Übung II zur Vorlesung GRUPPENTHEORIE IN DER PHYSIK — Mic$\hbar$ael Flohr, Nils Carqueville

Parametrisierungen und Generatoren von Lie-Gruppen — 8. November 2005

GUTE UND SCHLECHTE PARAMETRISIERUNGEN

Sei G eine Lie-Gruppe mit Parametrisierung u so, dass $g(u=0) = 1\!\!1$. Die Dimension der Lie-Gruppe sei n. Die Parametrisierung u kann also für kleine $|u| \ll 1$ aus einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gewählt werden.

Beispiel 1. Wir betrachten Drehungen im $\mathbb{R}^2$. Diese bilden eine Matrix-Lie-Gruppe, genauer die Matrizen $g \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$, für die $g^{-1} = g^t$ und $\det g = 1$ gilt. Diese Matrix-Lie-Gruppe wird auch $SO(2)$ genannt. Welche Dimension hat diese Gruppe? Wir wählen die Parametrisierung

$$g(u) = \begin{pmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix}, \quad u \in (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, dass $g(0) = 1\!\!1$ ist. Finden Sie das Gruppengesetz, also die Funktion $w(u,v)$, so dass $g(w(u,v)) = g(v) \circ g(u)$ ist. Was fällt Ihnen auf?

Beispiel 2. Wir betrachten noch einmal $SO(2)$. Wählen Sie nun folgende Parametrisierung:

$$g(u) = \begin{pmatrix} 1-u & \sqrt{1-(1-u)^2} \\ -\sqrt{1-(1-u)^2} & 1-u \end{pmatrix}, \quad u \in (0,2) \subset \mathbb{R}\,.$$

Prüfen Sie nach, dass $g(0) = 1\!\!1$, $\det g(u) = 1$ und $(g(u))^{-1} = (g(u))^t$ gilt. Leiten Sie ebenfalls das Gruppengesetz $w(u,v)$ für die Gruppenmultiplikation $g(w(u,v)) = g(v) \circ g(u)$ her. Betrachten Sie dazu zunächst $(g)_{11}$. Prüfen Sie nun, ob dies in einfacher Weise mit dem verträglich ist, was Sie für $(g)_{12}$ bekommen. Offensichtlich ist dies keine besonders günstige Parametrisierung der Gruppe.

GENERATOREN

Wir betrachten nun die Gruppe $SU(2)$, also die Matrix-Lie-Gruppe der Matrizen $g \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ mit $\det g = 1$ und $g^{-1} = g^\dagger$. Aus der letzten Übung wissen Sie, dass $\dim SU(2) = 3$ ist.

Parametrisierung. Zeigen Sie, dass mit $u = (\phi, \alpha, \beta)$ und $\gamma = \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$ als Abkürzung

$$g(u) = \begin{pmatrix} \gamma\cos\frac{\phi}{2} - \mathrm{i}\gamma\sin\frac{\phi}{2} & -\mathrm{i}(\alpha - \mathrm{i}\beta) \\ -\mathrm{i}(\alpha + \mathrm{i}\beta) & \gamma\cos\frac{\phi}{2} + \mathrm{i}\gamma\sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

eine gute Parametrisierung ist. Wir wollen ansatzweise das Gruppengesetz $w^k = w^k(u,v)$ finden.

Generatoren. Bestimmen Sie die drei Generatoren

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\phi} g(u)\Big|_{u=0}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial\alpha} g(u)\Big|_{u=0}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial\beta} g(u)\Big|_{u=0}.$$

Umgekehrt ist $\exp(-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$ mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ für alle ϕ und $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ein Element aus $SU(2)$, und es gilt

$$\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right) = \cos\frac{\phi}{2} 1\!\!1 - \mathrm{i}\sin\frac{\phi}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,.$$

Algebra. Bestimmen Sie Strukturkonstanten der Lie-Algebra der Generatoren σ_k von $SU(2)$. Dazu müssen Sie die Kommutatoren $[\sigma_j, \sigma_k] = \mathrm{i}f_{jk}^{\ \ l}\sigma_l$ bestimmen. Ergebnis: $f_{jk}^{\ \ l} = 2\varepsilon_{jk}^{\ \ l}$. Damit können Sie nun in erster Näherung das Gruppengesetz angeben: $w^l(u,v) = u^l + v^l - \frac{1}{2}u^j v^k f_{jk}^{\ \ l}$.