Rechenmethoden der Physik II, Präsenzübung 2

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **18.04.2008**

[P3] *Volumen einer Kugel*

Gegeben ist eine Kugel (R) mit Mittelpunkt = Ursprung.

(a) Welche (Un-)Gleichung beschreibt die gesamte Kugel im Kartesischen? Dass das Volumen $4\pi R^3/3$ ist, sollten wir wissen. Wie berechnet sich aber das Volumen per Integralrechnung? Man sollte auf ein Mehrfachintegral der Form

$$V = 8 \cdot \int_0^R \mathrm{d}x \int_0^{y=f(x)} \mathrm{d}y \int_0^{z=h(x,y)} \mathrm{d}z$$

mit $f(x) = ?$ und $h(x,y) = ?$ kommen.

(b) Nun kitzeln wir ein wenig die Integrale und erhalten mit der RdPI-Kenntnis $\int_0^1 \mathrm{d}t\sqrt{1-t^2} = ?$ tatsächlich $V = 4/3\pi R^3$, nicht wahr?

[P4] *Integraltransformationssatz*

Nun werden wir den großen Vorzug der krummlinigen Koordinaten kennenlernen. Die **[P3]**-Integration wird nämlich mit Hilfe des Integraltransformationssatzes zu einem Einzeiler.

Integraltransformationssatz (Kurzfassung):
Es gilt für das Volumenelement allgemeiner Koordinaten u_1, u_2, u_3

$$\mathrm{d}^3u := \mathrm{d}u_1\ \mathrm{d}u_2\ \mathrm{d}u_3 = |\det\ \mathrm{Jac}_{\vec{u}}\ \vec{x}(\vec{u})\ |\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2\ \mathrm{d}x_3$$

Durch diese Transformation kann sofort das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3u$ beliebiger Koordinaten bestimmt werden.

(a) Das Volumenelement von Zylinder- und Kugelkoordinaten möchte bestimmt werden!

(b) Mit Hilfe von (a) kann nun die Rechnung aus **[P3]** in eine Zeile geschrieben werden (quetschen ist erlaubt). Tun!

(c) Genauso schnell sollte auch der Flächeninhalt eines Kreises folgen - einmal bitte kartesisch und einmal per geeigneten Koordinaten (welche?).

[P5] *Schwerpunkt einer kontinuierlichen Massenverteilung*

Ein homogener Körper mit Radius R, Höhe h und Massendichte ρ_0 bestehe aus Punkten (x, y, z), die die Ungleichungen

$$x^2 + y^2 \leq R^2\ , \quad (x^2 + y^2) \leq \frac{z}{a} \leq \frac{h}{a}$$

erfüllen. Der Schwerpunkt möchte bestimmt werden:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \mathrm{d}^3x\ \rho(\vec{x})\vec{x}$$

(a) Welche Symmetrie liegt dem Körper zugrunde und welche Koordinatenwahl bietet sich dann an? Somit ist $\mathrm{d}^3x = ?$ eine gute Wahl.

(b) Hiermit lässt sich schnell die Gesamtmasse M ermitteln, nämlich durch Betrachtung eines infinitesimal kleinen Massestückchens $\mathrm{d}M = \rho(\vec{x})\mathrm{d}V$. Dann ergibt sich $M = ?$

(c) Schließlich erhalten wir mit den Symmetrieüberlegungen aus (a) $\vec{R} = ?$