Rechenmethoden der Physik II, Präsenzübung 7

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **06.06.2008**

[P15] *Maxwell-Gleichungen*
Vorhang auf! Hier sind sie:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{\jmath} + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}$$

wobei $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ elektrisches und magnetisches Feld darstellt, $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ Ladungs- und $\vec{\jmath} = \vec{\jmath}(\vec{r}, t)$ Stromdichte bezeichnet. c ist dabei die Lichtgeschwindigkeit. Durch Zunahme der Lorentzkraft

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

ist die komplette elektromagnetische Welt determiniert.

(a) Wie lassen sich die Maxwell-Gleichungen veranschaulichen?

(b) Wie lauten die Gleichungen der Elektrostatik und Magnetostatik? Wie lauten die Maxwell-Gleichungen im Vakuum?

(c) Ebenso schnell lassen sich auch die integralen Maxwell-Gleichungen aufstellen.

(d) Wie leitet sich die Konti her?

(e) Warum sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ eindeutig festgelegt durch ρ und $\vec{\jmath}$ (d.h. Maxwell-Gleichungen redundant)?

(f) Wie folgt die Wellengleichung im Vakuum für elektrisches und magnetisches Feld?

[P16] *Skalar- und Vektorpotential*
Die Maxwell-Gleichungen sind acht Differentialgleichungen mit sechs Unbekannten (welche nämlich?). Somit sind sie überbestimmt. Um dieses Problem zu lösen, führt man neue Funktionen ein, welche die Überbestimmtheit eliminieren. Dies geschieht via

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\phi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{A}} \ , \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$$

mit Skalarpotential $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ und Vektorpotential $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$.

(a) Wie lautet der elektromagnetische Energiesatz, $E = ?$

(b) $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind eindeutig bestimmt, ϕ und $\vec{A}$ aber nicht. Durch Verwendung einer sogenannten Eichfunktion $\chi = \chi(\vec{r}, t)$ bleiben die Felder unverändert:

$$\phi \to \phi - \dot{\chi} \ , \quad \vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi$$

Zeigen!

(c) Mit Hilfe der Lorenz-Eichung

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

und der Coulomb-Eichung

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

lassen sich die Maxwell-Gleichungen lösen und man erhält die inhomogenen Wellengleichungen der Skalar- und Vektorpotentiale. Zeigen!
Die Lösung derselben heben wir uns für später auf.