Mic$\hbar$ael Flohr
Nils Carqueville
13. Dezember 2005

EIN NICHT-TRIVIALES BEISPIEL

In der Vorlesung haben wir zunächst die Höchstgewichtskonsruktion der endlich-dimensionalen irreps eine halbeinfachen Lie-ALgebra $\mathfrak{g}$ am Beispiel von $\mathfrak{su}(2)$ kennengelernt. Sodann haben wir begonnen, dies für allgemeine Lie-Algebren zu verallgemeinern. Demonstriert haben wir das mit $\mathfrak{su}(3)$, der einfachsten Lie-Algebra vom Range zwei. Dieses Beispiel enthält schon alle Eigenschaften und Komplikationen des allgemeinsten Falles, bis auf eine Ausnahme: Die Wurzeln von $\mathfrak{su}(3)$ haben alle die gleiche Länge. In dieser Übung studieren wir nun ein ähnlich unkompliziertes Beispiel, ebenfalls vom Range zwei (so dass man noch gut alles zeichnen kann), die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(5)$. Der Unterschied ist, wie sich zeigen wird, dass die Wurzeln nicht alle die gleiche Länge haben können.

Einfache Wurzeln. Es sei verraten, dass die beiden positiven, einfachen Wurzeln $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$ den Winkel $3\pi/4 = 135°$ einschließen. Es ist nützlich, die euklidischen Skalarprodukte von Wurzeln wie folgt abzukürzen: $(i,j) \equiv (\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(j)})$. Wir wissen also, dass $\frac{(1,2)^2}{(1,1)(2,2)} = \frac{1}{2}$ ist. Finden Sie mit dieser Information die Werte von $(1,2)$, $(1,1)$ und $(2,2)$. Um dies eindeutig tun zu können, müssen wir eine beliebige Ordnung einführen und setzen daher $(1,1) \geq (2,2)$.

Alle Wurzeln. Zeichnen Sie das Wurzeldiagramm. Bedenken Sie dazu folgende Tatsachen: Die Master-Formel besagt, dass $2(i,j)/(i,i) = q - p$ ist. Dabei bezeichnet q, wie oft man von der Wurzel $\alpha^{(j)}$ die Wurzel $\alpha^{(i)}$ abziehen darf, und p bezeichnet, wie oft man die Wurzel $\alpha^{(i)}$ addieren darf. Die Master-Formel gibt also an, wie sich $\alpha^{(j)}$ bezüglich der $\mathfrak{su}(2)$-artigen Unteralgebra $\mathfrak{g}_{\alpha^{(i)}}$ verhält, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5)$. Leider kennen wir p und q nicht individuell, sondern nur deren Differenz. Allerdings muss natürlich eine analoge Betrachtung für $2(j,i)/(j,j) = q' - p'$ gelten. Außerdem muss das gesamte Diagramm unter Spiegelungen in den Ebenen senkrecht zu den einfachen Wurzeln symmetrisch sein. Dies reicht aus, um in der Tat p, q, p' und q' zu bestimmen und das vollständige Wurzeldiagramm zu zeichnen.

Positive Wurzeln. Wir haben einfache Wurzeln als diejenigen positiven Wurzeln definiert, die nicht als Summe anderer positiver Wurzeln geschrieben werden können. Gehen Sie nun von dem gezeichneten Wurzeldiagramm aus. Wir vergessen für einen Moment, welche der Wurzeln wir zuvor als die einfachen angenommen hatten. Wählen Sie eine beliebige Basis für die Wurzeln, also $\mathrm{rank}\mathfrak{g}$ linear unabhängige Wurzeln, die wir α_i, $i = 1, \ldots, \mathrm{rank}\mathfrak{g}$ nennen wollen (wir haben das hier allgemein hingeschrieben, bleiben aber bei unserem Beispiel $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5)$ mit Rang zwei). Schreiben Sie alle Wurzeln als Linearkombinationen der von Ihnen gewählten zwei Wurzeln, also $\beta = \sum_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}} c_i\alpha_i$, wobei Sie für β alle in Ihrem Diagramm eingezeichneten Wurzeln nehmen müssen. Wir definieren nun einfach, dass $\beta > 0$ ist, wenn in der oben gegebenen Reihenfolge der erste nicht-verschwindende Koeffizient $c_i > 0$ ist. Also $\beta > 0 \Longleftrightarrow c_{i_0} > 0, i_0 = \min\{i : c_i \neq 0\}$. Markieren Sie die so gefundenen positiven Wurzeln. Was sind die einfachen Wurzeln? Wählen Sie nun eine andere Basis, und wiederholen Sie das Spiel. Was fällt Ihnen auf?

Eigenschaften einfacher Wurzeln. Es seien α und β zwei einfache Wurzeln. Beachten Sie, dass nach Definition einfache Wurzeln auch immer positive Wurzeln sind. Zeigen Sie, dass $\alpha - \beta$ niemals eine Wurzel sein kann. Zeigen Sie damit und mit der Master-Formel, dass daher immer $(\alpha \cdot \beta) \leq 0$ sein muss.

Höchstgewichtsdarstellungen. Die Master-Formel reicht aus, eine Darstellung vollständig zu rekonstruieren, wenn man von einem Gewicht weiß, dass es ein Höchstgewicht ist, dass man also keine positiven Wurzeln zu diesem Gewicht addieren kann. Prüfen Sie dies nach, indem sie für $\mathfrak{so}(5)$ die Gewichtsdiagramme für ein paar Darstellungen konstruieren. Die Höchstgewichte (warum dies in der Tat Höchstgewichte sein können, lernen wir in der Vorlesung) seien einmal $\Lambda = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}$, einmal $\Lambda = \frac{1}{2}\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}$ und einmal $\Lambda = \alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)}$. Hierbei sind die $\alpha^{(i)}$ so gewählt, wie in der allerersten Teilaufgabe. Es ist also insbesondere $\alpha^{(1)}$ die lange, und $\alpha^{(2)}$ die kurze Wurzel. Zur Erinnerung: Die Master-Formel für ein Gewicht μ bezüglich der einfachen Wurzel $\alpha^{(i)}$ lautet

$$\frac{(\alpha^{(i)} \cdot \mu)}{(\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(i)})} = -\frac{1}{2}(p_\mu^{(i)} - q_\mu^{(i)}) .$$

Somit gilt für $\mu = \Lambda$ natürlich, dass alle $p_\Lambda^{(i)} = 0$ sind. Die $q_\Lambda^{(i)}$ lassen sich also berechnen, da wir die Λ als Linearkombinationen der einfachen Wurzeln angegeben haben.