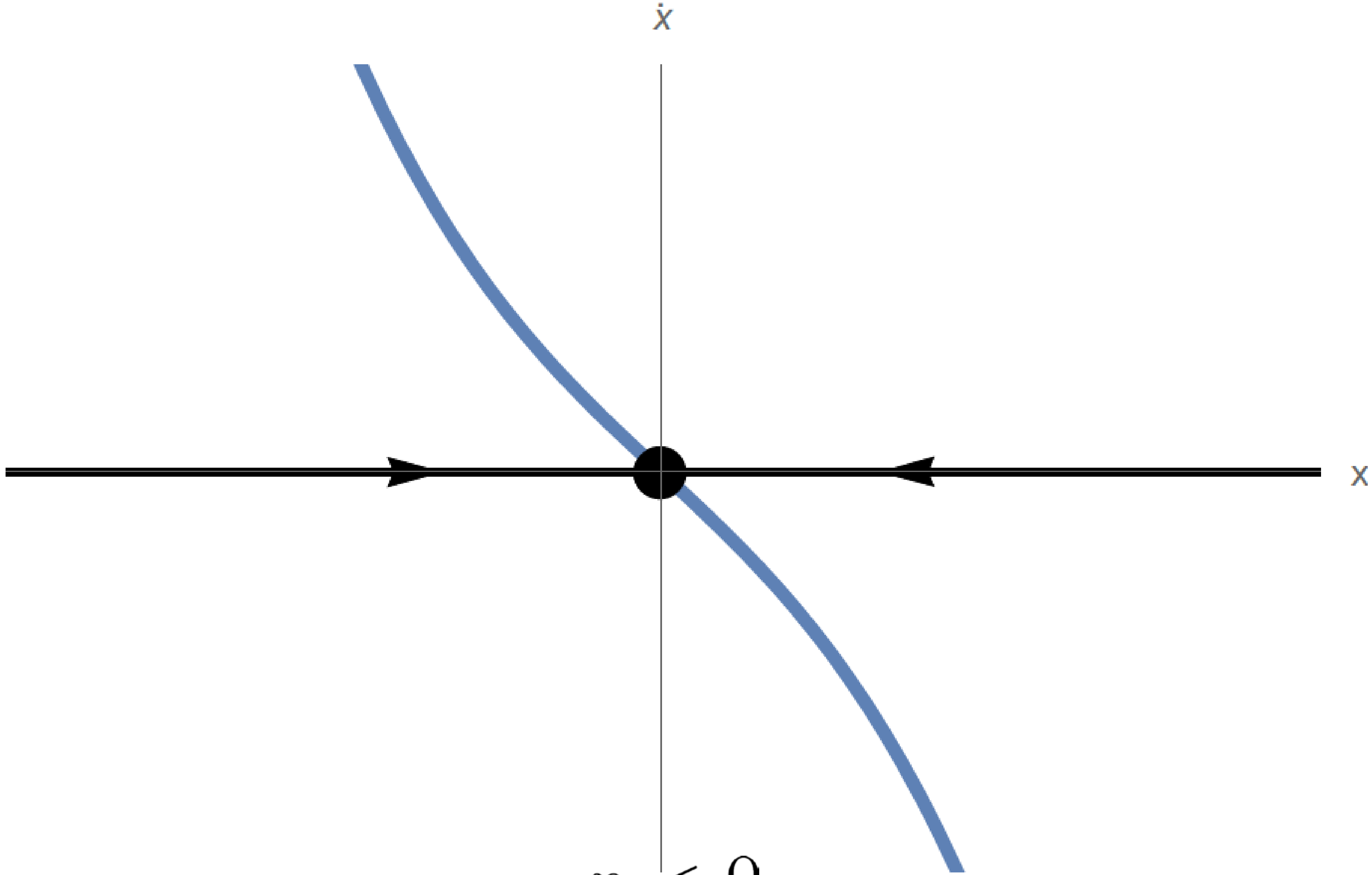
Superkritische Pitchfork Bifurkation

- Normalform $\dot{x} = rx - x^3$

$\longrightarrow$ invariant unter $x \to -x$

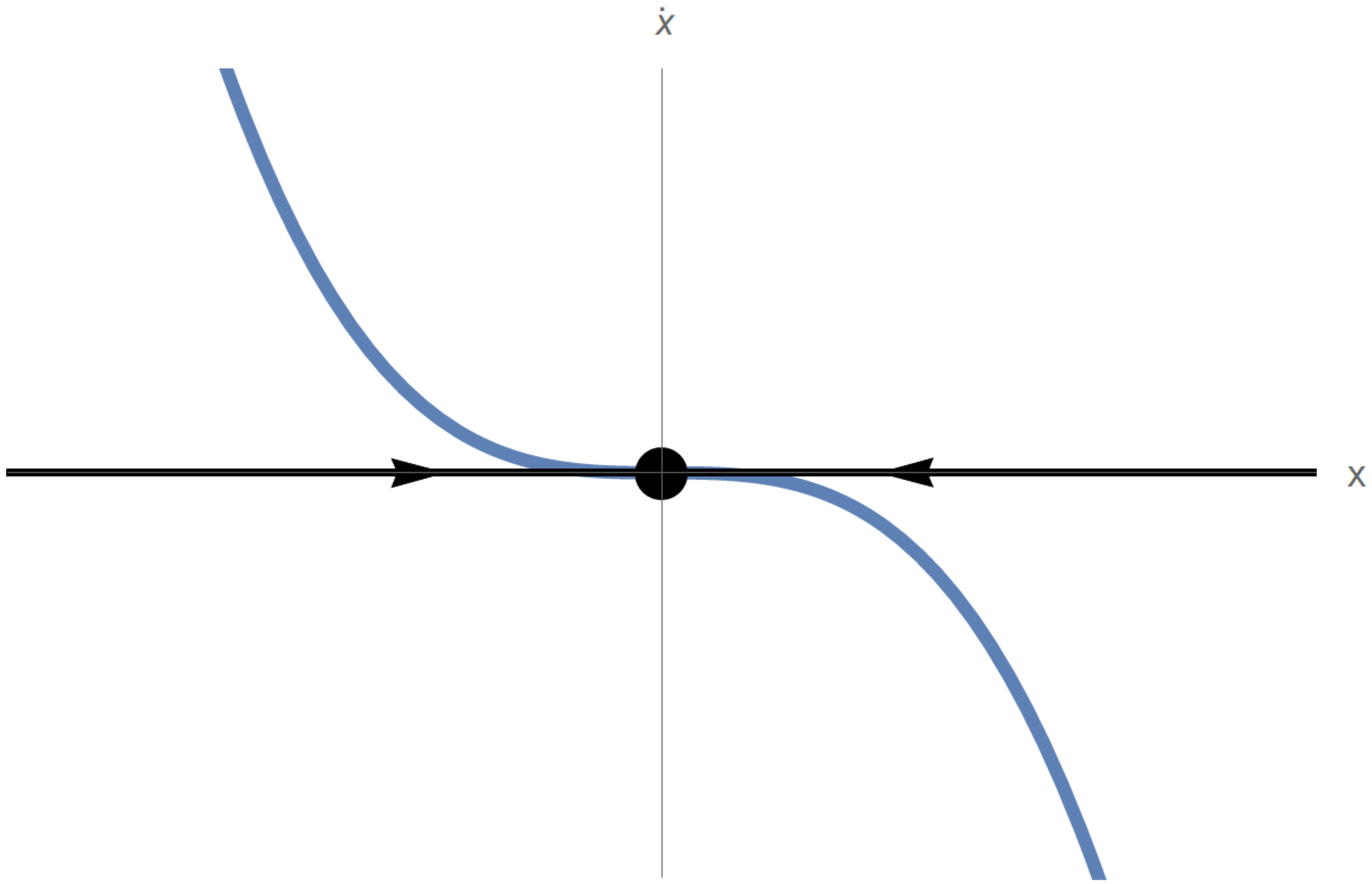
- Kubischer Term wirkt „stabilisierend“

Fall 1:



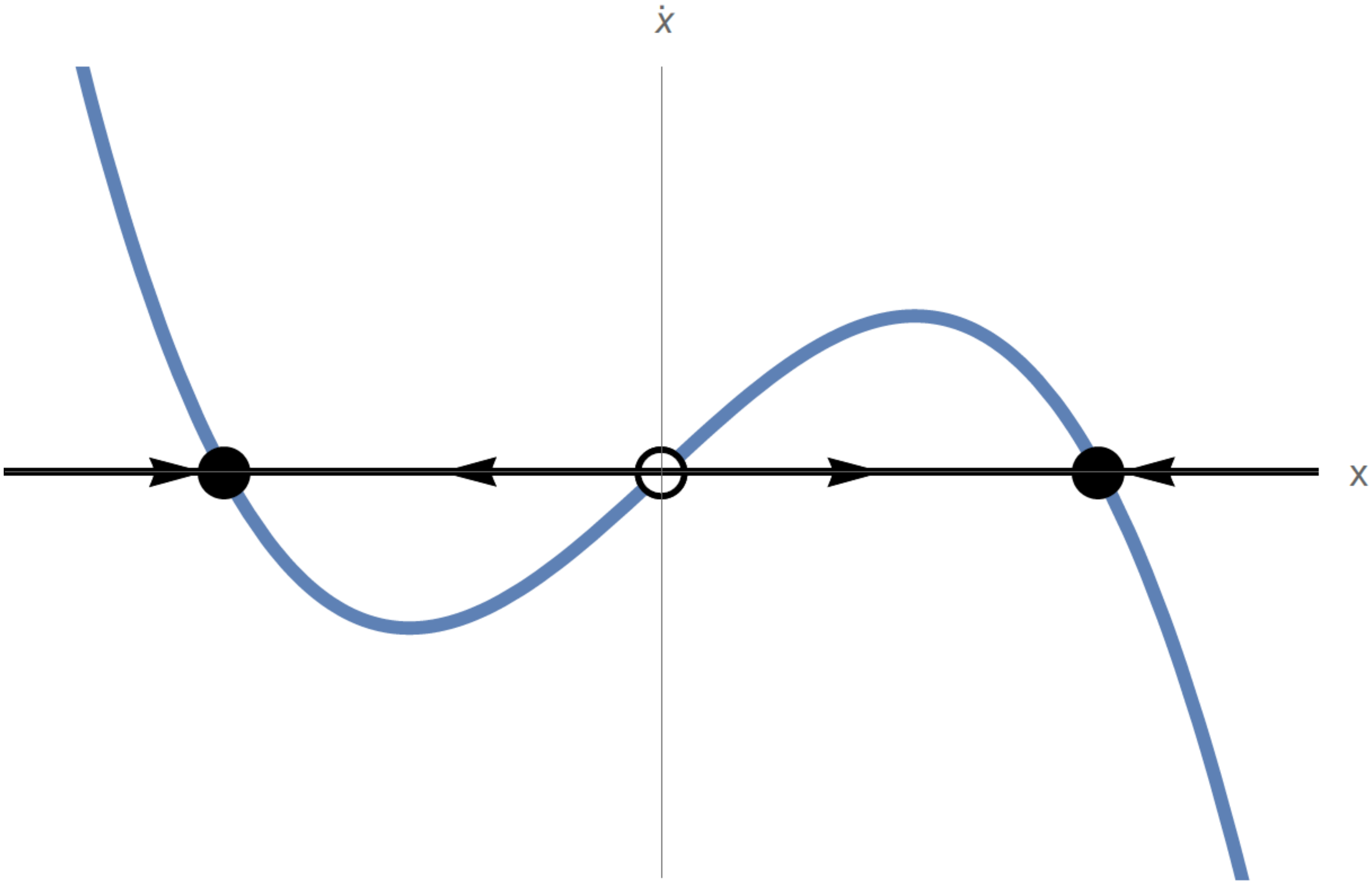
$r < 0$

Fall 2:



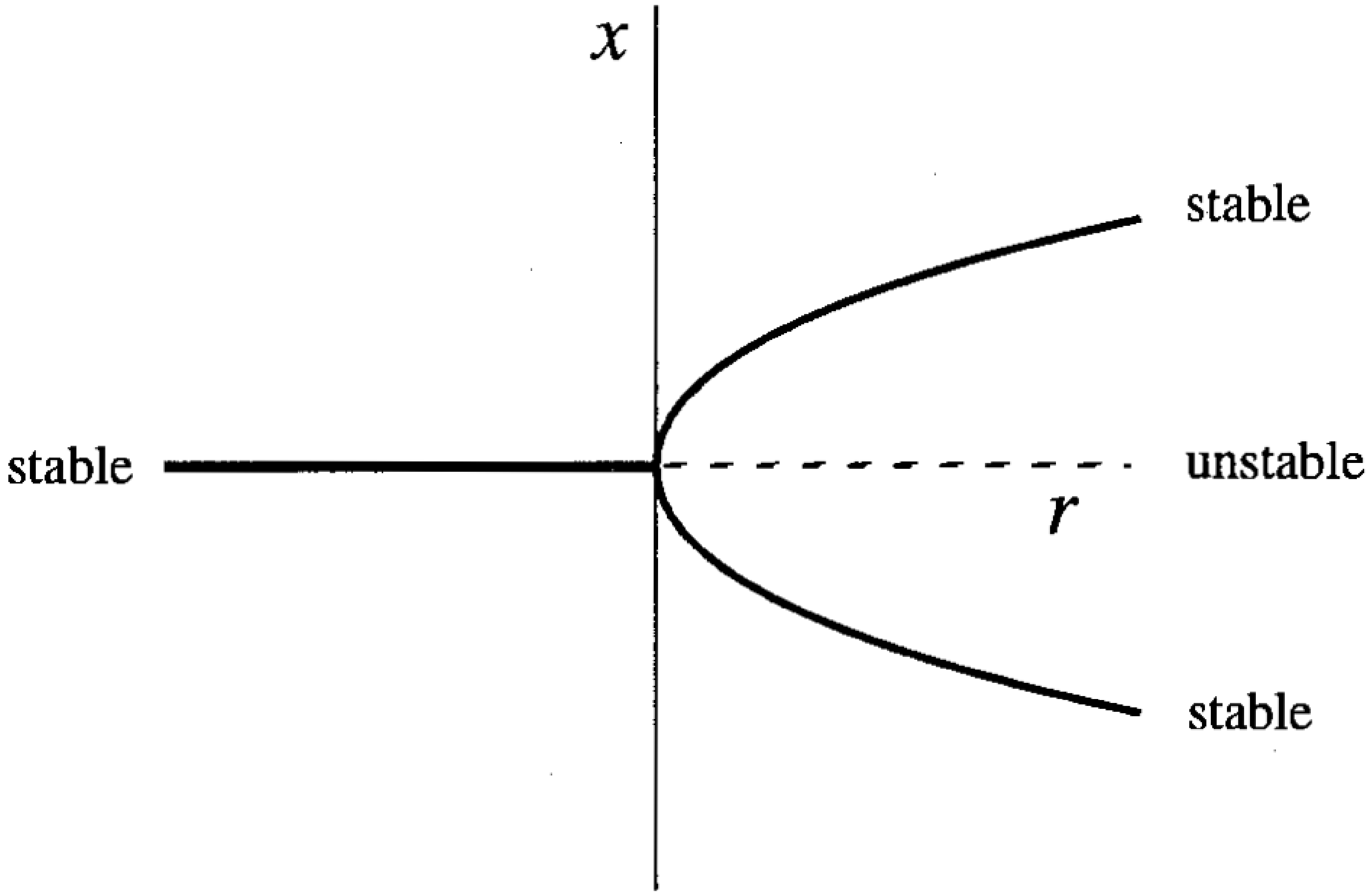
$$r = 0$$

Fall 3:



$$r > 0$$

Bifurkationsdiagramm



Subkritische Pitchfork Bifurkation

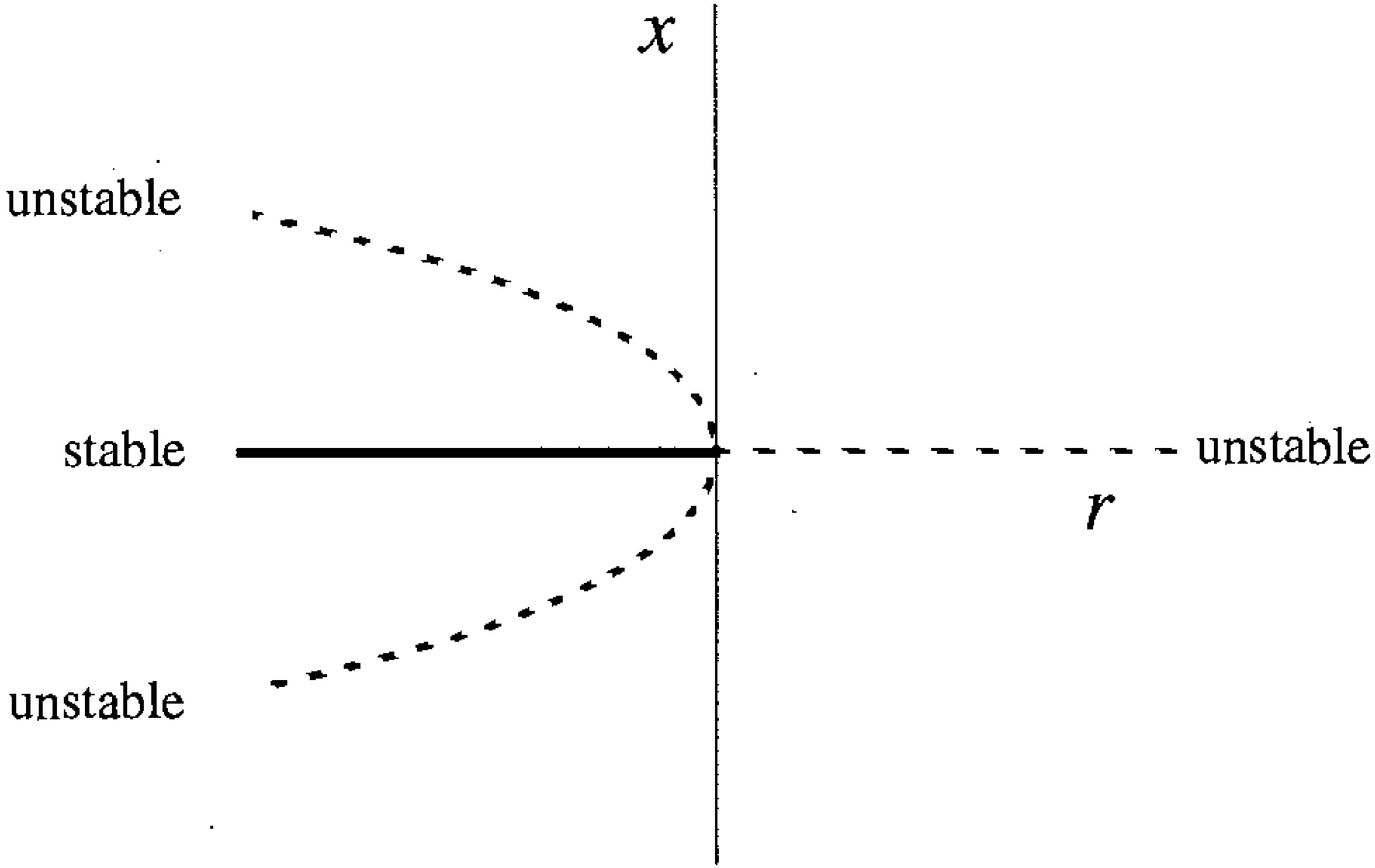
- Normalform $\dot{x} = rx + x^3$
- Kubischer Term ist hier nicht mehr stabilisierend
  - x^3 „treibt“ Funktion $\to \infty$

  $\longrightarrow$ andere Normalform für „stabile Funktionen“
- System invariant für $x \to -x$

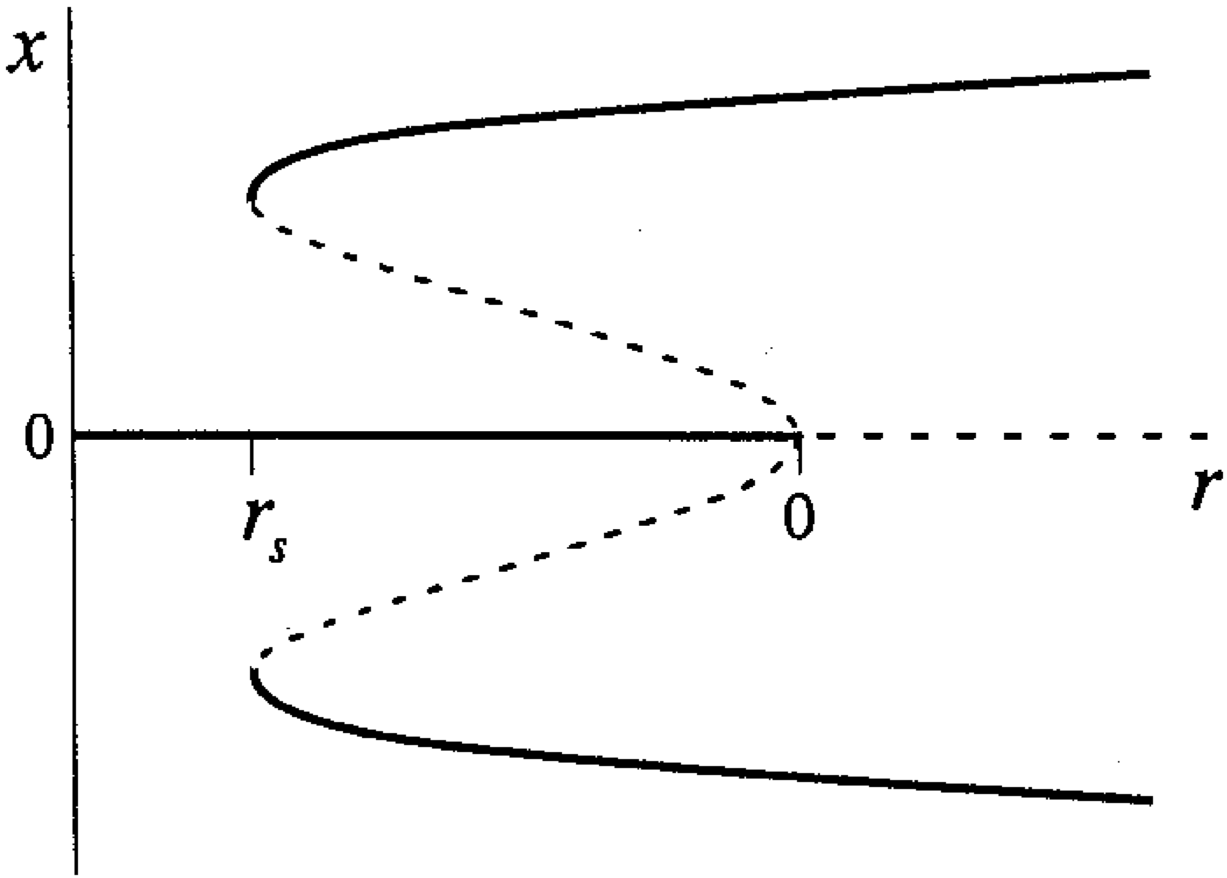
$\longrightarrow$ erster stabilisierender Term ist x^5

$\longrightarrow$ neue Normalform $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$

Bifurkationsdiagramm für „instabile Bifurkation“



Bifurkationsdiagramm für „stabile Bifurkation

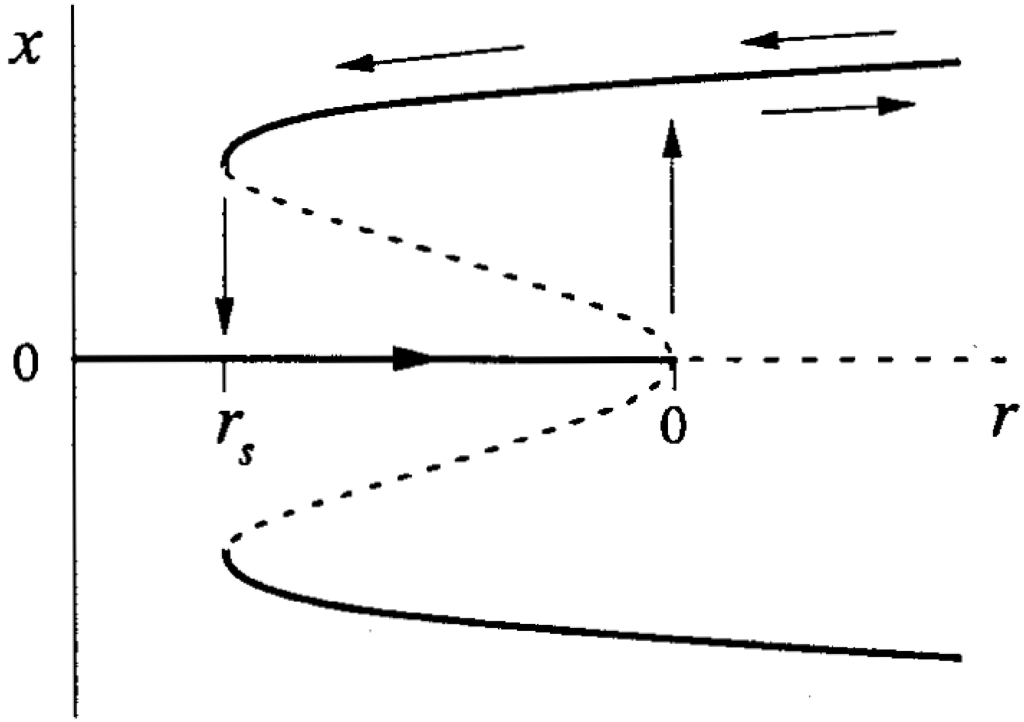


Wichtiges zur „stabilen Bifurkation“

- Für $r_s < r < 0$ koexistieren zwei stabile Zustände
  - Welcher Fixpunkt für $t \to \infty$ angenommen wird, ergibt sich aus der Anfangsbed. x_0
  - Daher ist der Fixpunkt im Ursprung gegen kleine Störungen stabil, nicht jedoch gegen große
    $\longrightarrow$ der Ursprungsfixpunkt ist nur lokal stabil

Wichtiges zur „stabilen Bifurkation“

- Die Existenz von versch. stabilen Zuständen ermöglicht *Sprünge* und *Hysteresen*



Nichtperfekte Bifurkationen

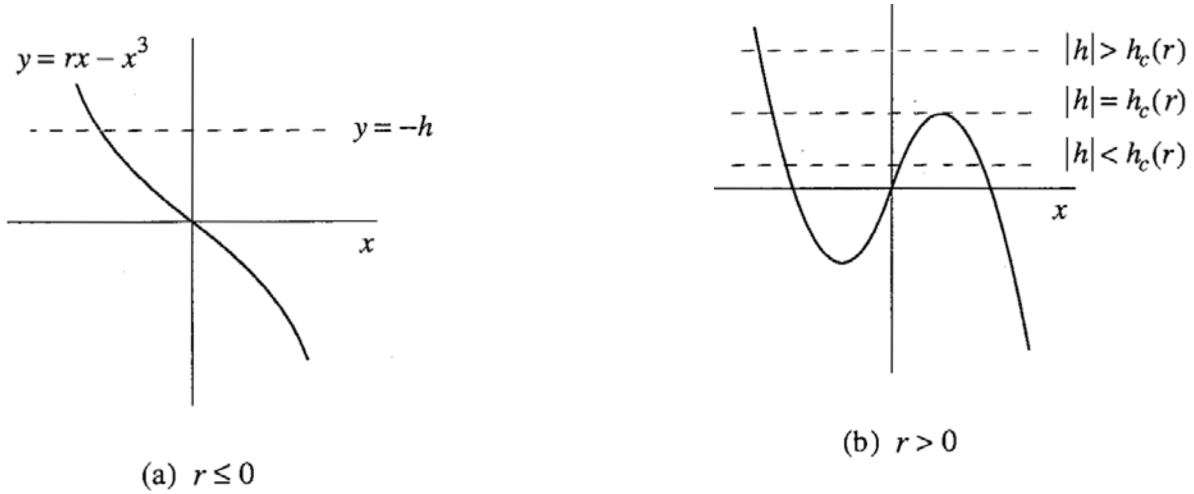
- Normalerweise Systeme nicht perfekt symmetrisch, sondern nur näherungsweise
- Diese Syteme haben Unvollkommenheiten
- Betrachte hierzu : $\dot{x} = h + rx - x^3$
  - Für $h = 0$ liegt normale Symmetrie vor
  - Für $h \neq 0$ liegt Symmetriebrechung vor
- Analyse hier deutlich schwieriger aufgrund zweier unabhängiger Parameter

Analyse der Fixpunkte

- graphischer Ansatz:
- Plotte $y = rx - x^3; y = h$ in ein Koordinatensyst.

$\longrightarrow$ Suche nach Schnittpunkten

- Schnittpunkte sind Fixpunkte



Analyse der Fixpunkte

- Kritischer Fall: Gerade ist Tangente an Extrempunkt
  - Dann: Sattel-Knoten-Bifurkation
- Suche Werte für h an denen Bifurkation auftritt:

$$\frac{d}{dx}(rx - x^3) = r - 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{r}{3}}$$

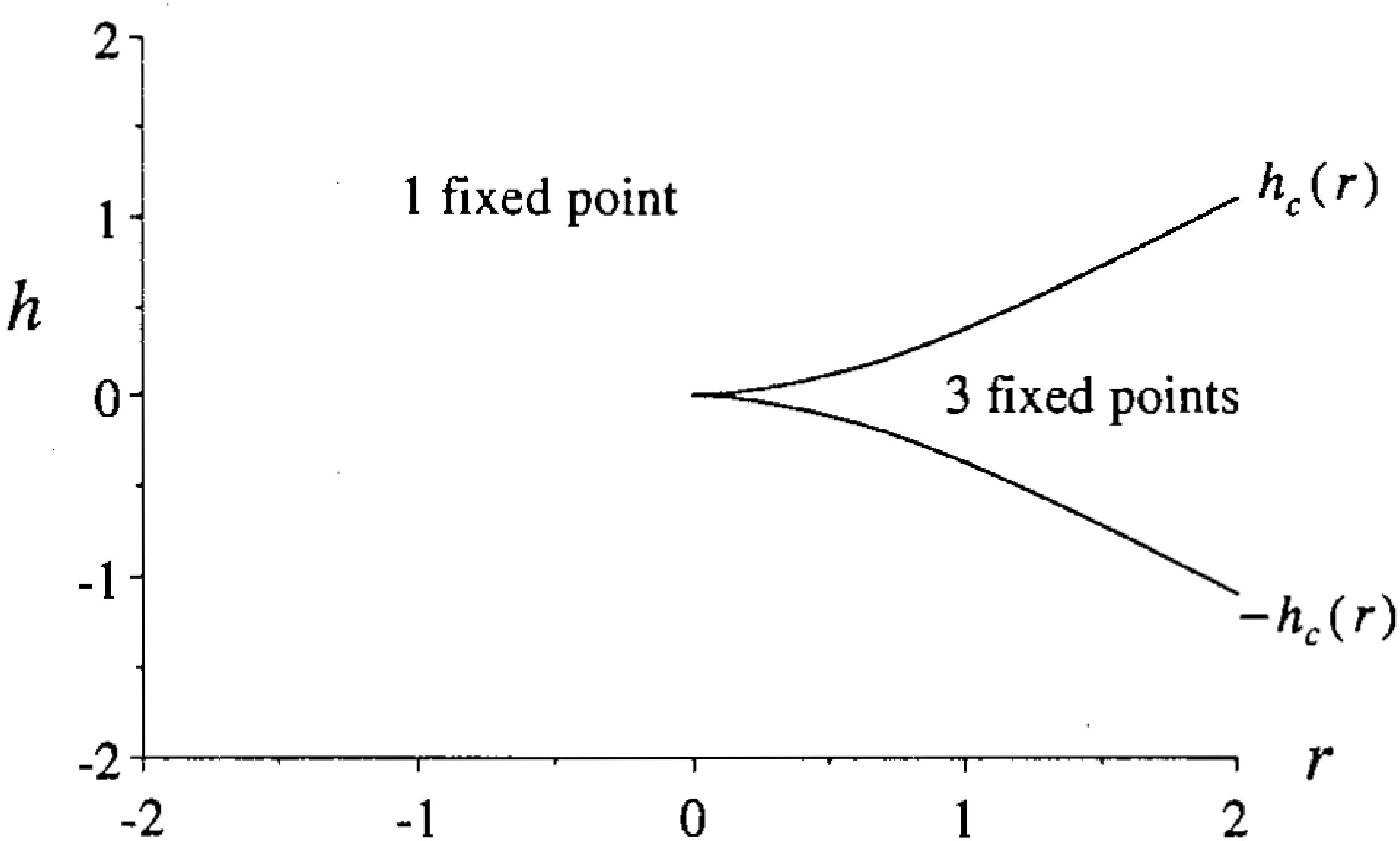
- Für den Wert am lokalen Maximum gilt:

$$rx_{max} - (x_{max})^3 = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}}$$

- Sattel-Knoten-Bifurkation tritt auf , wenn

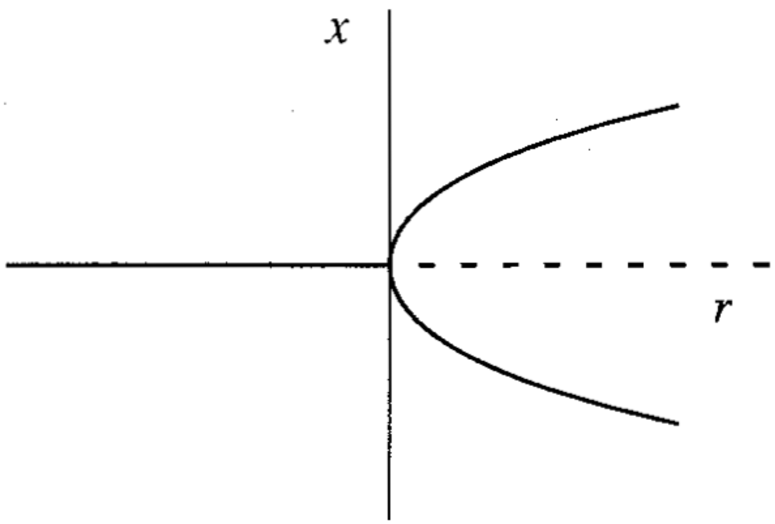
$$h = \pm h_c(r) \text{ ; mit } h_c(r) = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}}$$

Analyse der Fixpunkte



Analyse der Fixpunkte

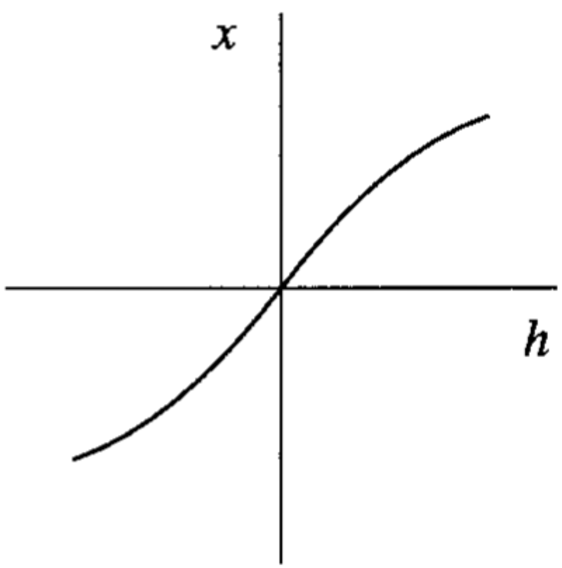
- Bifurkationsdiagramme von x^* für festes h



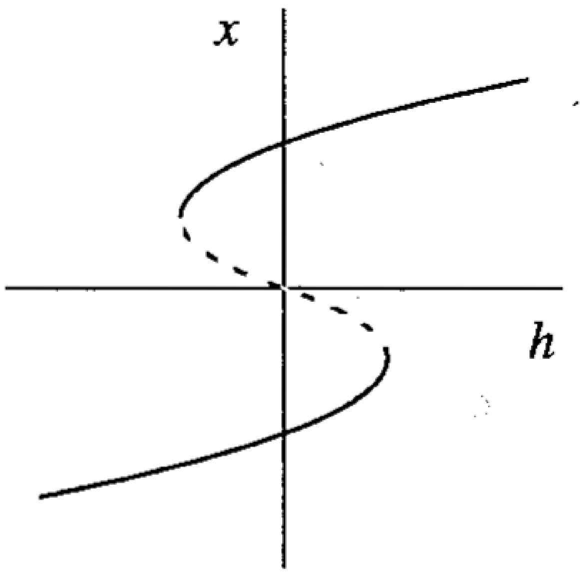
(a) $h = 0$ (b) $h \neq 0$

Analyse der Fixpunkte

- Bifurkationsdiagramme von x^*für festes r

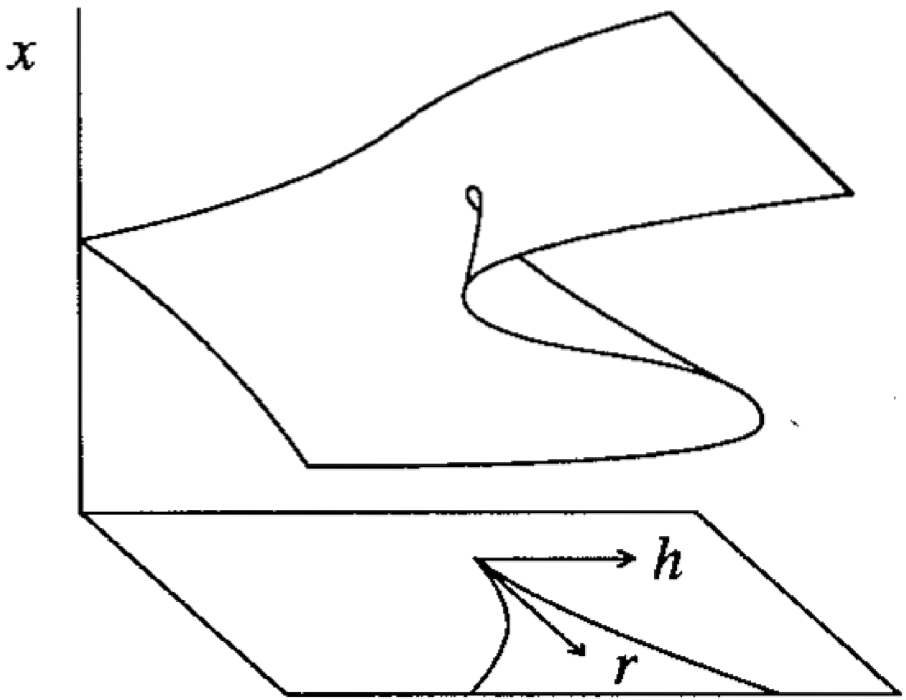


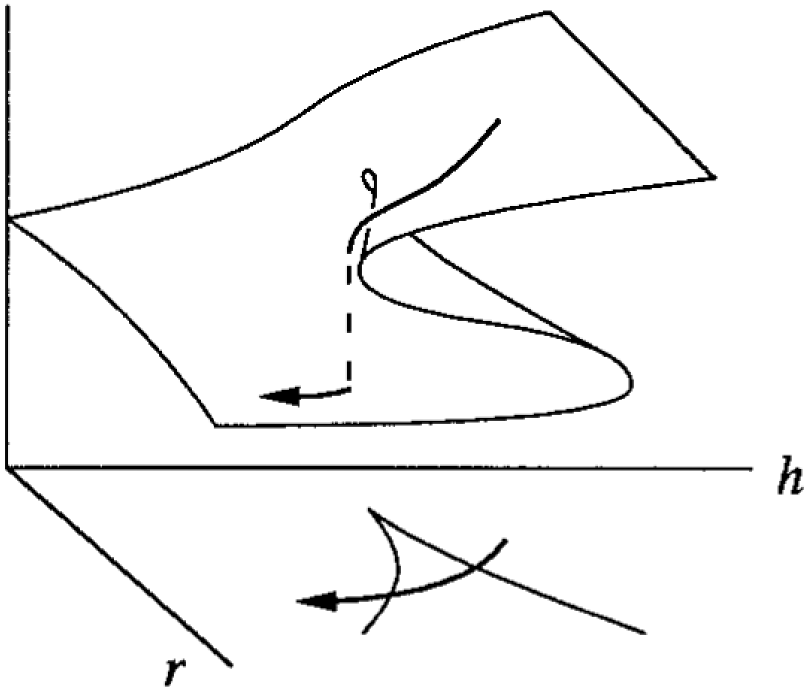
(a) $r \leq 0$



(b) $r > 0$

Kurze Anmerkung zu Katastrophen





Spitzenkatastrophe

Beispiel : Populationsentwicklung

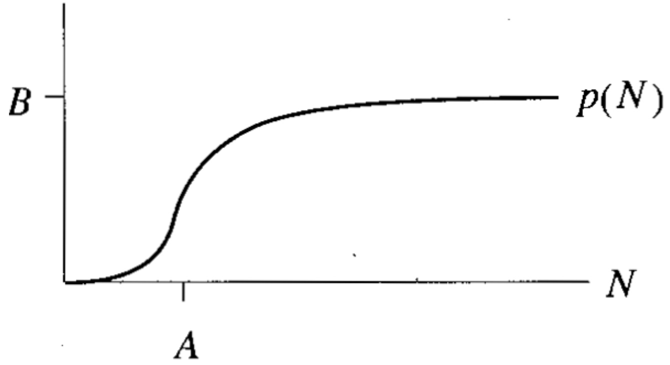
- Hier: Falterart aus Kanada
- Modell bedient sich der „Trennung von Zeiträumen“
  - Population wächst schnell (char. Zeitraum: Monate)
  - Bäume wachsen langsam (char. Zeitraum Jahre)
- Bei Betrachtung der Populationsentwicklung können also die „Waldvariablen“ konstant angenommen werden

Populationsentwicklung

Für die Population gilt: $\dot{N} = RN(1 - \frac{N}{K}) - p(N)$

$N(t)$ wächst logistisch mit Wachstumsrate R und Tragfähigkeit K (hierbei K fest)

$p(N)$ (Todesrate aufgr. von Raubtieren) wächst logistisch



Populationsentwicklung

Hier $p(N) = \frac{BN^2}{A^2+N^2}$ mit $A, B > 0$

$\Rightarrow \dot{N} = RN(1 - \frac{N}{K}) - \frac{BN^2}{A^2+N^2}$ (1)

Untersuche Modell nun auf einen sog.Ausbruch

Dimensionlose Formulierung

teile (1) durch B ; sei weiterhin $x = \frac{N}{A}$

$\Rightarrow \frac{A}{B}\frac{dx}{dt} = \frac{R}{B}Ax(1 - \frac{Ax}{K}) - \frac{x^2}{1+x^2}$ (2)

wir definieren die dimensionslose Zeit τ,

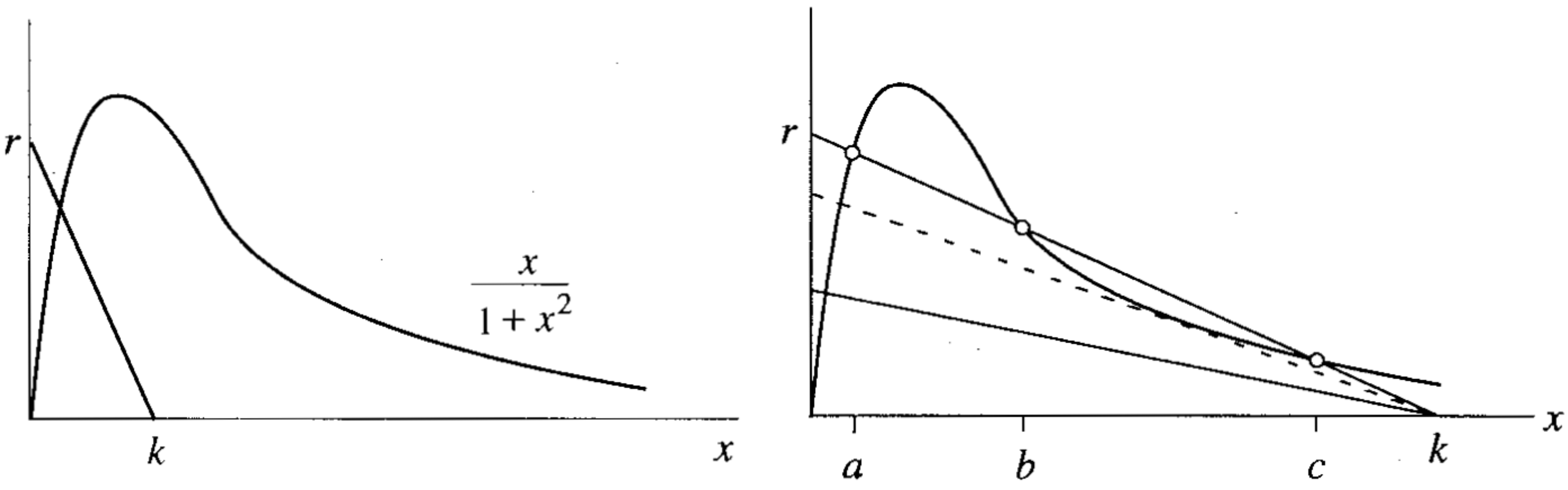
sowie die dimensionslosen Parameter r ,k wie folgt:

$\tau = \frac{Bt}{A}$; $r = \frac{RA}{B}$; $k = \frac{K}{A}$

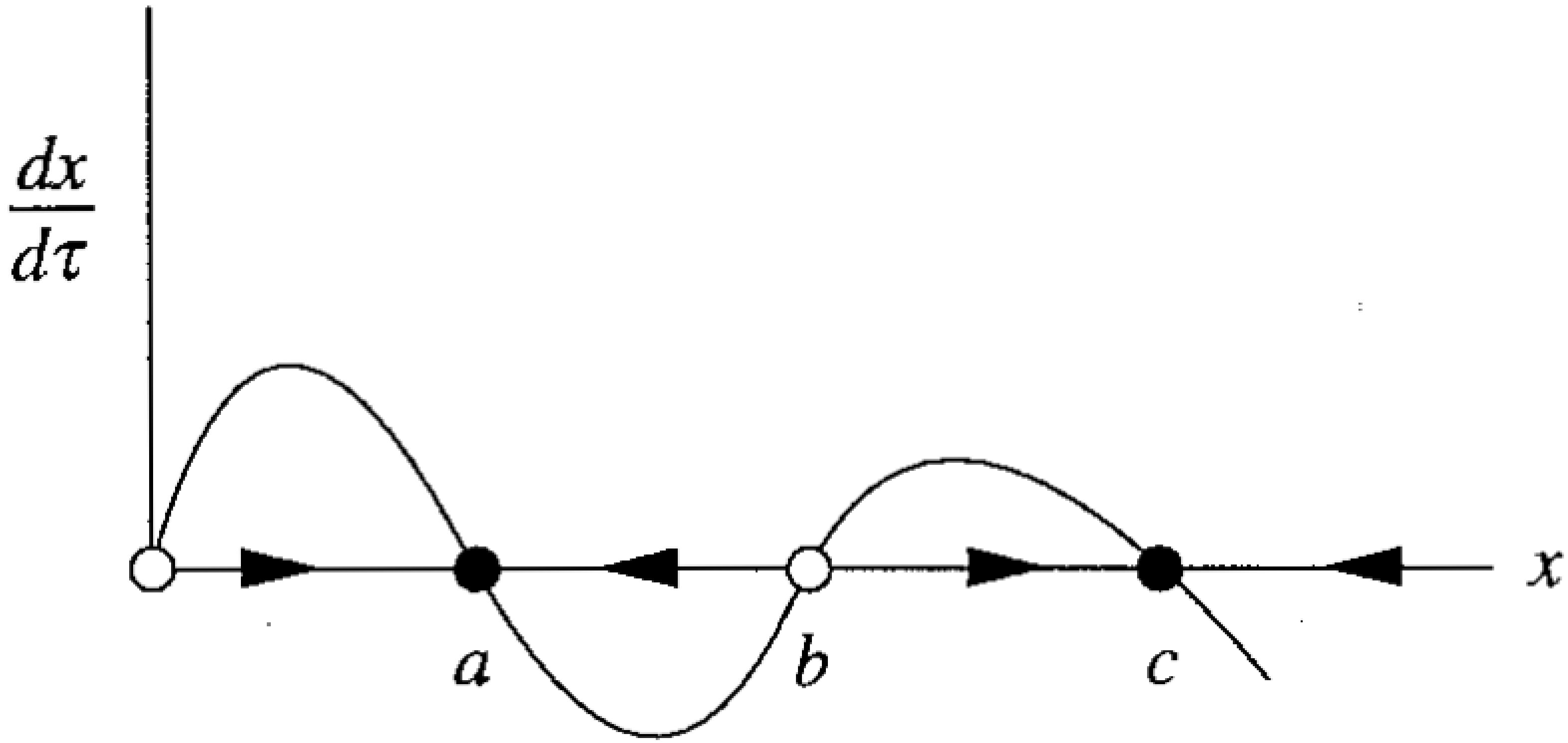
(2) $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{x^2}{1+x^2}$ (3)

Analyse der Fixpunkte

- Erster Fixpunkt bei $x^* = 0$ (immer instabil)
- Weitere Fixpunkte durch Lösung von $r(1 - \frac{x}{k}) = \frac{x}{1+x^2}$



Analyse der Fixpunkte



Bifurkationskurven errechnen

- Wir untersuchen Kurven im (k, r)-Raum für die eine Sattel-Knoten-B. vorliegt
- Wir können jedoch die Parameter nicht als Funktion voneinander ausdrücken
- Wähle Parametrisierung $(k(x), r(x))$ mit $x > 0$

Bifurkationskurven errechnen

- Für S-K-B müssen erfüllt sein:

$$(1)\ r(1-\tfrac{x}{k}) = \tfrac{x}{1+x^2}$$

$$(2)\ \tfrac{d}{dx}[r(1-\tfrac{x}{k})] = \tfrac{d}{dx}[\tfrac{x}{1+x^2}] \Leftrightarrow -\tfrac{r}{k} = \tfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\ (3)$$

- Einsetzen von (3) in (1) liefert:

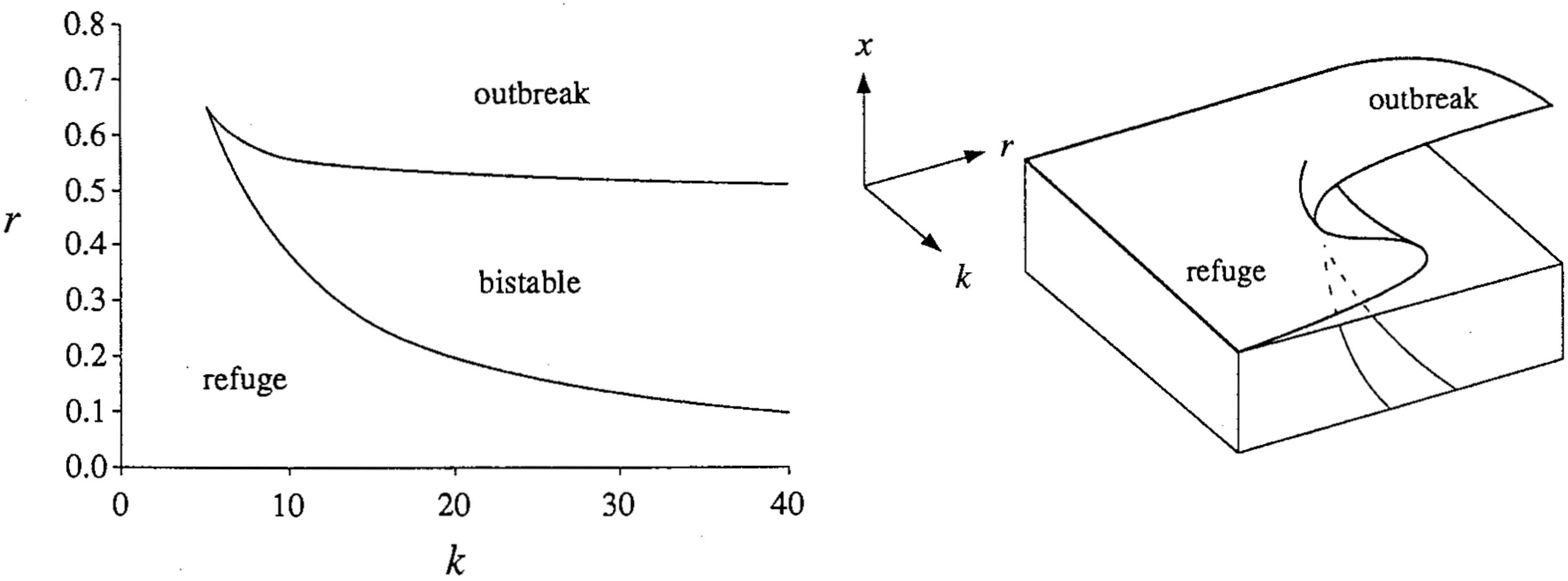
$$(4)\ r = \tfrac{2x^3}{(1+x^2)^2}$$

- Einsetzen von (4) in (3) liefert:

$$(5)\ k = \tfrac{2x^3}{x^2-1}$$

- Bifurkationskurven sind (5) und (4)

Bifurkationskurven



2D-Probleme

- Betrachte nun nichtlineare Probleme vom Typ

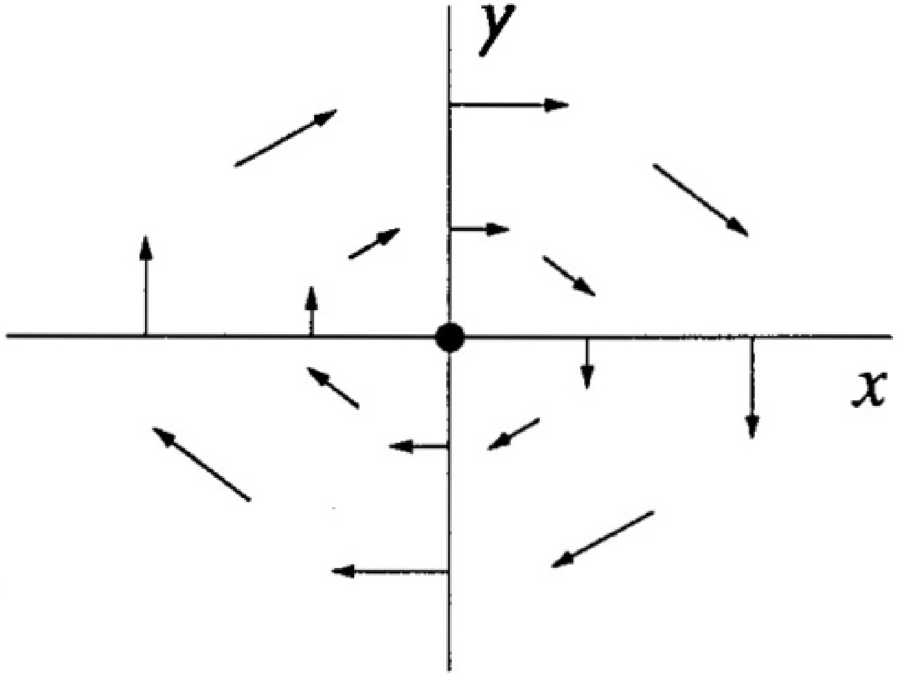
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f\left(x, y\right) \\ \dot{y} = g\left(x, y\right) \end{array} \right\}$$

- Fixpunkte dann gegeben durch

$$\left| \begin{array}{l} f\left(x, y\right) = 0 \\ g\left(x, y\right) = 0 \end{array} \right|$$

2D-Probleme

- (x, y) baut Phasenebene auf
- $(\dot{x}, \dot{y})$ ist dann Vektorfeld auf der Phasenebene



2D-Probleme

- Erst lineare Systeme untersuchen!

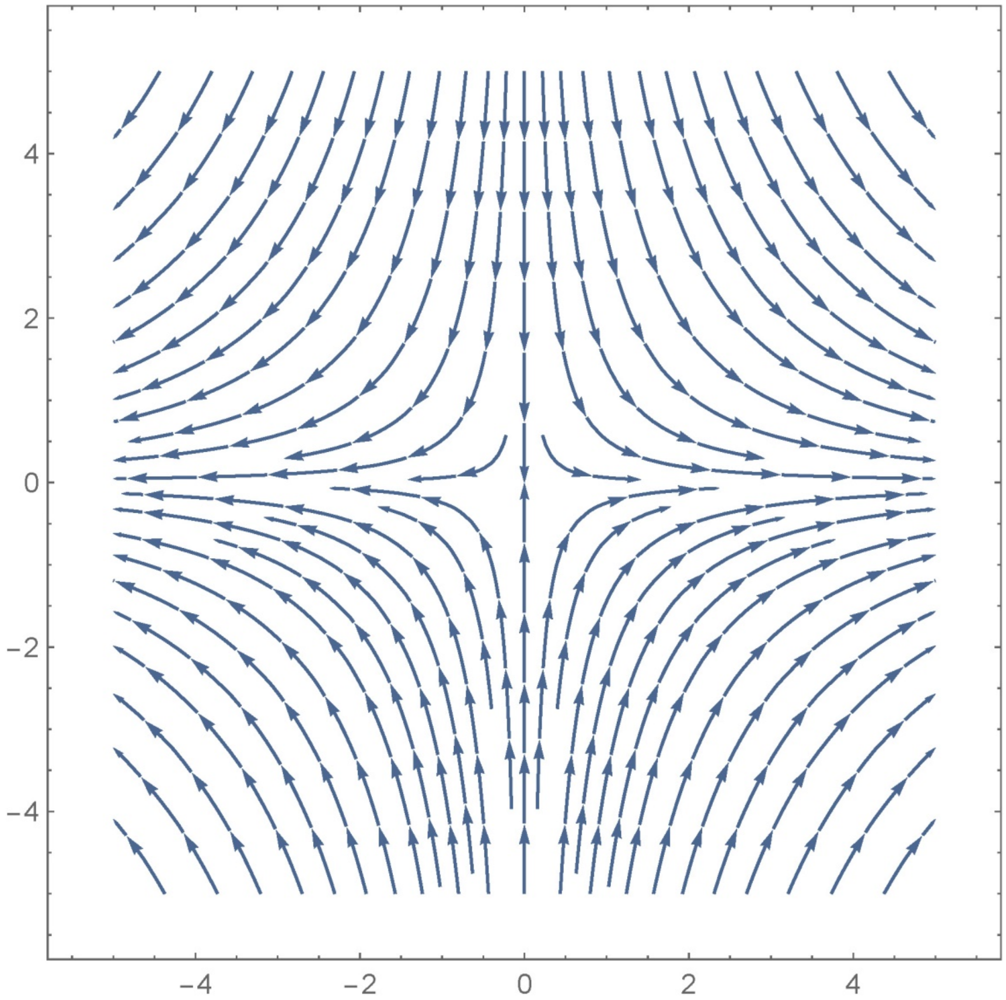
$$\begin{Bmatrix} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Allgemeine Lösung: $\vec{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2}$

- Schreibe $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right)$
  - Mit $\Delta = \lambda_1\lambda_2$ und $\tau = \lambda_1 + \lambda_2$

$\Delta < 0$

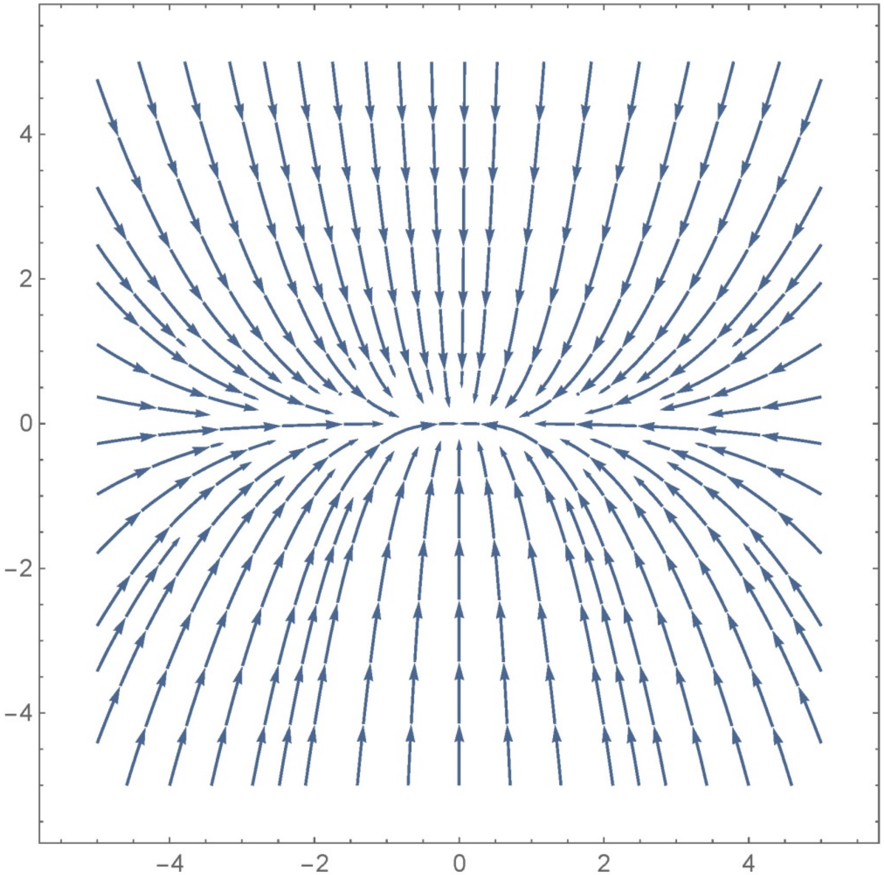
Sattelpunkt



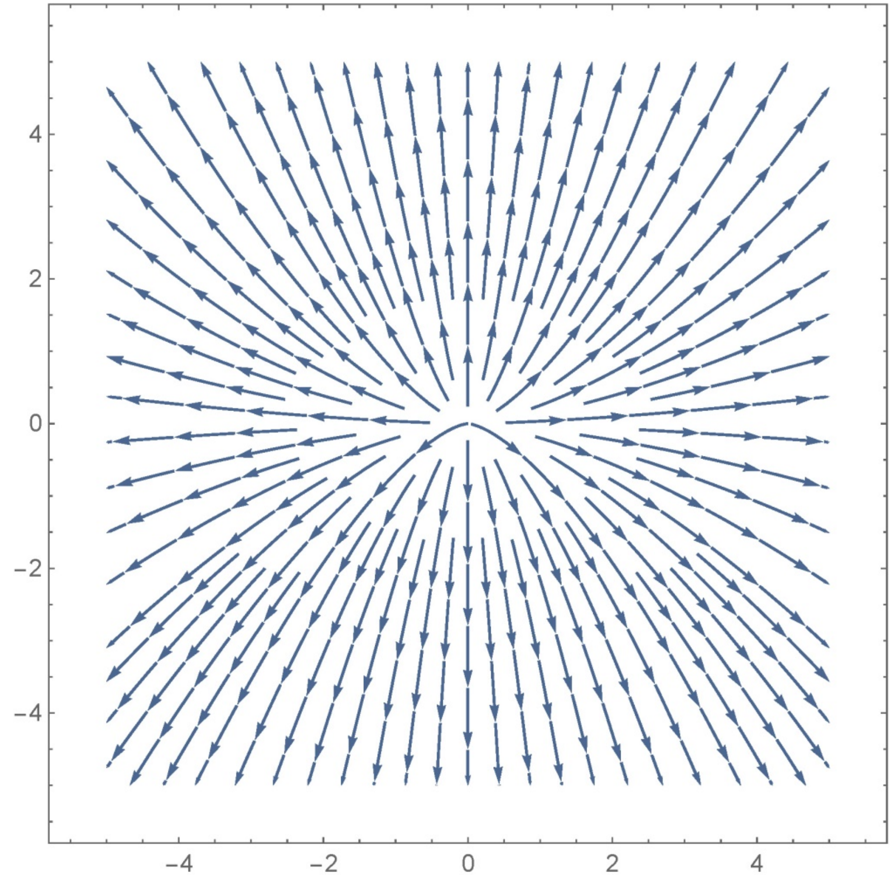
$$\Delta > 0 \text{ und } \tau^2 - 4\Delta > 0$$

Knoten

- $\tau < 0$: Stabil



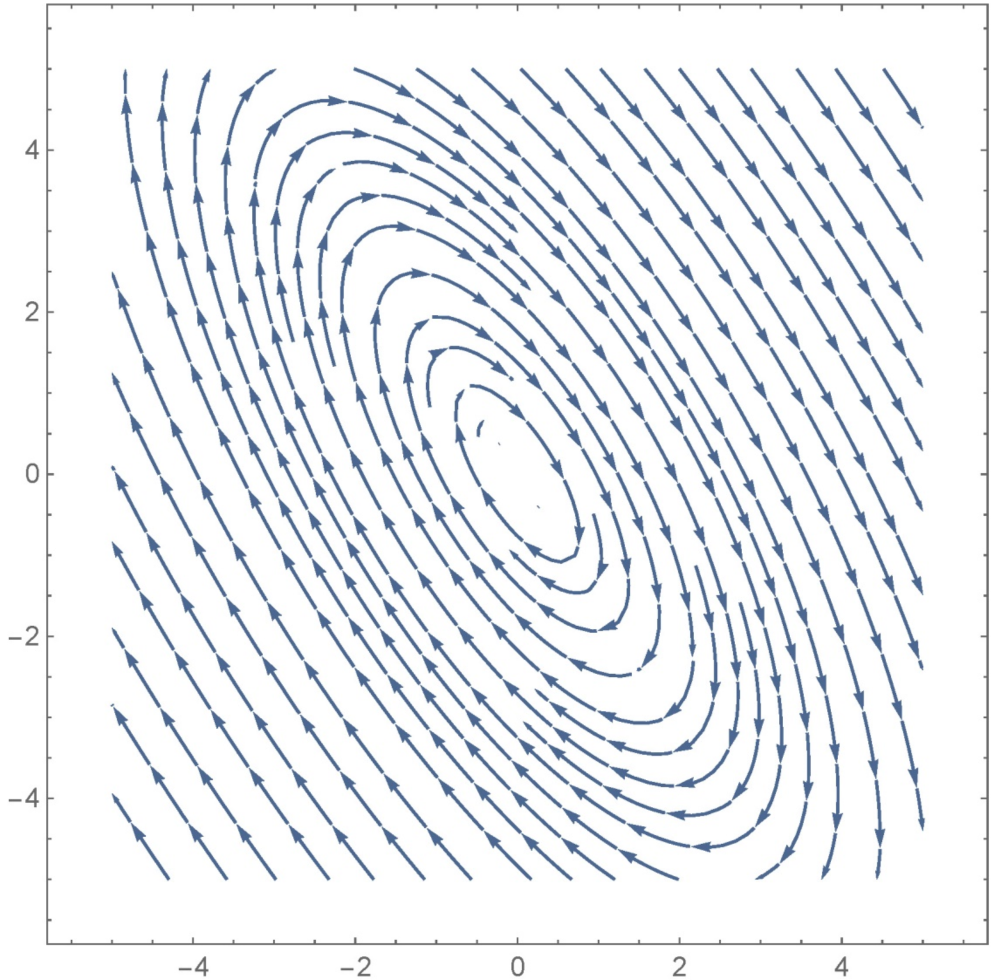
- $\tau > 0$: Instabil



$\Delta > 0$ und $\tau^2 - 4\Delta < 0$

Periodische Lösung

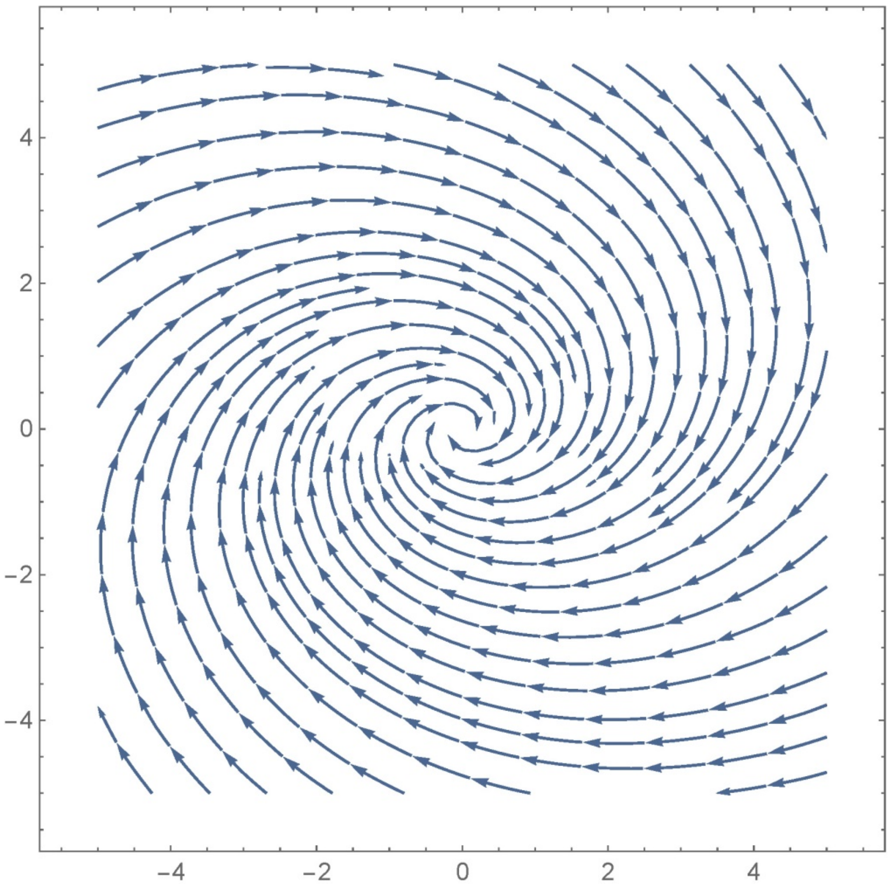
- $Re\left[\lambda_j\right] = 0$



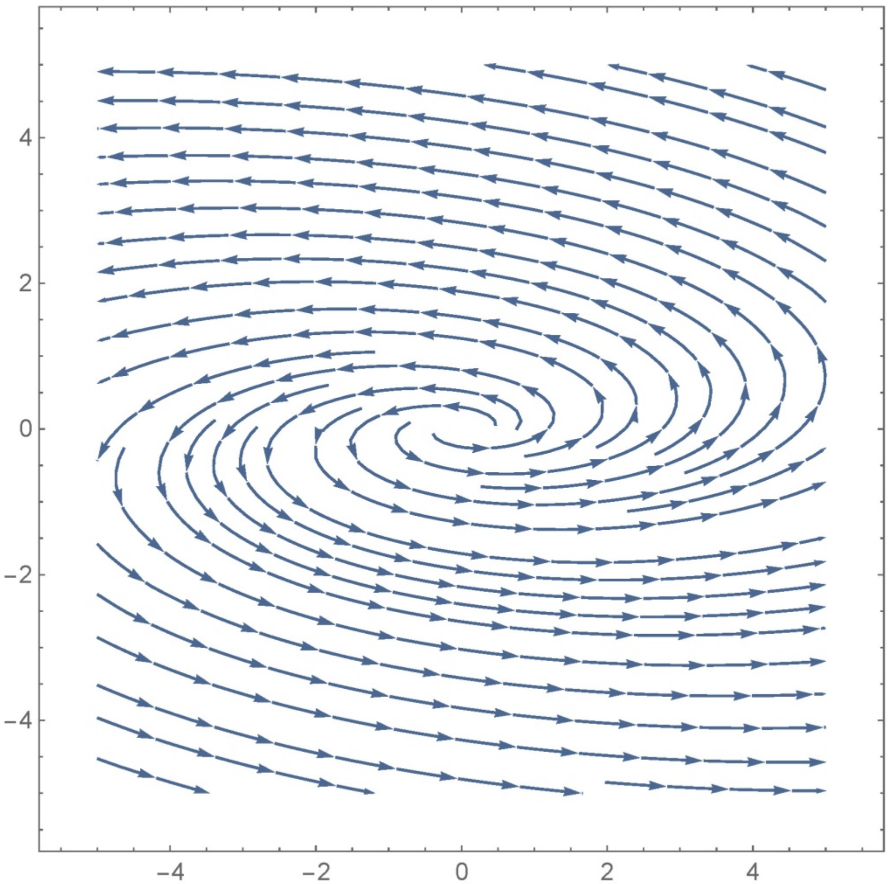
$$\Delta > 0 \text{ und } \tau^2 - 4\Delta < 0$$

Spirale

- $Re\left[\lambda_j\right] < 0$: stabil

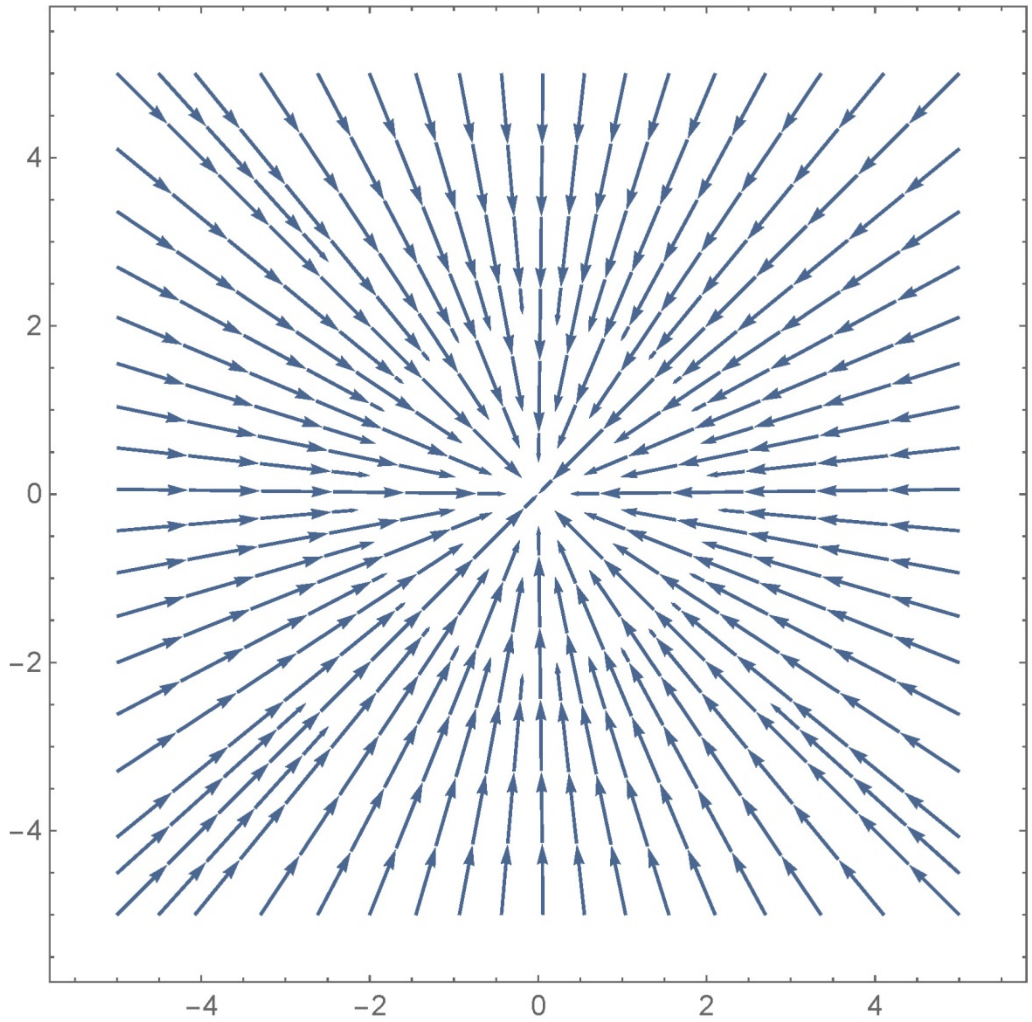


- $Re\left[\lambda_j\right] > 0$: instabil



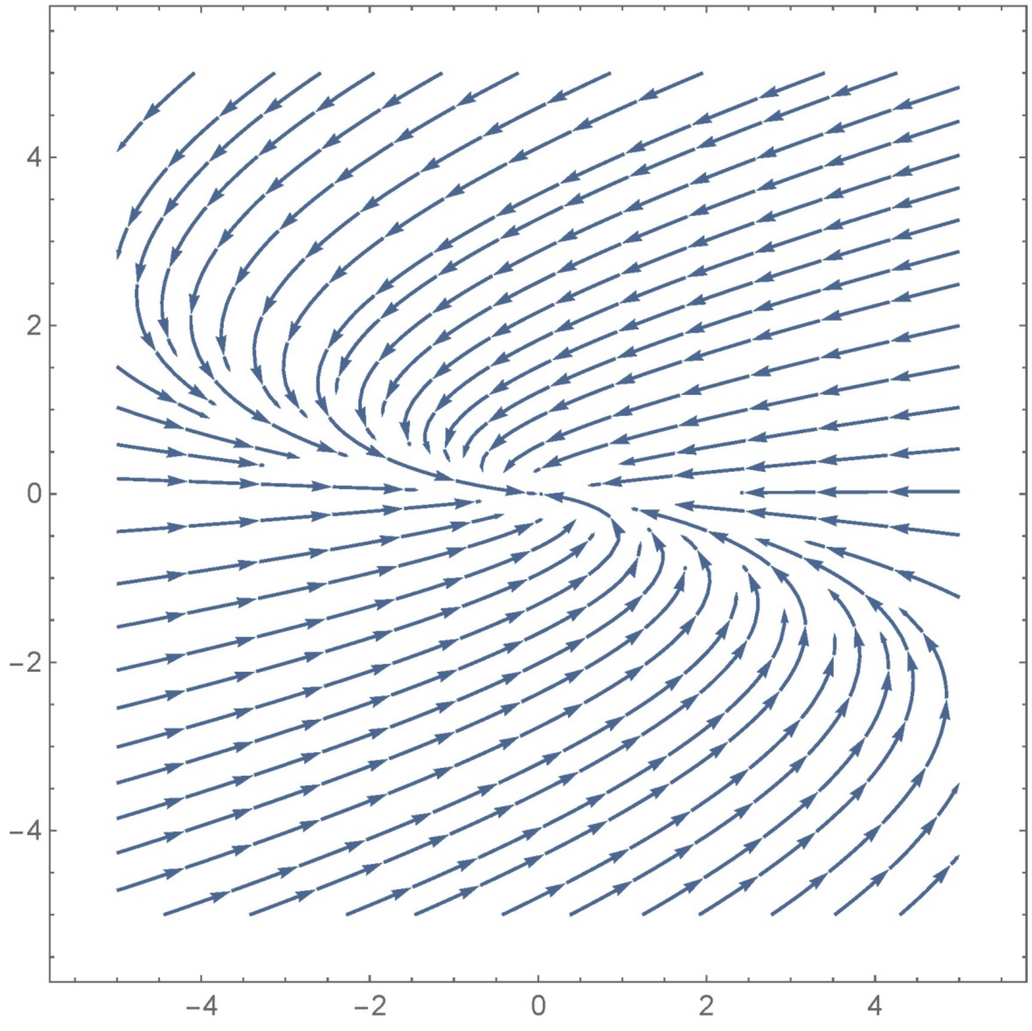
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

Sonderfall: Stern-Knoten



$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, 1 \text{ EV}$$

Sonderfall: Entarteter-Knoten



Zusammenfassung

- Was haben wir bisher gelernt?
  - Fixpunkte zur Betrachtung der Dynamik
  - Stabilität graphisch oder analytisch bestimmen
  - Graphisch: Vektorflusses visualisieren
  - Analytisch: Lineare Stabilitätsanalyse
  - In 2D viel mehr Möglichkeiten als in 1D

Lotka-Volterra-Modelle

- Beschreiben Wechselwirkung von mehreren Populationen
- Beispiel: Räuber-Beute-Problem
  - Populationszahlen: N_1 (Beute), N_2 (Räuber)
  - Ungestörte Wachstumsrate: $\dot{N}_1 \propto \epsilon_1 N_1$
    $\dot{N}_2 \propto -\epsilon_2 N_2$
  - Begegnung Räuber-Beute: $\dot{N}_1 \propto -\gamma_1 N_1 N_2$
    $\dot{N}_2 \propto +\gamma_2 N_1 N_2$

Lotka-Volterra-Modelle

- Insgesamt also:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= \epsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 &= -\epsilon_2 N_2 - \gamma_2 N_1 N_2 \end{aligned}$$

- Betrachte die Dynamik mit „Mathematica“!

Quellenverzeichnis

- Strogatz, Steven H. (1994): Nonlinear Dynamics and Chaos. Massachusetts
- Suter, Dieter (2010): Skript zur Vorlesung „Analytische Mechanik“. [cited 02.06.2015]. https://e3.physik.uni-dortmund.de/~suter/Vorlesung/Physik_III_WS10/2.8_Chaos.pdf
- [cited 29.05.2015] http://de.wikipedia.org/wiki/Kritischer_Punkt_(Dynamik)