Rechenmethoden der Physik II, Präsenzübung 3

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **25.04.2008**

[P6] *Satz von Gauß*

Wir betrachten einen Zylinder (Radius R) um die z-Achse mit Position $-h \leq z \leq h$. Dieser werde von einem Fluß $\vec{E}(x,y,z) = \big(\alpha x^3, \beta y^2, 0\big)$ durchströmt. Mit dieser Szenerie soll der Gauß'sche Satz

$$\int_V \mathrm{d}^3x \; \nabla \vec{E} = \int_F \mathrm{d}\vec{f}\; \vec{E}$$

verifiziert werden.

(a) Zunächst bilden wir die Divergenz und schreiben diese in ein geeignetes Koordinatensystem $\vec{x}(\vec{u})$ um. $\nabla \vec{E}(\vec{x}(\vec{u})) = ?$ Dann ergibt die linke Seite was?

(b) Nun die rechte Seite. Der $\mathrm{d}\vec{f}$-Vektor steht senkrecht auf der Oberfläche V des Zylinders. Wie erhält man ihn aus den Tangentialvektoren $\vec{t}_{u_i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}$? Schließlich führen wir das Flächenintegral aus und freuen uns – denn es ergibt sich das gleiche wie in (a), nicht wahr?

[P7] *Satz von Stokes*

Zur Verifizierung des Satzes von Stokes

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\; (\nabla \times \vec{E}) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{x}\; \vec{E}$$

betrachten wir eine Viertelkugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\; y, z \geq 0$ und den sie durchströmenden Fluss $\vec{E}(x,y,z) = \alpha(xy, yz, xz)$.

(a) Welche Koordinatenwahl $\vec{x}(\vec{u})$ kann hier wohl hilfreich sein? Analog wie bei **[P6]** gehen wir vor und berechnen zuerst die linke Seite.

(b) Auf der rechten Seite führen wir einen Parameter t ein, um den geschlossenen Weg $\mathcal{C}$ zu beschreiben. Ergibt sich auch hier das gleiche wie bei (a)?

[P8] *Taylorentwicklung mehrerer Veränderlicher*

Jetzt machen wir es richtig: Taylorentwicklung von Funktionen n Veränderlicher bis zur N-ten Ordnung

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^k f(x_1, ..., x_n) \Bigg|_{\vec{a}} + R_{N+1}(x_1, ..., x_n)$$

mit Entwicklungspunkt $\vec{a}$ und (für uns uninteressantes) Restglied $R_{N+1}(x_1, ..., x_n)$.

(a) Bahnhof??? Bevor wir vor dem Monster weglaufen, gucken wir uns die Formel für zwei Spezialfälle an: Nämlich für $n = 1$ und $n = 2$. Ergibt sich im ersten Fall die altbekannte Taylorentwicklung in einer Veränderlichen? Die ($n = 2$)-Formel schreiben wir für $N = 2$ auf und rahmen sie ein (weil wichtig).

(b) Wie lautet die Taylorentwicklung für $V(x,y) = V_0\sqrt{1 + x + y}$ um $\vec{a} = (1, 2)$ bis einschließlich zweite Ordnung?

(c) Wir entwickeln das Potential aus der Parkplatzaufgabe **[H40]**(b)

$$V(x,y) = m\alpha v_0 \left(20 \cosh\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(1 + 2xy) + 2\sqrt{1 + y^2} \right)$$

bis einschließlich quadratische Ordnung und schreiben das Ergebnis als Quadrik $\tilde{V}(\vec{x}) = m\alpha v_0 (\frac{1}{2}\vec{x}^{\mathsf{T}} A \vec{x} + C)$. $A = ?$