Rechenmethoden der Physik II, Hausübung 6

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **Abgabe: Dienstag, 27.05.2008**

[H16] *DGLs die Zweite* **(1,5 + 1 + 1,5 = 4 Punkte)**

(a) Wie löst sich der folgende ER?

$$\boxed{\dot{r}(t) = \alpha e^{-\beta r(t)}\ ,\quad r(0) = r_0}\ ,\quad r(t) = ?$$

Test: $\beta \to 0$, dann $r(t) = ?$

(b) Und dieser?

$$\boxed{\dot{v} = -\alpha v + k_0 e^{\beta t}\ ,\quad v(0) = 0}\ ,\quad v(t) = ?$$

(c) In gekreuzten Feldern $\vec{E} = (0, E(t), 0)$ und $\vec{B} = (0, 0, B(t))$ soll sich ein Teilchen (Masse m, Ladung q) mit

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} a (1 + \omega t)^2 \cdot (2, 1, 0)$$

bewegen. Welche Funktionen $E(t)$ und $B(t)$ erfüllen dieses?

[H17] *P-Q-Formel für Differentialgleichungen* **(1 + 2 = 3 Punkte)**

Man betrachte die Differentialgleichung

$$y'(x) + P(x) y(x) = Q(x)$$

(a) Wie sieht die allgemeine Lösung $y(x)$ aus? Zunächst bestimmen wir dazu die homogene Lösung und wenden dann Variation der Konstanten an. Bei so einem Monstrum steht man ganz schön im Regen bei unbequemen Funktionen $P(x)$ und $Q(x)$. Apropos Regen...

(b) Nun konkret. Ein Regentropfen, der durch eine Wolke fällt, vergrößert sich mit der Zeit durch Einsammeln von Kondenströpfchen: $r(t) = r_0 + \gamma t$. r_0 ist der Radius des Tropfens beim Eintritt ($t = 0$) in die Wolke und v_0 die Geschwindigkeit. Wie sieht der ER für $v(t)$ aus? Mit Hilfe der (a)-Formel und $m = \int \mathrm{d}^3x...$ folgt mit Hilfe der Anfangsbedingung $v(t)$. Test: Wenn $\gamma \to 0$, ergibt sich dann $v(t) = v_0 - gt$?

[H18] *Kugelwelle* **(1 + 2 = 3 Punkte)**

(a) Feuerwerkswettbewerb in den Herrenhäuser Gärten. Eine Rakete explodiert über dem Erdboden. Von der Explosion breitet sich eine Schallwelle

$$n(\vec{r}, t) = n_0 + A \cdot \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}{r}$$

in der Luft (Ruhedichte n_0) aus. Erfüllt n die Wellengleichung?

(b) Nach dem enorm lauten Knall hören wir einen kontinuierlichen Ton der Frequenz ω, dessen Stromdichte am Ohr gegeben ist durch

$$\vec{\jmath}(\vec{r}, t) = \alpha \cdot \frac{kr\cos(kr - \omega t) - \sin(kr - \omega t)}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}\ ,\quad k = \frac{\omega}{c}$$

Welche Dichteverteilung $n(\vec{r}, t)$ hat der Ton?