· ◇ · PRÄSENZÜBUNGEN · ◇ ·

■ 7.1 Benutzen Sie die Besetzungszahldarstellung, um für die Eigenzustände $|n_1, n_2, \ldots\rangle$ des elektromagnetischen Feldes die beiden mittleren Schwankungsquadrate $(\Delta\langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\rangle)^2$ und $(\Delta\langle \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r})\rangle)^2$ zu berechnen, wobei $(\Delta\langle\cdot\rangle)^2 \equiv \langle(\cdot)^2\rangle - \langle\cdot\rangle^2$ definiert ist.

■ 7.2 Es sei $|n_1, n_2, \ldots\rangle$ eine Slaterdeterminante. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ein Operator F, der sich als Summe von Einteilchenoperatoren $F^{(\ell)}$ schreiben läßt,

$$F = \sum_{\ell=1}^{N} F^{(\ell)} ,$$

die folgende Teilchenzahldarstellung besitzt:

$$F = \sum_{i,j} \langle i|F|j\rangle c_i^\dagger c_j = \sum_{i,j} c_i^\dagger F_{i,j} c_j .$$

Es werden dabei die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Fermionen verwendet, $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{i,j}$, $\{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0$. In Analogie zu den Bose-Operatoren sind auch das fermionische Vakuum $|0\rangle$ und die Vielteilchenzustände definiert durch

$$\begin{aligned} c_i|0\rangle &= 0 \quad \forall\, i , \\ |n_1, n_2, \ldots\rangle &= (c_1^\dagger)^{n_1}(c_2^\dagger)^{n_2}\ldots|0\rangle \quad n_i \in \{0,1\} . \end{aligned}$$

(i) Überprüfen Sie zunächst die folgenden Resultate:

$$\begin{aligned} c_i|n_1, n_2, \ldots\rangle &= (-)^{Z_i}\delta_{n_i,1}|n_1, n_2, \ldots, n_i - 1, \ldots\rangle , \\ c_i^\dagger|n_1, n_2, \ldots\rangle &= (-)^{Z_i}\delta_{n_i,0}|n_1, n_2, \ldots, n_i + 1, \ldots\rangle , \\ c_i^\dagger c_i|n_1, n_2, \ldots\rangle &= n_i|n_1, n_2, \ldots\rangle , \end{aligned}$$

wobei $Z_i = Z_{i,0} = \sum_{r=1}^{i-1} n_r$ ist.

(ii) Folgern Sie daraus, dass F die folgenden Matrixelemente besitzt:

$$\begin{aligned} &\langle n_1', \ldots, n_i', \ldots, n_j', \ldots|F|n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_j \ldots\rangle \\ &\qquad = (-)^{Z_{i,j}} F_{i,j}\delta_{n_1',n_1}\ldots\delta_{n_i',n_i+1}\ldots\delta_{n_j',n_j-1}\ldots , \\ Z_{i,j} &= \left|\sum_{r=1}^{i-1} n_r - \sum_{r=1}^{j-1} n_r\right| . \end{aligned}$$

· ◇ · HAUSÜBUNGEN · ◇ ·

■ 7.1 Der ein-dimensionale *Hubbard-Hamiltonoperator.* Ein einfaches Modell für N Elektronen, die mit Abstand a auf einer Kette sitzen, wird beschrieben durch

$$H_0 = -t\sum_{i=1}^{N}\sum_{\sigma=\uparrow\downarrow}\left[c_\sigma^\dagger(x_i)c_\sigma(x_i+a) + c_\sigma^\dagger(x_i)c_\sigma(x_i-a)\right] .$$

Die $c(x)$ erfüllen dabei die kanonischen Antikommutatoren $\{c_\sigma^\dagger(x), c_{\sigma'}(x')\} = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{x,x'}$. Die Spinindizes σ nehmen die Werte $\uparrow \equiv \frac{1}{2}$ und $\downarrow \equiv -\frac{1}{2}$ an.

(i) Zeigen Sie, dass sich der Hamiltonoperator durch Übergang zur Impulsdarstellung auf die folgende Form bringen läßt:

$$H_0 = -\sum_{\sigma=\uparrow\downarrow}\int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\epsilon(k)c_\sigma^\dagger(k)c_\sigma(k) .$$ 2 P.

(ii) Geben Sie die explizite Form der Dispersionsrelation $\epsilon(k)$ an. (Hinweis: Gehen Sie (im Limes einer langen Kette) von der diskreten Fouriertransformation $c_\sigma(x) = \frac{1}{L}\sum_k \exp(ikx)c_\sigma(k)$ zur kontinuierlichen $c_\sigma(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\exp(ikx)c_\sigma(k)$ über.) 1 P.

(iii) Betrachten Sie nun zusätzlich die Wechselwirkung

$$H_{\text{int}} = \frac{U}{2}\sum_{\substack{i\\ \sigma=\uparrow\downarrow}} c_\sigma^\dagger(x_i)c_\sigma(x_i)c_{-\sigma}^\dagger(x_i)c_{-\sigma}(x_i) .$$

Zeigen Sie, dass $M_\downarrow = \sum_i c_\downarrow^\dagger(x_i)c_\downarrow(x_i)$ und $M_\uparrow = \sum_i c_\uparrow^\dagger(x_i)c_\uparrow(x_i)$ gute Quantenzahlen bezüglich des gesamten Hamiltonoperators $H = H_0 + H_{\text{int}}$ besitzen. 3 P.

(iv) Die drei Komponenten des Spin-Operatores werden definiert durch

$$S_n^i = \frac{\hbar}{2}\sum_{\alpha,\alpha'} c_\alpha^\dagger(x_n)\sigma_{\alpha\alpha'}^i c_{\alpha'}(x_n) ,$$

wobei die σ^i die Pauli-Matrizen sind. Erfüllen diese Operatoren die Drehimpulsalgebra? 2 P.

■ 7.2 Betrachten Sie kohärente Zustände für Fermionen: $|\xi\rangle = \exp\left(-\sum_i \xi_i c_i^\dagger\right)|0\rangle$.

(i) Zeigen Sie, dass der kohärente Zustand die folgende einfache Form besitzt:

$$|\xi\rangle = \prod_i (1-\xi_i c_i^\dagger)|0\rangle .$$ 1 P.

(ii) Prüfen Sie, dass $|\xi\rangle$ in der Tat ein kohärenter Zustand ist: $c_j|\xi\rangle = \xi_j|\xi\rangle$. 1 P.

(iii) Beweisen Sie die folgende Kommutatorbeziehung:

$$\left[c_j, |\xi\rangle\langle\xi|\right] = \left(\xi_j - \frac{\partial}{\partial\xi_j^*}\right)|\xi\rangle\langle\xi| .$$ 2 P.

(iv) Zeigen Sie sodann, dass für den Operator

$$\mathbb{I} = \int\prod_i \mathrm{d}\xi_i^*\mathrm{d}\xi_i \exp(-\sum_i \xi_i^*\xi_i)|\xi\rangle\langle\xi|$$

gilt: $[c_j, \mathbb{I}] = 0$. 2 P.

(v) $\mathbb{I}$ vertauscht also mit allen Vernichtungsoperatoren, und damit auch allen Erzeugungsoperatoren (warum?). Dies gilt für alle Zustände im Vielteilchen-Fockraum (warum?). Benutzen Sie das Schur'sche Lemma, um abschließend zu zeigen: $\mathbb{I} = 1$. 1 P.

15 P.