H::1 *Fourier-Dichten des Dirac-Feldes*: In der Vorlesung war für die Fourier-Dichte $\tilde{\phi}^+_\alpha(p)$ des Feldes ϕ_α das Transformationsgesetz

$$U_\Lambda\, \tilde{\phi}^+_\alpha(p)\, U_{\Lambda^{-1}} = \sum_\beta D_\alpha{}^\beta(\Lambda^{-1})\, \tilde{\phi}^+_\beta(\Lambda p)$$

gezeigt worden. Wir definieren nun durch *drehungsfreie* Lorentz-Transformationen L_p die Fourier-Dichten

$$d^\dagger_\alpha(p) = U_{L_p}\, \tilde{\phi}^+_\alpha(\underline{p})\, U^{-1}_{L_p}\,.$$

[1] Zeigen Sie, daß die unitären Transformationen $U_\Lambda U_{L_p}$, die im Transformationsgesetz

$$U_\Lambda\, d^\dagger_\alpha(p)\, U^{-1}_\Lambda$$

von $d^\dagger_\alpha(p)$ auftreten, als $U_{L_{\Lambda p}} U_W$ geschrieben werden können, wobei $W(\Lambda, p) = L^{-1}_{\Lambda p}\Lambda L_p$ die Wigner-Rotation ist.

[2] Zeigen Sie damit, daß $d^\dagger_\alpha(p)$ unter Lorentz-Transformationen gemäß

$$U_\Lambda\, d^\dagger_\alpha(p)\, U^{-1}_\Lambda = \sum_\beta {D^{-1}}_\alpha{}^\beta(W(\Lambda,p))\, d^\dagger_\beta(\Lambda p)$$

transformiert.

[3] Es seien Zustände $|\hat{\chi}_{p,\sigma}\rangle = d^\dagger_\sigma(p)|\Omega\rangle$ definiert. Zeigen Sie, daß $U_a|\hat{\chi}_{p,\sigma}\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot a}|\hat{\chi}_{p,\sigma}\rangle$ für Translationen um a ist.

[4] Zeigen Sie, daß $U_\Lambda|\hat{\chi}_{p,\sigma}\rangle = \sum_{\sigma'}|\hat{\chi}_{\Lambda p,\sigma'}\rangle\, D^*_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))$ ist, falls die Darstellung von Drehungen unitär ist. Bis auf eine Normierung transformieren diese Zustände also genau wie eine Wigner-Basis. (5 P.)

H::2 *Wigner-Rotationen*: Zeigen Sie, daß die Transformationen

$$U_\Lambda : \chi_{p,\sigma} \mapsto \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} \chi_{\Lambda p,\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))$$

mit $W(\Lambda,p) = L^{-1}_{\Lambda p}\Lambda L_p$ eine unitäre Darstellung der Lorentz-Transformationen auf der kontinuumsnormierten Basis $\chi_{p,\sigma}$, d.h. $\langle\chi_{p',\sigma'}|\chi_{p,\sigma}\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}$, ist. *Hinweis*: Um dies zu zeigen, müssen Sie insbesondere die Gruppeneigenschaft

$$W(\Lambda_2\Lambda_1, p) = W(\Lambda_2, \Lambda_1 p)W(\Lambda_1, p)$$

der Wigner-Rotationen nachweisen. (5 P.)

H::3 *Spinoren*: In der Vorlesung wurden die Spinoren wie folgt eingeführt: Mit $\sigma \in \{\uparrow,\downarrow\} \sim \{1,2\}$, den Definitionen $p = p^k\sigma^l\eta_{kl}$, $\overline{p} = p^k\overline{\sigma}^l\eta_{kl}$ und $\epsilon = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ lauten die Spinoren

$$\begin{aligned}
v_{\alpha,\sigma}(p) &= \begin{pmatrix} -D(p)\epsilon \\ \frac{\overline{p}}{m}D(p)\epsilon \end{pmatrix} \text{ d.h. } \begin{cases} (-D(p)\epsilon)_{\alpha\sigma} = v_{\alpha,\sigma} \\ \left(\frac{\overline{p}}{m}D(p)\epsilon\right)_{\alpha\sigma} = v_{\alpha+2,\sigma} \end{cases}, \\
u_{\alpha,\sigma}(p) &= \begin{pmatrix} D(p) \\ \frac{\overline{p}}{m}D(p) \end{pmatrix} \text{ d.h. } \begin{cases} (D(p))_{\alpha\sigma} = u_{\alpha,\sigma} \\ \left(\frac{\overline{p}}{m}D(p)\right)_{\alpha\sigma} = u_{\alpha+2,\sigma} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\overline{\sigma}^m = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$ und $D(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0+m)}}(m+p)$, $D^\dagger(p) = D(p)$.

[1] Zeigen Sie zunächst $\overline{p}p = m^2$ und damit die Identitäten $\overline{p}(m+p) = m(\overline{p}+m)$ und $p(m+\overline{p}) = m(p+m)$.

[2] Man definiert die *gequerten Spinoren* wie folgt: $\overline{v}_\sigma = (-\epsilon \cdot D \cdot (\frac{\overline{p}}{m}), \epsilon \cdot D)$ und $\overline{u}_\sigma = (D \cdot \frac{\overline{p}}{m}, D)$. Zeigen Sie, daß damit $\overline{v}_\sigma = v_\sigma^\dagger \gamma^0$ und $\overline{u}_\sigma = u_\sigma^\dagger \gamma^0$ gilt.

[3] Berechnen Sie die Skalarprodukte $\overline{v}_\sigma v_{\sigma'}$, $\overline{v}_\sigma u_{\sigma'}$, $\overline{u}_\sigma v_{\sigma'}$ und $\overline{u}_\sigma u_{\sigma'}$.

[4] Wenden Sie den Operator $\left(\begin{smallmatrix} m & p \\ \overline{p} & m \end{smallmatrix}\right) = m + \not{p}$ auf v_σ an, sowie den Operator $\left(\begin{smallmatrix} m & -p \\ -\overline{p} & m \end{smallmatrix}\right) = m - \not{p}$ auf u_σ. Was ergibt demnach der Operator $(m+\not{p})(m-\not{p})$?

[5] Zeigen Sie, daß die Operatoren $\frac{m+\not{p}}{2m}$ und $\frac{m-\not{p}}{2m}$ Projektoren sind. Zeigen Sie, daß $\frac{m+\not{p}}{2m} + \frac{m-\not{p}}{2m} = \mathbb{1}$. Auf welche Unterräume projizieren sie jeweils?

[6] Zeigen Sie die Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_\sigma u_\sigma \overline{u}_\sigma = 2\frac{m+\not{p}}{2m}, \qquad \sum_\sigma v_\sigma \overline{v}_\sigma = -2\frac{m-\not{p}}{2m},$$

indem Sie beide Seiten auf u- und v-Spinoren anwenden. (10 P.)