ZUM COLEMAN-MANDULA THEOREM

In der Vorlesung wurde motiviert, dass es in $d > 2$ Raumzeit-Diemnsionen keine Erhaltungsgrößen zu internen Symmetrien gibt, die nicht Lorentz-Skalare sind. Die Poincaré-Algebra $\mathfrak{p}$ wird erzeugt von den Generatoren de Translationen P^μ, sowie den Generatoren der Lorentz-Drehungen $M^{\mu\nu}$. Erstere sind im Impulsvektor zusammengefasst, letztere im Drehimpuls-Boost-Tensor. Diese Generatoren führen auch zu den einzigen tensoriellen Erhaltungsgrößen. Alle anderen Erhaltungsgrößen müssen Skalare sein. Eine gegebene interene Symmetrie ist im allgemeinen durch eine Lie-Algbra $\mathfrak{g}$ gegeben, die natürlich mit der Poincaré-Algebra vertauschen muss, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{g}] = 0$. Die vollständige Symmetrie-Algebra ist dann $\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{g}$.

Poincaré-Algebra. Die Poincaré-Algebra wird erzeugt aus den Translationen $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu$ und den Lorentz-Rotationen $x^\mu \mapsto x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu$, wobei $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ ist. Die Darstellung dieser Generatoren auf einem Raum von Funktionen $f(x)$ ist wie folgt gegeben: Ist die Transformation $x \mapsto x' = x + \epsilon(x)$, dann wird die Transformation $f(x) \mapsto f'(x') = f(x) + \mathcal{D}_\epsilon f(x)$ durch einen Differential-Operator $\mathcal{D}_\epsilon$ vermittelt. Für Translationen haben wir $\rho(P_\mu) = \partial_\mu$, für die Lorentz-Drehungen ergibt sich $\rho(M_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$. Die Dimension der Poincaré-Algebra ist $d + \frac{d(d-1)}{2} = \frac{d(d+1)}{2}$, denn $\mathfrak{p} = \mathbb{R}^d \oplus \mathfrak{so}(p,q)$, wobei $p + q = d$ und die Signatur auf der Raumzeit gerade (p,q) ist. Die Algebra ist gegeben durch die Kommutatoren

$$[P^\mu, P^\nu] = 0\,, \quad [P^\mu, M^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(\eta^{\mu\sigma}P^\rho - \eta^{\mu\rho}P^\sigma)\,, \quad [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\sigma\mu}M^{\rho\nu} - \eta^{\sigma\nu}M^{\rho\mu})\,.$$

Abschließend sei kurz erwähnt, dass die finiten Lorent-Drehungen natürlich durch $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ mit den Lorentz-Matrizen $\Lambda^\mu{}_\nu \in SO(p,q)$ gegeben sind.

ÜBUNG. Betrachten Sie eine $(3+1)$-dimensionale Theorie mit verschiedenen skalaren Feldern ϕ^a, $a = 1, \ldots, N$. Die Wirkung für eine solche Theorie kann zum Beispiel

$$S = -\int \mathrm{d}^4x \sum_a \left(\partial_\mu \phi^{a\dagger}\partial^\mu\phi^a + m^2\phi^{a\dagger}\phi^a + \lambda(\phi^{a\dagger}\phi^a)^2\right)$$

lauten. Gehen Sie nun zu dem Fall über, dass alle Felder ϕ^a masselos sind und zeigen Sie, dass diese Wirkung dann zusätzlich unter Skalentransformationen $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon x^\mu$ invariant ist. Sie können das gleich mit einer finiten Skalentransformation $x^\mu \mapsto x'^\mu = \lambda x^\mu$ durchführen.

Konforme Algebra. Sind alle Felder einer Poincaré-invarianten Theorie masselos, so kann $\mathfrak{p}$ zur konformen Algebra $\mathfrak{k}$ erweitert werden. Zusätzlich zu P^μ und $M^{\mu\nu}$ besitzt die konforme Algebra noch weitere $(d+1)$ Generatoren, nämlich einmal den Generator der Dilatationen D und die Generatoren der sogenannten speziellen konformen Transformationen B^μ. Die Dimension der konformen Algebra $\mathfrak{k}$ ist demnach $\frac{d(d+1)}{2} + d + 1 = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$. In der Tat kann man zeigen, dass $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{so}(p+1, q+1)$ ist. Die speziellen konformen Transformationen sind übrigens gegeben durch $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu(x \cdot x) - 2x^\mu(\epsilon \cdot x)$. Die finite Version ist allerdings recht kompliziert,

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu(x \cdot x)}{1 + 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)}\,.$$

Die Generatoren werden in einer Darstellung auf einem Funktionenraum repräsentiert durch $\rho(D) = x^\mu\partial_\mu$ und $\rho(B_\mu) = (x \cdot x)\partial_\mu - 2x_\mu(x \cdot \partial)$, wobei $[\partial_\mu, x_\nu] = \eta_{\mu\nu}$ ist.

ÜBUNG. Was ist die geometrische Bedeutung der speziellen konformen Transformation? Zur Vereinfachung können Sie den euklidischen zwei-dimensionalen Fall betrachten. Geben Sie die zusätzlichen Kommutatoren an, um die konforme Algebra festzulegen.

Coleman-Mandula. In der Vorlesung haben wir einen sehr einfachen Spezialfall des Coleman-Mandula-Theorems bewiesen. Wir betrachteten den Fall identischer skalarer Teilchen mit Masse m und asymptotisch freien Zuständen $|p;\alpha\rangle$, $p^2 = m^2$, wobei α weitere Quantenzahlen bezeichnet. Bei der Streuung zweier solcher Teilchen aneinander gilt natürlich Impulserhaltung, also $p^{(1)} + p^{(2)} = p'^{(1)} + p'^{(2)}$, wobei alle Impulse Lorentz-Vektoren sind. Eine angenommene tensorielle Erhaltungsgröße $Q_{\mu\nu}$, die wir o.B.d.A. spurfrei wählen können, also $Q^\mu{}_\mu = 0$, muss aus kinematischen Gründen die folgenden Matrixelemente zwischen asymptotischen Ein-Teilchen-Zuständen besitzen:

$$\langle p;\alpha|Q_{\mu\nu}|p;\alpha\rangle = \left(p_{\mu\nu} - \frac{1}{d}\eta_{\mu\nu}p^2\right)\langle\alpha\|Q\|\alpha\rangle\,.$$

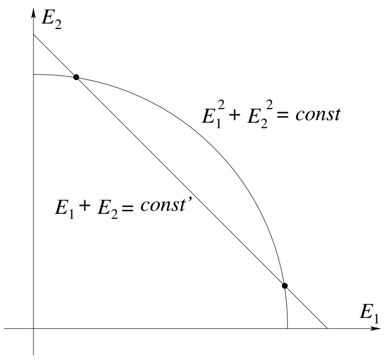
In der Vorlesung wurde nun argumentiert, dass die Erhaltung der Größe $Q_{\mu\nu}$ bei Streuung zweier solcher Teilchen aneinander impliziert, dass nur noch Streuung in exakt Vorwärts- oder exakt Rückwärtsrichtung möglich ist, was für $d > 2$ im Widerspruch dazu steht, dass die Streumatrix analytisch von den Streuwinkeln abhängen muss.

ÜBUNG. Überlegen Sie, warum nur Vorwärts- oder Rückwärtsstreuung möglich ist. Betrachten Sie dazu in einer $(1, d-1)$ Raumzeit

$$\langle\alpha\|Q\|\alpha\rangle\left(p_\mu^{(1)}p_\nu^{(1)} + p_\mu^{(2)}p_\nu^{(2)} - \frac{1}{d}\eta_{\mu\nu}(n^2+m^2)\right) = \langle\alpha\|Q\|\alpha\rangle\left(p_\mu'^{(1)}p_\nu'^{(1)} + p_\mu'^{(2)}p_\nu'^{(2)} - \frac{1}{d}\eta_{\mu\nu}(n^2+m^2)\right)\,.$$

Dies ist für jedes Paar $\mu \le \nu = 0,\ldots,d-1$ eine kinematische Einschränkung. Betrachten Sie insbesondere $\mu = \nu = 0$ und zeigen Sie, dass entweder $E_1 = E_1'$ und $E_2 = E_2'$ gelten muss, oder dass $\langle\alpha\|Q\|\alpha\rangle = 0$ sein muss. Warum ergibt sich in $d = 2$ kein Widerspruch?

Lösung: Dies ist ein Spezialfall des generellen Theorems. Zusätzliche Symmetrien müssen mit relativistischer Kinematik kompatibel sein. Ähnlich wie beim Drehimpuls kann man die Erwartungswerte aufspalten in einen Anteil, der von den dynamischen Variablen abhängt, und einen, der allein von der Darstellung der Symmetrie abhängt. Beim Drehimpuls kennen wir dies unter dem Namen Wigner-Eckart-Theorem. Auch hier läßt sich das Matrixelement schreiben als ein reduziertes Matrixelement, das von der konkreten kinematischen Situation unabhängig ist, und einen durch die Symmetriegruppe der Raum-Zeit bereits eindeutig fixierten dynamischen Anteil. Im vorliegenden Fall liefert uns das für $\mu = \nu = 0$ eine Bedingung an die Energien der Teilchen, nämlich $(E_1)^2 + (E_2)^2 = (E_1')^2 + (E_2')^2$. Natürlich gilt aber auch weiterhin Energie-Erhaltung, also $E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$. Damit haben wir zwei Gleichungen, die uns Kurven in der (E_1, E_2) Ebene definieren. Da diese gleichzeitig erfüllt sein müssen, sind nun nur noch die Schnittpunkte dieser Kurven erlaubt, also $(E_1', E_2') = (E_1, E_2)$ und $(E_1', E_2') = (E_2, E_1)$, wie das folgende Bild verdeutlicht. Die erste Lösung ist die triviale Vorwärtsstreuung, die zweite Lösung führt zum Austausch der (identischen!) Teichen, also zur Rückwärtsstreuung.



Der Ausweg. Supersymmetrie ergibt sich auf natürliche Weise, wenn man einen Weg sucht, das Coleman-Mandula-Theorem zu umgehen. Dieses kann nämlich ganz allgemein für nicht-verschwindende Streu-Amplituden beliebiger Teilchen gezeigt werden (die nicht identisch sein müssen), solange die Differenz der involvierten Spins ganzzahlig ist. Eine Erhaltungsgröße, die aber Bosonen in Fermionen überführt und umgekehrt, ist kein Tensor, sondern ein Spinor. Die erhaltene Spinor-Ladung wird, analog zu einer Tensor-Ladung, durch eine Raumintagration bei konstanter Zeit über einen Spinor-Strom gegeben. Aus der Quantenfeldtheorie weiß man aber, dass fermionische Felder keine wohldefinierten Kommutatoren besitzen können. Dies ist eine Konsequenz des Spin-Statistik-Theorem von Streater und Wightman (1964). Es besagt, dass die Kommutatoren von tensoriellen Felderm (Felder mit ganzzahligem Spin) für raumartige Abstände verschwinden müssen, um Kausalität sicherzustellen. Für Spinor-Felder (Felder mit halbzahligem Spin) führt dies jedoch zu einem Widerspruch. Die einzige konsistente Lösung ist, dass ihre Antikommutatoren für raumartige Abstände verschwinden müssen. Mit der Signatur $(1, d-1)$ heißt das: $[T_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x), T_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(y)] = 0$ für $(x-y)^2 < 0$, aber $\{\psi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x), \psi_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(y)\} = 0$ für $(x-y)^2$. Für Spinoren macht der Kommutator keinen Sinn, er ist schlicht und einfach nicht bestimmt. Die volle Symmetrie, die als Erhaltungsgrößen spinorielle Ladung besitzt, kann daher nicht eine gewöhnliche Lie-Algebra sein, da sie nicht vollständig durch Kommutatoren definiert wird. Stattdessen führt man die Lie-Superalgebren ein, in denen neben Kommutatoren auch Antikommutatoren auftreten.

Ein paar allgemeine Eigenschaften

Abgesehen von der Verallgemeinerung der Symmetrie-Algebra zu Superalgebren kann man aber den Apparat der Quantenfeldtheorie ohne jede Änderung übernehmen. *Die Konzepte der Quantenfeldtheorie gestatten die Einführung von Supersymmetrie auf natürliche Weise, ohne die Notwendigkeit irgendeiner weiteren Einschränkung oder Voraussetzung!*

Hier seien ein paar allgemeine Eigenschaften von Supersymmetrie-Transformationen zusammengetragen. Die Transformation sei der kürze halber einfach mit Q bezeichnet, $|b\rangle$ ist ein bosonischer Zustand, $|f\rangle$ ein fermionischer Zustand. Supersymmetrie-Transformationen sind Operatoren, die bosonische Zustände in fermionische ändern und umgekehrt. Wir wollen den Hilbertraum der bosonischen Zustände B nennen, den der fermionischen Zustände F. Dann gilt

$$\forall b \in B : Q|b\rangle = |f\rangle \in F\,, \quad \forall f \in F : Q|f\rangle = |b\rangle \in B\,.$$

Welche Zustände nun genau in welche abgebildet werden, wieviele solche Supersymmetrie-Generatoren Q es gibt, welche anderen Eigenschaften der Zustände außer ihrer Statistik geändert werden, hängt natürlich vom konkreten Modell ab. Einige Eigenschaften gelten aber für jedes Q, das Supersymmetrie-Generator in einer beliebigen supersymmetrischen Theorie ist.

Supersymmetrie. Ein solches Q ändert, nach Definition, die Statistik eines Zustandes, und damit seinen Spin. Also ändert sich aus das Transformationsverhalten und räunlichen Drehungen, und daher ist Supersymmetrie, in einem gewissen Sinne, eine Raum-Zeit-Symmetrie.

ÜBUNG. Bosonen und Fermionen verhalten sich unterschiedlich unter Drehungen. Ein Operator Q, der die ineinander überführt, kann daher nicht selbst invariant unter Drehungen sein. Es sei R eine Drehung um 2π um irgendeine Achse, und $U = \rho(R)$ der unitäre Operator, der diese Drehung im Hilbertraum repräsentiert. Es gilt also offensichtlich

$$UQ|b\rangle = UQU^{-1}U|b\rangle = U|f\rangle\,, \quad UQ|f\rangle = UQU^{-1}U|f\rangle = U|b\rangle\,.$$

Nun haben Fermionen die Eigenschaft, unter der Aktion von U ein Vorzeichen aufzupicken: $U|f\rangle = -|f\rangle$, $U|b\rangle = |b\rangle$. Leiten Sie damit ab, dass $UQU^{-1} = -Q$ sein muss. In der Tat kann man zeigen, dass sich Q unter Lorentz-Transformationen exakt wie ein Spinor-Operator verhält. Insbesondere kommutiert Q nicht mit den Lorentz-Transformationen.

Susy und Poincaré. Man kann weiter zeigen, dass ein Supersymmetrie-Generator mit Translationen vertauscht. Dies bedeutet insbesondere, dass Q mit dem Energie- und Impulsoperator vertauschen, $[Q, E] = 0$ und $[Q, \boldsymbol{P}] = 0$. Um die Struktur der gesamten Symmetrie einer Theorie mit Supersymmetrie zu bestimmen, benötigt man sämtliche (Anti-)Kommutatoren der Generatoren. Einen susy Generator Q kann man sich vorstellen als eine Kombination aus einem Fermionen-Vernichter und einem Bosonen-Erzeuger bzw. umgekehrt vorstellen. Wie später in der Vorlesung gezeigt werden wird, ist so ein Q Generator daher fermionisch, und man benötigt daher die Antikommutatoren zwischen den susy Generatoren. Es sei $Q^\dagger$ der zu Q hermitesch konjugierte Operator. Die Q Operatoren sind als Spinor-Komponenten im allgemeinen nicht hermitesch, aber die Operator $\{Q, Q^\dagger\} = QQ^\dagger + Q^\dagger Q$ ist ein hermitescher und symmetrischer Operator, hat also positiv definite Eigenwerte:

$$\langle p;\alpha|QQ^\dagger|p;\alpha\rangle + \langle p;\alpha|Q^\dagger Q|p;\alpha\rangle = \left|Q^\dagger|p;\alpha\rangle\right|^2 + \left|Q|p;\alpha\rangle\right|^2 \geq 0\,.$$

Das kann dann und nur dann für alle Zustände $|p;\alpha\rangle$ verschwinden, wenn $Q = 0$ ist. Wir werden sehen, dass der Operator $\{Q, Q^\dagger\}$ ein Element der Poincaré-Algera ist und die Form

$$\{Q, Q^\dagger\} = aE + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{P}$$

hat. Dies ist eine typische Eigenschaft von susy Operatoren: Antikommutatoren von susy Operatoren sind typischerweise durch Generatoren der Raum-Zeit-Transformationen, insbesondere der Translationen. Anschaulich besagt dies, dass das Ausführen zweier susy Operationen, was ja Bosonen wieder in Bosonen überführt und Fermionen in Fermionen, eine Translation der Zustände in der Raum-Zeit induziert!

Verblüffenderweise gilt noch folgendes, tiefere, Resultat: Seien alle susy Generatoren durchnummeriert, Q_i, $i = 1, \ldots N$. Dann gilt folgende überraschende Formel:

$$\sum_i \{Q_i, Q_i^\dagger\} \propto E\,,$$

der vom Impuls abhängige Teil hebt sich in de Summe über sämtliche susy Generatoren weg! Je nach Vorzeichen der Proportionalitätskonstanten ist das Spektrum der Theorie also entweder von unten oder von oben beschränkt. Physikalisch relevante Theorien haben ein von unten beschränktes Energie-Spektrum, also eine positive Proportionalitätskonstante. Man beachte, dass eine supersymmetrische Theorie *automatisch* ein Energiespektrum ohne negative Eigenwerte erzwingt!

ÜBUNG. Es bezeichne $|0\rangle$ den Zustand mit minimalem Energie-Eigenwert, genannt *Vakuum*. Zeigen Sie

$$E|0\rangle = 0 \iff Q_i|0\rangle = 0 \text{ und } Q_i^\dagger|0\rangle = 0 \;\; \forall i\,.$$

Begründen Sie, warum jeder Zustand $|\psi\rangle$ mit $E|\psi\rangle \neq 0$ nicht invariant unter susy Transforamtionen sein kann.

Superpartner. Jeder Ein-Teilchen-Zustand $|\psi\rangle$ mit nicht verschwindender Energie besitzt mindestens einen Superpartner $Q|\psi\rangle$ oder $Q^\dagger|\psi\rangle$. Der Spin dieser Partnerzustände unterscheidet sich vom Spin der Zustandes $|\psi\rangle$ um $\frac{1}{2}$. Also enthält jedes *Supermultiplet* mindestens ein Boson b mit Spin σ_b und ein Fermion f mit Spin σ_f, und es gilt $|\sigma_b - \sigma_f| = \frac{1}{2}$. Ein Supermultiplet ist das Analogon zu einem Multiplet bezüglich einer Lie-Algebra Symmetrie. Die Zustände eines Supermultiplets werden durch die Generatoren der Lie-Superalgebra ineinander überführt.

ÜBUNG. Beweisen Sie, dass alle Zustände eines Supermultipletts die selbe Masse haben müssen. Dies widerspricht unseren Beobachtungen in der Natur, da wir die Superpartner zu den bekannten leichten Elementarteilchen nicht gefunden haben. Wenn Supersymmetrie in der Natur eine Rolle spielt, so kann dies nur in Form von spontan gebrochener Supersymmetrie der Fall sein.

Nachtrag. In der Vorlesung wurden als Beispiele die Lie-Superalgebren $\mathfrak{sl}(m|n)$ und $\mathfrak{osp}(m|n)$ vorgestellt, die auf graduierten Vektorräumen $V(m|n)$ operieren. Wie bei gewöhnlichen Lie-Algebren kann man auch Lie-Superalgebren als die Menge solcher infinitesimaler Transformationen verstehen, die eine bestimmte Größe invariant lassen. So läßt $\mathfrak{sl}(m|n)$ das Volumenelement $\mathrm{d}\mathit{Vol}$ invariant, während $\mathfrak{osp}(m|n)$ das Skalarprodukt invariant läßt, das durch die Form $(x, y) = x^t \cdot G \cdot y$ mit

$$G = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & \\ & J_n \end{pmatrix}, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

definiert ist. Offensichtlich muss n gerade sein. Die Matrix J_n wurde in der Vorlesung etwas irreführend angeschrieben.