P::1 Zeigen Sie für eine rationale Funktion $R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, R(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

endlich ist, wenn $\mathrm{grad}(N(x)) \geq \mathrm{grad}(Z(x)) + 1$ ist und es $C, \rho > 0$ gibt, so daß $\frac{1}{|N(x)|} \leq C\ \forall |x| > \rho$ ist. Betrachten Sie dazu das Umlaufintegral entlang des rechteckigen Integrationsweges mit Eckpunkten $-L$, $+L$, $+L + \mathrm{i}L$, $-L + \mathrm{i}L$ im Limes $L \to \infty$. Solche Integrale und Abschätzungen treten sehr oft in der theoretischen Physik auf, insbesondere bei Fragen der Renormierbarkeit in Quantenfeldtheorien.

P::2 *Lorentz-Gruppe*: Zu den Lorentz-Transformationen Λ mit ${\Lambda^0}_0 \geq 1$ und $\det \Lambda = 1$, die die Zeitrichtung nicht umkehren, gehören unitäre Operatoren $U(\Lambda)$, die auf Zuständen mit ganzzahligem Spin eine Darstellung formen, $U(\Lambda_2\Lambda_1) = U(\Lambda_2)U(\Lambda_1)$.

[1] Die unitären Transformationen bewirken zeitrichtungstreue Lorentz-Transformationen des Viererimpulses,

$$U^{-1}(\Lambda)P^m U(\Lambda) = {\Lambda^m}_n P^n\,. \qquad (*)$$

Zeigen Sie, daß dies tatsächlich eine Darstellung ist, indem Sie überprüfen, wie die unitäre Transformation zu $\Lambda = \Lambda_2\Lambda_1$ auf P^m operiert.

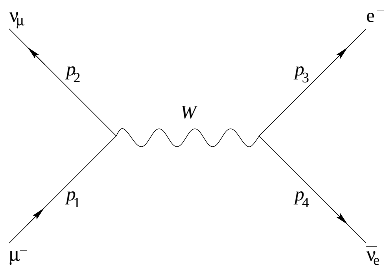
[2] Die Matrix Λ hat die Form ${\Lambda^m}_n = {(\mathrm{e}^\omega)^m}_n$. Weiter gilt $\omega_{mn} = \eta_{mk}{\omega^k}_n$. Die Transformationen $U(\Lambda)$ sind dann von der Form

$$U(\Lambda) = \exp(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\,\omega_{mn}M^{mn})\,, \qquad (**)$$

wobei die M^{mn} die Generatoren der Lie-Algebra sind, die zur eigentlichen Lorentz-Gruppe gehört. Entwickeln Sie $(*)$ bis zu erster Ordnung in ω, nachdem Sie $U(\Lambda)$ aus $(**)$ eingesetzt haben. Finden Sie durch Vergleichen der Terme gleicher Ordnung in ω eine Relation für den Kommutator $[M^{mn}, P^k]$.

Quantenmechanik II | Prof. Norbert Dragon :: Dr. Michael Flohr
Übungsblatt V :: Hausübungen | Abgabe 13. Mai 2003

H::1 *Phasenraum*: Es soll der Zerfall eines Myons betrachtet werden, der durch folgenden *Feynman-Graphen* symbolisiert wird:



Hierbei sind die p_i Vierer-Impulse. Zur Erinnerung: $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2$, wobei $c = 1$ gesetzt ist. Für den Fall eines ruhenden Myons, d.h. $\vec{p}_1 = 0$, liefert die Quantenfeldtheorie folgenden Ausdruck für die differentielle Breite:

$$\mathrm{d}\Gamma = 128(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4)\frac{G^2}{2}\frac{1}{2m_\mu}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_3 - p_4)\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2p_2^0}\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2p_3^0}\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2p_4^0}\,.$$

In diesem Ausdruck bezeichnet G die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung, und die Vierer-Deltafunktion ergibt sich aus der Verallgemeinerung von Fermi's goldener Regel auf relativistische Mechanik.

[1] Da sich alle Teilchen auf der Massenschale befinden, treten in obiger Formel lediglich Differentiale $\mathrm{d}^3\vec{p}$ auf. Zeigen Sie durch Integration über p^0, daß

$$\int_{p^0=-\infty}^{p^0=+\infty}\frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}2\pi\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0) = \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0}$$

ist, und begründen Sie, warum dieses Maß Lorentz-invariant ist. Hierbei ist $\theta(p)$ die Stufenfunktion, d.h.

$$\theta(p) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad p > 0\,, \\ 0 & \text{wenn} \quad p \leq 0\,. \end{cases}$$

[2] Um die weiteren Rechnungen zu vereinfachen, dürfen Sie $m_e = m_{\bar{\nu}_e} = m_{\nu_\mu} = 0$ setzen. Begründen Sie, warum diese Näherung sinnvoll ist. Desweiteren sei im folgenden $m_\mu = m$ abgekürzt. Zeigen Sie, daß damit $(p_1 \cdot p_4) = mp_4^0$ und $(p_2 \cdot p_3) = p_2^0 p_3^0(1 - \cos\vartheta)$ ist, wobei ϑ der Winkel ist, unter dem das ν_μ relativ zum e^- ausläuft. Hinweis: Offensichtlich gilt $p_2 = (p_2^0, p_2^0\vec{n}_2)$, $p_3 = (p_3^0, p_3^0\vec{n}_3)$ und $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = \cos\vartheta$.

[3] Führen Sie nun die Integration über p_4 sowie über den Raumwinkel von p_2 und den φ-Winkel von p_3 aus, um

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Gamma &= \frac{4G^2}{(2\pi)^5}(1 - \cos\vartheta)\underbrace{(4\pi)p_2^2\mathrm{d}p_2}_{\mathrm{d}\Omega_2-\text{Integr.}}\ \underbrace{(2\pi)\mathrm{d}\cos\vartheta\, p_3^2\mathrm{d}p_3}_{\mathrm{d}\varphi_3-\text{Integr.}} \\ &\times\ \delta\left(m - p_2 - p_3 - \sqrt{p_2^2 + p_3^2 + 2p_2p_3\cos\vartheta}\right) \end{aligned}$$

zu erhalten. Der Übersichlichkeit halber wurde hierbei $p_2 = |\vec{p}_2| = p_2^0$, $p_3 = |\vec{p}_3| = p_3^0$ gesetzt.

[4] Integrieren Sie nun über $\cos\vartheta$. Beachten Sie dabei, daß

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|\frac{\partial}{\partial x} f(x)|_{x=x_i}|} \delta(x - x_i)$$

ist, wobei die Summe über die einfachen Nullstellen von $f(x)$ geht. Das Ergebnis lautet

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{8G^2}{(2\pi)^3} \left(1 - \underbrace{\frac{(m - p_2 - p_3)^2 - p_2^2 - p_3^2}{2p_2 p_3}}_{=\cos\vartheta} \right) \frac{m - p_2 - p_3}{p_2 p_3} p_2^2 \mathrm{d}p_2 \, p_3^2 \mathrm{d}p_3 \, .$$

[5] Im Experiment können die Neutrinos nicht nachgewiesen werden, man sieht nur das Elektron. Untersuchen Sie, welcher Bereich des Phasenraumes (p_2, p_3) erlaubt ist, indem Sie aus $-1 \leq \cos\vartheta \leq 1$ Ungleichungen für p_2 und p_3 herleiten. Sie sollten schließlich zu dem Ergebnis kommen, daß separat $p_2 \leq \frac{m}{2}$ und $p_3 \leq \frac{m}{2}$ gelten muß, sowie $p_2 + p_3 \geq \frac{m}{2}$.

[6] Leiten Sie mit diesen Einschränkungen an die Impulsbeträge das Resultat

$$\Gamma = \frac{8G^2}{(2\pi)^3} \int_0^{m/2} \mathrm{d}p_2 \int_{m/2-p_2}^{m/2} \mathrm{d}p_3 (m - p_2 - p_3) m (p_2 + p_3 - \frac{m}{2})$$

ab. Begründen Sie die untere Grenze für die innere Integration und führen Sie die innere Integration aus. Wenn Sie schließlich die *kinematische Variable* $x = \frac{p_2}{m/2}$ einführen (Energie des Elektrons in Einheiten der halben Myon-Masse), sollten Sie als Resultat

$$\Gamma = \frac{G^2 m^5}{2(2\pi)^3} \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$$

erhalten. Skizzieren Sie den Integralkern, d.h. die differentielle Breite $\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}x}$.

[7] Führen Sie die letzte verbleibende Integration aus um die totale Breite des Myons (und damit seine Lebensdauer) zu erhalten. Suchen Sie bei `http://pdg.lbl.gov/` eine Adresse, wo Sie die Lebensdauer des Myons finden können, und berechnen Sie die Fermi-Konstante G in [GeV^{-2}]. (20 P.)