

TENSORPRODUKTE

Die Klassifikation aller irreps einer Lie algebra  $\mathfrak{g}$  ist der erste Schritt zum Verständnis der Darstellungstheorie von  $\mathfrak{g}$ . Der nächste Schritt besteht darin, zu verstehen, wie beliebige Darstellungen in irreps zerlegt werden können. Die häufigste Art der zerlegbaren Darstellungen in der Physik sind Tensorprodukte von irreps. Einige Aspekte dessen, was bei Tensorprodukten geschieht, kann man schon am Beispiel der Drehimpulsaddition sehen, die man aus der Quantenmechanik kennt. Der entscheidende Punkt ist, dass ein physikalisches System so unter einer Symmetrie transformiert, dass es Quantenzahlen für verschiedene irreps der Symmetrie-Algebra besitzen kann. So kann zum Beispiel ein Teilchen mit Spin  $s$  und Bahn-Drehimpuls  $\ell$  durch einen Hilbertraum beschrieben werden, dessen Zustände *unabhängige* Quantenzahlen bezüglich der irrep  $\rho^{(\ell)}$  und der irrep  $\rho^{(s)}$  von  $\mathfrak{su}(2)$  besitzen. Die Zustände können daher in der Form  $|\ell, m\rangle \otimes |s, m_s\rangle \equiv |\ell, m\rangle |s, m_s\rangle$  angegeben werden, wobei es üblich ist, das Symbol für das Tensorprodukt wegzulassen. Eine andere häufig verwendete Notation ist  $|\ell, m; s, m_s\rangle$ .

**Transformationseigenschaften.** Um zu verstehen, wie eine Lie-Algebra auf einem Tensorprodukt agiert, ändern wir unsere Notation ein wenig ab. Wir bezeichnen die Darstellungen einer Lie-Gruppe auf Vektorräumen  $V$  und  $W$  mit  $\rho^V$  und  $\rho^W$ , und ganz allgemein Darstellungen der Gruppe mit  $\rho$ . Die Darstellungen der zugehörigen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  bezeichnen wir dann entsprechend mit  $d\rho^V, d\rho^W$  und  $d\rho$ . Dies verdeutlicht, dass die linearen Operatoren  $d\rho(u^a X_a)$  als die linearen Differentiale der linearen Operatoren  $\rho(g), g = \exp(iu^a X_a)$  aufgefasst werden können.

Machen Sie sich klar, dass die Lie-Gruppe in natürlicher Weise wie folgt auf dem Tensorprodukt  $V \otimes W$  mit Zuständen  $|v\rangle \otimes |w\rangle$  operiert:

$$\begin{aligned} \rho^{V \otimes W}(g)|v\rangle \otimes |w\rangle &= \sum_{v', w'} |v'\rangle \otimes |w'\rangle (\rho^{V \otimes W}(g))_{(v'w')(vw)} \\ &= \left( \sum_{v'} |v'\rangle (\rho^V(g))_{v'v} \right) \otimes \left( \sum_{w'} |w'\rangle (\rho^W(g))_{w'w} \right). \end{aligned}$$

Dies bedeutet nichts anderes, als dass die Faktoren des Tensorproduktes unabhängig unter der Gruppenaktion transformieren.

Zeigen Sie nun, durch Entwicklung von  $(\mathbb{1} + iu^a d\rho^{V \otimes W}(J_a)) |v\rangle \otimes |w\rangle$  bis zur ersten Ordnung in  $u$ , dass entsprechend für die Aktion der Lie-Algebra auf  $V \otimes W$  gilt:

$$(d\rho^{V \otimes W}(J_a))_{(v'w')(vw)} = (d\rho^V(J_a))_{v'v} \delta_{w'w} + \delta_{v'v} (d\rho^W(J_a))_{w'w}$$

Kürzer schreibt sich das als  $d\rho^{V \otimes W}(J_a) = d\rho^V(J_a) \otimes \mathbb{1}_W + \mathbb{1}_V \otimes d\rho^W(J_a)$ . Es ist oft recht umständlich, die explizite Notation des Tensorproduktes und der diversen Darstellungen andauerend mitzuschleppen. Daher finden sich auch Notationen wie

$$J_a(|v\rangle|w\rangle) = (J_a|v\rangle)|w\rangle + |v\rangle(J_a|w\rangle).$$

Die Darstellung  $d\rho$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  wirkt also wie eine Derivation, d.h. sie genügt der Leibniz-Regel.

**Zerlegen von Tensorprodukten.** Eine der leichteren Aufgaben zu Tensorprodukten ist es, die Eigenwerte von Generatoren zu bestimmen, die diagonalisiert werden können. Sei  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$  und seien in den Darstellungen  $\rho^{(j_1)}$  und  $\rho^{(j_2)}$  jeweils Eigenbasen zu  $J_3$  gewählt. Zeigen Sie, dass sich die Eigenwerte von  $J_3$  in der Tensorprodukt-Darstellung einfach addieren:

$$J_3(|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle) = (m_1 + m_2) (|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle).$$

Die Kenntnis der Aktion der Lie-Algebra auf dem Tensorprodukt genügt völlig, um die Tensorprodukt-Darstellung in irreps zu zerlegen. Alles, was man tun muss, ist, die Höchstgewichtskonstruktion auf die Zustände des Tensorproduktes anzuwenden und anschließend die Eigenschaft auszunutzen, dass  $d\rho$  wie eine Derivation wirkt. Zeigen Sie dies an dem Beispiel  $j_1 = 1$  und  $j_2 = 1/2$ , indem Sie mit dem (eindeutigen) Höchstgewichtszustand  $|3/2, 3/2\rangle = |1, 1\rangle|1/2, 1/2\rangle$  beginnen.

**Tensoroperatoren.** Aus der Quantenmechanik kennen wir einige Sachverhalte, wie Tensoroperatoren und das Wigner-Eckart-Theorem, die wir hier kurz wiederholen wollen. Dies macht vielleicht das eine oder andere klarer. Ein Tensoroperator  $\mathcal{O}^{(r)}$  vom Rang  $r$  ist einfach ein Operator, der in der Spin  $r$  irrep transformiert, d.h.

$$[\rho^{(r)}(J_a), \mathcal{O}_m^{(r)}] = \sum_{m'} \mathcal{O}_{m'}^{(r)} (\rho^{(r)}(J_a))_{m'm}.$$

Von hier an verwenden wir wieder das Symbol  $\rho$  für die Darstellung einer Lie-Algebra, statt  $d\rho$ . Wir betrachten außerdem weiterhin das spezielle Beispiel  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ . Natürlich hat ein Tensoroperator Komponenten, da er sonst unmöglich in der Spin  $r$  Darstellung transformieren könnte. Betrachten Sie als Beispiel ein Teilchen in einem Zentralpotential (sphärisch-symmetrisches Potential). Der Drehimpuls ist gegeben als  $L_a = \epsilon_a^{bc} r_b p_c$ . Die Operatoren  $L_a$  formen eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(2)$ . Der Ortsoperator  $r_b$  ist im wesentlichen ein Rang eins Tensoroperator (d.h. ein Tensoroperator, der in der Spin eins irrep transformiert), denn er transformiert unter der adjungierten Darstellung:

$$[\rho(J_a), r_b] = \epsilon_a^{cd} [r_c p_d, r_b] = -i \epsilon_a^{cd} r_c \delta_{b,d} = -i \epsilon_a^{cb} r_c = r_c (T_a)_b^c = r_c \text{ad}(J_a)_b^c.$$

Beachten Sie, dass  $r_b$  nicht auf kanonische Weise transformiert, denn die Darstellungsmatrizen der adjungierten Darstellung haben nicht die Standardform, die für die Spin eins irrep in der Vorlesung angegeben wurden. Haben wir ganz allgemein einen Operator  $\mathcal{O}_b$ , so dass  $[\rho(J_a), \mathcal{O}_b] = \sum_{b'} \mathcal{O}_{b'} (\rho(J_a))_{b'b}$  mit  $\rho$  äquivalent zu einer Spin  $r$  irrep, dann können wir eine Matrix  $S$  finden, so dass  $S\rho(J_a)S^{-1} = \rho^{(r)}(J_a)$ . Wir können dann diese Matrix  $S$  verwenden um den Tensoroperator umzudefinieren,  $\mathcal{O}_m^{(r)} = \mathcal{O}_b (S^{-1})_m^b$ . Dieser umdefinierte Operator transformiert nun genau in der irrep  $\rho^{(r)}$ , d.h.

$$[\rho^{(r)}(J_a), \mathcal{O}_m^{(r)}] = [S\rho(J_a)S^{-1}, (\mathcal{O}S^{-1})_m] = \mathcal{O}_{b'} (S^{-1})_m^{b'} S_{b''}^{c'} (\rho(J_a))_{c'd'} (S^{-1})_{m'}^{d'} = \mathcal{O}_{m'}^{(r)} (\rho^{(r)}(J_a))_{m'm}.$$

Oft ist es nicht nötig,  $S$  explizit zu berechnen. Wenn wir eine Linearkombination der Komponenten  $\mathcal{O}_b$  finden, die ein Eigenzustand zu  $J_3$  mit Eigenwert  $r'$  ist, dann können wir diese Komponente als Komponente von  $\mathcal{O}^{(r)}$  verwenden und die verbleibenden Komponenten durch Anwenden von  $J^\pm$  konstruieren. Für den Ortsoperator ist das ganz einfach. Machen Sie sich klar, dass  $[\rho(J_3), r_3] = 0$  ist. Identifizieren Sie  $r_3$  mit der Komponente  $r_0^{(1)}$ . Finden Sie die beiden weiteren Komponenten durch Berechnen von  $[\rho^{(1)}(J^\pm), r_0^{(1)}] = r_{\pm 1}^{(1)}$ . Geben Sie für dieses Beispiel die Matrix  $S$  explizit an.

**Wigner-Eckart-Theorem.** Tensoroperatoren haben den großen Vorteil, dass ihre Matrixelemente durch die Symmetrie, hier  $\mathfrak{su}(2)$ , bis auf eine Konstante festgelegt sind, die unabhängig von der Symmetrie ist (diese Konstante wird im allgemeinen durch die Dynamik des betrachteten physikalischen Systems fixiert). Wenn ein Tensoroperator  $\mathcal{O}_k^{(r)}$  auf einen Zustand  $|j, m\rangle$  wirkt, transformiert das gesamte Objekt in der Tensorarstellung  $\rho^{(r)\otimes(j)}$ . Die Koeffizienten des Basiswechsels von der Basis  $\{|r, k\rangle|j, m\rangle : k = -r, \dots, r, m = -j, \dots, j\}$  zu der Basis  $\{|J, M\rangle : J = |r - j|, \dots, r + j, M = -J, \dots, J\}$  für die Zerlegung  $(r) \otimes (j) = \bigoplus_{J=|r-j|}^{r+j} (J)$  seien mit  $\langle J, M|r, k; j, m\rangle$  bezeichnet, den *Clebsh-Gordan-Koeffizienten*. Diese Koeffizienten sind vollständig durch die  $\mathfrak{su}(2)$  Struktur bestimmt, und können leicht berechnet werden, wenn man die Höchstgewichtskonstruktion auf beiden Seiten anwendet und die Derivations-Eigenschaft der Tensorarstellung verwendet. Im wesentlichen läuft dies auf die beiden folgenden Rekursionsbeziehungen hinaus, die die Koeffizienten bis auf eine gemeinsame Normierung und ein paar Vorzeichen festlegen:

$$\begin{aligned} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \pm 1 \rangle &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1, m_1 \mp 1; j_2, m_2 | j, m \rangle \\ &+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 \mp 1 | j, m \rangle, \end{aligned}$$

wobei die Bedingung  $m_1 + m_2 = m \pm 1$  zu beachten ist. Beachten Sie, dass hier der inverse Basiswechsel verwendet wurde, damit die allgemeine Verwirrung etwas größer werde  $(; -)$ . Berechnen Sie die Clebsh-Gordan-Koeffizienten für  $j_1 = 1$  und  $j_2 = 1/2$ .

Sind diese Koeffizienten einmal bekannt, so lassen sich die Matrixelemente der Tensoroperatoren in der doch recht einfachen Form

$$\langle J, m', x' | \mathcal{O}_k^{(r)} | j, m, x \rangle = \delta_{m', k+m} \langle J, k + m | r, k; j, m \rangle \langle J, x' | \mathcal{O}^{(r)} | j, x \rangle$$

angeben, wobei  $\langle J, x' | \mathcal{O}^{(r)} | j, x \rangle$  das *reduzierte Matrixelement* des Tensoroperators genannt wird. Es hängt nur von den auftretenden irreps ab, sowie möglicherweise von weiteren dynamischen Freiheitsgraden, die wir hier  $x'$  und  $x$  genannt haben, aber nicht von den Komponenten, d.h. den magnetischen Quantenzahlen. Das reduzierte Matrixelement hängt also weder von der inneren Struktur der auftretenden irreps ab, noch von den spezifischen Zuständen in den irreps. Diese Aussage ist als das Wigner-Eckart-Theorem bekannt. Es gilt im übrigen für jede Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , nicht nur für das hier durchgekaute Beispiel  $\mathfrak{su}(2)$ .