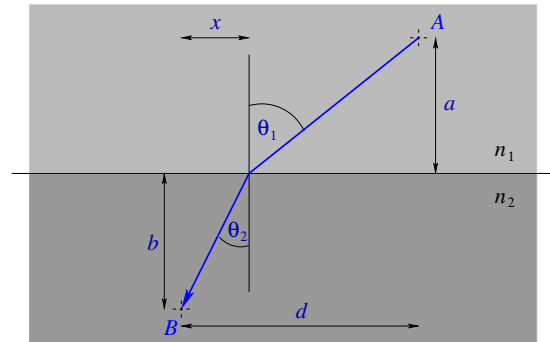


ELEKTRODYNAMIK IN MEDIEN II

[P31] Fermatsches Prinzip

Das Snelliussche Brechungsgesetz lässt sich auch aus einem Extremalprinzip, dem sogenannten Fermatschen Prinzip, herleiten. Solche Extremalprinzipien spielen in der theoretischen Physik eine ganz zentrale Rolle. Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht zwischen zwei Punkten A und B den Weg mit der kürzest möglichen Laufzeit nimmt. Wir betrachten dazu zwei Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_2 und ebener Grenzfläche.



- Geben Sie die Zeit t als Funktion von n_1 , n_2 , a , b , d und x an, die der Lichtstrahl für den skizzierten Weg benötigt.
- Finden Sie die Bedingung dafür, dass die Zeit t extremal ist, wobei x der einzige freie Parameter sei, d.h., A und B sind festgehalten.
- Drücken Sie $\sin \theta_1$ und $\sin \theta_2$ durch a , b , d und x aus, und zeigen Sie, dass aus der in (b) gefundenen Bedingung das Snelliussche Gesetz folgt.

Bemerkung: Das Licht nimmt den schnellsten Weg nur bei hinreichend kurzen Strecken, bis zum ersten Fokalkpunkt. Danach ist das Zeitfunktional nur noch ein Extremum. Wer sich dafür weitergehend interessiert, kann unter dem Stichwort *Kaustiken* dazu recherchieren.

[P32] Fresnel-Formeln

In der Vorlesung wurden die Fresnel-Formeln vorgestellt und hergeleitet. Dies wollen wir hier für den senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Teil der elektromagnetischen ebenen Welle aktiv nachvollziehen. Eine analoge Herleitung liefert dann auch die Formeln für den parallelen Anteil. Für die Fresnel-Formeln können wir annehmen, dass die magnetischen Permeabilitäten gleich sind, $\mu_1 = \mu_2$. Unterschiedliche magnetische Permeabilitäten lassen sich einfach durch Substitution $n \mapsto n/\mu$ berücksichtigen. Es gelten die folgenden Notationen: \vec{E} ist die einfallende Welle, \vec{E}_R ist die reflektierte Welle, und \vec{E}_T ist die transmittierte Welle.

- Leiten Sie zunächst die folgenden Beziehungen (Gleichung (8.23) in der Vorlesung) für die Wellenzahlen $k = 2\pi/\lambda$ her:

$$k_T = k \frac{n_2}{n_1}, \quad k_R = k. \quad (1)$$

- Verwenden Sie die vier Stetigkeitsbedingungen

$$\vec{n} \times (\vec{E}_T - \vec{E}_1) = \vec{0}, \quad (2)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_T - \vec{D}_1) = 0, \quad (3)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_T - \vec{H}_1) = \vec{0}, \quad (4)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_T - \vec{B}_1) = 0, \quad (5)$$

um Relationen zwischen den Komponenten E_\perp , $E_{R\perp}$ und $E_{T\perp}$ des senkrechten Anteils herzuleiten. Verwenden Sie (1) und das Reflexionsgesetz $\vartheta_R = \vartheta$, um diese Relationen zu vereinfachen.

- Zeigen Sie, dass dann aus (2) und (5) das Snelliussche Brechungsgesetz (Gleichung (8.24) in der Vorlesung) folgt.
- Zeigen Sie schließlich, dass aus (2) und (4) die Fresnelschen Formeln (vergleiche (8.27a) in der Vorlesung)

$$\frac{E_{R\perp}}{E_\perp} = \frac{\sin(\vartheta_T - \vartheta)}{\sin(\vartheta_T + \vartheta)},$$

$$\frac{E_{T\perp}}{E_\perp} = \frac{2 \sin \vartheta_T \cos \vartheta}{\sin(\vartheta_T + \vartheta)}$$

folgen. Überprüfen Sie, dass die Summe der Quadrate eins ergibt.

Hinweis: $\sin \theta_2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \sin \theta_1 = \sin(\theta_2 + \theta_1)$.