Übung XI zur Vorlesung GRUPPENTHEORIE IN DER PHYSIK

Irreps von Lie-Algebren und Young Tabelaux

Micħael Flohr
Nils Carqueville

24. Jamuar 2006

SYMMETRISCHE GRUPPE UND YOUNG TABLEAUX

Die Darstellungstheorie von Lie-Algebren kann mit Hilfe der sogenannten Young Tableaux leichter und mit netten Bildchen verstanden werden. In der Vorlesung werden wir lernen, dass jede irrep einer Lie-Algebra in einem geeigneten Tensor-Produkt der fundamentalen Darstellungen der Lie-Algebra gefunden werden kann. Wie genau das funktioniert, erzählen einem die Bildchen. Zunächst führen wir aber den Formalismus der Young Tableaux ein. Dazu benötigen wir ein Resultat aus der Theorie der symmetrischen Gruppen:

Jedes Element g der symmetrischen Gruppe S_n von n Elementen kann als Produkt von Zykeln geschrieben werden. Damit zerfällt die Gruppe in ihre Konjugationsklassen. Eine gegebene Konjugationsklasse besteht aus Permutationen die aus k_1 1-Zykeln, k_2 2-Zykeln, und so weiter, bestehen, und besitzt

$$C_{(k_1,k_2,\ldots k_n)} = n!\,\prod_j (j^{k_j}\,k_j!)^{-1}$$

Elemente. Wir verbildlichen so einen j-Zykel durch eine Spalte von j Kästchen. Diese Spalten ordnen wir in von links nach rechts in absteigender Ordnung in j an. Also wird die triviale Konjugationsklasse von S_n, die aus n 1-Zykeln besteht, durch eine Zeile von n Kästchen dargestellt. Jedes solche Tableau korrespondiert zu einer anderen Konjugationsklasse (genauer, zu einer anderen Partition der Zahl n in eine Summe von positiven ganzen Zahlen), und damit zu einer irrep der symmetrischen Gruppe.

Erstes Beispiel. Geben Sie das Young Tableau für die Konjugationsklasse von S_8 an, die aus einem 4-Zykel, einem 3-Zykel und einem 1-Zykel besteht.

Konjugationsklassen. Geben Sie alle Konjugationsklassen von S_3 und S_4 in Form von Young Tableaux an. Berechnen Sie die Größen $C_{(k_1,\ldots,k_n)}$ der Konjugationsklassen und überprüfen Sie, dass diese sich zu $n!$ addieren. Können Sie die Anzahl der Konjugationsklassen für S_5 und S_6 angeben?

Irreps. Die Young Tableaux sind extrem hilfreich, um die irreps explizit zu konstruieren, indem sie den entsprechenden invarianten Unterraum der sogenannten regulären Darstellung von S_n identifiziert, die $n!$-dimensional ist. Jedes Young Tableau von S_n hat n Kästchen, in die wir die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auf viele Weisen einfüllen können. In der Tat gibt es dafür $n!$ verschiedene Möglichkeiten. Jede solche Indizierung eines Young Tableau korrespondiert eins-zu-eins zu einem Zustand der regulären Darstellung von S_n. Zum Beispiel können wir einfach Zeile für Zeile von links nach rechts lesen, um den Zustand anzugeben:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6&5&3&2\\\hline 1&7\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array} \longrightarrow |6532174\rangle\,,$$

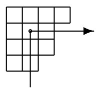
wobei der Zustand $|6532174\rangle$ zu der Permutation $(1234567) \to (6532174)$ gehört. Um nun die invarianten Unterräume von den irreps zu finden, die durch die Young Tableaux angegeben werden, verwenden wir folgende Regel: Das Tableaux ist vollständig symmetrisch in jeder Zeile, und vollständig antisymmetrisch in jeder Spalte. Geben Sie damit den korrekt symmetrisierten Zustand an, der durch die indizierten Young Tabelaux

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array} \quad\text{und}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

beschrieben werden. Betrachten Sie S_3 als Beispiel. Geben Sie für die zum Young Tableau $\square\square\square$ gehörende Darstellung an, welche Symmetrie und welche Dimension sie besitzt. Tun Sie das gleiche für die Darstellung, die durch das Young Tableau $\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$ gegeben wird. Konstruieren Sie schließlich die irrep zum noch verbleibende Young Tableau. Um die Dimension dieser Darstellung zu bestimmen, schreiben Sie alle $3! = 6$ Zustände hin, die Sie durch korrekte Symmetrisierung der $3! = 6$ möglichen Indizierungen des Young Tableau erhalten können und prüfen Sie dann nach, wieviele davon linear unabhängig sind. Was ergibt sich, wenn Sie die Quadrate der Dimensionen aller irreps addieren?

Haken-Regel. Es ist recht mühsam, die Dimensionen von irreps auf die obige Weise zu bestimmen. Glücklicherweise gibt es eine Regel, die dies einfacher macht, die sogenannte *Haken-Zahl* H, wobei die irrep $\rho_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}$, die zum Young Tableau mit Spalten $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ gehört, die Dimension $\dim\rho = \frac{n!}{H}$ hat. Die Haken-Zahl wird auf folgende Weise berechnet: Ein Haken kommt von unten, geht durch eine Spalte bis zu einem Kästchen darin, biegt nach rechts ab und verläßt das Tableau durch eine Zeile. So hat jedes Kästchen genau einen zugehörigen Haken.

Der Haken zu einem Kästchen i durchläuft auf seinem Weg eine bestimmte Zahl h_i von Kästchen, wobei i eine beliebige Indizierung des Tableau ist. Die Haken-Zahl ist dann $H = \prod_i h_i$. Hier ein Beispiel für einen Haken:



$$h = 4\,.$$

Überprüfen Sie Ihre Resultate für die Dimensionen der irreps von S_3 mit Hilfe der Haken-Regel.

YOUNG TABLEAUX UND $\mathfrak{su}(3)$

Wir haben in der Vorlesung gelernt, dass $\mathfrak{su}(3)$ zwei fundamentale Darstellungen besitzt, beide mit Dimension drei. Die eine ist die komplex konjugierte der anderen, so dass man sie oft mit $\rho_{\omega^1} = \rho_{(1,0)} = \mathbf{3}$ und $\rho_{\omega^2} = \rho_{(0,1)} = \overline{\mathbf{3}}$ bezeichnet. Man weiß, dass jede irrep mit Höchstgewicht $\mu = n\omega^1 + m\omega^2$ im Tensorprodukt der fundamentalen irreps gemäß $\rho_{(n,m)} \subset \mathbf{3}^{\otimes n} \otimes \overline{\mathbf{3}}^{\otimes m}$ enthalten ist. Bemerkung: Da $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \overline{\mathbf{3}}$, benötigen wir tatsächlich nur eine der fundamentalen irreps, um alle irreps zu konstruieren.

Der Punkt ist, dass irreps von $\mathfrak{su}(3)$, oder allgemeiner $\mathfrak{su}(n)$, die Eigenschaft haben, dass sie irreduzibel unter Permutationen ihrer Tensorindizes transformieren. Eine Konsequenz davon ist, dass die irreps in ganz ähnlicher Weise durch Young Tableaux klassifiziert werden können, wie das für die symmetrischen Gruppen möglich ist! In der Tat, eine allgemeine irrep (n,m) ist im wesentlichen ein Tensor mit Komponenten $A^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_m}$, separat symmetrisch in oberen und unteren Indizes, und spurfrei. Die unteren Indizes können mit Hilfe des vollständig antisymmetrischen ϵ-Tensors nach oben gezogen werden,

$$Y^{i_1\ldots i_n\,k_1\ell_1\ldots k_m\ell_m} = \epsilon^{j_1k_1\ell_1}\ldots\epsilon^{j_mk_m\ell_m}A^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_m}\,.$$

Der neue Tensor Y ist antisymmetrisch in jedem Paar $k_i \leftrightarrow \ell_i$, und ist symmetrisch unter Austausch von Paaren $k_i, \ell_i \leftrightarrow k_{i'}, \ell_{i'}$. Zu jedem solchen Tensor Y können wir ein Young Tableau der Form

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline k_1 & \cdots & k_m & i_1 & \cdots & i_n \\ \hline \ell_1 & \cdots & \ell_m \\ \cline{1-3}\end{array}$$

assoziieren. Man kann zeigen, dass der Tensor Y genau die richtigen Symmetrie-Eigenschaften besitzt. Dazu macht man sich klar, dass die Absteige-Operatoren, wenn sie auf dem Höchstgewichtszustand wirken, die Symmetrie erhalten, so dass es genügt, die Symmetrie des Höchstgewichtszustandes zu betrachten, bzw. die Symmetrie der entsprechenden Tensorkomponenten. Das Höchstgewicht der irrep (n,m) hat die Tensorkomponenten von A mit allen $i_r = 1$ und allen $j_s = 2$, so dass die Komponenten des Y-Tensor gerade $i_r = 1$ und alle Paare $k_s, l_s = 1, 3$ sind. Also ist die Symmetrie genau wie die von Young tableaux für symmetrisch Gruppen, symmetrisch in jeder Zeile, antisymmetrisch in jeder Spalte. Die Bedingung der Spurfreiheit für den A-Tensor übersetzt sich in die Bedingung

$$\epsilon_{i_1k_1l_1}Y^{i_1\ldots i_n\,k_1\ell_1\ldots k_m\ell_m} = 0$$

für den Y-Tensor. Diese Symmetrisierungsvorschrift kann nun verwendet werden, um einen beliebigen Tensor zu symmetrisieren und so auf eine spezifische irrep zu projizieren. Zum Beispiel, wenn $B^{j_1j_2k_1}$ ein allgemeiner Tensor mit drei oberen Indizes ist, aber ohne spezielle Symmetrie, so produziert das folgende Young Diagramm einen symmetrisierten Tensor,

$$\begin{array}{|c|c|}\hline j_1 & j_2 \\ \hline k_1 \\ \cline{1-1}\end{array} \;\rightarrow\; B^{j_1j_2k_1} + B^{j_2j_1k_1} - B^{k_1j_2j_1} - B^{j_2k_1j_1}\,,$$

der entsprechend der $(1,1)$ irrep transformiert, also entsprechend der adjungierten Darstellung. Das Rezept kann auf Young Tableaux mit mehr als zwei Zeilen verallgemeinert werden.

Zahl der Zeilen. Begründen Sie, warum im Fall von $\mathfrak{su}(3)$ kein Young Tableau mehr als drei Zeilen haben kann. Überlegen Sie dann, warum eine Spalte eines Young Tableau mit drei Kästchen einfach weggelassen werden kann, so dass wir uns tatsächlich auf Young Tableaux mit einer oder zwei Zeilen beschränken können.

Clebsh-Gordan Zerlegung. Man kann nun all das verwenden, um Tensorprodukte mit Hilfe der Young Tableaux in direkte Summen von irreps zu zerlegen. Das kennen Sie vielleicht noch vom Drehimpuls in der Quantenmechanik. Sei allgemein $\mu = \sum_{i=1}^{n-1} k_i\omega^i$ ein Höchstgewicht einer $\mathfrak{su}(n)$ irrep. Dann ist das zugehörige Young Tableau Y auf folgende Weise gegeben: Man schreibt, von links nach rechts, beginnen mit k_{n-1} Spalten mit $n-1$ Kästchen, woran man der Reihe nach jeweils k_r Spalten mit r Kästchen für $r = n-2, \ldots, 2$ anhängt, bis man am Ende k_1 Spalten mit je einem Kästchen hinschreibt. Dies ist die direkte Verallgemeinerung des Antisymmetrisierens in n statt nur 3 möglichen Indexwerten. Jedes legale Young Tableau hat die Eigenschaften, dass die Zahl der Kästchen pro Zeile nicht nach unten zunimmt, und dass die Zahl der Kästchen pro Spalte nicht nach rechts zunimmt.

Betrachten wir nun zwei Darstellungen mit Höchstgewichten $\mu = \sum_i n_i \omega^i$ und $\mu' = \sum_i n_i' \omega^i$. Ihre zugehörigen Young Tabelaux seien Y und Y'. Die Zerlegung des Tensorproduktes $\rho_\mu \otimes \rho_{\mu'}$ funktioniert nun wie folgt: Man verteilt alle Kästchen des Tableau Y' auf das Tableau Y, in einer bestimmten Art und Weise. Das füllt man zunächst die Kästchen von Y' von oben nach unten mit Symbolen, zum Beispeil a in der ersten Zeile, b in der zweiten, und so weiter. Nun fügt man zuerst die Kästchen mit as von der ersten Zeile von Y' auf alle erdenklichen Arten zum Tabelau Y hinzu, so dass Y ein legales Tableau bleibt. Dann fährt man mit den bs von der zweiten Zeile von Y' auf die selbe Art fort, aber mit der zusätzlichen Regel, dass die akkumulierte Zahl von bs, wenn man die Zeilen von Y von rechts nach links und von oben nach unten liest, nie größer ist, als die akkumulierte Zahl der as. Dies vermeidet das Mehrfachzählen äquivalenter Diagramme. Man fährt auf diese Weise fort, bis man alle Kästchen von Y' verbraucht hat, wobei man jeweils darauf achten muss, dass die neuen Diagramme Y alle legal sind, und die von rechts nach links und von oben nach unten akkumulierte Zahl der neuen Symbole niemals die Zahl der vorhergehenden Symbole überschreitet. Wir kommen nun zum Beispiel $\mathfrak{su}(3)$ zurück, und üben diese Vorschrift an Beispielen: Zerlegen Sie auf diese Weise $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ und $\overline{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$. Das war einfach, weil Y' jeweils nur aus einem Kästchen bestand. Führen Sie die Zerlegung nun auch für $\overline{\mathbf{3}} \otimes \overline{\mathbf{3}}$ durch. Da dies natürlich nichts anderes als das komplex konjugierte von $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ ist, können Sie das zwar direkt von den gerade eben erhaltenen Resultaten ablesen, Sie sollten aber auch die Konstruktion mir der Verteilung der Kästchen von Y' auf Y üben. Beachten Sie, dass Young Tableaux mit mehr als drei Zeilen nicht erlaubt sind.

Diese Beispiele sind recht einfach. Die Stärke des beschriebenen Verfahrens wird deutlich, wenn man ein wirklich nicht triviales Beispiel bewältigt. Zeigen Sie, dass $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{27} \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ ist. Um Ihre Rechnung zu prüfen, brauchen Sie natürlich eine Formel dafür, aus einem Young Tableau die Dimension der zugehörigen irrep auszurechnen. Hier ist sie:

Dimension der irreps. Es ist praktisch, noch eine weitere Notation einzuführen. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{su}(n)$ und eine irrep mit Höchstgewicht $\mu = \sum_{i=1}^{n-1} k_i \omega^i$ kann das Young Tableau durch die Spaltenlängen $[\ell_1, \ell_2, \ldots]$ angegeben werden, wobei ℓ_j die Länge der j-ten Spalte ist, also die Zahl der Kästchen in der Spalte j. Überlegen Sie, wie die ℓ_j mit den k_i in Beziehung stehen. Die Sequenzen $[\ell_1, \ell_2, \ldots]$ sind Sequenzen von nicht anwachsenden ganzen Zahlen. Die m-te fundamentale Darstellung ist in dieser Notation durch $[m]$ gegeben, also durch ein Young Tableau mit nur einer Spalte der Länge m. Übertragen Sie die Lösung der vorhergehenden Aufgabe in diese Notation. Sie sollten $[2,1] \otimes [2,1] = [2,2,1,1] \oplus [3,1,1,1] \oplus [2,2,2] \oplus [3,2,1] \oplus [3,2,1] \oplus [3,3]$ erhalten.

Die Dimension einer irrep mit Tableau $[\ell_1, \ell_2, \ldots]$ erhalten wir nun ganz ähnlich mit einer Haken-Regel, wie für die symmetrischen Gruppen, nur der Zähler ändert sich. Es sei H wieder die Haken-Zahl. Statt $n!/H$ für den Fall von irreps von S_n, erhalten wir nun die Regel

$$\dim\,[\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k] = \frac{F}{H}\,, \quad F = \frac{n!}{(n-\ell_1)!}\frac{(n+1)!}{(n+1-\ell_2)!}\cdots\frac{(n+k-1)!}{(n+k-1-\ell_k)!}\,.$$

Dies ist die *Faktor-über-Haken-Regel*. Den Faktor F erhält man, indem man das Young tableau auf folgende Weise indiziert und dann einfach das Produkt aller Einträge nimmt. man beginnt in der oberen linken Ecke mit n (für $\mathfrak{su}(n)$ als Algebra). Jeder Schritt in einer Zeile nach links erhöht den Eintrag um eins, jeder Schritt in einer Spalte nach unten erniedrigt ihn um eins. Am schnellsten sieht man das in einem Bild für F:

n	$n+1$	$n+2$	$n+3$
$n-1$	n	$n+1$	
$n-2$	$n-1$		
$n-3$			

$$F = [n(n-1)(n-2)(n-3)][(n+1)n(n-1)][(n+2)(n+1)][(n+3)]\,.$$

Berechnen Sie nun die Dimensionen für die irreps in der vorhergehenden Aufgabe und prüfen Sie damit nach, dass alles stimmt. Überlegen Sie, dass das Young Tableau des komplex konjugierten der irrep $[\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k]$ durch $\overline{[\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k]} = [n - \ell_k, \ldots, n - \ell_2, n - \ell_1]$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass beide irreps bzw. beide Tabelaux dieselbe Dimension haben. Beweisen Sie schließlich, dass ein Tableau Y und sein komplex konjugiertes $\overline{Y}$ sich zu einem Rechteck der Höhe n und Breote k zusammensetzen lassen.

Quark. Abschließend können Sie noch ein wenig Ihre gewonnenen Erkenntnisse verwenden, umd die $SU(3)$-Symmetrie des Quark-Modells besser zu verstehen. Quarks haben eine sogenante Farbladung, die die Werte *red*, *green* und *blue* annehmen kann, abgekürzt durch r, g und b. Betrachten Sie die $\overline{\mathbf{3}}$ und geben Sie die korrekt antisymmetrisierten Farbzustände an, die den Antifarben *cyan*, *magenta* und *yellow* entsprechen, abgekürzt c, m und y. Dies gibt an, wie bei einem beliebigen Quark-Tensorzustand die unteren Indizes mit möglichen Werten c, m, y in Paare von oberen Indizes mit Werten r, g, b übersetzt werden. Betrachten Sie die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{su}(3)$ und ordnen Sie den acht Zuständen, die Tensoren mit einem oberen und einem unteren Index sind, Farbwerte zu. Dies sind die Gluonen. Welchen physikalischen Unterschied haben die sechs Gluonen, die den Wurzeln entsprechen, zu den zwei Gluonen, die den Cartan-Operatoren entsprechen? Schreiben Sie die Gluonen als korrekt symmetrisierte Objekte in drei Indizes mit Werten r, g, b. Wann ist ein Zustand farbneutral? Betrachten Sie die Darstellungen $\mathbf{8}$ (die adjungierte), $\mathbf{10}$, $\overline{\mathbf{10}}$ und $\mathbf{27}$ (alle die hatten wir schon in einer vorhergehenden Aufgabe) und finden Sie farbneutrale Zustände darin.