Michael Flohr
6. November 2000

DEFINITIONEN

Vorausgesetzt wird ein minimales Grundwissen zu Gruppen, Ringen Körpern und Vektorräumen. Im allgemeinen wird die Gruppe mit G bezeichnet, alle Vektorräume V sind über $\mathbb{C}$, und die für uns wichtigen Ringe lassen sich alle als Polynomringe über $\mathbb{Z}$ definieren, d.h. man hat eine abelsche Gruppenstruktur "$+$" sowie ein Multiplikation "$\cdot$" mit einem Eins-Element, aber man kann nicht dividieren. Meist ist auch die Multiplikation kommutativ, immer jedoch associativ.

Darstellung — G-Modul — Grad. Eine *Darstellung* einer endlichen Gruppe G auf einem endlich-dimensionalen komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ der Gruppe G in die Gruppe der invertierbaren linearen Abbildungen von V in sich selbst, die das Gruppengesetz respektiert, d.h. $\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$. Man sagt, daß eine solche Abbildung V die *Struktur eines G-Moduls* gibt. Häufig nennt man dann auch V selbst eine Darstellung von G, aber gemeint ist natürlich die Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$, auf die ρ die Gruppenelemente abbildet. Wenn V nebst einer Basis gegeben ist, werden die Gruppenelemente also durch Matrizen repräsentiert. Weiter nennt man $\dim V$ den *Grad* von ρ.

G-Linearität. Eine Abbildung φ zwischen zwei Darstellungen V und W von G heißt *G-linear*, wenn sie eine Abbildung zwischen Vektorräumen ist und

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \rho_V(g) \Big\downarrow & & \Big\downarrow \rho_W(g) \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array} \tag{1}$$

für alle $g \in G$ kommutiert. Für solche Abbildungen können wir den Kern $\mathrm{Ker}\varphi = \{v \in V : \varphi v = 0\}$ und das Bild $\mathrm{Im}\varphi = \{w \in W : w = \varphi v \text{ für ein } v \in V\}$ definieren, die jeweils auch Darstellungen von G sind (d.h. G-Module).

Unterdarstellung — Irreduzibilität. Eine *Unterdarstellung* einer Darstellung V ist ein Vektorraum $W \subset V$, der invariant unter G ist, d.h. $\rho_V(g)w \in W$ für alle $w \in W$ und für alle $g \in G$. Eine Darstellung heißt *irreduzibel*, wenn es keinen echten Teilraum $W \subset V$ gibt, der invariant unter G ist.

Triviale Darstellung. Die *triviale Darstellung* von G ist die Darstellung auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit $gw = w$ für alle $w \in \mathbb{C}$. Wir werden sie meistens mit *Triv* oder mit U bezeichnen.

Dualraum — Duale Darstellung. Der *Dualraum* V^* von V ist der Raum der linearen Abbildungen von V in die komplexen Zahlen, $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$. Es gibt eine natürliche Paarung zwischen V^* und V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wenn $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ die Darstellung von G auf V bezeichnet, dann ist die *duale Darstellung* $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ dadurch bestimmt, daß die natürliche Paarung respektiert wird, d.h. $\langle \rho^*(g)(v^*), \rho(g)(v) \rangle = \langle v^*, v \rangle$ für alle $g \in G$, $v \in V$ und $v^* \in V^*$. Also ist $\rho^*(g) = {}^t\rho(g^{-1})$.

Direkte Summe & Tensorprodukte als Darstellungen — Clebsch-Gordon Problem. Sind V und W Darstellungen von G, so sind auch das Tensorprodukt $V \otimes W$ und die direkte Summe $V \oplus W$ Darstellungen. Weiter sind auch die äußeren Produkte $\bigwedge^k V = \bigotimes^k V / \langle v_1 \otimes \ldots \otimes v_k = 0 : v_i \in V, v_i = v_j \text{ für ein Paar } i \neq j \rangle$ Darstellungen, sowie die symmetrischen Tensorprodukte $\mathrm{Sym}^k(V) = \bigotimes^k V / \langle v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i = 0 \;\forall i \neq j \rangle$. Das Problem, Tensorprodukte von Darstellungen in direkte Summen von irreduziblen Darstellungen zu zerlegen heißt *Clebsch-Gordon Problem*.

$\mathrm{Hom}(V, W)$ als Darstellung. Der Raum der linearen Abbildungen von V nach W, $\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$, ist eine Darstellung. Sei nämlich φ eine lineare Abbildung von V nach W, dann ist

$$\left(\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)(\varphi)\right)(v) = \rho_W(g)\left(\varphi\left(\rho_V(g^{-1})(v)\right)\right)$$

für alle $v \in V$. Üblicherweise wird das nur $(g\varphi)(v) = g\varphi(g^{-1}v)$ geschrieben, indem man die explizite Notation der Darstellungen wegläßt. Die obige Definition der Darstellung $\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}$ ist also so, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \rho_V(g) \Big\downarrow & & \Big\downarrow \rho_W(g) \\ V & \xrightarrow{\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)(\varphi)} & W \end{array} \tag{2}$$

kommutiert. Der Spezialfall $W = \mathbb{C}$ mit der trivialen Darstellung liefert uns sofort wieder die Darstellung von G auf V^*, da $(g\varphi)(v) = g\varphi(g^{-1}v) = \varphi(g^{-1}v)$ ist, d.h. $\rho_{V^*}(g)(\varphi) = {}^t\rho_V(g^{-1})(\varphi)$.

Raum der G-linearen Abbildungen. Der *Vektorraum der G-linearen Abbildungen* zwischen zwei Darstellungen V und W von G ist offensichtlich der Unterraum $\mathrm{Hom}_G(V,W) \subset \mathrm{Hom}(V,W)$, dessen Elemente unter der Aktion von G invariant sind. Also, $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W) : \rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g)(\varphi) = \varphi \ \forall g \in G\}$. In diesem Fall ist nämlich das Diagramm (2) identisch zu Diagramm (1) für alle $g \in G$.

Permutations-Darstellung. Wir können auch Darstellungen von G auf endlichen Mengen X betrachten. Dies sind offensichlich dann Abbildungen von G auf die Permutationsgruppe von X, $\rho_X : G \to \mathrm{Aut}(X)$, die die Gruppenstruktur respektieren. G operiert dann von links auf X. Dazu können wir sofort eine Darstellung auf einem Vektorraum assoziieren, die sogenannte *Permutations-Darstellung*. Man nehme einen Vektorraum V mit Basis $\{e_x : x \in X\}$ und lasse G wie folgt auf V operieren: $g \cdot \sum_x a_x e_x = \sum a_x e_{g \cdot x}$, wobei wir wieder die explizite Notation der Darstellungen vergessen haben (zwecks Übung!).

Reguläre Darstellung. Die *reguläre Darstellung* R_G oder einfach R korrespondiert zu der Operation der Gruppe G von links auf sich selbst (also $X = G$). Auch diese Darstellung kann alternativ als eine Vektorraum-Darstellung realisiert werden, indem man als Vektorraum den Raum der komplex-wertigen Funktionen auf G nimmt, $\mathbb{C}(G)$. Offensichtlich operiert ein Element $g \in G$ auf einer Funktion $\alpha : G \to \mathbb{C}$ durch $(g\alpha)(g') = \alpha(g^{-1}g')$. Die Äquivalenz der beiden Beschreibungen von R sieht man ein, indem wir die Basisvektoren e_g mit den charakteristischen Funktionen identifizieren, die 1 sind auf g und auf allen anderen Elementen von G verschwinden, d.h. $e_g = \delta_{g,h}$. Dann ist $\alpha(g') = \sum_h a_h \delta_{h,g'}$, also $(g\alpha)(g') = \sum_h a_h \delta_{gh,g'} = \sum_h a_h \delta_{h,g^{-1}g'} = \alpha(g^{-1}g')$.

Unzerlegbare Darstellungen — Semisimple Gruppen.. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, daß für endliche Gruppen G alle Darstellungen V entweder irreduzibel sind, oder in die direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegt werden können. Für stetige, nicht-kompakte Gruppen ist das z.B. nicht wahr. Solche Gruppen können *unzerlegbare* Darstellungen besitzen, die zwar eine Unterdarstellung haben, aber nicht in die direkte Summe der Unterdarstellung und ihres orthogonalen Komplements zerlegt werden können. Das orthogonale Komplement als Vektorraum existiert natürlich, aber es ist eben nicht immer auch eine Darstellung! Eine Gruppe G, deren Darstellungen sämtlich vollständig in direkte Summen irreduzibler Darstellungen zerlegt werden können, heißt *semisimpel* oder auch *halbeinfach*.

Charakter. Sei V eine Darstellung von G. Der *Charakter* χ_V von V ist die komplex-wertige Funktion auf G, die definiert ist als die Spur von G auf V, d.h. $\chi_V(g) = \mathrm{tr}_V(g) = \mathrm{tr}(\rho_V(g))$.

Alternierende Darstellung. Die *alternierdend Darstellung Alt* einer Permutationsgruppe G, oft auch U' bezeichnet, ist die ein-dimensionale Darstellung gegeben durch $gw = \mathrm{sgn}(g)w$ für alle $g \in G$ und $w \in \mathbb{C}$.

Fixpunkt-Menge. Die *Fixpunkt-Menge* V^G einer Darstellung V der Gruppe G ist die Menge der *G-invarianten Elemente*, $V^G = \{v \in V : gv = v \ \forall g \in G\}$. Natürlich ist V^G eine Unterdarstellung von V.

Konjugationsklasse — Klassenfunktion. Die *Konjugationsklasse* $[g]$ eines Elementes $g \in G$ ist definiert als $[g] = \{hgh^{-1} : h \in G\}$. Der Raum aller komplex-wertigen Funktionen auf G, die innerhalb jeder Konjugationsklasse konstant sind, bezeichnet man mit $\mathbb{C}_{\mathrm{Klass}}(G)$, und solche Funktionen als *Klassenfunktionen*.

SÄTZE

Die Darstellungstheorie ist für endliche Gruppen relativ einfach. Das liegt im wesentlichen daran, dass jede unzerlegbare Darstellung irreduzibel ist. Folgende Sätze sind wichtig:

Existenz der komplementären Darstellung. Ist W eine Unterdarstellung der Darstellung V einer endlichen Gruppe G, dann existiert ein komplementärer Unterruam W' von V, der ebenfalls eine Darstellung ist, und es gilt $V = W \oplus W'$.

Schur'sches Lemma. Wenn V und W irreduzible Darstellungen von G sind und $\varphi : V \to W$ eine G-lineare Abbildung, dann gilt:
(i) Entweder ist φ ein Isomorphismus (d.h. $V = W$), oder $\varphi \equiv 0$.
(ii) Wenn $V = W$ ist, dann ist $\varphi = \lambda \cdot id$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und *id* die Identität auf V.

Vollständige Reduzierbarkeit. Jede Darstellung V einer endlichen Gruppe G besitzt eine Zerlegung $V = \bigoplus_{i=1}^k a_i V_i$, wobei die V_i verschiedene irreduzible Darstellungen sind ($V_i \neq V_j$ für $i \neq j$). Hierbei ist $a_i V_i = \underbrace{V_i \oplus \ldots \oplus V_i}_{a_i \text{ mal}}$.

Die Anzahl k der Faktoren, die auftretenden V_i und deren *Multiplizitäten* a_i sind eindeutig. Die Zerlegung des i-ten Summanden in eine direkte Summe von a_i Kopien von V_i ist allerdings für $a_i > 1$ nicht eindeutig.

Irreduzible Darstellungen abelscher Gruppen. Die irreduziblen Darstellungen einer abelschen Gruppe sind genau die Elemente der *dualen Gruppe*, d.h. Abbildungen (genauer Gruppen-Homomorphismen) $\rho : G \to \mathbb{C}^*$.

Charakter als Ring-Homomorphismus — Darstellungsring. Seien V und W Darstellungen von G. Dann gilt für die Charaktere: $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$, $\chi_{V\otimes W} = \chi_V\chi_W$ und $\chi_{V^*} = \bar\chi_V$. Formal kann man den *Ring der virtuellen Darstellungen* $R(G)$ betrachten, indem man beliebige ganzzahlige Linearkombinationen $\sum_i a_iV_i$ irreduzibler Darstellungen V_i zuläßt, d.h. $a_i \in \mathbb{Z}$. Die Ringstruktur ergibt sich dann durch das Tensorprodukt irreduzibler Darstellungen als Multiplikation (mit $\mathbb{C}$ als Eins-Element), das mittels Linearität auf alle ganzzahligen Linearkombinationen fortgesetzt wird. Dann definiert der Charakter $\chi : R(G) \to \mathbb{C}_{\text{Klass}}(G)$ einen Ring-Homomorphismus.

Fixpunkt-Formel. Sei V die Permutationsdarstellung assoziiert zu der Aktion einer Gruppe G auf einer endlichen Menge X. Dann ist $\chi_V(g) = \#\{x \in X : gx = x\}$, d.h. $\chi_V(g)$ gibt die Anzahl der Elemente in X an, die Fixpunkte unter g sind.

Projektions-Formel. Für eine Darstellung V der Gruppe G sei die Fixpunk-Menge $V^G = \{v \in V : gv = v\ \forall g \in G\}$ definiert. Es sei die Abbildung $\varphi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g : V \to V$ definiert. Dann ist φ eine Projektion von V auf V^G.

Orthonormalität der Charaktere irreduzibler Darstellungen. Auf dem Raum $\mathbb{C}_{\text{Klass}}(G)$ der Klassenfunktionen von G sei ein hermitesches inneres Produkt wie folgt definiert: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_{\text{Klass}}(G)$ ist

$$(\alpha,\beta) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)}\beta(g)\,.$$

Bezüglich dieses inneren Produktes stellen die Charaktere der irreduziblen Darstellungen von G eine orthonormale Basis dar.

Irreduzible Darstellungen & Konjugationsklassen. Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe G ist exakt gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von G.

Eindeutigkeit des Charakters. Jede Darstellung ist durch ihren Charakter bestimmt.

Kriterium für Irreduzibilität. Eine Darstellung V ist irreduzibel genau dann wenn $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Multiplizitäten. Die Multiplizität a_i, mit der die irreduzible Darstellung V_i in der Zerlegung einer Darstellung V auftritt, ist gegeben durch $(\chi_V, \chi_{V_i}) = a_i$.

Vollständigkeit der regulären Darstellung. Der Charakter der regulären Darstellung ist $\chi_R(g) = \delta_{g,e}$. Daraus folgt: Jede irreduzible Darstellung V der Gruppe G tritt in der regulären Darstellung von G exakt $\dim V$ Male auf. Sei also $R = \bigoplus_i a_iV_i$, dann ist $a_i = \dim V_i$ und damit $|G| = \dim R = \sum_i(\dim V_i)^2$. Mit der Identität $\sum_i(\dim V_i)\chi_{V_i}(g) = 0$ für alle $g \neq e$ hat man das Analogon der Umkehr der Fourier-Transformation für endliche Gruppen.

Duales inneres Produkt. Sei $c(g)$ die Anzahl der Elemente in der Konjugationsklasse von g. Dann gilt

$$\sum_\chi \overline{\chi(g)}\chi(g) = \frac{|G|}{c(g)}\,,$$

wobei die Summe über alle Charaktere irreduzibler Darstllungen geht. Weiter gilt, daß

$$\sum_\chi \overline{\chi(g)}\chi(g') = 0 \quad \forall\, g' \notin [g]\,.$$

Charaktere irreduzibler Darstellungen heißen auch *irreduzible Charaktere*.

***G*-Linearität und Klassenfunktionen.** Sei $\alpha : G \to \mathbb{C}$ eine beliebige komplex-wertige Funktion auf G, und V eine beliebige Darstellung. Dann ist die Abbildung $\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g\in G}\alpha(g)\cdot\rho_V(g) : V \to V$ G-linear für alle V dann und nur dann, wenn $\alpha \in \mathbb{C}_{\text{Klass}}(G)$ eine Klassenfunktion ist.

Allgemeine Projektions-Formel. Sei $V = \bigoplus_i a_iV_i$ die Zerlegung einer Darstellung V von G in irreduzible Darstellungen V_i. Dann ist $\pi_i = (\dim V_i)\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_{V_i}(g)}\cdot g$ die Projektion von V auf a_iV_i.

AUFGABEN

Wer will, kann sich an den folgenden Aufgaben versuchen. Aufgeschriebene Lösungen korrigiere ich gerne.

1. In der Vorlesung kam das Beispiel der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ vor. Prüfen Sie nach, daß mit $\sigma = (12)$, $\tau = (123)$ die Standard-Darstellung V eine Basis $\alpha = (\omega, 1, \omega^2)$, $\beta = (1, \omega, \omega^2)$ mit $\omega = \exp(2\pi\mathrm{i}/3)$ besitzt, so daß

$$\tau\alpha = \omega\alpha\,, \quad \tau\beta = \omega^2\beta\,, \quad \sigma\alpha = \beta\,, \quad \sigma\beta = \alpha\,.$$

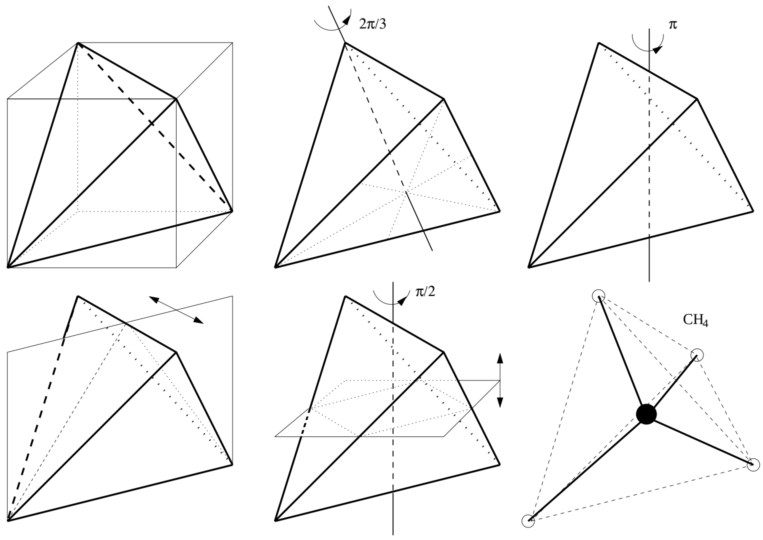
2. Zerlegen Sie das Tensorprodukt $V \otimes V$ zweier Standard-Darstellungen von $\mathfrak{S}_3$ in irreduzible Darstellungen. Wählen Sie dazu für V die Basis wie in Aufgabe 1.

3. Es sei V eine beliebige Darstellung einer Gruppe G mit Charakter χ_V. Zeigen Sie, daß die Charaktere zu den Darstellungen $\bigwedge^2 V$ und $\mathrm{Sym}^2 V$ sich schreiben lassen als $\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$ und $\chi_{\mathrm{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2))$. Hinweise: Nehmen Sie an, daß die Aktion des Gruppenelementes g auf V durch eine Matrix mit Eigenwerten $\{\lambda_i\}$ dargestellt wird. Können Sie allgemein etwas zu den Charakteren der Darstellungen $\bigwedge^k V$ und $\mathrm{Sym}^k V$ sagen?

4. Sei G eine endliche Gruppe, und V eine treue Darstellung. Eine Darstellung heißt *treu*, wenn $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ injektiv ist. Zeigen Sie, daß jede irreduzible Darstellung von G in einem Tensorprodukt $V^{\otimes n}$ für ein n enthalten ist.

5. Eine d-Elektron ($\ell = 2$) befindet sich in einem Kristall mit D_4-Symmetrie. Die Punktgruppe D_4 ist isomorph zu $\mathfrak{S}_4$. Geben Sie den Charakter $\chi(\phi)$ für Drehungen um einen Winkel ϕ an. In welche irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{S}_4$ spaltet also der d-Zustand auf?

6. Das Methanmolekül CH_4 hat die Form eines Tetraeders mit einem Kohlenstoffatom im Zentrum und den vier Wasserstoffatomen auf den Ecken. Die Symmetriegruppe heißt T_d und besteht aus folgenden Konjugationsklassen:



Die Identität, acht dreizählige Drehungen C_3 um eine Achse durch eine Ecke und den Mittelpunkt des gegenüberliegenden gleichseitigen Dreiecks, drei zweizählige Drehungen C_2, um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten, sechs Spiegelungen σ_d an den Ebenen durch eine Kante und die Mittelsenkrechte des gegenüberliegenden gleichseitigen Dreiecks, und sechs vierzählige Drehspiegelungen S_4, bei denen zunächst um 90^o um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten gedreht und anschließend an der zur Drehachse senkrechten Ebene durch den Mittelpunkt des Tetraeders gespiegelt wird. Die Charaktertafel von T_d lautet

T_d	$\mathbb{1}$	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
U	1	1	1	1	1
U'	1	1	1	-1	-1
V	3	0	-1	1	-1
V'	3	0	-1	-1	1
W	2	-1	2	0	0

Die Charaktere für Drehungen C um einen Winkel ϕ und für Drehspiegelungen S um einen Winkel ϕ sind

$$\begin{aligned} \chi_c(\phi) &= (N_c - 2)(\cos\phi + 1)\,, \\ \chi_s(\phi) &= N_s(\cos\phi - 1)\,, \end{aligned}$$

wobei N_c bzw. N_s die Anzahl der Atome bezeichnen, die unter der entsprechenden Symmetrie-Operation unberührt bleiben. Geben Sie die Charaktere der Darstellung der Eigenschwingungen des Moleküls an. In welche irreduziblen Darstellungen von T_d zerfällt diese Darstellung?