

- 1.1 In der Vorlesung wurde die Frage erörtert, was bei einer Messung geschieht. Diskutieren Sie diesen zentralen Punkt nochmals.
- 1.2 Zur Drehimpuls-Algebra. Die Drehimpulsalgebra $\mathfrak{so}(3)$ ist bestimmt durch die Kommutatoren

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Es sei eine Orthonormalbasis $|j, m, n\rangle$ gegeben, wobei n ein Entartungsindex ist. Geben Sie an, wie J_3 und $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ auf der Orthonormalbasis wirken. Betrachten Sie dazu den Operator \mathbf{J}^2 .

Vergegenwärtigen Sie sich, dass die J_{\pm} Leiteroperatoren sind. Berechnen Sie die Norm der Zustände $J_{\pm}|j, m, n\rangle$ und folgern Sie daraus dass

- (i) zu gegebenem j nur endlich viele Quantenzahlen m möglich sind,
- (ii) $2j$ ganzzahlig und nicht negativ sein muss.

- 1.3 Betrachten Sie den Spezialfall $j = 1/2$. Der entsprechende Unterraum der obigen Orthonormalbasis ist der zweidimensionale Raum der Spinoren des Spin-1/2-Multipletts. Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 1.2 ist klar, dass die Spin-1/2-Operatoren $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ sind, mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie einen Eigenzustand mit Spin $+\frac{1}{2}$ in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^t$.

Drehimpulsoperatoren erzeugen Drehungen von Zuständen. Bezeichne \mathbf{n} den Einheitsvektor in Richtung der Drehachse, so ist $U(\mathbf{n}, \alpha) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\alpha \mathbf{J} \cdot \mathbf{n})$. Demonstrieren Sie dies explizit für $\mathbf{J} = \mathbf{S}$, indem Sie $U_{j=1/2}(\mathbf{n}, \alpha)$ berechnen. Was ist $U_{j=1/2}(\mathbf{n}, 2\pi)$? Was hat dieser Dreh-Operator mit der obigen Konstruktion eines Eigenzustandes zu tun?

- 1.1 *Zum Wasserstoffatom.* Finden Sie mit Hilfe des Variationsprinzips Näherungslösungen für den Grundzustand des Wasserstoffatoms. Machen Sie den üblichen Ansatz

$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = a_0^{-\frac{3}{2}} \frac{u(\rho)}{\rho} Y_l^m(\theta, \phi)$$

für die Wellenfunktion, wobei Sie hier und im folgenden die Abkürzungen $a_0 = \hbar^2/me^2$, $\rho = r/a_0$ und $E_H = \frac{1}{2}\hbar^2/a_0^2 m$ verwenden. Wie sieht das Energiefunktional, definiert als $E[\Phi] = \langle \Phi | H | \Phi \rangle / \langle \Phi | \Phi \rangle$, aus? 2 P.

Für den Grundzustand kann man $l = m = 0$ annehmen. Führen Sie nun die Berechnung der stationären Energie für drei einparametrische Familien von Radialfunktionen u aus, nämlich

$$u_1(\rho, b) = \rho e^{-b\rho}, \quad u_2(\rho, b) = \rho^2 e^{-b\rho}, \quad u_3(\rho, b) = \frac{\rho}{b^2 + \rho^2}.$$

Erinnern Sie sich an die exakte Lösung $u(\rho) = 2\rho e^{-\rho}$ und berechnen Sie deren Überlapp mit Ihren Variationslösungen (auf Normierung der Wellenfunktionen achten!). Vergleichen Sie die Lösungen miteinander. 3 P.

- 1.2 *Erhöhte Symmetrie.* Das Coulomb-Potential nimmt unter den zentralsymmetrischen Potentialen eine Sonderstellung ein, da es eine zusätzliche Erhaltungsgröße erlaubt. Prüfen Sie nach, dass in der Tat der Operator

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{p})$$

mit dem Hamilton-Operator $H = \mathbf{p}^2/2 - 1/r$ vertauscht. Zeigen Sie weiter, dass für die Kommutatoren $[L_i, A_j] = i \varepsilon_{ijk} A_k$ und $[A_i, A_j] = -2i H \varepsilon_{ijk} L_k$ gilt. Was folgt aus der Tatsache, dass z.B. A_3 mit L_3 kommutiert, nicht aber mit L^2 ? 2 P.

Nehmen Sie nun Zustände des diskreten Spektrums (d.h. mit fixierter negativer Energie) an. Dann kann man H durch E ersetzen und ferner die Operatoren $u_k = A_k (-2E)^{-1/2}$ einführen. Wie lauten nun die Vertauschungsregeln? Machen Sie sich klar, dass diese Operatoren zusammen mit den L_j infinitesimale Drehungen in einem vierdimensionalen euklidischen Raum erzeugen, also die Algebra $\mathfrak{so}(4)$ bilden. 2 P.

Führen Sie schließlich die Linearkombinationen $\mathbf{j}_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} \pm \mathbf{u})$ ein. Wie lauten die Vertauschungsregeln für ihre Komponenten? Interpretieren Sie das Ergebnis im Rahmen von Drehimpuls-Algebren (Lösung: zwei kommutierende $\mathfrak{so}(3)$ Algebren). Mit den Beziehungen $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} = 0$ und $\mathbf{L}^2 + \mathbf{u}^2 = -1 - \frac{1}{2E}$ (nachrechnen?) läßt sich ein Zusammenhang zwischen $(\mathbf{j}_{\pm})^2 = j(j+1)$ und der Energie herstellen. Bestimmen Sie damit den Entartungsgrad der Niveaus. Welche Drehimpulse sind also für ein gegebenes Energie-Niveau möglich? 3 P.