[P1] Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Kasten, beschrieben durch das Potential $V(x) = V_0$ für $|x| > L/2$ und $V(x) = 0$ für $|x| < L/2$. (Zur Erinnerung: In Hausübung I.2 wurde ein Kasten mit unendlich hohen Wänden betrachtet.) Zeigen Sie, daß eine Wellenfunktion $\psi(x)$, die eine stationäre Lösung der Schrödinger-Gleichung darstellt, für alle x stetig sein muß, insbesondere also auch für $|x| = L/2$. Zeigen Sie ferner, daß dies auch für deren erste Ableitung $\psi'(x)$ gelten muß.

Anleitung: Betrachten Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung und zeigen Sie, daß $\psi''(x)$ für alle x endlich ist. Folgern Sie daraus die Stetigkeit von $\psi'(x)$. Überlegen Sie, welche Bedingung $\psi(x)$ erfüllen muß, damit $\psi'(x)$ überall existiert.

[P2] Ein attraktives, schweres Punktteilchen ohne weitere Eigenschaften erzeugt ein Potential, das durch die δ-Distribution gegeben ist:

$$V(x) = -V_0\delta(x)\,.$$

Finden Sie die erlaubten Energie-Eigenwerte eines Testteilchens und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen dieses Problems.

Anleitung: Stellen Sie separate Lösungsansätze der zeitunabhängigen Schrödingergleichung in den Bereichen $-\infty < x < 0$ und $0 < x < \infty$ auf. Betrachten Sie

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \mathrm{d}x \left(\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + (E - V(x))\psi(x)\right)$$

und führen Sie den Grenzübergang unter der Annahme der Stetigkeit von $\psi(x)$ in $x = 0$ durch. Sie sollten damit eine Sprungbedingung für $\psi'(x)$ erhalten, deren nicht-triviale Lösung die Energie-Eigenwerte liefert.

[H1] Ein quantenmechanisches System habe ein Ortswellenfunktion $\psi(\vec{x}) = \frac{c}{|\vec{x}|}\exp(-a|\vec{x}|)$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie die Konstante c. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt eine Impulsmessung den Wert $\vec{p}$ innerhalb eines Bereiches d^3p. Hinweis: Führen Sie die erforderlichen Integrale in Kugelkoordinaten aus. (4 P.)

[H2] *Der eindimensionale Tunneleffekt.* Betrachten Sie eine eindimensionale rechteckige Potentialbarriere, d.h.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \ |x| \geq a \\ V_0 & : \ |x| < a \end{cases} \qquad \text{mit} \quad V_0 > 0\,.$$

(1) Lösen Sie die Schrödingergleichung für Funktionen der Form $\psi(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}\varphi(x)$ mit $E \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Lösung für $E < V_0$ die folgende Form hat:

$$\varphi(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & : \ x \leq -a \\ C\mathrm{e}^{-\kappa x} + D\mathrm{e}^{\kappa x} & : \ |x| < a \\ F\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + G\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & : \ x \geq a \end{cases} \qquad \text{mit} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\,, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}\,.$$

(2) Nehmen Sie $\varphi(x)$ als stetig und differenzierbar an. Zeigen Sie, daß diese Annahme auf die folgenden linearen Gleichungssysteme führt:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(a)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = M(-a)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad M(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1 + \frac{\mathrm{i}\kappa}{k})\mathrm{e}^{\kappa a + \mathrm{i}ka} & (1 - \frac{\mathrm{i}\kappa}{k})\mathrm{e}^{-\kappa a + \mathrm{i}ka} \\ (1 - \frac{\mathrm{i}\kappa}{k})\mathrm{e}^{\kappa a - \mathrm{i}ka} & (1 + \frac{\mathrm{i}\kappa}{k})\mathrm{e}^{-\kappa a - \mathrm{i}ka} \end{pmatrix}.$$

(3) Folgern Sie daraus folgende Beziehung, wobei $\varepsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}$ und $\eta = \frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa}$ gesetzt sind:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cosh 2\kappa a + \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\sinh 2\kappa a)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka} & \frac{\mathrm{i}\eta}{2}\sinh 2\kappa a \\ -\frac{\mathrm{i}\eta}{2}\sinh 2\kappa a & (\cosh 2\kappa a - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\sinh 2\kappa a)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ka} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}.$$

Osterei: $\det M(a) = \mathrm{i}\frac{\kappa}{k}$.

(4) Ein Teilchen laufe nun aus der Richtung $x = -\infty$ ein. Begründen Sie, warum dann $G = 0$ ist, und warum man $T(E) = \frac{F}{A}$ als *Transmissionsamplitude* bezeichnet. Zeigen Sie für den *Transmissionskoeffizienten*

$$|T(E)|^2 = \frac{1}{1 + (1 + \frac{\varepsilon^2}{4})\sinh^2 2\kappa a}\,.$$

Skizzieren Sie $|T(E)|^2$, am besten mit Hilfe eines Computers, und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch. Hinweis: Zum Skizzieren von Funktionen wie $|T(E)|^2$ eignen sich Programme wie gnuplot, Maple®, Mathematica®.

(5) Entsprechend nennt man $R(E) = \frac{B}{A}$ die *Reflektionsamplitude*, $|R(E)|^2$ den *Reflektionskoeffizienten*. Begründen Sie dies und zeigen Sie $|T(E)|^2 + |R(E)|^2 = 1$. (6 P.)