

Poincaré-Schnitte

Ein Vortrag im Rahmen des Proseminars
„Theoretische Physik“

von

Kai Hühn und Robin Mevert

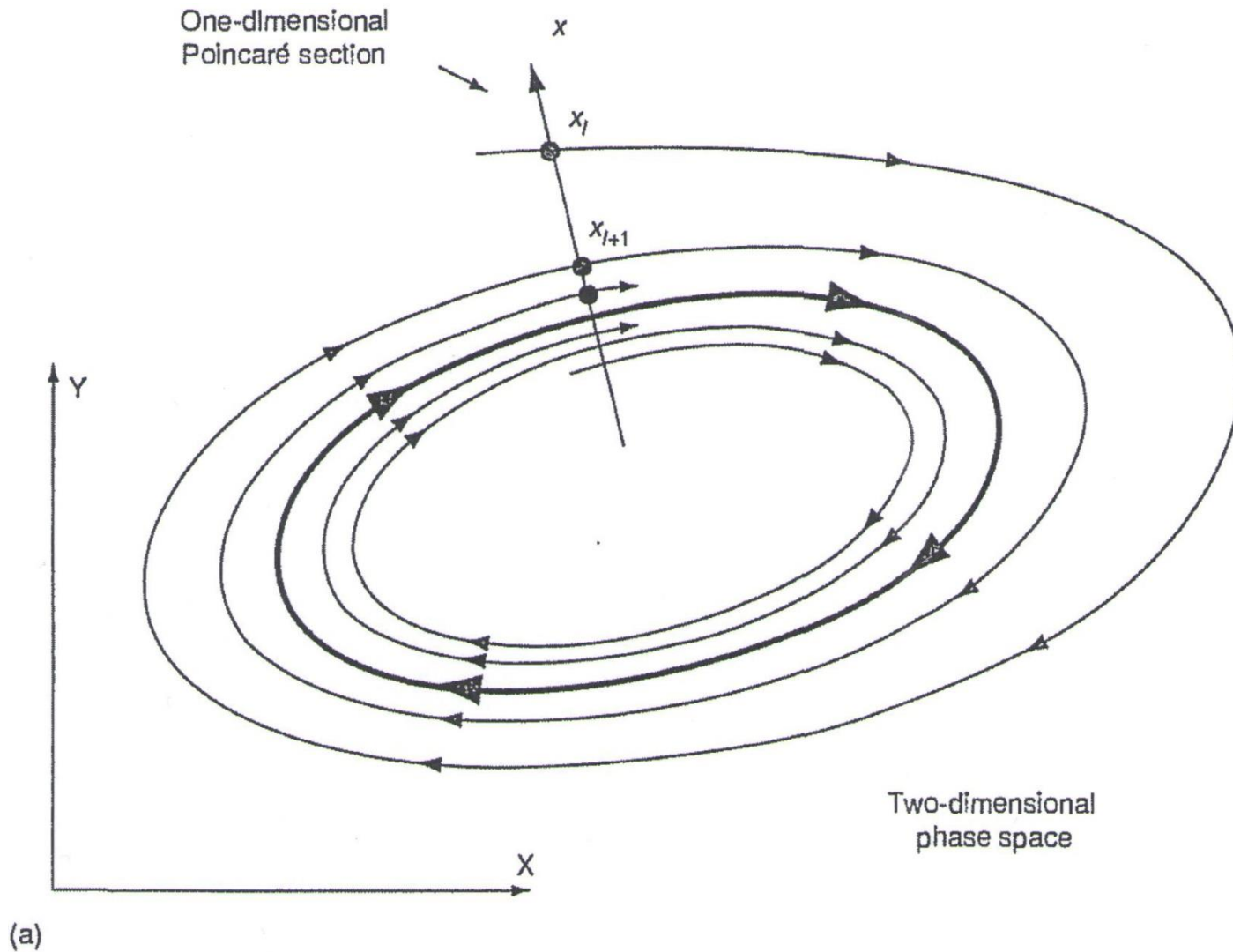
Themen

1. Was sind Poincaré-Schnitte?
2. Anwendung: Poincaré-Schnitte
⇒ Mathematica-Beispiel: Attraktor
3. Stabilität der Fixpunkte 1-D, 2-D und viele
4. Hopf Bifurcation
 - Superkritische
 - Subkritische
5. Geschlossene Orbits
6. Quasiperiodizität

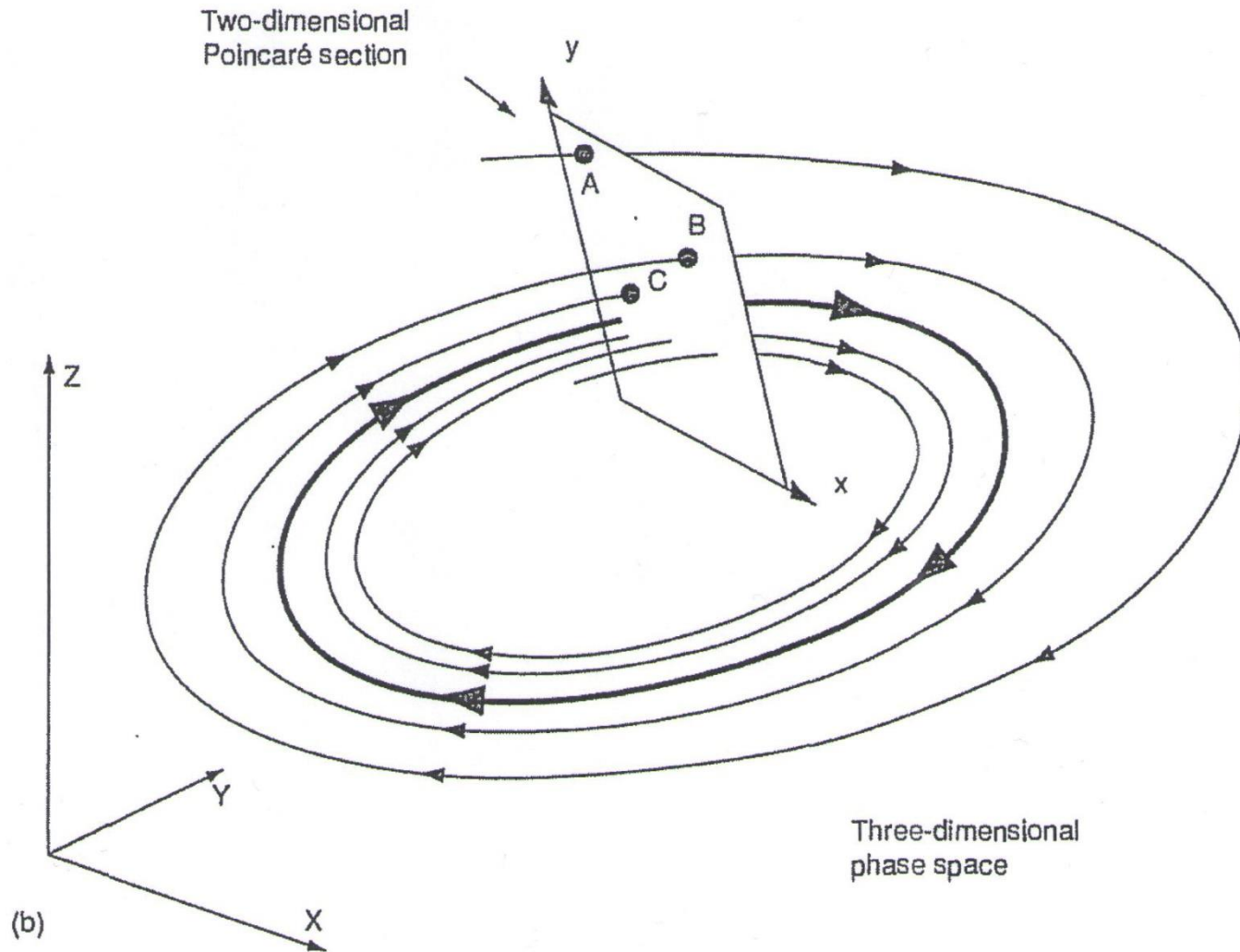
Was sind Poincaré-Schnitte?

- Betrachten die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ eines n -dim. Systems mit rotierendem Verlauf
 - Sei S eine $(n - 1)$ -dim. Hyperfläche (Poincaré-Schnitt) die transversal zur Trajektorie steht und durch diese geschnitten wird.
 - Dann ist P die Poincaré-Abbildung die einen Schnittpunkt x_k auf $P(x_k) = x_{k+1}$ abbildet.
 - Liegt ein Fixpunkt, damit eine geschlossene Trajektorie vor so gilt: $P(x^E) = x^E$
- ⇒ Reduzierung der Analyse um eine Dimension
⇒ Weniger kompliziert

Was sind Poincaré-Schnitte?



Was sind Poincaré-Schnitte?



Anwendung: Poincaré-Schnitte

Beispiel 1: Ermittlung der Fixpunkte auf Poincaré-Schnitt

Suchen also geschlossenen Orbit im Phasenraum.

Gegeben: $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\theta} = 1$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) \Leftrightarrow \frac{dr}{r(1 - r^2)} = dt$$

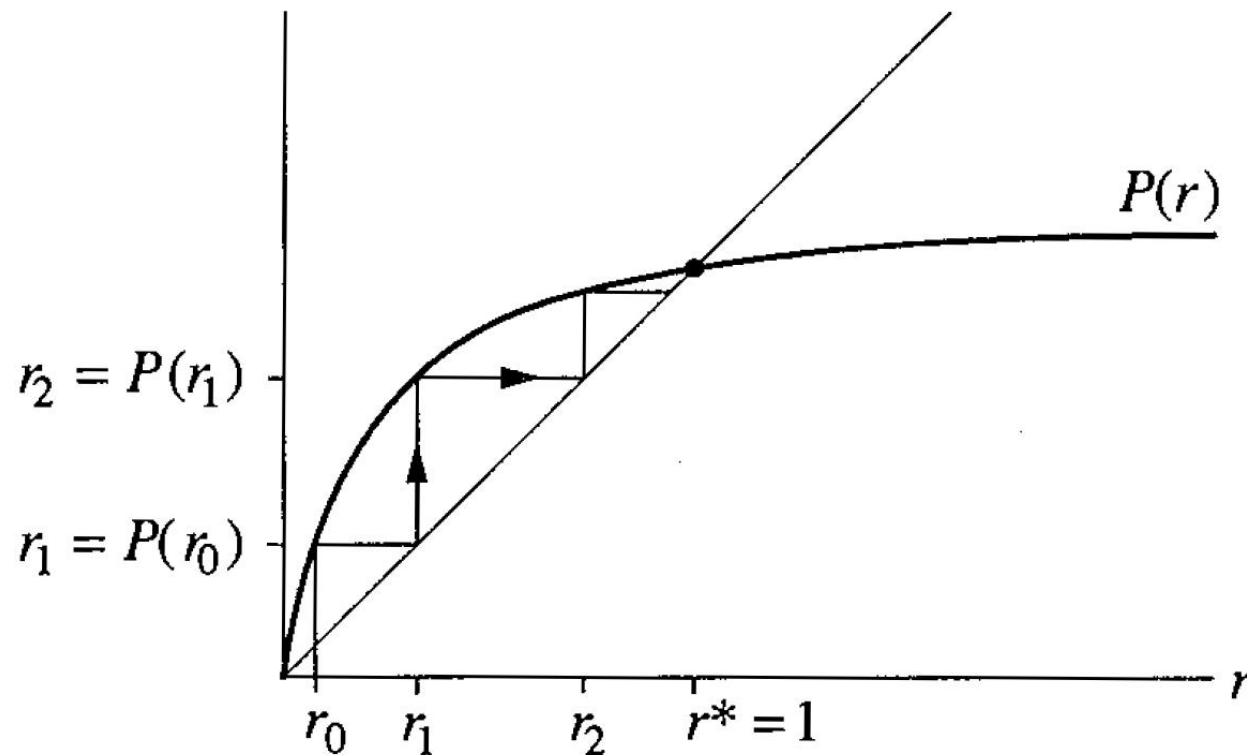
$$\Leftrightarrow \int_{r_0}^{P(r_0)=r_1} \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

⋮

$$\Rightarrow P(r) = \left[1 + e^{-4\pi} (r_0^{-2} - 1) \right]^{-1/2}$$

Anwendung: Poincaré-Schnitte

Funktion: $P(r) = [1 + e^{-4\pi}(r_0^{-2} - 1)]^{-1/2}$



Schnitt mit der Geraden $P(r) = r$ gibt FP (hier „Limitcycle“ bei $r = 1$ und Fixpunkt bei $r = 0$).

Anwendung: Poincaré-Schnitte

Warum nicht einfach? :

$$\dot{r} = r(1 - r^2) = 0 \Rightarrow r=0 \wedge r = 1$$

Keine Aussage möglich über:

- Zwischenwerte, damit über Schnelligkeit
- Stabilität der Fixpunkte (stabil, instabil, halbstabil)

Mathematica-Beispiel (Attraktoren)

Stabilität der Fixpunkte 1-D

- Stabilität von Fixpunkten: $x = x^E \Rightarrow x^E = P(x^E)$ mit FP x^E
- Führen Störung ξ ein:
 $x = x^E + \xi$
 $\Rightarrow x_{i+1} = x^E + \xi_{i+1}$
 $\approx P(x^E) + P'(x^E)\xi_i + \frac{1}{2}P''(x^E)\xi_i^2 + \frac{1}{6}P'''(x^E)\xi_i^3 + \dots$
- Wir benutzen das $x^E = P(x^E)$ und führen Koeffizienten C,D,E ein:
 $\Rightarrow \xi_{i+1} \approx C\xi_i + D\xi_i^2 + E\xi_i^3 + \dots$

Stabilität der Fixpunkte 1-D

- Für sehr kleine Störungen gilt:

$$\xi_{i+1} \approx C \xi_i \Rightarrow \xi_i \approx C^i \xi_0$$

Einfluss von $C > 0$:

- Bei $0 < C < 1$ abnehmende Störung

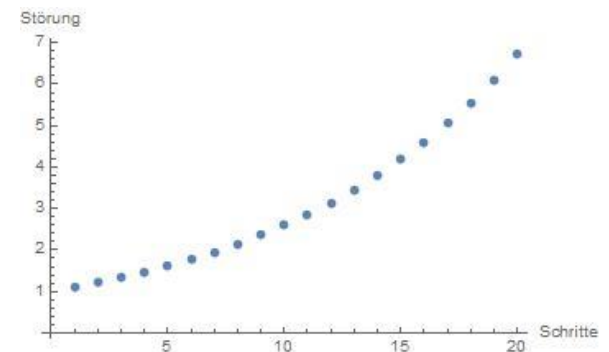
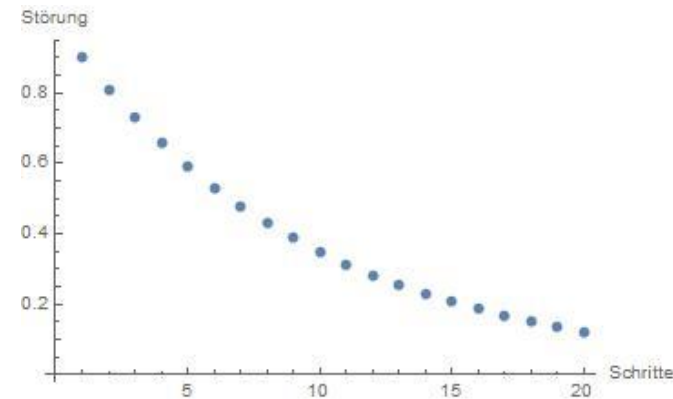
\Rightarrow *Fixpunkt stabil*

- Bei $C = 1$

\Rightarrow *keine Aussage über Stabilität möglich*

- Bei $C > 1$ zunehmende Störung

\Rightarrow *Fixpunkt instabil*



Stabilität 1-D Poincaré-Schnitte

- Für sehr kleine Störungen gilt:

$$\xi_{i+1} \approx C \xi_i \Rightarrow \xi_i \approx C^i \xi_0$$

Einfluss von $C < 0$:

- Bei $-1 < C < 0$ abnehmende Störung

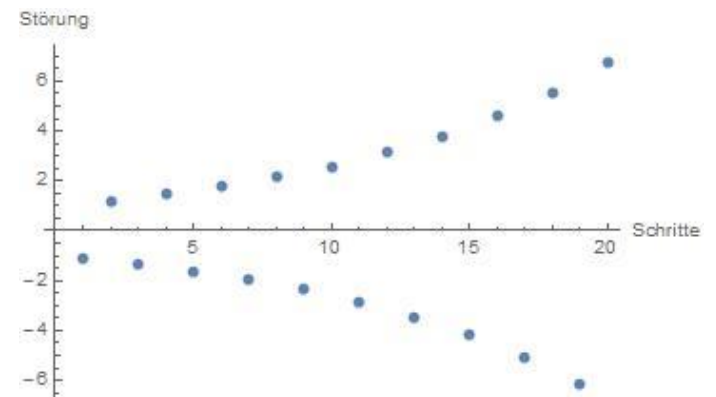
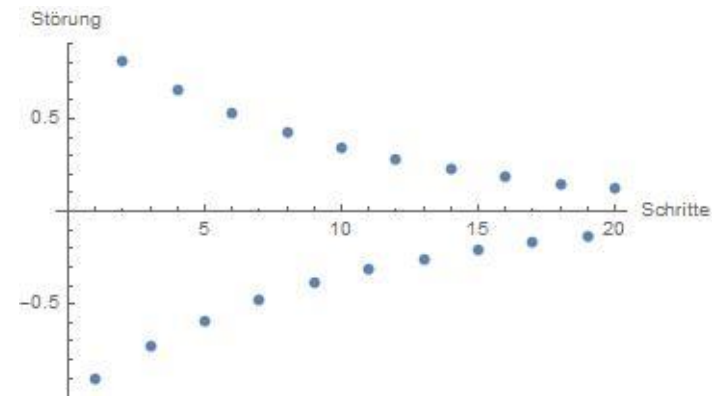
\Rightarrow *Fixpunkt stabil*

- Bei $C = -1$

\Rightarrow *keine Aussage möglich*

- Bei $C < -1$ wachsende Störung

\Rightarrow *Fixpunkt instabil*



Stabilität 1-D Poincaré-Schnitte

Bemerkung: Bisher wurden periodische Orbits mit $n=k$ vernachlässigt

$$n = 1: \Rightarrow x_{i+1} = P(x_i) = x_i$$

$$n = k: \Rightarrow x_{i+1} = P(x_i)$$

$$x_{i+2} = P(P(x_i)) = P^2(x_i)$$

$$\vdots$$

$$x_{i+k} = P^k(x_i) = x_i$$

Bei Taylorapproximation muss **Kettenregel** beachtet werden:

$$x \xrightarrow{P} y = P(x) \xrightarrow{P} z = P(P(x))$$

$$\Rightarrow [P(P(x))]_x = P_x(x)P_x(P(x)) !$$

Stabilität 2-D Poincaré-Schnitte

Betrachtung des Problems :

$$x_{i+1} = F(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = G(x_i, y_i)$$

Seien $x^E = F(x^E, y^E)$ und $y^E = G(x^E, y^E)$ Fixpunkte, sodass :

$$x_i = x^E + \xi_i$$

$$y_i = y^E + \eta_i$$

Damit :

$$x_{i+1} = x^E + \xi_{i+1} = F(x^E + \xi_i, y^E + \eta_i)$$

$$y_{i+1} = y^E + \eta_{i+1} = G(x^E + \xi_i, y^E + \eta_i)$$

Stabilität 2-D Poincaré-Schnitte

Taylor liefert:

$$\xi_{i+1} \approx F_x \xi_i + F_y \eta_i + \frac{1}{2} (F_{xx} \xi_i^2 + 2F_{xy} \xi_i \eta_i + F_{yy} \eta_i^2) + \dots$$

$$\eta_{i+1} \approx G_x \xi_i + G_y \eta_i + \frac{1}{2} (G_{xx} \xi_i^2 + 2G_{xy} \xi_i \eta_i + G_{yy} \eta_i^2) + \dots$$

Kleine Störungen ξ_i und η_i :

$$\left. \begin{array}{l} \xi_{i+1} = a \xi_i + b \eta_i \\ \eta_{i+1} = c \xi_i + d \eta_i \end{array} \right\} \overrightarrow{\xi_{i+1}} = \hat{J} \overrightarrow{\xi_i} \quad \Rightarrow \quad \hat{J} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

λ_1 und λ_2 sind Eigenwerte von der Jacobi-Matrix J.

Stabilität 2-D Poincaré-Schnitte

λ_1 und λ_2 reell :

$$\left. \begin{array}{l} u_{i+1} = \lambda_1 u_i \\ v_{i+1} = \lambda_2 v_i \end{array} \right\} \text{ In Eigenbasis der Jacobi-Matrix}$$

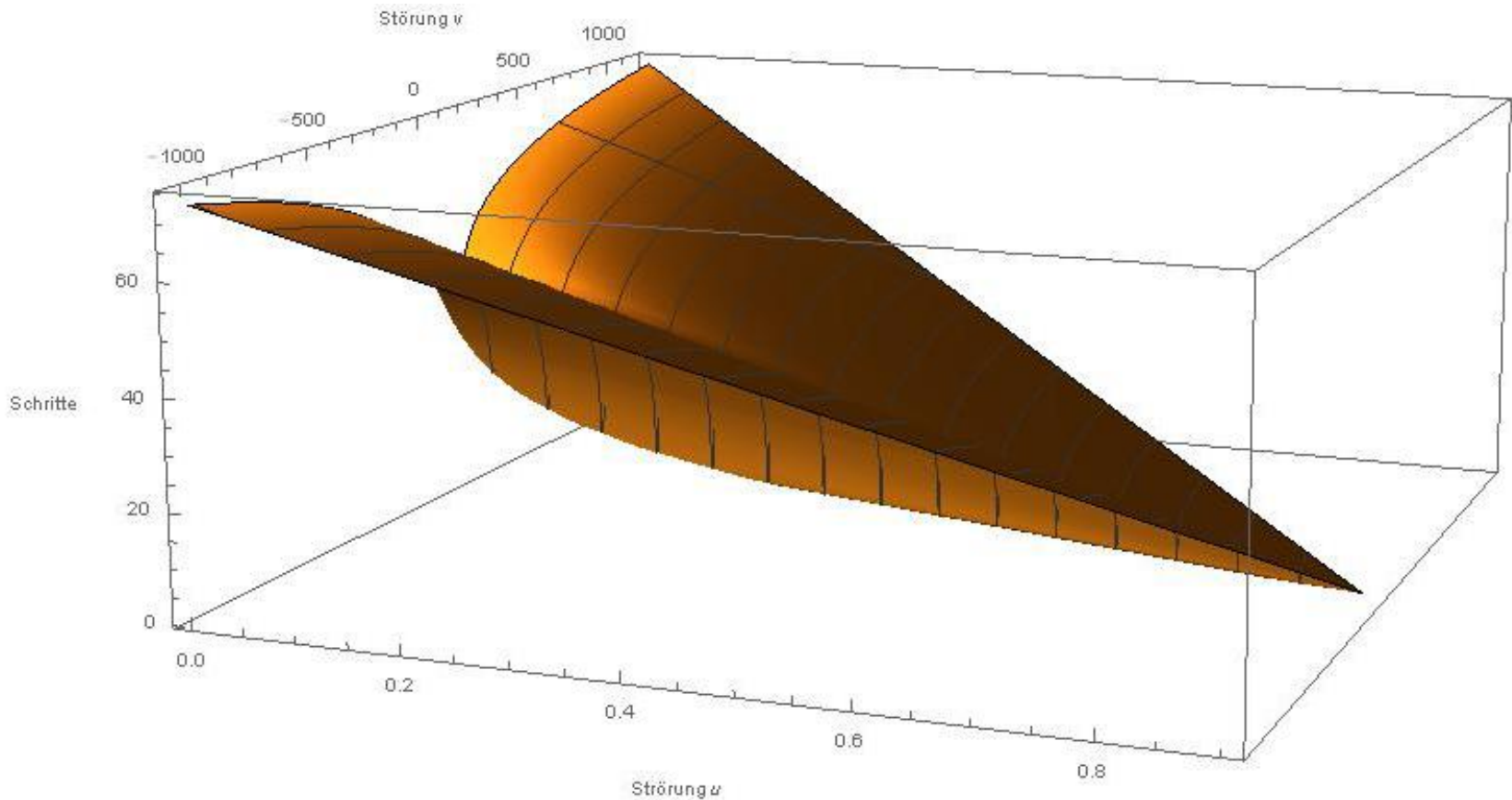
Fallunterscheidungen:

- $|\lambda_{1,2}| < 1$: *Fixpunkt ist stabil für kleine Störungen*
- $|\lambda_1|$ und $|\lambda_2|$ oder beide > 1 : *halbstabiler/instabiler Fixpunkt*
- λ_1 oder $\lambda_2 = 1$: *keine Aussage durch lin.Approx. Möglich*

⇒ Wir können Stabilität in den Eigenbasen der Jacobi-Matrix wie in einer Dimension einzeln betrachten.

Stabilität 2-D Poincaré-Schnitte

Beispiel für $\lambda_1 = 0,9$ und $\lambda_2 = -1,1$:



⇒ Papierflieger!

Stabilität 2-D Poincaré-Schnitte

komplex konjugierte Eigenwerte:

$$\text{z.B. } \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

Eigenwertgleichungen der Störung (lin.Approx.):

$$u_{i+1} = \alpha u_i - \beta v_i$$

$$v_{i+1} = \beta v_i + \alpha u_i$$

⋮
⋮

Für $i = k$ folgt in Polarkoordinaten:

$$r_k = \rho^k r_0 \quad (1)$$

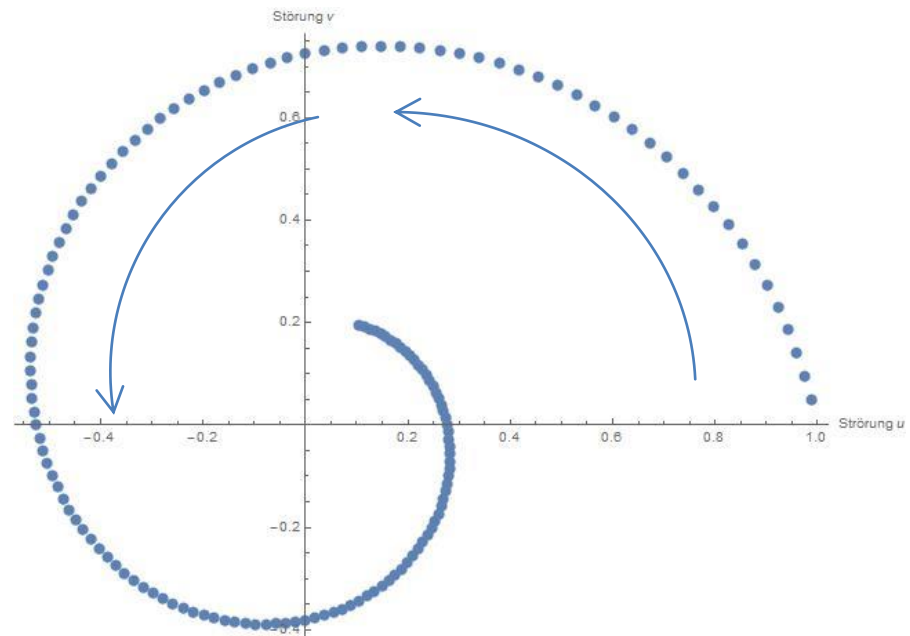
$$\theta_k = \theta_0 + k\Phi \quad (2)$$

Gleichung (2) für Stabilität nicht wichtig, da Phase.

Stabilität 2-D Poincaré-Schnitte

Wichtige Gleichung: $r_k = \rho^k r_0$

Fallunterscheidung:
 $\rho < 1$: Fixpunkt stabil



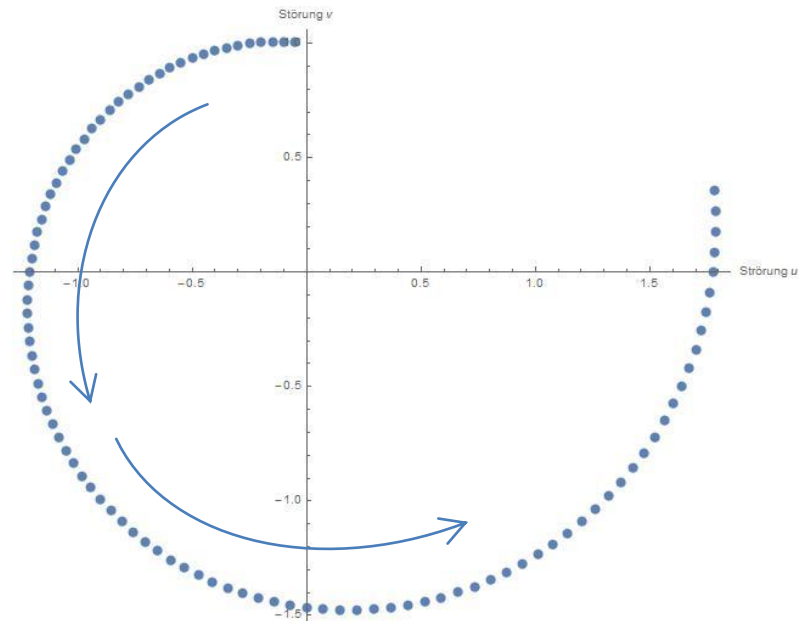
$\rho = 1$: keine Aussage möglich

Stabilität 2-D Poincaré-Schnitte

Wichtige Gleichung: $r_k = \rho^k r_0$

Fallunterscheidung:

$\rho > 1$: Fixpunkt instabil



⇒ Was passiert bei komplexen Eigenwerten ?

Stabilität in vielen Dimensionen

Seien nun $\vec{x}(t) = x(t) = x^E + \xi(t)$ und $\vec{x}^E = x^E$ Vektoren :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= P(x(t)) \\ x^E &= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = P(x^E)\end{aligned}$$

Führen kleine Störung $\vec{\xi}(t) = \xi(t)$ mit $\|\vec{\xi}\| \ll 1$ ein und entwickeln am Punkt x^E :

$$x^E + P(x^E + \xi(t)) \approx \underbrace{P(x^E)}_{= x^E} + \left. \frac{dP}{dx} \right|_{x^E} \xi(t) + \dots$$

$$P(x^E + \xi(t)) \approx \left. \frac{dP}{dx} \right|_{x^E} \xi(t) + \dots$$

Stabilität in vielen Dimensionen

$$P(x^E + \xi(t)) \approx \left. \frac{dP}{dx} \right|_{x^E} \xi(t) + \dots$$

Mit $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(x^E + \xi(t)) = \dot{\xi}(t)$ und $\dot{x}(t) = P(x^E + \xi(t))$:

$$\dot{\xi}(t) = \left. \frac{dP}{dx} \right|_{x^E} \xi(t)$$

Wir haben also eine lineare DGL 1.Ordnung mit Lösung:

$$\Rightarrow \xi(t) = e^{\left. \frac{dP}{dx} \right|_{x^E} t} \xi(0)$$

Stabilität in vielen Dimensionen

Wir zerlegen $\xi(0) = \sum_i c_i v_i$ in Eigensystem von $\frac{dP}{dx}|_{x^E}$ mit EW α_i :

$$\Rightarrow \xi(t) = e^{\frac{dP}{dx}|_{x^E} t} \xi(0) = \sum_i c_i e^{\frac{dP}{dx}|_{x^E} t} v_i = \sum_i c_i e^{\alpha_i t} v_i$$

Nehmen wir an kompl. EW $\alpha_i = Re(\alpha_i) + i Im(\alpha_i)$:

$$\Rightarrow \xi(t) = \sum_i \underbrace{c_i}_{< 1} \underbrace{e^{Re(\alpha_i) t}}_{\text{relevant}} \underbrace{e^{i Im(\alpha_i) t}}_{\text{Phase (nicht relevant)}} v_i$$

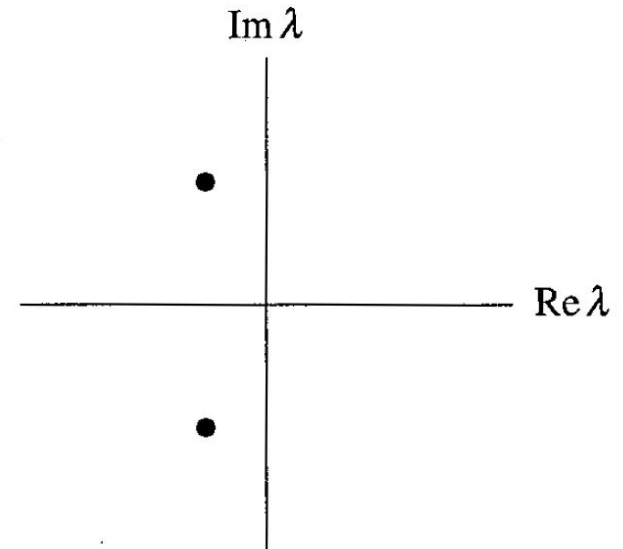
Wir brauchen nur Realteil betrachten !

Hopf Bifurcation

- Abhängig von Parameter μ
- Verschiedene Arten
 - Subkritisch
 - Superkritisch
- Poincaré-Andronov-Hopf Bifurcation

Hopf Bifurcation

- Wann tritt eine Bifurcation auf?
 - Betrachte Eigenwerte (EW) der Jakobimatrix
- EW schneiden imaginäre Achse:
 - Einzelnd
 - Gleichzeitig
- Erhalten dort die Bifurcation
 - Superkritisch
 - Subkritisch

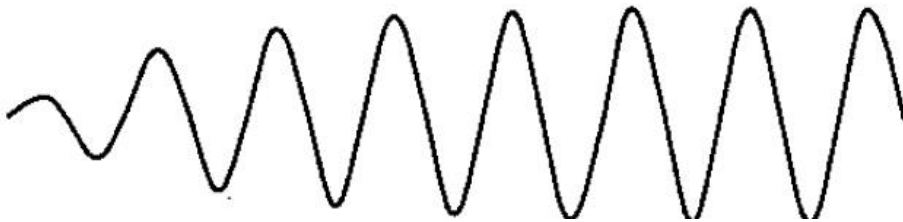


Hopf Bifurcation: Superkritisch

Gedämpfter Oszillator mit Dämpfung abhängig von μ



(a) $\mu < \mu_c$



(b) $\mu > \mu_c$

a. Bekannt

b. Interessanter Fall

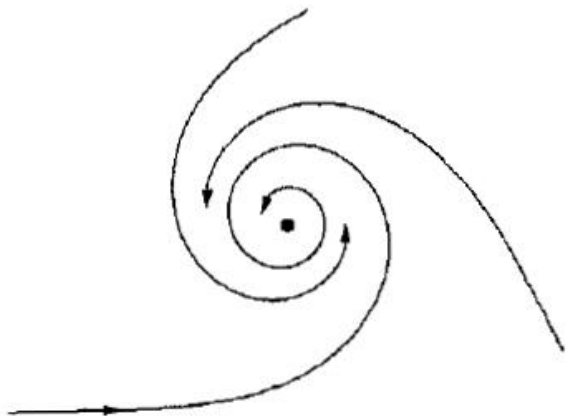
Hopf Bifurcation: Superkritisch

Betrachte das System

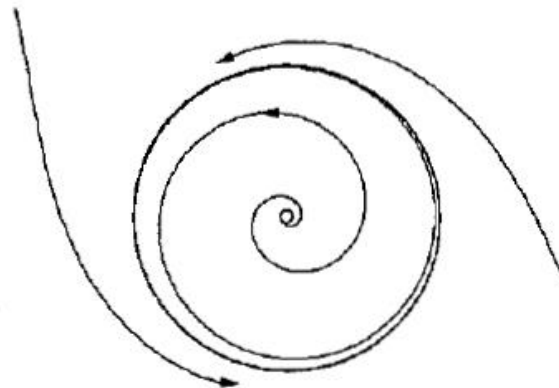
- μ hat Einfluss auf Stabilität
- ω : Winkelgeschwindigkeit
- b : Zusätzliche Winkelgeschwindigkeit für große Amplituden

$$\dot{r} = \mu r - r^3$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2$$



$$\mu < 0$$



$$\mu > 0$$

Hopf Bifurcation: Superkritisch

Wie sieht die Theorie dazu aus?

⇒ Betrachte die EW der Jacobimatrix

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ &= (\mu r - r^3) \cos \theta - r(\omega + br^2) \sin \theta \\ &= (\mu - [x^2 + y^2])x - (\omega + b[x^2 + y^2])y \\ &= \mu x - \omega x + O(x^2, y^2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \omega x + \mu y + O(x^2, y^2)$$

Jacobimatrix:
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega$$

Hopf Bifurcation: Subkritisch

In realen Systemen der gefährlichere Fall

⇒ Sprung bei Bifurcation zu

- Entfernten Attraktor
- Fixpunkt
- Limit circle
- Unendlich

Bsp: Fixpunkt wird unstabil und bildet entfernten limit circle

Hopf Bifurcation: Subkritisch

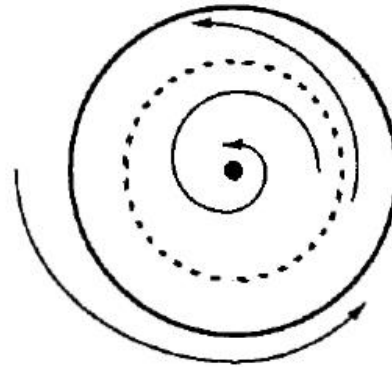
$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2$$

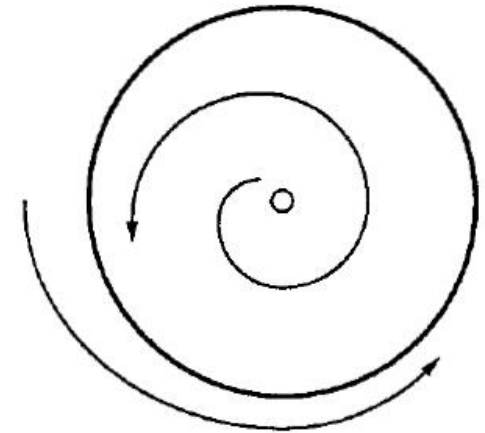
Plot im Phasenraum für

Verschiedene μ :

- Verschmelzung und Zerstörung von stabilem und instabilen limit circle für $\mu < 0.25$.
- Große Oszillationen können verloren gehen



$\mu < 0$



$\mu > 0$

Hopf Bifurcation Kriterium

Können uns fragen was für eine Art Bifurcation vorliegt.

Antwort:

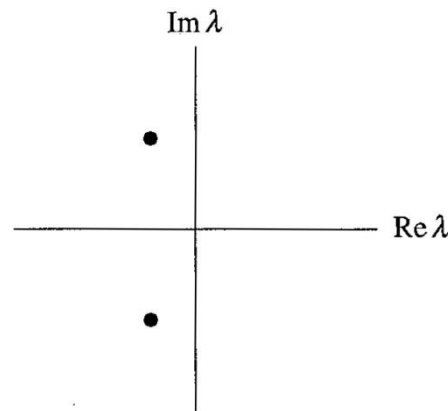
- Analytisch kompliziert
- Einfacher mit Computer
- Superkritisch: Fixpunkt wird unstabil \Rightarrow stabiler limit circle
- Subkritisch: Alle anderen Fälle

Hopf Bifurcation Kriterium

Wo liegt die Bifurcation?

⇒ Jakobimatrix

Bifurcation at $\mu=0$



$$\dot{x} = \mu x - y + xy^2$$

$$\dot{y} = x + \mu y + y^3$$

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \mu \pm i$$

Superkritisch oder Subkritisch?

⇒ Betrachte Animation

⇒ Subkritisch

Geschlossene Orbits

Betrachte vereinfachte Josephson Junction $I = \phi'' + \alpha\phi' + \sin\phi$

– Φ Phasendifferenz in der Josephson Junction

– α Bremsstrom

– I angelegter Strom

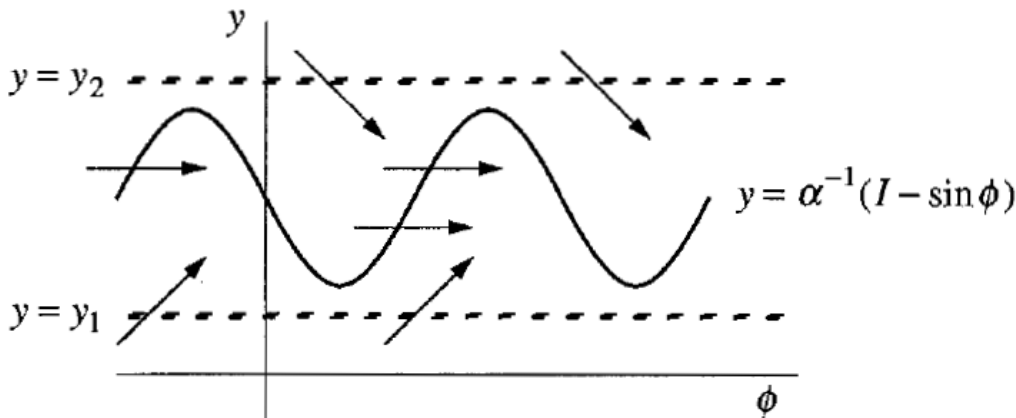
$$\phi' = y$$

$$y' = I - \sin\phi - \alpha y$$

Schreibe Gleichung um:

$$\Rightarrow y = (y' - I + \sin\phi)\alpha^{-1}$$

Plotte y im Phasenraum



Geschlossene Orbits

Betrachte Trajektorie in einer Periode

⇒ Betrachte Zylinder in 2D

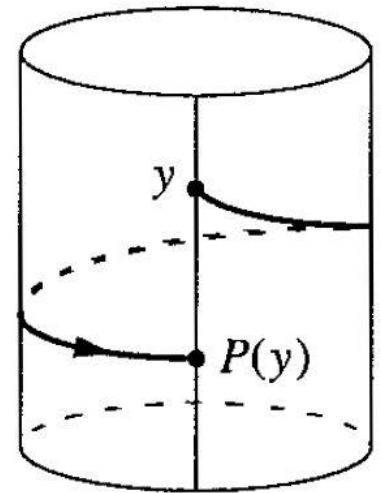
Box enthält alle Informationen

⇒ Poincaré-Map

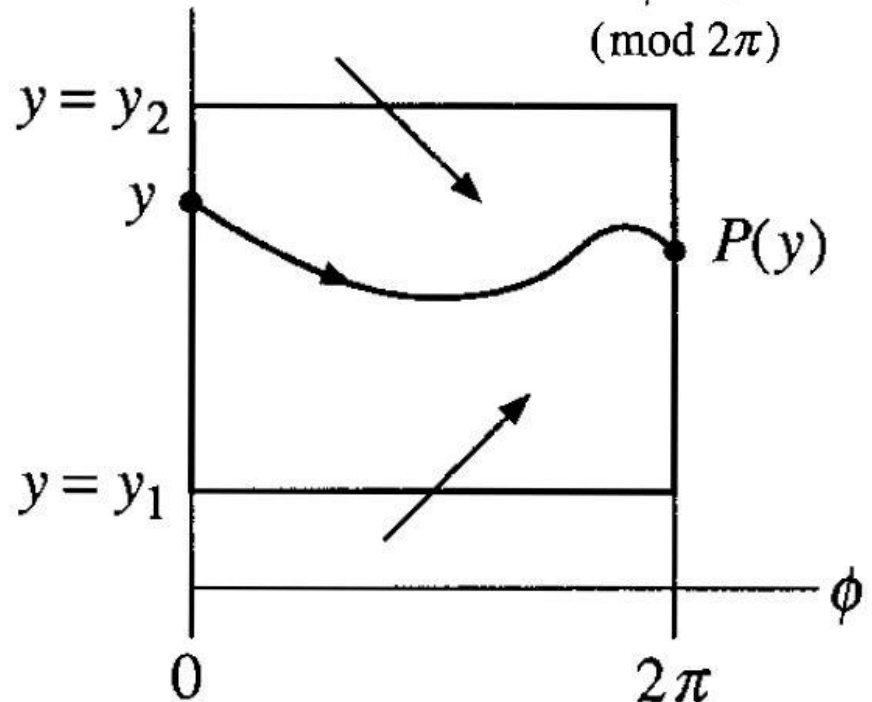
Höhendifferenz nach einer

Periode

Suche nun geschlossenen Orbit



$\phi = 0$
(mod 2π)



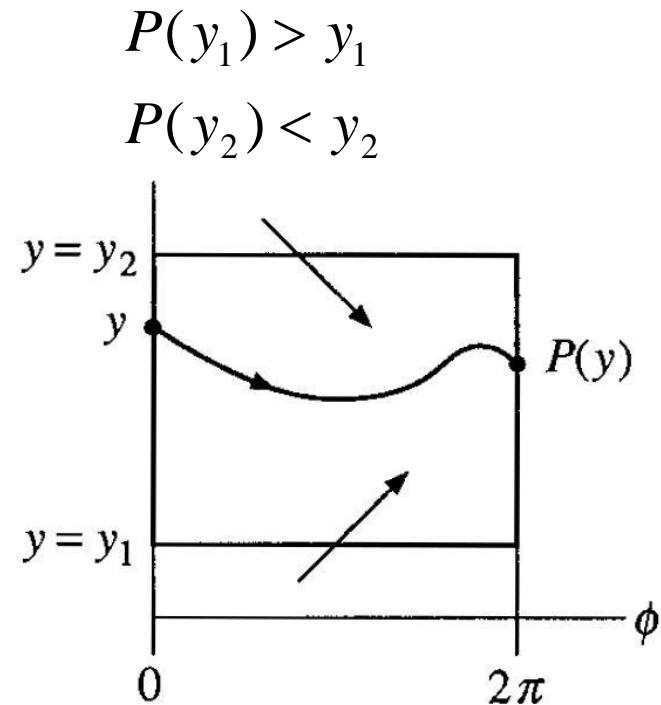
Geschlossene Orbits

$$y^* = P(y^*)$$

Benutze Zwischenwertsatz mit Funktionen

Wichtig für P:

- P ist monoton
- Orbits dürfen sich nicht schneiden

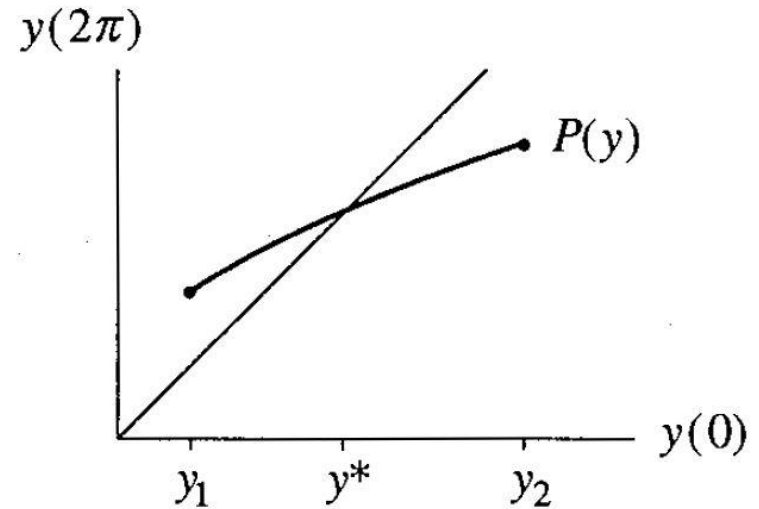


Geschlossene Orbits

Aus Zwischenwertsatz folgt dann:

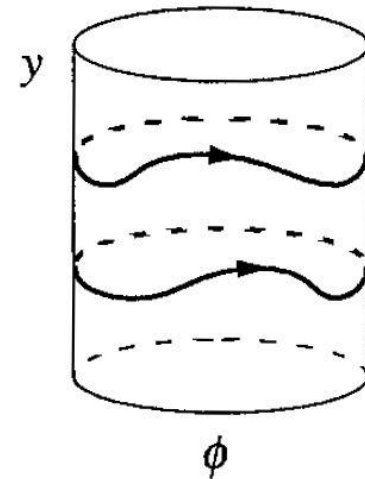
⇒ Es muss so ein y^* geben.

⇒ geschlossener Orbit



Untersuche nun die Einzigartigkeit

Frage: Kann es mehrere geben?



Geschlossene Orbits

Definiere zwei geschlossene Orbits

$$y_U(\phi) > y_L(\phi) \forall \phi$$

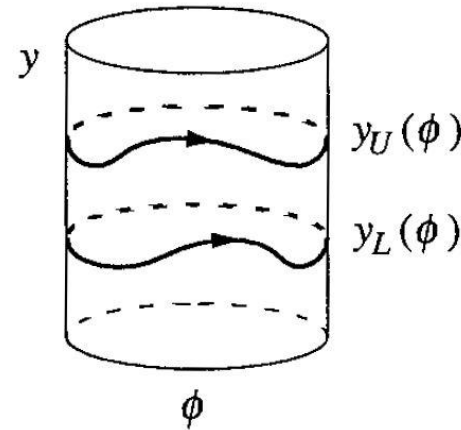
Betrachte nun die Energie

$$E = \frac{1}{2} y^2 - \cos \phi$$

$$\Delta E = \int_0^{2\pi} \frac{dE}{d\phi} d\phi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} y(\phi) d\phi = \frac{2\pi \cdot I}{\alpha} \Rightarrow \int_0^{2\pi} y_U d\phi > \int_0^{2\pi} y_L d\phi$$

\Rightarrow Widerspruch zur Definition



Quasiperiode Orbits

Untersuche ungekoppeltes System

Trage Winkel gegeneinander auf

⇒ Es treten 2 Fälle auf

- Rationale Steigung
- Irrationale Steigung

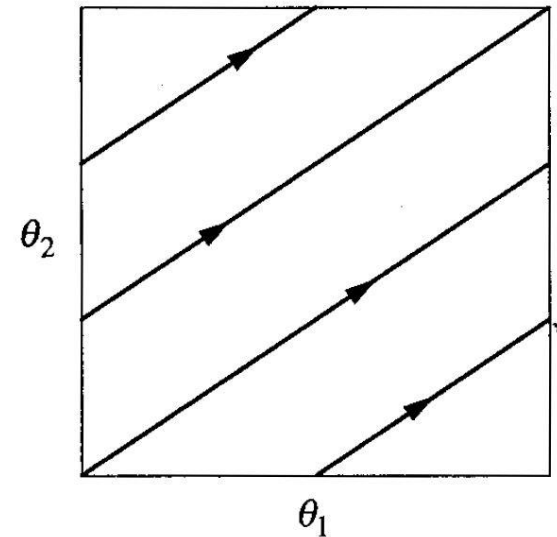
Betrachte Box mit periodischen Wänden

Plot für $p=3$, $q=2$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1$$

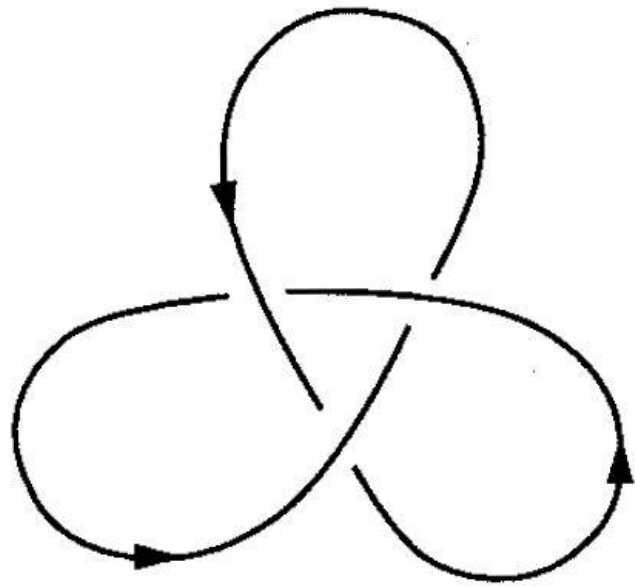
$$\dot{\theta}_2 = \omega_2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$$

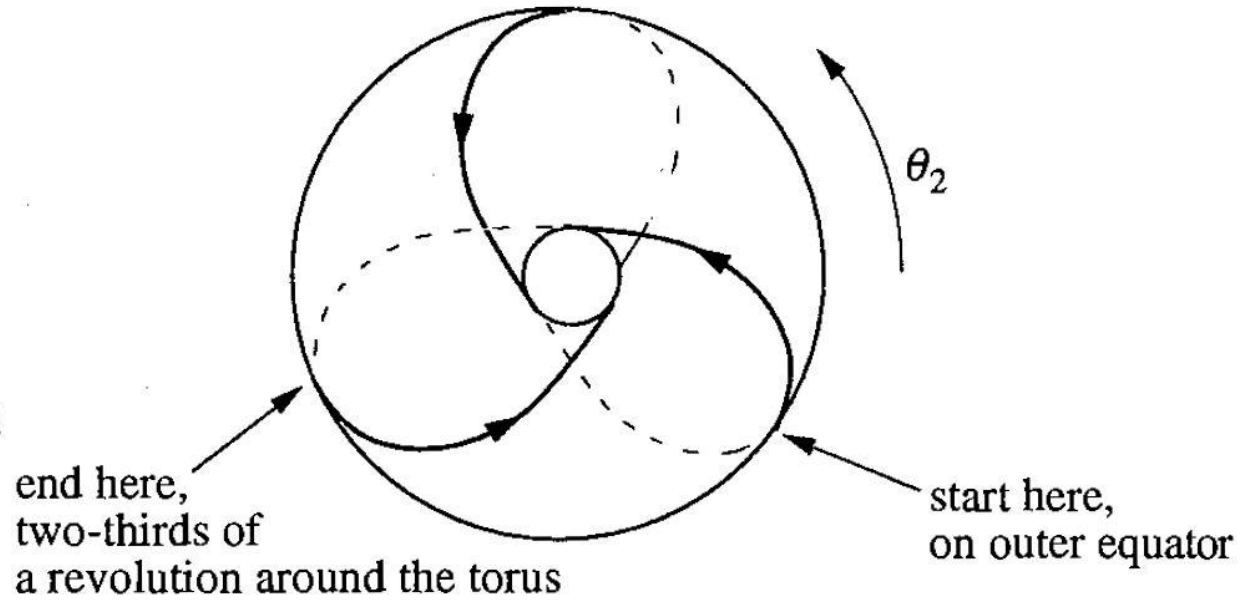


Quasiperiodic Orbits

Plot auf dem Torus



trefoil knot



end here,
two-thirds of
a revolution around the torus

start here,
on outer equator

Quasiperiodicity

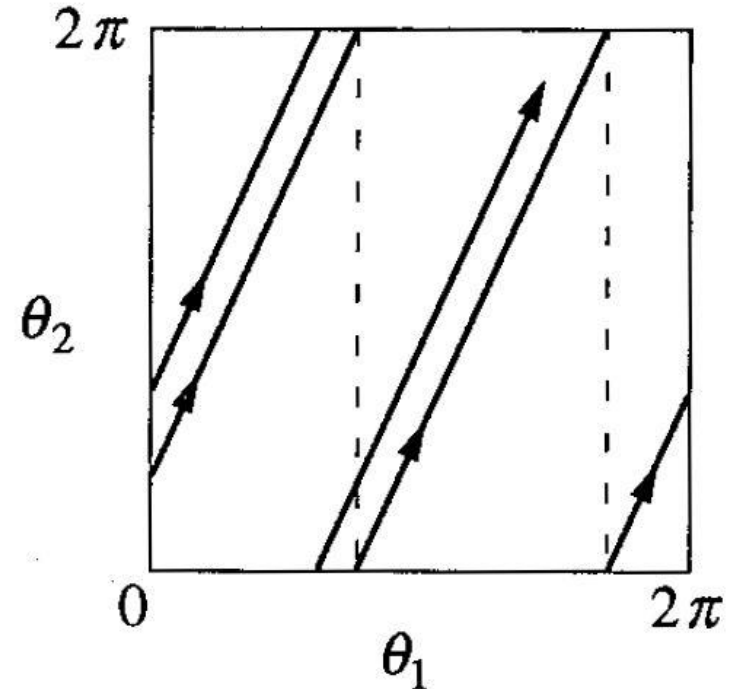
Now proceed to irrational slope

⇒ trajectories never close

⇒ each trajectory is dense

Discovered new long-term-behaviour

⇒ Only on appear on torus



Quellen

Hauptquellen/Bücher:

- Strogatz, S. H. - Nonlinear Dynamics And Chaos
- J. M. T. Thompson, H. B. Stewart - Nonlinear Dynamics and Chaos
- Paper von Alexander Roth:

Internetlinks:

- https://de.wikipedia.org/wiki/Seltsamer_Attraktor
- https://en.wikipedia.org/wiki/Hopf_bifurcation
- <http://reference.wolfram.com/language/EquationTrekker/tutorial/EquationTrekker.html>

Alle nicht selbst erzeugten Bilder entstammen aus:

- Strogatz, S. H. - Nonlinear Dynamics And Chaos
- J. M. T. Thompson, H. B. Stewart - Nonlinear Dynamics and Chaos