· ◇ · PRÄSENZÜBUNGEN · ◇ ·

- 10.0 Es trat die Frage auf, welche Relevanz das Computer-Praktikum für den Erwerb des Scheines hat. Antwort: Natürlich ist es relevant, das Computer-Praktikum erfolgreich und selbständig bearbeitet zu haben.
- 10.1 *Pauli Gleichung*. In der Vorlesung wurde die Dirac Gleichung aufgespalten. Mit der Basis

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

und den 4-Spinoren $\psi = \binom{\varphi}{\chi}$ ergaben sich für $A^\mu = (\phi, c\boldsymbol{A})$ die gekoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} (\mathrm{i}\hbar\partial_t - q\phi - mc^2)\,\varphi &= c(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma}\,\chi\,, \\ (\mathrm{i}\hbar\partial_t - q\phi + mc^2)\,\chi &= c(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma}\,\varphi\,. \end{aligned}$$

Gehen Sie zum nichtrelativistischen Grenzfall $c \to \infty$ über und betrachten Sie kleine Energien, so dass Sie $\mathrm{i}\hbar\partial_t = mc^2 + \mathcal{O}(c^0)$ setzen können, um die Pauli Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\,\Psi = \left(\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\phi - 2\frac{q}{2m}\boldsymbol{B} \cdot \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)\Psi$$

zu gewinnen. Hierbei wurde $\varphi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mc^2 t/\hbar}\Psi$ gesetzt.

· ◇ · HAUSÜBUNGEN · ◇ ·

■ 10.1 *Die Antiwelt*. In der Antiwelt sind Energien negativ, und wenn es nichtrelativistisch zugeht, gilt also $E \approx -mc^2$.

(i) Geben Sie die Pauli-Gleichung im Limes $c \to \infty$ an. 1 P.

(ii) Finden Sie eine Teilmenge der auftretenden physikalischen Größen, so dass man durch Ändern derer Vorzeichen die Pauli-Gleichung unserer Welt erhält. 1 P.

■ 10.2 γ *Matrizen*. Wir beginnen mit den γ Matrizen in der Dirac-Darstellung, wie in der Präsenzübung 10.1.

(i) Zeigen Sie, dass unitäre Transformationen $U\gamma U^\dagger$ der γ Matrizen, $U^\dagger = U^{-1}$, weiterhin die Clifford-Algebra erfüllen. 1 P.

(ii) Führen Sie die Transformation explizit für

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aus um die Weyl- oder chirale Darstellung zu erhalten. 1 P.

(iii) Berechnen Sie $\gamma^5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ und die Projektionsoperatoren

$$\Pi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\,, \quad \Pi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$$

in der Weyl-Darstellung. Es sei eine Lorentztransformation S_Λ von 4-Spinoren gegeben mit $[S_\Lambda, \gamma^5] = 0$. Welche Form haben folglich die 4-Spinoren $\binom{\psi_L}{0}$ und $\binom{0}{\psi_R}$ nach der Transformation? 2 P.

(iv) Zerlegen Sie die Dirac-Gleichung in der Weyl-Darstellung in Gleichungspaare für ψ_L und ψ_R. (Hinweis: Es genügt, den Fall ohne Eichfelder zu betrachten, $A^\mu = 0$.) Was passiert, wenn man nun masselose Teilchen (wie bis vor kurzem die Neutrinos) betrachtet? 3/2 P.

(v) Wie wirkt der *Helizitätsoperator*

$$\frac{\boldsymbol{p}}{p} \cdot \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{p}}{p} \cdot \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\,, \quad p = |\boldsymbol{p}|\,,$$

auf die Komponenten ψ_L und ψ_R eines masselosen Dirac-Spinors ψ? Erklären Sie, warum Lorentztransformationen die Komponenten ψ_L und ψ_R eines masselosen Dirac-Spinors niemals ineinander überführen können. 3/2 P.

■ 10.3 *Skalare Elektrodynamik*. Für ein skalares Feld $\phi \in \mathbb{C}$ lautet die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,, \quad D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}qA_\mu\,, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,.$$

(i) Wie lauten die Bewegungsgleichungen? (Hinweis: Variieren Sie bezüglich ϕ^* und bezüglich A_μ.) 2 P.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ unter der Eichtransformation $\phi \mapsto \exp(\mathrm{i}q\lambda(x))\phi$ und $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\lambda(x)$ invariant ist. 1 P.

12 P.