
P::1 *Feynman-Regeln der ϕ^4-Theorie*: Erarbeiten Sie die Feynman-Regeln für die Matrixelemente der S-Matrix, die zu $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = -\frac{\lambda}{4!}{:}\phi^4(x){:}$ gehört.

[1] In $\mathcal{L}$ ist $\phi(x) = \int \tilde{d}p \big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} a^\dagger(p) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} a(p)\big)$ ein hermitesches, skalares Feld mit Propagator

$$\langle T\phi(x)\phi(y)\rangle = D_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\,.$$

Betrachten Sie das S-Matrixelement $\langle a^\dagger(p')|S\, a^\dagger(p)\rangle$. Warum gibt es keine nicht-verschwindenden Kontraktionen der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^1)$?

[2] Was sind alle Kontraktionen normalgeordneter Produkte, die in zweiter Ordnung Störungstheorie zu S gehören? Was müssen Sie beim Wickschen Theorem beachten, wenn im zeitgeordneten Produkt auch normalgeordnete Faktoren auftreten? Drücken Sie das Ergebnis graphisch und algebraisch mit Propagatoren D_F aus. Zu welchen Matrixelementen tragen die Kontraktionen bei?

[3] Betrachten Sie nun das S-Matrixelement $\langle a^\dagger(p')a^\dagger(q')|S\, a^\dagger(p)a^\dagger(q)\rangle$ und geben Sie alle nicht-verschwindenden Kontraktionen bis Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^2)$ einschließlich an. Zeichnen Sie alle zugehörigen Feynman-Grpahen. Jeder innere Vertex z bedeutet eine Integration $(-\mathrm{i}\lambda)\int \mathrm{d}^4 z$. Was ist die physikalische Bedeutung dieser Integration, was impliziert sie?

[4] Geben Sie nun die *zusammenhängenden* Feynman-Grpahen für das S-Matrixelement aus [3] an, die es bis Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^3)$ einschließlich gibt. Überlegen Sie, welche Symmetriefaktoren auftreten.

H::1 *Kausales Skalarfeld*: Die positiven und negativen Frequenzanteile des skalaren Feldes haben die Form

$$\phi^+(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\, a^\dagger(p)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,, \qquad \phi^-(x) = (\phi^+)^\dagger(x)\,.$$

Es soll im folgenden der Kommutator $[\phi^-(x), \phi^+(y)]$ für raumartige Abstände $x^2 < 0$ berechnet werden.

[1] Zeigen Sie zunächst, daß der Kommutator durch $[\phi^-(x), \phi^+(y)] = \Delta_+(x-y)$ gegeben ist, wobei

$$\Delta_+(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$$

ist. Warum ist diese Funktion manifest lorentz-invariant?

[2] Die Funktion $\Delta_+(x)$ kann für raumartige x nur von der lorentz-invarianten Größe $x^2 < 0$ abhängen. Wählen Sie das Koordinatensystem so, daß $x^0 = 0$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{-x^2}$ gilt und zeigen Sie damit:

$$\Delta_+(x) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 \mathrm{d}p}{2\sqrt{p^2+m^2}}\, \frac{\sin(p\sqrt{-x^2})}{p\sqrt{-x^2}}\,.$$

[3] Führen Sie die Substitution $u = p/m$ durch um das Integral auf die Form

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} K_1(m\sqrt{-x^2})\,, \qquad K_1(z) = \int_0^\infty \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}\, \sin(zu)$$

zu bringen. Das verbleibende Integral ist durch eine sogenannte modifizierte Bessel-Funktion der dritten Art, $K_1(z)$, gegeben. Suchen Sie in der Literatur [z.B. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ. 1970, pp. 374,379] Eigenschaften dieser Funktion, insbesondere das asymptotische Verhalten für $z \to 0$ und $z \to \infty$. (5 P.)

H::2 *Compton-Streuung*: Berechnen Sie das $S-$Matrixelement $\langle c^+_{\nu'}(k') b^+_{\sigma'}(p') | S\, c^+_\nu(k) b^+_\sigma(p)\rangle$ für $p' \neq p$, $k' \neq k$. Dabei erzeugt $b^+_\sigma(p)$ ein Elektron mit Spin σ und Impuls p, $c^+_\nu(k)$ ein Photon mit Helizität ν und Impuls k.

[1] Die Lagrange-Dichte der Wechselwirkung von Elektronen mit Photonen ist gegeben durch $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x) = {:}e\bar\psi(x)\gamma^m\psi(x)A_m(x){:}$, wobei das elektromagnetische Feld gegeben ist durch

$$A_m(x) = \sum_\nu \int \tilde{\mathrm{d}}p \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\, \epsilon^*_{m,\nu}(p)\, c^+_\nu(p) + h.c.\right]\,.$$

Die S-Matrix $S = T\exp(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}_{\mathrm{int}})$ ist nach dem Wickschen Theorem die Summe über alle Kontraktionen des normalgeordneten Produktes. Warum trägt erst

$$S_2 = \frac{\mathrm{i}^2}{2} T \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(x)\, \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(y)$$

in niedrigster Ordnung zum Matrixelement bei? Welche Kontraktionen tragen bei?

[2] Zeigen Sie, daß $\psi^-(x)b^+_\sigma(p)|\Omega\rangle = u_\sigma(p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}|\Omega\rangle$ und $A^-_m(x)c^+_\nu(k)|\Omega\rangle = \epsilon_{m,\nu}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}|\Omega\rangle$ ist. Symbolisieren Sie durch eine Linie in einem Diagramm die Wirkung eines Feldes $\psi(x)$ auf ein Teilchen in einem ein- oder auslaufenden Zustand. Mit welch einem Faktor trägt ein bei x ein- oder auslaufenden Elektron oder Photon zum S-Matrixelement bei? Wie symbolisiert man die Kontraktion $\langle T\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle$? Welcher Faktor entspricht ihr?

[3] Geben Sie die zwei Diagramme an, die zur Compton-Streuung in niedrigster Ordnung beitragen und erläutern sie damit das algebraische Ergebnis

$$(\mathrm{i}e)^2 \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p'+k')\cdot y}\, \bar{u}_{\sigma'}(p')\, \gamma^n\, \epsilon^*_{n,\nu'}(k')\, \langle T\psi(y)\bar{\psi}(x)\rangle\, \gamma^m\, u_\sigma(p)\, \epsilon_{m,\nu}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+k)\cdot x}$$
$$+\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p'-k)\cdot y}\, \bar{u}_{\sigma'}(p')\, \gamma^n\, \epsilon^*_{n,\nu}(k)\, \langle T\psi(y)\bar{\psi}(x)\rangle\, \gamma^m\, u_\sigma(p)\, \epsilon_{m,\nu'}(k')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-k')\cdot x}\Big]\ .$$

Wieso fehlt hier der Faktor $\frac{1}{2}$ aus der Definition von S_2?

[5] Schreiben Sie den Propagator als

$$\langle T\psi(y)\bar{\psi}(x)\rangle = \int d^4q\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot(y-x)}\, \frac{-\mathrm{i}(q_m\gamma^m + m)}{q^2 - m^2 - \mathrm{i}\varepsilon}$$

und führen sie die x-, y- und q-Integrationen zur Berechnung des Matrixelementes aus. Was ist die physikalische Interpretation der übrigbleibenden δ-Funktion, warum braucht die iε-Vorschrift für den Propagator nicht beachtet werden? Geben Sie das S-Matrixelement als Ausdruck in Spinoren, γ-Matrizen und Polarisationstensoren an. (15 P.)