Rechenmethoden der Physik II, Präsenzübung 4

Dozent: PD Dr. Michael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **09.05.2008**

[P9] *Differentialgleichungen*
In dieser Aufgabe werden wir uns einen (kleinen) Werkzeugkasten für die Lösung von Differentialgleichungen zulegen.

(a) *Raten.*
Klingt banal, ist aber oftmals eine gute Methode zur Lösung. So lassen sich relativ leicht die folgenden Funktionen raten:

$$f''(x) = f(x) \quad \text{und} \quad g''(x) = -g(x)$$

Die allgemeine Lösung lauten dann jeweils wie? Ebenso sollten sich

$$\boxed{f'(x) = f(x)\ ,\ \ f(0) = 1} \quad \text{und} \quad \boxed{(f'(x))^2 - f^2(x) = 1\ ,\ \ f(0) = 0}$$

leicht ermitteln lassen.

(b) *Aufleiten.*
Ein LKW mit Schub $K =: m_0 k$ fahre in x-Richtung und verliere ständig Sand nach unten, so dass $m(t) = \frac{m_0}{1+\alpha t}$. Start der Fahrt bei $x = 0$. Wie lautet der Eindeutigkeitsrahmen (ER)? Lösung $x(t) = ?$

(c) *Trennung der Variablen (TdV).*
Gegeben ist der ER

$$\boxed{\dot{v} = -\frac{\alpha}{v^2}\ ,\ \ v(0) = v_0}$$

TdV bedeutet auch "schaff rüber" – trenne v und seine Ableitungen vom Rest. $v(t) = ?$

(d) *Integration der Umkehrfunktion $t(v)$.*
Das kennen wir schon von der Energiesatz-Integration in 1D! Bitte nochmal tun! Und dann sollte die DGL aus Aufgabe (b) anschließend auch keinerlei Probleme bereiten, oder?

(e) $1/\xi$-*Ansatz.*
Zugegebenermaßen nicht ganz intuitiv, aber wissenswert. Bei der DGL aus (b) anwenden - welcher neue ER ergibt sich? Wie löst sich dieser?

(f) *Neue Funktion.*
Welche neue Funktion für $z(t)$ in

$$\boxed{\ddot{z} = -\omega^2(z - a)\ ,\ \ \dot{z}(0) = 0\ ,\ \ z(0) = \ell}$$

eingeführt wird, sollte klar sein, $z(t) = ?$ Welche neue Funktion vereinfacht aber den folgenden ER?

$$\boxed{\dot{N} = \alpha N + \beta\sqrt{N}\ ,\ \ N(0) = 0}$$

Dies führt zu $N(t) = ?$

(g) *Homogen + speziell, Variation der Konstanten.*
Bei inhomogenen DGLs der Form

$$a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}y(x) + ... + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + a_0(x)y(x) = r(x)$$

ergibt sich die allgemeine Lösung aus der Addition der homogenen Lösung ($r(x) = 0$ setzen) und **einer** speziellen Lösung (Raten?!). Wir betrachten

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x^2 + 4$$

Die homogene Lösung sollte sich mit TdV schnell lösen lassen. Nun die spezielle; setze dazu die homogene Lösung mit veränderlicher Integrationskonstante an und setze in die DGL ein. Per Integration ergibt sich $C(x)$ und somit allgemeine Lösung $y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{spez}}(x)$.

(h) *Potenzansatz.*
Bei DGLs der Form

$$c_n x^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} y(x) + ... + c_1 x^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) + c_0(x) x^0 y(x) = 0$$

ist $y(x) = Ax^\lambda$ ein guter Ansatz. Hiermit löse man

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y = 0$$

Das Ergebnis wird nicht vollständig sein. Hilfe liefert HÜ5.

(i) *Exponentialansatz.*
Bei DGLs mit $a_i(x) \equiv a_i$ und $r(x) = 0$ hilft oftmals der Exponentialansatz $y(x) = A \cdot e^{\lambda x}$, welcher auf ein Polynom in λ führt (welches nicht immer lösbar ist). Hiermit soll nochmal die Siebkette – bestehend aus Widerstand R, Induktivität L und Kapazität C aus **[H13]**, RdP I, gelöst werden.