K::1 Ein Zustand zweier Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen sei durch

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma\nu} \int \tilde{\mathrm{d}}p\, \tilde{\mathrm{d}}q\, f_{\sigma\nu}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, b^\dagger_\sigma(\mathbf{p}) b^\dagger_\nu(\mathbf{q})\, |\Omega\rangle \quad \text{mit} \quad f_{\sigma\nu}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \varepsilon_{\sigma\nu}\, g(\mathbf{p}^2,\mathbf{q}^2,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})$$

gegeben. Welchen Gesamtdrehimpuls und welchen Bahndrehimpuls hat er? Kurze Begründung. (3 P.)

K::2 Sei ρ ein Gemisch von Spin-$\frac{1}{2}$-Zuständen. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit, den Spin in Richtung $\vec{e}_{\theta,\varphi}$ nach oben zu finden, als Funktion der Winkel θ und φ für ein vollständig polarisiertes, ein teilweise polarisiertes und ein unpolarisiertes Gemisch? Qualitativer Funktionsgraph reicht! (4 P.)

K::3 Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \Gamma_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1,\mathbf{p}'_2\sigma'_2} | \Gamma_{\mathbf{p}_1\sigma_1,\mathbf{p}_2\sigma_2}\rangle$ der Zweifermionenzustände

$$|\Gamma_{\mathbf{p}_1\sigma_1,\mathbf{p}_2\sigma_2}\rangle = a^\dagger_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1) a^\dagger_{\sigma_2}(\mathbf{p}_2)|\Omega\rangle\ ,$$

wobei $\{a^\dagger_\sigma(\mathbf{p}), a^\dagger_\nu(\mathbf{q})\} = \{a_\sigma(\mathbf{p}), a_\nu(\mathbf{q})\} = 0$ und $\{a_\sigma(\mathbf{p}), a^\dagger_\nu(\mathbf{q})\} = (2\pi)^3\, 2p^0 \delta_{\sigma\nu}\, \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ ist. (4 P.)

K::4 Betrachten Sie die Kinematik der Elektron-Elektron-Streuung $e^- + e^- \to e^- + e^-$, bei der ein Elektron der Energie E und Masse m an einem ruhenden Elektron um den Winkel θ gestreut wird und mit Energie E' ausläuft,

$$\begin{pmatrix} E \\ ? \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' \\ ? \\ ? \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} .$$

Welchen Wert, ausgedrückt durch E und m, hat in Maßsystemen mit $c = 1$ die x-Komponente des Impulses des einlaufenden Elektrons? Welchen Wert, ausgedrückt durch E', θ und m haben die x- und y-Komponenten des Impulses des auslaufenden, gestreuten Elektrons? Was ist der Viererimpuls des Rückstoßelektrons? Welche Beziehung muß zwischen E', E, θ und m gelten, damit das Rückstoßelektron auf der Massenschale liegt? (6 P.)

K::5 Es gelte $[J_3, a^\dagger_\sigma(0)] = \sigma a^\dagger_\sigma(0)$, $\sigma \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, daß der Zustand $a^\dagger_\sigma(0)|\chi_\nu\rangle$ Eigenzustand von J_3 mit Eigenwert $\sigma + \nu$ ist, wenn $a^\dagger_\sigma(0)|\chi_\nu\rangle$ nicht verschwindet und $|\chi_\nu\rangle$ Eigenzustand von J_3 zum Eigenwert ν ist. (4 P.)

K::6 Die Wigner-Rotationen sind definiert als $W(\Lambda, p) = L^{-1}_{\Lambda p} \Lambda L_p$. Zeigen Sie $W(\Lambda_2\Lambda_1, p) = W(\Lambda_2, \Lambda_1 p) W(\Lambda_1, p)$. (3 P.)

K::7 Es seien $\not{k} = k_m\gamma^m$, $\not{l} = l_m\gamma^m$, $\not{m} = m_m\gamma^m$ und $\not{n} = n_m\gamma^m$ Linearkombinationen der γ-Matrizen, $\{\gamma^m,\gamma^n\} = 2\eta^{mn}$. Was ist die Spur $\mathrm{tr}(\not{k}\not{l}\not{m}\not{n})$? *Hinweise*: Zeigen Sie zunächst, daß $\mathrm{tr}(\gamma^k\gamma^l\gamma^m\gamma^n) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\{\gamma^k, \gamma^l\gamma^m\gamma^n\})$ ist, und werten Sie die Klammer mit der Produktregel gradierter Kommutatoren aus. Verfahren Sie analog für die verbleibenden Spuren von zwei γ-Matrizen.

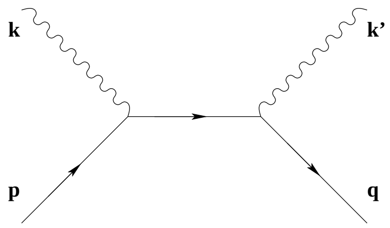
Es sei weiter $\not{o} = o_m\gamma^m$. Was ist die Spur $\mathrm{tr}(\not{k}\not{l}\not{m}\not{n}\not{o})$? (6 P.)

K::8 Ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen habe Bahndrehimpuls $\ell = 1$. Welche sechs Basiszustände $|m_s, m_\ell\rangle$ gibt es? Welche Linearkombinationen gehören zum $j = \frac{3}{2}$ Multiplett, welche zum $j = \frac{1}{2}$ Dublett? *Zur Erinnerung*: $L_-|\ell, m\rangle = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}|\ell, m-1\rangle$. (6 P.)

K::9 Der Propagator des Fermions ist

$$\langle T\,\psi(y)\overline{\psi}(x)\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,p\cdot(y-x)}\,\frac{\mathrm{i}\,(\not{p}+m)}{p^2-m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,.$$

Verwenden Sie den Propagator sowie die Beziehungen $\psi(x)b^\dagger_\sigma(\mathbf{q})|\Omega\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}u_\sigma(q)|\Omega\rangle$, $\overline{\psi}(y)d^\dagger_\nu(\mathbf{p})|\Omega\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot y}\overline{v}_\nu(p)|\Omega\rangle$, $a_\tau(\mathbf{k})A_m(x)|\Omega\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\varepsilon^*_{m,\tau}(k)|\Omega\rangle$ und die Lagrange-Dichte der Wechselwirkung $\mathcal{L}_{\text{int}} = e{:}\overline{\psi}(x)\gamma^m\psi(x)A_m(x){:}$, und geben Sie damit den Beitrag zum S-Matrixelement $\langle\mathbf{k}', \tau', \mathbf{k}, \tau|S|\mathbf{p}, \nu, \mathbf{q}, \sigma\rangle$ für Elektron-Positron-Vernichtung in zwei Photonen an, der durch den folgenden Feynmann-Graphen dargestellt wird:



Warum kann man direkt $\epsilon = 0$ setzen? (8 P.)

Gesamt: (44 P.)