Rechenmethoden der Physik II, Hausübung 3

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **Abgabe: Dienstag, 29.04.2008**

[H7] *Orbitalmodell des Wasserstoffatoms* **(1,5 + 2,5 = 4 Punkte)**

Da ein Elektron nie genau zu lokalisieren ist, ordnet man dem Raum rund um den Atomkern eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit $w(\vec{x})$ zu. Ist das Elektron in den $2p_z$-Zustand angeregt, beträgt seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit für den Ort $\vec{x}$

$$w(\vec{x}) = A \cdot \frac{e^{-\alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{32\pi} z^2 \ , \ \alpha = \frac{1}{a_0}$$

wobei a_0 Bohr'scher Radius genannt wird.

(a) In welchen Raumbereichen wird das Elektron nie anzutreffen sein? Wo ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am größten? Hier hilft Gradient = 0 setzen weiter – warum?

(b) Wie groß sollte die Wahrscheinlichkeit sein, das Elektron im gesamten Raum zu finden? Das intuitive Ergebnis wird dann dazu genutzt, die Normierungskonstante A per Integration über $w(\vec{x})$ zu bestimmen. Bevor wir dies tun, zeigen wir kurz per Substitution, dass

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin(\theta) = \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos(\theta)$$

Das Integral sollte sich dann hiermit und per Ableiten nach Parametern (s. RdP I, **[P9]**) knacken lassen.

[H8] *Trägheitstensor einer kontinuierlichen Masse* **(2 + 1 = 3 Punkte)**

Der Trägheitstensor einer kontinuierlichen Massenverteilung ist gegeben durch die Formel aus **[H41]**, RdP I, mit kontinuierlicher Summe über die Massen:

$$I_{ij} = \int \mathrm{d}^3x \ \rho(\vec{x})(\vec{x}^2\delta_{ij} - x_i x_j)$$

(a) Wie groß ist die 3-3-Komponente des Trägheitstensors einer homogenen Kugelschale mit Masse M, Innenradius r und Außenradius R?

(b) Was ergibt sich für eine Vollkugel? Gegen welchen Wert strebt I_{33}, falls die Kugelschale bei unveränderter Masse dünn gemacht wird?

[H9] *Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten* **(1 + 1 + 1 = 3 Punkte)**

Mit Kugelkoordinaten haben wir uns genug herumgeärgert. Deswegen betrachten wir ein letztes Mal die Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten. Ansatz ist

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$$

Danach sollte es straight-forward gehen... .

(a) Wie man leicht sieht[1], berechnet sich die Divergenz in Zylinderkoordinaten zu

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Zeigen!

(b) Ebenso folgt hoffentlich die Rotation eines Vektorfeldes zu

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z$$

(c) Wie folgt aus (a) Laplace in Zylinderkoordinaten? Ergibt sich auch das Resultat aus **[P2](c)**?

---

[1] Dieser aus Mathematikvorlesungen bekannte Passus versucht langwierige Rechnungen zu verschleiern.