# Lotka-Volterra

Till Rehmert
Hemmat Djamali
10.06.2015

# Inhalt

- Motivation
- Räuber-Beute-System / Lotka-Volterra
- Eingriffe von außen
- Logistisches Wachstum
- Jacobi-Matrix
- Drei Spezies
- Infektion/Epidemie
- Wirtschaftsmodell

# Motivation

Wie kam Lotka und Volterra auf die Idee?

# Motivation

Wie kam Lotka und Volterra auf die Idee?

→ Kurz vor dem Ende des ersten Weltkrieg:
Anteil der Jagdfische im Gegensatz zu den Beutefischen zu hoch.

Danach stabilisierte sich das wieder.

# Motivation

Wie kam Lotka und Volterra auf die Idee?

→ Kurz vor dem Ende des ersten Weltkrieg:
Anteil der Jagdfische im Gegensatz zu den Beutefischen zu hoch.

Danach stabilisierte sich das wieder.

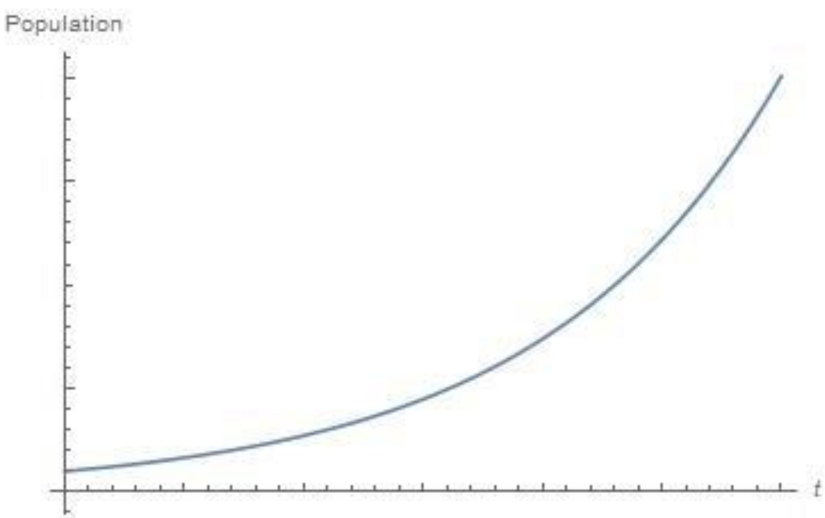
Lotka und Volterra kamen getrennt auf die selbe Gleichung

# Problemstellung

# Problemstellung

**Beute $\boldsymbol{h(t)}$**

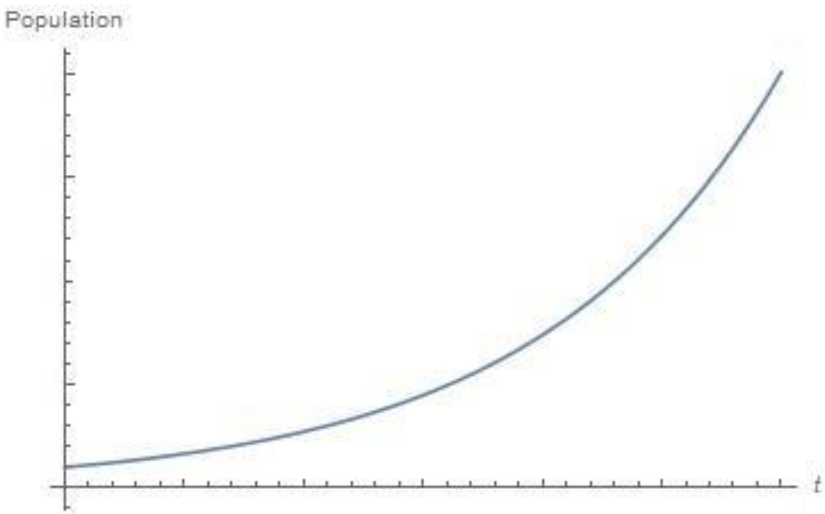
- Annahme: Beute nimmt exponentiell zu (∞-viel Nahrung)
- $h'(t) = a * h(t)$



# Problemstellung

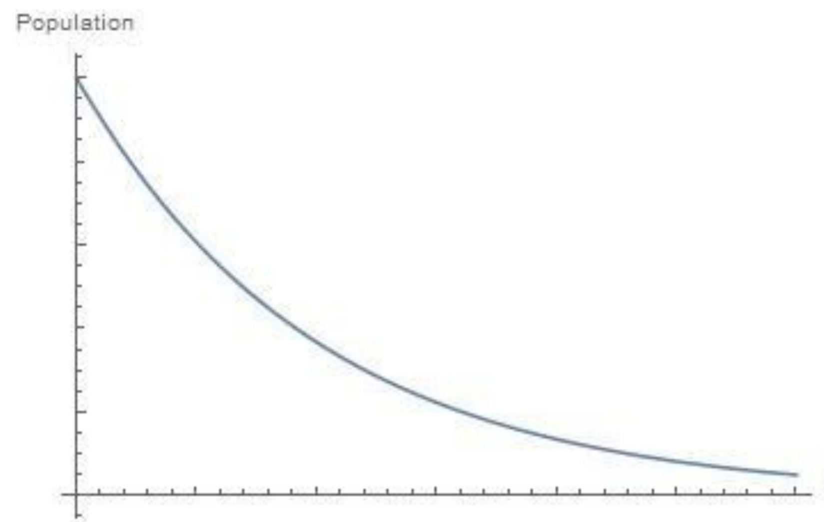
**Beute $\boldsymbol{h(t)}$**

- Annahme: Beute nimmt exponentiell zu (∞-viel Nahrung)
- $h'(t) = a * h(t)$




**Räuber $\boldsymbol{f(t)}$**

- Annahme: Räuber nehmen exponentiell ab
- $f'(t) = -c * f(t)$



# Problemstellung

$$h'(t) = a * h(t)$$

$$f'(t) = -c * f(t)$$

$a \coloneqq Vermehrungsrate$

$c \coloneqq Zunahmefaktor\ der\ Räuber\ bei\ Begegnung$

# Problemstellung

Zahl der möglichen Begegnungen: $f(t) * h(t)$

$$h'(t) = a * h(t)$$

$$f'(t) = -c * f(t)$$

$$a \coloneqq Vermehrungsrate$$

$$c \coloneqq Sterberate$$

# Problemstellung

Zahl der möglichen Begegnungen: $f(t) * h(t)$

$$h'(t) = a * h(t) - b * f(t)h(t)$$

$$f'(t) = -c * f(t) + d * f(t)h(t)$$

$a \coloneqq Vermehrungsrate$

$b \coloneqq Sterberate\ der\ Beute\ bei\ Begegnung$

$c \coloneqq Sterberate$

$d \coloneqq Zunahmefaktor\ der\ Räuber\ bei\ Begegnung$

# Lotka-Volterra Gleichungen

Spezielle Lösung

- Wähle Anfangspopulation:

$$(h(0) = h_0, f(0) = f_0)$$

$$h_0 = 0 \text{ oder } f_0 = 0$$

# Lotka-Volterra Gleichungen

Spezielle Lösung

- Wähle Anfangspopulation:

$$(h(0) = h_0, f(0) = f_0)$$

$$h_0 = 0 \text{ oder } f_0 = 0$$

Spezielle Lösungen:

$$(h_0 e^{at}, 0), (0, f_0 e^{-ct}), (0,0), \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

$$(h_g, f_g) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \quad \text{kritischer Punkt}$$

# Lotka-Volterra Gleichungen

Phasenraum

- Beide Gleichungen miteinander multiplizieren und integrieren :

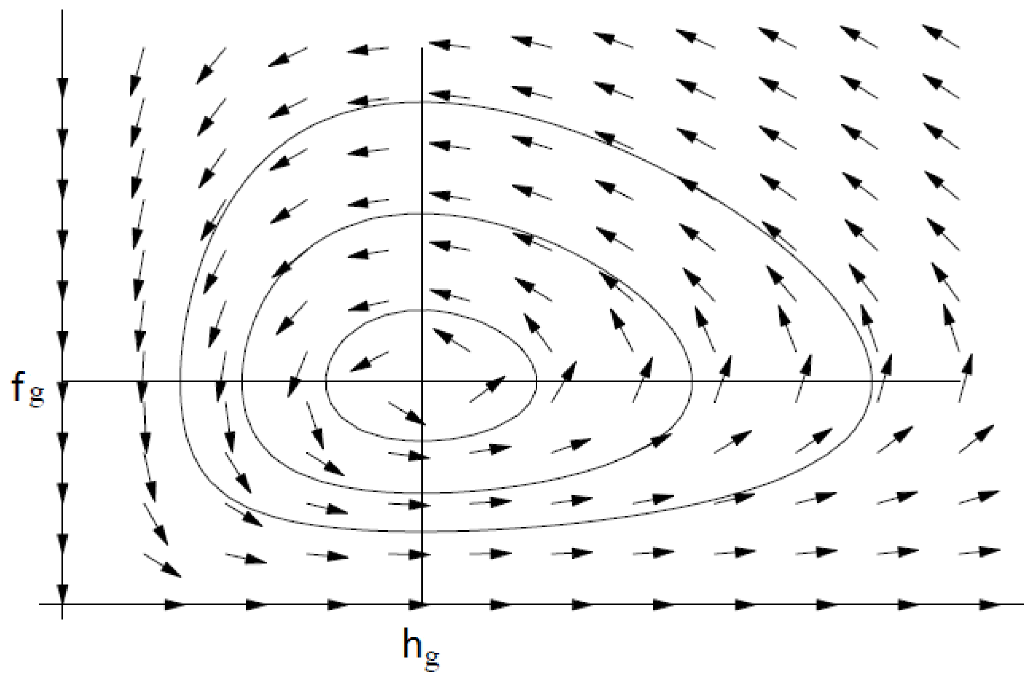
$$K = V(h, f) = dh - c\log(h) + bf - a\log(f)$$

# Lotka-Volterra Gleichungen

Phasenraum

- Beide Gleichungen miteinander multiplizieren und integrieren :

$$K = V(h, f) = dh - c\log(h) + bf - a\log(f)$$



# Eingriffe von außen

Differentialgleichung

$$h'(t) = a\,h(t) - b\,f(t)\,h(t)$$

$$f'(t) = -c\,f(t) + d\,f(t)\,h(t)$$

$$a \coloneqq Vermehrungsrate$$

$$b \coloneqq Sterberate\ der\ Beute\ bei\ Begegnung$$

$$c \coloneqq Sterberate$$

$$d \coloneqq Zunahmefaktor\ der\ Räuber\ bei\ Begegnung$$

# Eingriffe von außen

Differentialgleichung

$$h'(t) = a\,h(t) - b\,f(t)\,h(t) - \Delta a\,h(t)$$

$$f'(t) = -c\,f(t) + d\,f(t)\,h(t) \; - \Delta c\,f(t)$$

$$a \coloneqq Vermehrungsrate$$

$$b \coloneqq Sterberate\ der\ Beute\ bei\ Begegnung$$

$$c \coloneqq Sterberate$$

$$d \coloneqq Zunahmefaktor\ der\ Räuber\ bei\ Begegnung$$

$$\Delta a \coloneqq Eingriffe\ pro\ Zeiteinheit$$

$$\Delta c \coloneqq Eingriffe\ pro\ Zeiteinheit$$

Voraussetzung: $\Delta a < a$ und $\Delta c < c$

# Eingriffe von außen

Mittelwerte

$$h_m = \frac{c + \Delta c}{d}$$

$$f_m = \frac{a - \Delta a}{b}$$

# Eingriffe von außen

Mittelwerte

$$h_m = \frac{c + \Delta c}{d}$$
$$f_m = \frac{a - \Delta a}{b}$$

Je stärker der Einfluss bei den Räubern ist, desto **besser** ist es für den mittleren Bestand der Beute.

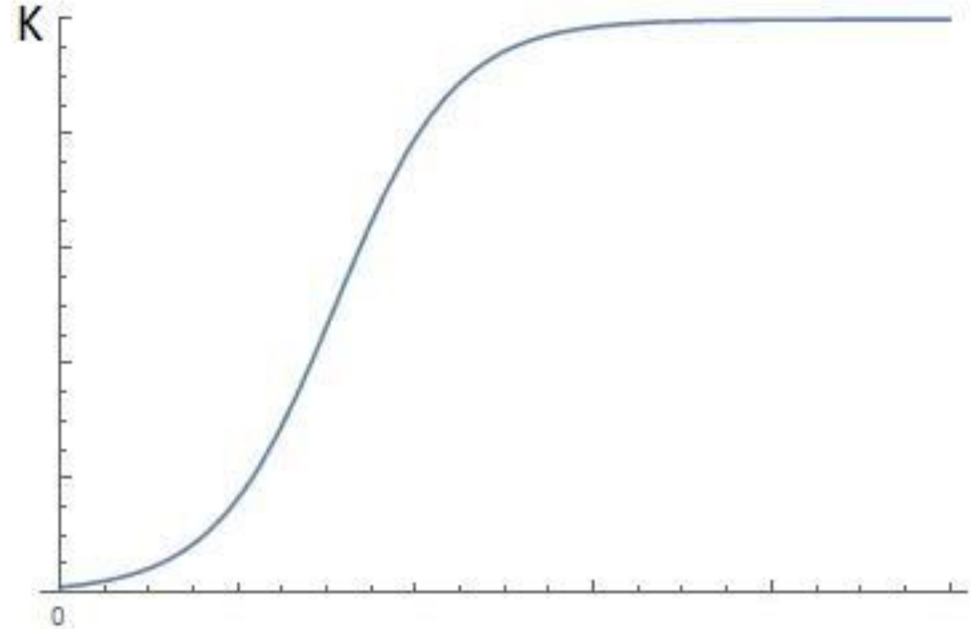
Je stärker der Einfluss bei der Beute ist, desto **schlechter** ist es für den mittleren Bestand der Räuber.

# Beschränktes Wachstum der Beute

Differentialgleichung

Annahme: Beute wächst nun logistisch, falls kein Kontakt mit Räuber.

$$h' = a\,h\,(1 - \frac{h}{K})$$



# Beschränktes Wachstum der Beute

Differentialgleichung

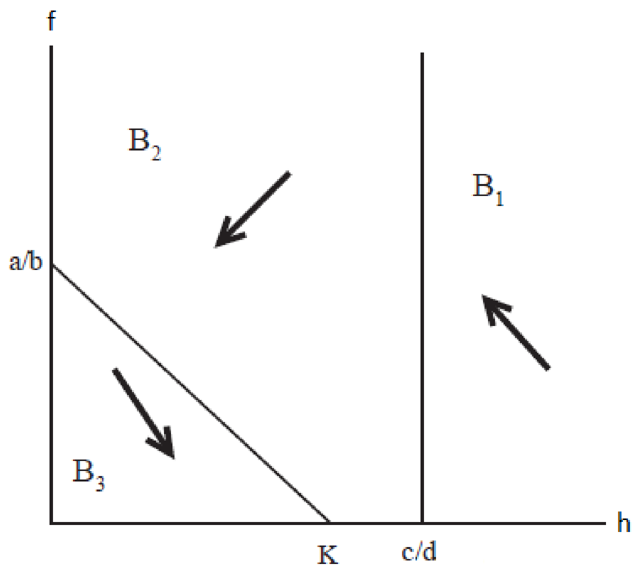
$$h' = a\,h\,(1 - \frac{h}{K}) - b\,f\,h$$

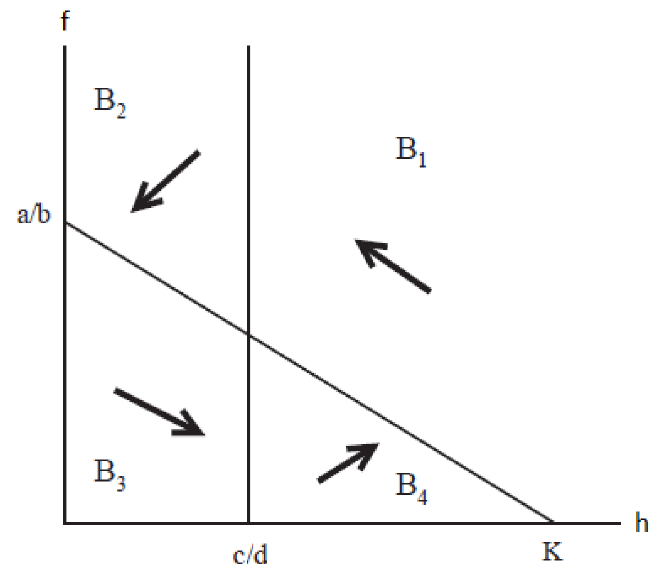
$$f' = -c\,f + d\,f\,h$$

$K$ = Maximale Kapazitätsgrenze (Beute)

# Beschränktes Wachstum der Beute

Phasenraum/Mittelwert



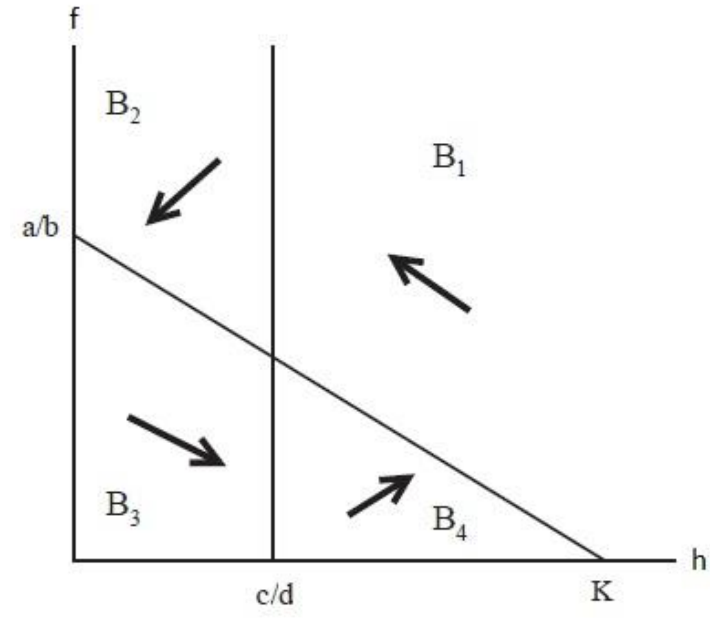




Geraden: $h_m = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{h}{K}\right) \quad f_m = \frac{c}{d}$

# Beschränktes Wachstum der Beute

## Phasenraum/Mittelwert – Fall 1

$$K > \frac{c}{d}$$



# Beschränktes Wachstum der Beute

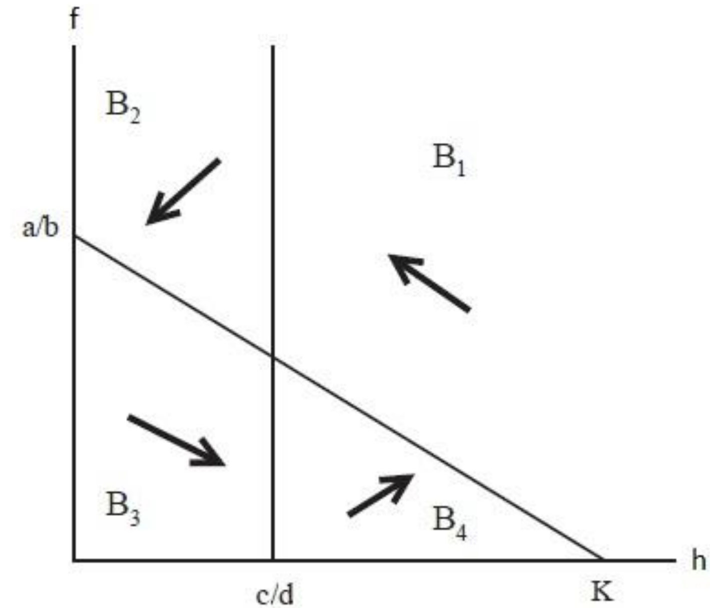
## Phasenraum/Mittelwert – Fall 1

$$K > \frac{c}{d}$$

Schneiden sich im Inneren

Gleichgewichtspunkt existiert

$$h_g = \frac{c}{d} \quad f_g = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{c}{d\,K}\right)$$



# Beschränktes Wachstum der Beute

Phasenraum/Mittelwert – Fall 1

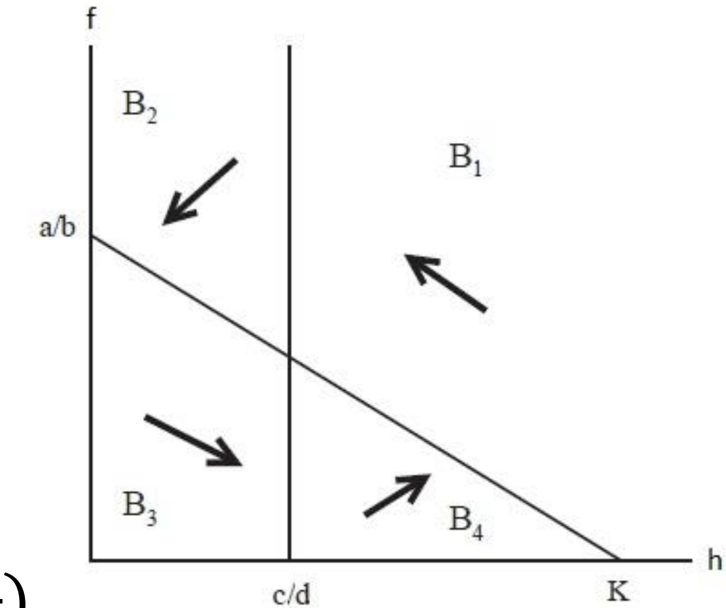
$$K > \frac{c}{d}$$

Schneiden sich im Inneren

Gleichgewichtspunkt existiert

$$h_g = \frac{c}{d} \quad f_g = \frac{a}{b}(1 - \frac{c}{d\,K})$$

$$\lim_{t\to\infty} h_g = \frac{c}{d} \qquad \lim_{t\to\infty} f_g = \frac{a}{b}(1 - \frac{c}{d\,K})$$



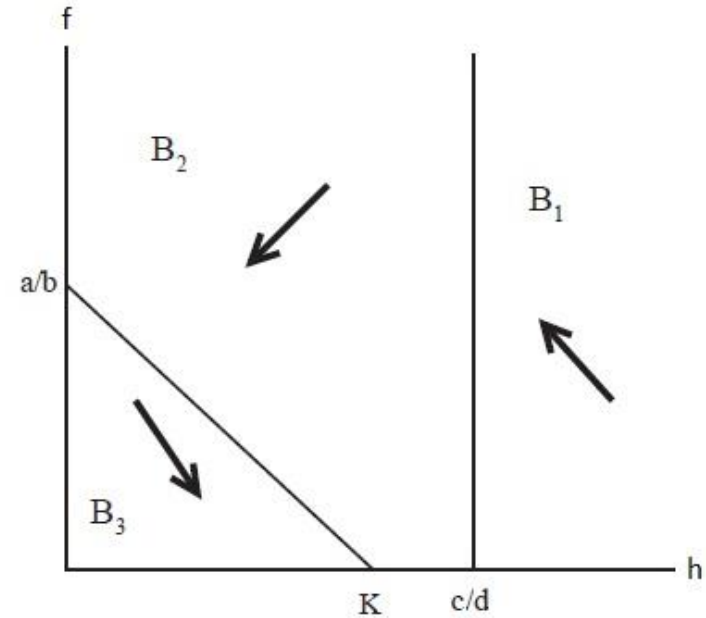
# Beschränktes Wachstum der Beute

Phasenraum/Mittelwert – Fall 2

$$K \leq \frac{c}{d}$$

Schneiden sich nicht im Inneren

(Kein Gleichgewichtspunkt)



# Beschränktes Wachstum der Beute

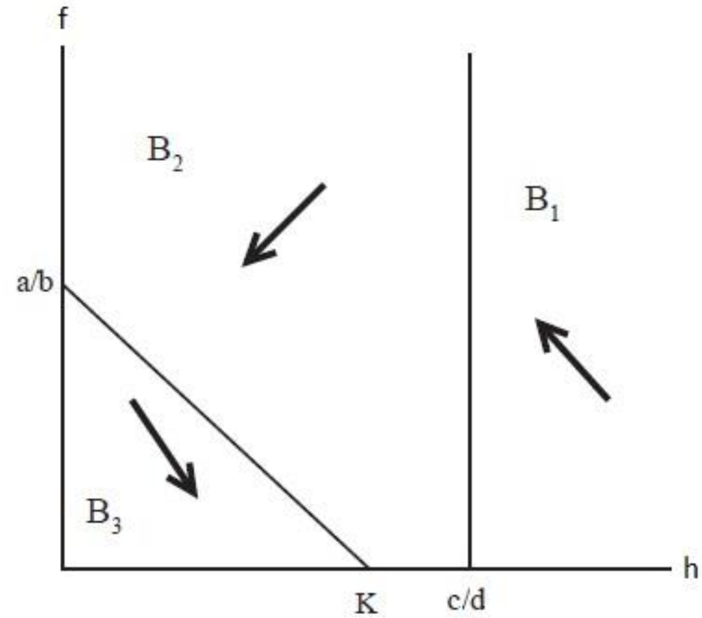
## Phasenraum/Mittelwert – Fall 2

$$K \leq \frac{c}{d}$$

Schneiden sich nicht im Inneren

(Kein Gleichgewichtspunkt)

Für t→ ∞ : $f(t) = 0$ $h(t)$=K



# Beschränktes Wachstum der Beute

## Phasenraum/Mittelwert – Fall 2

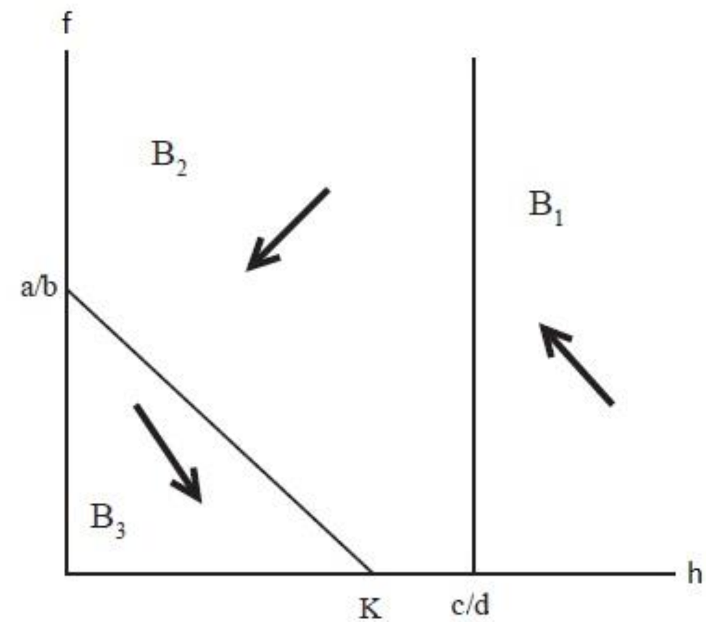
$$K \leq \frac{c}{d}$$

Schneiden sich nicht im Inneren

(Kein Gleichgewichtspunkt)

Für t→ ∞ : $f(t) = 0$  $h(t)$=K

Falls Mittelwert der Räuber größer als der Maximalkapazität der Beute ist, sterben die Räuber aus



# Jacobi-Matrix

System zweier DGL: $\frac{dx}{dt}=f(x,y)$ $\frac{dy}{dt}=h(x,y)$

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ h_x(x,y) & h_y(x,y) \end{bmatrix}$$

allg. $\vec{y}=f(\vec{x})=\frac{d\,\vec{x}}{dt}$

# Jacobi-Matrix

System zweier DGL: $\frac{dx}{dt} = f(x, y) \qquad \frac{dy}{dt} = h(x, y)$

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ h_x(x, y) & h_y(x, y) \end{bmatrix}$$

allg. $\vec{y} = f(\vec{x}) = \frac{d\,\vec{x}}{dt}$

Einfacher Ansatz: $\frac{dx_1}{dt} = A + (-x_2) \qquad \frac{dy_1}{dt} = -B + x_1$

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A = 4, \quad B = 3,$
$x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 4$

# Jacobi-Matrix

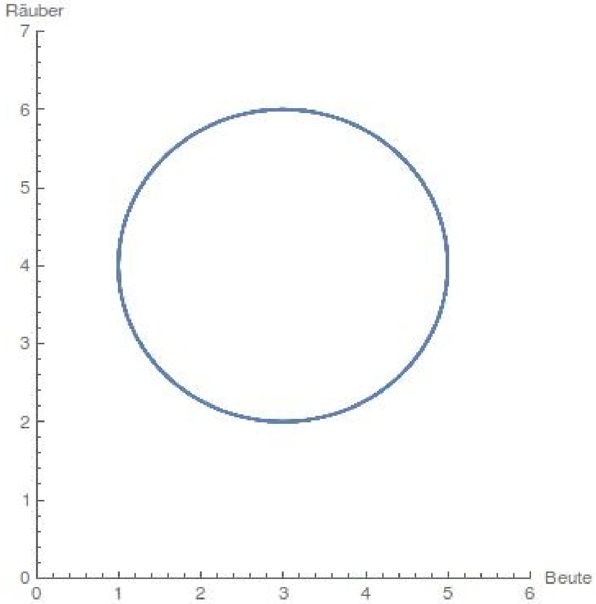
Suche nach Fixpunkten (Eigenwertproblem):

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda=\pm\sqrt{-1}$$

# Jacobi-Matrix

Suche nach Fixpunkten (Eigenwertproblem):

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda=\pm\sqrt{-1}$$

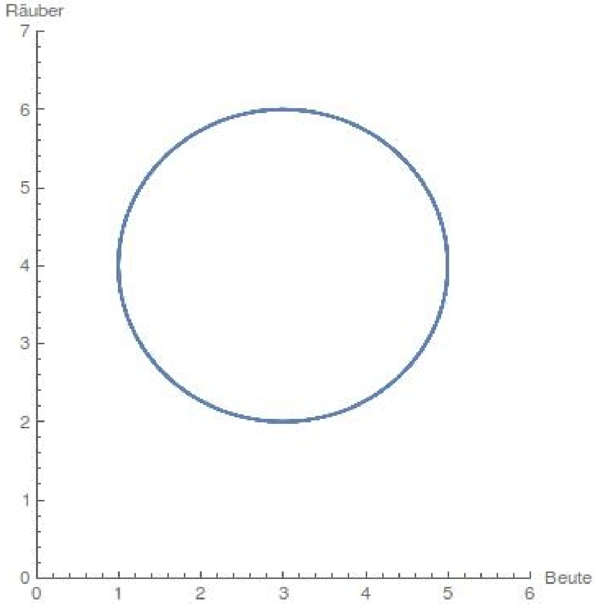



periodisch falls $Real[\lambda_i]=0$

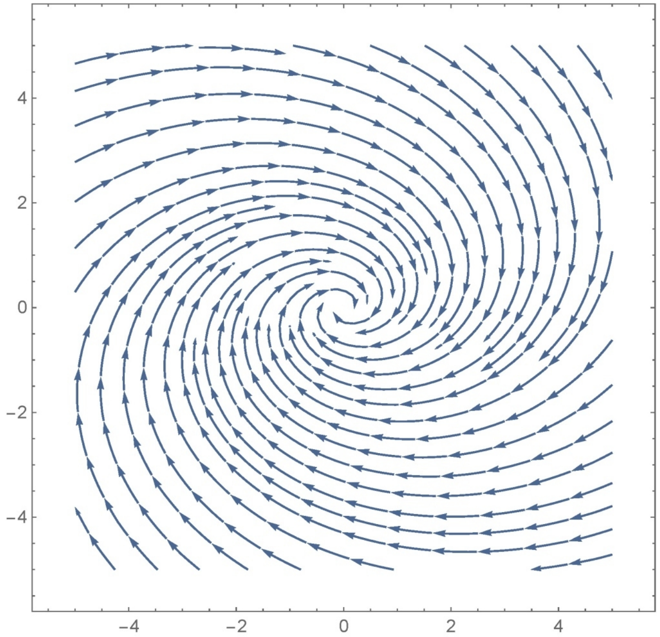
# Jacobi-Matrix

## Suche nach Fixpunkten (Eigenwertproblem):

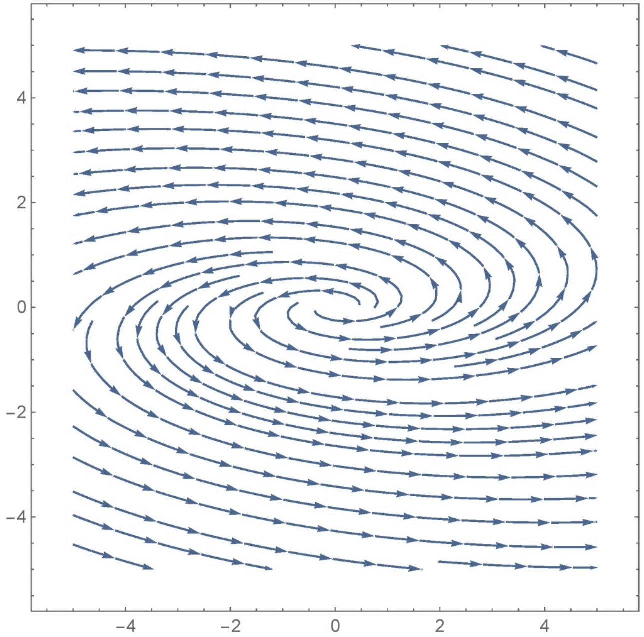
$$J(x,y)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \lambda=\pm\sqrt{-1}$$




periodisch falls $Real[\lambda_i]=0$




Stabil falls $Real[\lambda_i]<0$




Instabil falls $Real[\lambda_i]>0$

# Drei Spezies

Räuber 2

↓ fressen

Räuber 1

↓ fressen

Beute

# Drei Spezies

Räuber 2 $\longrightarrow$ $$\frac{dz}{dt} = h(y,z) = (-a_3 + c_2\, y)\, z$$

fressen

Räuber 1 $\longrightarrow$ $$\frac{dy}{dt} = g(x,y,z) = (-a_2 + b_2 x - c_1 z)\, y$$

fressen

Beute $\longrightarrow$ $$\frac{dx}{dt} = f(x,y) = (a_1 - b_1\, y)\, x$$

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

# Drei Spezies

## Gleichgewichtspunkte

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{dx}{dt}=f(x,y)=(a_1-b_1 y)x \\ \frac{dy}{dt}=g(x,y,z)=(-a_2+b_2 x-c_1 z)y \\ \frac{dz}{dt}=h(y,z)=(-a_3+c_2 y)z \end{array}\right\}$$

Für Gleichgewichtspunkte gelte:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

# Drei Spezies

## Gleichgewichtspunkte

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{dx}{dt}=f(x,y)=(a_1-b_1 y)x \\ \frac{dy}{dt}=g(x,y,z)=(-a_2+b_2 x-c_1 z)y \\ \frac{dz}{dt}=h(y,z)=(-a_3+c_2 y)z \end{array}\right\}$$

Für Gleichgewichtspunkte gelte:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow$

$$E_0=(0,0,0)$$

$$E_1=\left(\frac{a_2}{b_2},\frac{a_1}{b_1},0\right)$$

$$E_2=\left(\frac{a_3}{c_2},-\frac{a_2}{c_1},0\right)$$

# Drei Spezies

## Gleichgewichtspunkte

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dx}{dt} = f(x,y) = (a_1 - b_1 y)x \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y,z) = (-a_2 + b_2 x - c_1 z)y \\ \frac{dz}{dt} = h(y,z) = (-a_3 + c_2 y)z \end{array} \right\}$$

Für Gleichgewichtspunkte gelte:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_0 = (0,0,0) \qquad E_1 = \left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, 0\right) \qquad \cancel{E_2 = \left(\frac{a_3}{c_2}, -\frac{a_2}{c_1}, 0\right)}$$

# Drei Spezies

## Gleichgewichtspunkte

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) = (a_1 - b_1 y)\,x \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y,z) = (-a_2 + b_2 x - c_1 z)\,y \\ \dfrac{dz}{dt} = h(y,z) = (-a_3 + c_2 y)\,z \end{cases}$$

Für Gleichgewichtspunkte gelte:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$E_0 = (0,0,0)$$

$$E_1 = \left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, 0\right)$$

$$\cancel{E_2 = \left(\frac{a_3}{c_2}, -\frac{a_2}{c_1}, 0\right)}$$

Analyse:

$$J(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \begin{bmatrix} a_1 - b_1\bar{y} & -b_1\bar{x} & 0 \\ b_2\bar{y} & -a_2 + b_2\bar{x} - c_1\bar{x} & -c_1\bar{y} \\ 0 & c_2\bar{z} & -a_3 + c_2\bar{y} \end{bmatrix}$$

# Drei Spezies

## Fixpunktanalyse

1. Jacobi-Matrix für den Gleichgewichtspunkt $E_0 = (0,0,0)$

$$J(0,0,0) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte hierfür sind: $\lambda_1 = a_1,\ \lambda_2 = -a_2,\ \lambda_3 = -a_3$

Folglich ist Gleichgewichtspunkt $E_0 = (0,0,0)$ ein Sattelpunkt.

# Drei Spezies

## Fixpunktanalyse

2. Jacobi-Matrix für den Gleichgewichtspunkt

$$J(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\begin{bmatrix} 0 & -b_1\frac{a_2}{b_2} & 0 \\ b_2\frac{a_1}{b_1} & 0 & -c_1\frac{a_1}{b_1} \\ 0 & 0 & -a_3+c_2\frac{a_1}{b_1} \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte hierfür sind: $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{a_1 a_2}$

$$\lambda_3=\frac{a_1 c_2-a_3 b_1}{b_1}$$

$E_1=\left(\frac{a_2}{b_2},\frac{a_1}{b_1},0\right)$ Stabiler Fixpunkt für $a_3 b_1 > a_1 c_2$

# Drei Spezies

## Hopf-Bifurkations-Punkt

Dynamisches System kann allgemein angegeben werden als: $\dot{\nu} = F(\nu, \mu)$

mit $\nu = (x, y, z), \;\; \mu = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2)$

Hopf-Bifurkation-Punkt erfüllt folgende Eigenschaften:

i. $F(\nu_0, \mu_0) = 0$

ii. $J(\nu_0, \mu_0)$ Besitz zwei komplex-konjugierte Eigenwerte in der Form:

$\lambda_{1,2} = a(\nu, \mu) \pm i\, b(\nu, \mu)$ um $(\nu_0, \mu_0)$

iii. $a(\nu_0, \mu_0) = 0, \;\; \nabla a(\nu_0, \mu_0) \neq 0, \;\; b(\nu_0, \mu_0) \neq 0$

iv. Dritter Eigenwert $\lambda_3(\nu_0, \mu_0) \neq 0$

# Drei Spezies

## Hopf-Bifurkations-Punkt

Dynamisches System kann allgemein angegeben werden als: $\dot{\nu} = F(\nu, \mu)$

mit $\nu = (x, y, z), \;\; \mu = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2)$

Hopf-Bifurkation-Punkt erfüllt folgende Eigenschaften:

i. $F(\nu_0, \mu_0) = 0$

ii. $J(\nu_0, \mu_0)$ Besitz zwei komplex-konjugierte Eigenwerte in der Form:

$\lambda_{1,2} = a(\nu, \mu) \pm i\, b(\nu, \mu)$ um $(\nu_0, \mu_0)$

iii. $a(\nu_0, \mu_0) = 0, \;\; \nabla a(\nu_0, \mu_0) \neq 0, \;\; b(\nu_0, \mu_0) \neq 0$

iv. Dritter Eigenwert $\lambda_3(\nu_0, \mu_0) \neq 0$

$$E_1 = \left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, 0\right)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{a_1 a_2}$$

$$\lambda_3 = \frac{a_1 c_2 - a_3 b_1}{b_1}$$

# Drei Spezies

## Hopf-Bifurkations-Punkt

Für $\lambda_3 = \frac{a_1 c_2 - a_3 b_1}{b_1}$ wähle $a_{30} = \frac{a_1 c_2}{b_1}$

| Parameter | | Gleichgewichtspunkte | | Eigenwerte | | Stabilität |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fall | | $E_0$ | $E_1$ | $E_0$ | $E_1$ | |
| $a_3 < a_{30}$ | $a_3 = 0.4$ | $0,0,0$ | $1,1,1$ | $\pm 0.5, -0.4$ | $\pm 0.5i, +0.1$ | Instabile Spirale |
| $a_3 = a_{30}$ | $a_3 = 0.5$ | $0,0,0$ | $1,1,1$ | $\pm 0.5, -0.5$ | $\pm 0.5i, 0$ | periodisch |
| $a_3 > a_{30}$ | $a_3 = 0.6$ | $0,0,0$ | $1,1,1$ | $\pm 0.5, -0.6$ | $\pm 0.5i, -0.1$ | Stabile Spirale |

# Drei Spezies

## Beschränktes Wachstum der Beute // Eingriffe von Außen

Beute $\longrightarrow$

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y)=a_1 x\left(1-x/K\right)b_1 yx$$

Räuber 1 $\longrightarrow$

$$\frac{dy}{dt}=g(x,y,z)=\left(-a_2+b_2 x-c_1 z\right)y+e_1 y$$

Räuber 2 $\longrightarrow$

$$\frac{dz}{dt}=h(y,z)=\left(-a_3+c_2 y\right)z+e_2 z$$

# Drei Spezies

## Beschränktes Wachstum der Beute // Eingriffe von Außen

Beute

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = a_1 x (1 - x/K) b_1 yx$$

Räuber 1

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, z) = (-a_2 + b_2 x - c_1 z) y + e_1 y$$

Räuber 2

$$\frac{dz}{dt} = h(y, z) = (-a_3 + c_2 y) z + e_2 z$$

# Infektion/Epidemie

Motivation

Wie entwickelt sich Infektion?

Wann wird dies zur Epidemie?

# Infektion/Epidemie

Differentialgleichung

$$\dot{h} = -a\,h\,f$$
$$\dot{f} = a\,h\,f\; - c\,f$$
$$\dot{g} = c\,f$$

$h$ = gesunde Menschen

$f$ = kranke Menschen

$g$ = Menschen die immun, tot oder isoliert sind (nicht mehr angesteckt werden können)

# Infektion/Epidemie

Eigenschaften

$$\dot{h} + \dot{f} + \dot{g} = 0$$

$$h + f + g = N = Gesamtbev\ddot{o}lkerung$$

# Infektion/Epidemie

Eigenschaften

$$\dot{h} + \dot{f} + \dot{g} = 0$$

$$h + f + g = N = Gesamtbev\ddot{o}lkerung$$

AB: $h(0) > 0, \;\; \dot{h}(0) < 0, f(0) > 0, g(0) = 0$

# Infektion/Epidemie

Epidemie

*Wann haben wir nun eine Epidemie und wann nicht?*
*Was für Anfangswerte brauchen wir?*

$$h(0) < \frac{c}{a}$$

$$h(0) > \frac{c}{a}$$

# Infektion/Epidemie

## Epidemie - Fallunterscheidung

**1.** $$h(0) < \frac{c}{a}, \;\; \dot{h} \leq 0 \text{ somit } h < h(0)$$

$$\dot{f} = (a\,h - c)f \leq 0 \;\; \text{für alle } t \geq 0$$

Infektion stirbt aus

Optimal wenn $c$ (Ansteckungsrate) klein und $a$ (Todesrate) klein ist.

# Infektion/Epidemie

Epidemie - Fallunterscheidung

**1.** $h(0) < \frac{c}{a}, \;\; \dot{h} \leq 0 \text{ somit } h < h(0)$

$\dot{f} = (a\,h \; - c)f \leq 0$ für alle $t \geq 0$

# Infektion/Epidemie

## Epidemie - Fallunterscheidung

**2.** $h(0) > \frac{c}{a}$: $\dot{f} = (a\,h\ - c)f > 0$ für bestimmtes $t$

# Infektion/Epidemie

Epidemie - Fallunterscheidung

**2.** $h(0) > \frac{c}{a}$: $\dot{f} = (a\,h\; - c)f > 0$ für bestimmtes $t$

Maximum bei

$$f_{max} = g - \frac{c}{a} + \log(\frac{c}{a\,h(0)})$$

# Infektion/Epidemie

Epidemie - Fallunterscheidung

**2.** $h(0) > \frac{c}{a}$: $\dot{f} = (a\,h\, - c)f > 0$ für bestimmtes $t$

Maximum bei

$$f_{max} = g - \frac{c}{a} + \log(\frac{c}{a\,h(0)})$$

$f(\infty) = 0$ (heißt aber nicht, alle wurden infiziert)

denn mit Gl 1 und 3 folgt $h > 0$

$$f_{total} = f(0) + h(0) - h(\infty)$$

# Infektion/Epidemie

## Zusammenfassung

Je tödlicher das Virus, desto unwahrscheinlicher einer Epidemie

Problem bei Infektion ist die Ansteckungsgefahr

# Lotka-Volterra Modell in der Wirtschaft

## Preisbildung bei Monopolen

Nachfrageverhalten der Konsumenten:

Nachfragefunktion $D(p) = N_0\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \; mit \; N_0, p_0 > 0$

Produktionskosten $C(x) = a + b\,x \; mit \; a, b > 0$

# Lotka-Volterra Modell in der Wirtschaft

## Preisbildung bei Monopolen

Nachfrageverhalten der Konsumenten:

Nachfragefunktion $$D(p) = N_0\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \text{ mit } N_0, p_0 > 0$$

Produktionskosten $$C(x) = a + b\,x \text{ mit } a, b > 0$$

Angestrebtes Ziel → bestimmte Profitrate $q > 0$

$$q = \frac{G}{C} = \frac{px - C(x)}{C(x)} \longrightarrow px = (1+q)\,C(x) \text{ bzw. } p = (1+q)\frac{C(x)}{x}$$

Erlös und Kosten

Preis zu durchschn. Stückkosten

# Lotka-Volterra Modell in der Wirtschaft

## Preisbildung bei Monopolen

$$px=(1+q)C(x)\,bzw.\;p=(1+q)\frac{C(x)}{x}$$

Produzierte Menge ***x*** und Nachfrage weichen ***D(p)*** ab → ***x*** an Nachfrage anpassen

Profitrate passt nicht zu Sollwert *q* → Preisanpassung

# Lotka-Volterra Modell in der Wirtschaft

## Preisbildung bei Monopolen

$$px = (1+q)\,C(x) \;\; bzw. \;\; p = (1+q)\frac{C(x)}{x}$$

Produzierte Menge ***x*** und Nachfrage weichen ***D(p)*** ab → ***x*** an Nachfrage anpassen

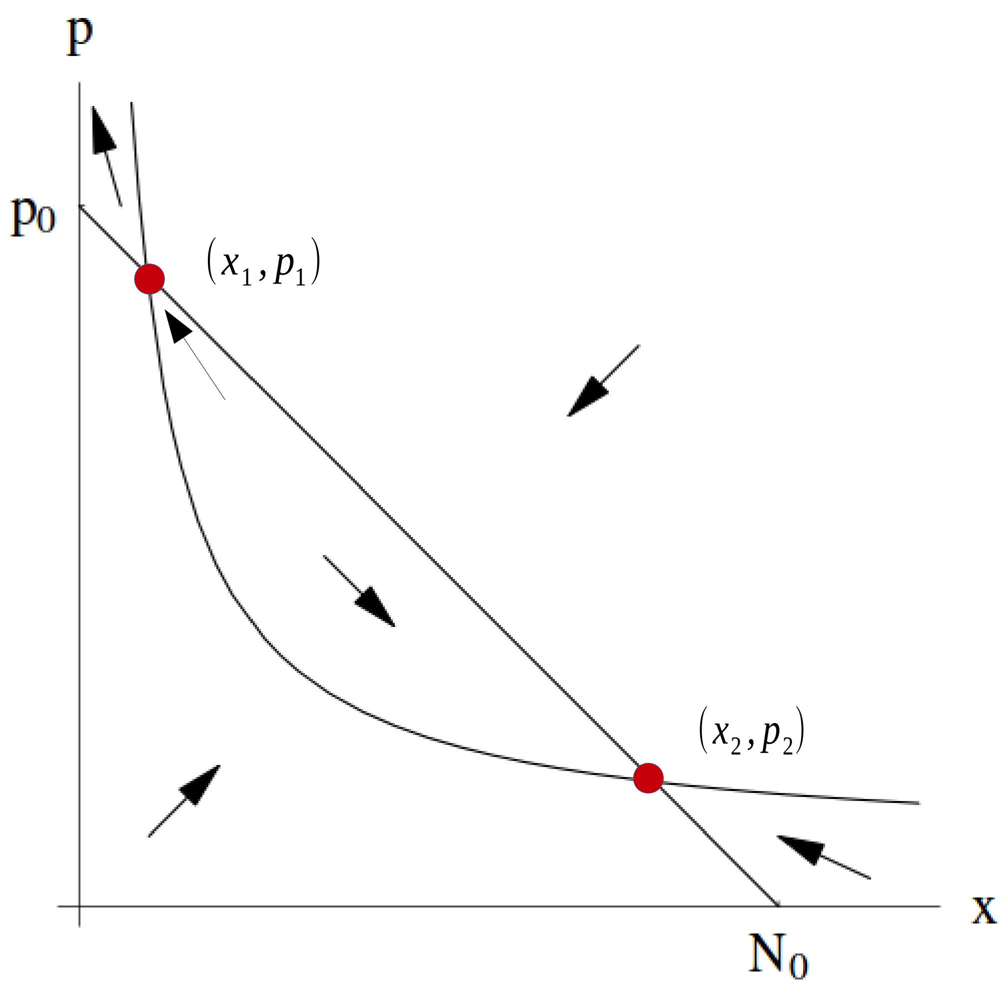
Profitrate passt nicht zu Sollwert *q* → Preisanpassung

$$\dot{x} = f\,(D(p) - x)$$
$$\dot{p} = g\,((1+q)\,C(x) - px)$$

Streng monoton wachsende Funktionen $f\,,g$ für die gilt $f(0) = g(0) = 0$

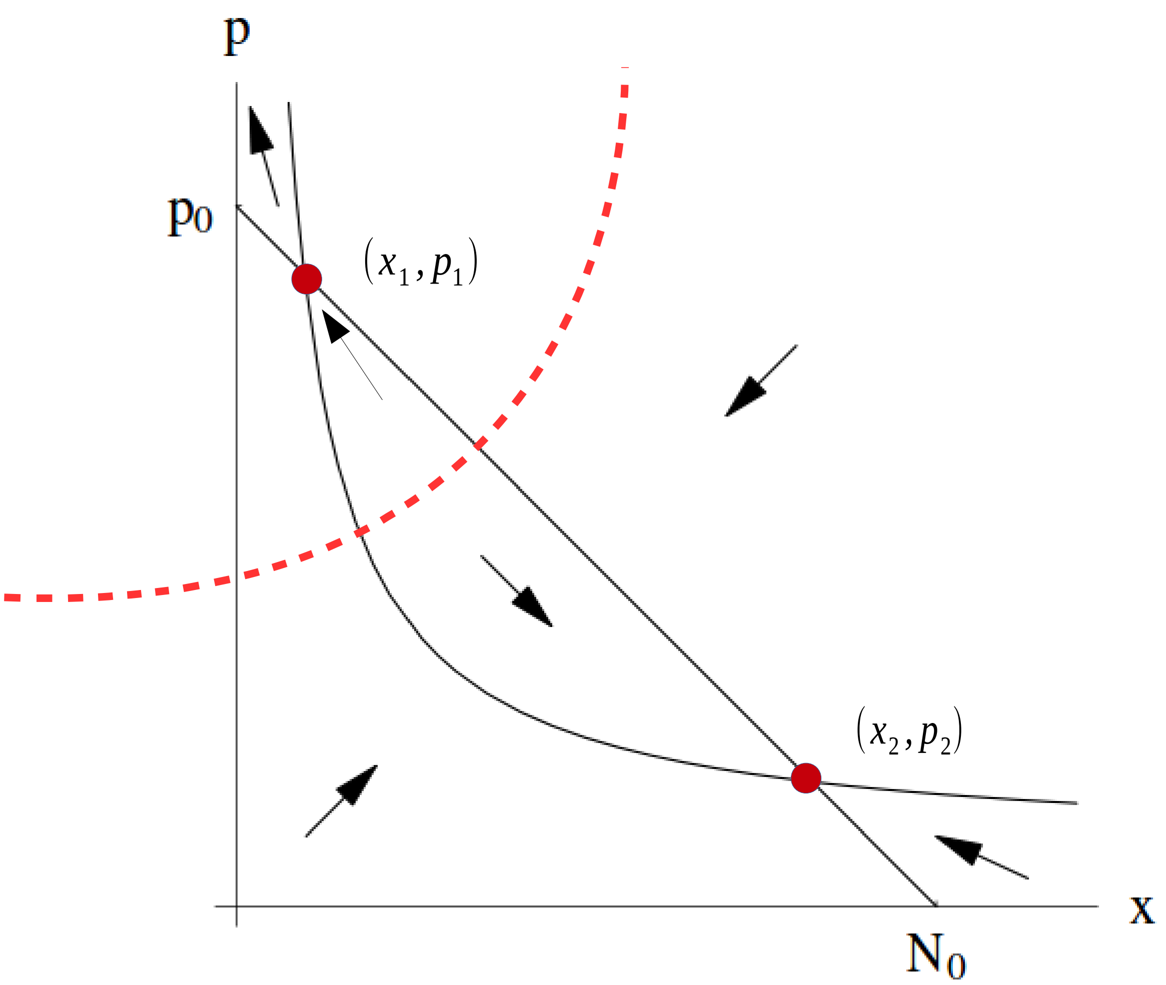
# Lotka-Volterra Modell in der Wirtschaft

## Preisbildung bei Monopolen



# Lotka-Volterra Modell in der Wirtschaft

## Preisbildung bei Monopolen



Danke

# Quellen


- **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**, *Steven Strogatz*
- **Predator-Prey Modeling with the Lotka-Volterra Equations**, *David Hyde*
- **Numerical Simulation for the non-linear Lotka-Volterra System;** *Lohan, Ignat*, 2006
- **Numerical Simulation Dynamical Model of Three-Spezies Food Chain with Lotka-Volterra Linear Funktional Response**, *M. Mamat et al.*, 2011
- **Dynamische Modelle in den Lebens- und Gesellschaftswissenschaften**, *Claus Peter Ortlieb*, 2009/10