Nachklausur zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(geschrieben am Samstag, 09.04.2011)

Aufgabe K1 *Zerfall in zwei masselose Teilchen* (5 Punkte)

Ein π^0-Meson $(E, \vec{p})$ mit Masse $M = 135$ MeV kommt aus dem Zenit auf Sie zu und zerfällt in zwei Photonen, $\hbar k_1(1, \vec{e}_1)$ und $\hbar k_2(1, \vec{e}_2)$, mit Wellenzahlen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ und Einheits-Richtungen $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, wobei wir c=1 setzen.

a) Unter welchen Zenit-Winkeln α_1 und α_2 treffen die beiden Photonen die Oberfläche?
Hinweis: Stellen Sie die Vierer-Impuls-Bilanz so um, dass beim Lorentz-Quadrieren der Cosinus des gewünschten Winkels erzeugt wird.

b) Bestimmen Sie die maximal asymmetrische Verteilung der Energie E auf die beiden Photonen, also $(k_1^{\max}, k_2^{\min})$. Welche Winkel $(\alpha_1^{\max}, \alpha_2^{\min})$ gehören dazu?

c) Unter welchem Zenit-Winkel $\alpha^{\rm sym}$ treffen gleichverteilte Photonen (k_1=k_2) auf?

Aufgabe K2 *Tunneleffekt* (5 Punkte)

Eine Kiste mit einem Teilchen ist durch eine dünne Trennwand in eine linke und eine rechte Hälfte geteilt. Im Zustand $|R\rangle$ ($|L\rangle$) befindet sich das Teilchen mit Sicherheit auf der rechten (linken) Seite. Ein allgemeiner Zustand schreibt sich $|\psi\rangle = |R\rangle\langle R|\psi\rangle + |L\rangle\langle L|\psi\rangle$. Das Teilchen kann durch die Trennwand tunneln, beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H \;=\; \Delta\big(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|\big) \qquad \text{mit} \quad \Delta \in \mathbb{R}\,.$$

a) Finden Sie die normierten Energie-Eigenkets und die zugehörigen Eigenwerte.

b) Konstruieren Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t)$.
Hinweis: $\exp\big\{\mathrm{i}\alpha\big(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\big)\big\} = \big(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)\cos\alpha + \mathrm{i}\big(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\big)\sin\alpha$.

c) Sei $|\psi(t{=}0)\rangle = |R\rangle$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, es später links zu finden?

d) Ein Druckfehler führt zu $H = \Delta\,|L\rangle\langle R|$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Zeitentwicklung die Gesamtwahrscheinlichkeit nicht erhält.

Aufgabe K3 *Oszillatormodell für den Drehimpuls* (5 Punkte)

Betrachten Sie zwei ungekoppelte eindimensionale harmonische Oszillatoren, beschrieben durch Erzeuger $a^\dagger$, $b^\dagger$ und Vernichter a, b, mit Anzahl-Operatoren $N_a = a^\dagger a$ und $N_b = b^\dagger b$. Definieren Sie $L_+ := a^\dagger b$. Also gilt

$$[\,a, a^\dagger] \;=\; \mathbb{1}\,, \qquad [\,b, b^\dagger] \;=\; \mathbb{1}\,, \qquad \text{andere Kommutatoren} \;=\; 0\,.$$

a) Drücken Sie $L_- = (L_+)^\dagger$ und $L_3 = \frac{1}{2}[L_+, L_-]$ durch Erzeuger und Vernichter aus.

b) Man kann verifizieren, dass $[L_3, L_\pm] = \pm L_\pm$. Damit ist die Drehimpuls-Algebra realisiert. Als Basiszustände wählen Sie die gemeinsamen Eigenkets von N_a und N_b:

$$N_a\,|n_a, n_b\rangle \;=\; n_a\,|n_a, n_b\rangle \qquad \text{und} \qquad N_b\,|n_a, n_b\rangle \;=\; n_b\,|n_a, n_b\rangle\,.$$

Wie wirken L_3, L_+, L_- und $\vec{L}^2 = L_3^2 + \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+)$ auf die Zustände $|n_a, n_b\rangle$?

c) Wie hängen (n_a, n_b) mit den üblichen Quantenzahlen (ℓ, m) zusammen?

Dauer: 90 Minuten **Summe: 15 Punkte** **Viel Erfolg!**