

Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 12

SoSe 2018

Abgabe: 10.07.2018

[H30] Sphärischer Potentialtopf

(4 Punkte)

Gegeben sei das dreidimensionale Potential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |\vec{r}| \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } V_0 > 0 \quad \text{und} \quad R > 0.$$

- (a) Machen Sie einen Separationsansatz für den Winkel- und Radialanteil der stationären Wellenfunktion und formulieren Sie die radiale Schrödingergleichung. Man überprüfe explizit, dass

$$j_0 = \frac{\sin z}{z} \quad \text{und} \quad n_0 = -\frac{\cos z}{z}$$

mit geeignetem z Lösungen der radialen Gleichung für $\ell=0$ sind.

- (b) Wie lauten bei $\ell=0$ die physikalisch erlaubten Wellenfunktionen der Bindungszustände im Innen- und Außenraum?

Hinweis: Im Außenraum wähle man zweckmäßigerweise die Hankelfunktionen $h_\ell^+ = j_\ell + in_\ell$ und $h_\ell^- = j_\ell - in_\ell$ als Basislösungen.

- (c) Zeigen Sie, dass die Anschlußbedingung bei $r=R$ auf folgende Gleichung führt:

$$\tan x = -\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \quad \text{mit} \quad x = \sqrt{\frac{2mR^2}{\hbar^2}(V_0 - |E|)} \quad \text{und} \quad \alpha^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}R^2.$$

Diskutieren Sie die Bestimmungsgleichung für die Energie-Eigenwerte. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

[H31] Grundzustand des Wasserstoffatoms

(3 Punkte)

Ein Wasserstoff-Elektron befinde sich im Grundzustand $|\psi\rangle$, der durch

$$\langle \vec{r} | \psi \rangle = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-|\vec{r}|/a_0}$$

mit dem Bohrschen Radius $a_0 = \hbar^2/(me^2) \approx 0.529 \cdot 10^{-10}\text{m}$ beschrieben wird.

- (a) überzeugen Sie sich, dass die Wellenfunktion richtig normiert ist.
(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Elektron im Inneren einer Kugel vom Radius a_0 ?
(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Hamiltonoperators H und des Drehimpulses \vec{L} .

Bitte wenden

[H32] Erweiterte Symmetrie des Wasserstoffatoms**(3 Punkte)**

Betrachte das Wasserstoffatom mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{k}{R}, \quad k = e^2, \quad R = \sqrt{\vec{R}^2}.$$

Der Pauli–Runge–Lenz Operator ist definiert als

$$\vec{A} = \frac{1}{2m} (\vec{L} \times \vec{P} - \vec{P} \times \vec{L}) + \frac{k}{\hbar} \frac{\vec{R}}{R}.$$

- (a) Ein Operator $\vec{\Omega}$ heißt *Vektoroperator* genau dann, wenn $[L_i, \Omega_j] = i\varepsilon_{ijk}\Omega_k$ ist. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass \vec{R} , \vec{P} und \vec{L} Vektoroperatoren sind. Zeigen Sie, dass auch \vec{A} ein Vektoroperator ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass das Kreuzprodukt $\vec{\Omega} \times \vec{I}$ zweier beliebiger Vektoroperatoren $\vec{\Omega}$, \vec{I} wieder ein Vektoroperator ist. Nutzen Sie weiter, dass $[L_i, \vec{R}^2] = 0$ und damit auch $[L_i, R^{-1}] = 0$ ist. (Warum ist das so?)

- (b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{A}^2 = \frac{k^2}{\hbar^2} + \frac{2H}{m} (\vec{L}^2 + 1). \quad (*)$$

Hinweis: Zeigen und nutzen Sie die folgenden Identitäten:

$$\vec{\Omega} \times \vec{L} = -\vec{L} \times \vec{\Omega} + 2i\vec{\Omega}, \quad \vec{L} \cdot \vec{\Omega} = \vec{\Omega} \cdot \vec{L}, \quad [P_j, R^{-1}] = i\hbar \frac{R_j}{R^3},$$

wobei $\vec{\Omega}$ ein beliebiger Vektoroperator ist.

- (c) Weil \vec{A} ein Vektoroperator ist, gilt $[L_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k$. Weiter ist (dies zu zeigen ist nicht Teil der Aufgabe):

$$[H, A_i] = 0, \quad [A_i, A_j] = -i\varepsilon_{ijk}L_k \frac{2H}{m}.$$

Die Existenz von \vec{A} lässt sich nutzen, um die Energieniveaus und deren Entartungsgrade im Wasserstoffatom zu finden. Betrachten Sie dazu den Eigenzustandsraum $\mathcal{H}(E)$ von H zu einem festen Eigenwert $E < 0$, und definieren Sie hierin die Operatoren

$$S_i = \frac{1}{2} (L_i - \alpha A_i), \quad T_i = \frac{1}{2} (L_i + \alpha A_i), \quad \alpha = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Zeigen Sie folgende Relationen:

$$\vec{S}^2 = \vec{T}^2, \quad [S_i, T_j] = 0, \quad [S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k, \quad [T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k.$$

Nutzen Sie jetzt die Eigenschaften der Drehimpulsalgebra-Darstellungen sowie die Beziehung (*), um die Energieniveaus und Entartungsgrade im Wasserstoffatom für $E < 0$ zu finden.

Hinweis: \vec{T}^2 hat die Eigenwerte $= t(t+1)$ mit Entartung $(2t+1)$.