

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 10

SoSe 2018

19./20.06.2018

[P25] Darstellungen der Drehimpulsalgebra und Drehgruppe für $\ell = 1$

Die gemeinsamen Eigenvektoren $|\ell, m\rangle$ zu \vec{L}^2 und L_3 erfüllen

$$\vec{L}^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell + 1) |\ell, m\rangle,$$

$$L_3 |\ell, m\rangle = m |\ell, m\rangle,$$

$$L_+ |\ell, m\rangle = \sqrt{(\ell + m + 1)(\ell - m)} |\ell, m+1\rangle,$$

$$L_- |\ell, m\rangle = \sqrt{(\ell - m + 1)(\ell + m)} |\ell, m-1\rangle,$$

und spannen für jeden Wert von ℓ einen $2\ell+1$ -dimensionalen Vektorraum \mathcal{R}_ℓ auf.

- (a) Finden Sie für den Fall $\ell = 1$ (also Spin 1) eine Matrixdarstellung \mathcal{D}_ℓ der Operatoren L_+ , L_- und L_3 bzw. L_1 , L_2 und L_3 der Drehalgebra. Wählen Sie dazu

$$|1, 1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Basis des Darstellungsraumes \mathcal{R}_ℓ .

- (b) Führen Sie eine unitäre Basistransformation aus mit der Matrix

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die Operatoren L_1 , L_2 und L_3 in dieser Darstellung \mathcal{D}'_ℓ ?

- (c) Auf dem Darstellungsraum \mathcal{R}_ℓ operiert die Darstellung \mathcal{U}_ℓ der Drehgruppe durch Exponentiation der Darstellung \mathcal{D}_ℓ der Drehalgebra,

$$\mathcal{U}_\ell(g = e^{-i\theta_i L_i}) = e^{-i\theta_i \mathcal{D}_\ell(L_i)}.$$

Finden Sie die Darstellung des Gruppenelementes

$$g = e^{-i\theta L_3}$$

sowohl in der Darstellung \mathcal{U}_ℓ als auch in der Darstellung \mathcal{U}'_ℓ .

Bitte wenden

[P26] **Eigenfunktionen zum Drehimpuls für $\ell = 2$**

Betrachten Sie die Drehimpulsalgebra in kartesischer Ortsraumdarstellung,

$$\begin{aligned}L_x &\doteq -i(y\partial_z - z\partial_y), \\L_y &\doteq -i(z\partial_x - x\partial_z), \\L_z &\doteq -i(x\partial_y - y\partial_x),\end{aligned}$$

wobei $\hbar = 1$ gesetzt wurde.

- (a) Bilden Sie damit die Operatoren L_+ und L_- . Finden Sie ein homogenes Polynom $p_2(x, y, z)$ zweiten Grades, das eine Eigenfunktion zu L_z und \vec{L}^2 ist und von L_+ vernichtet wird, d.h.

$$\vec{L}^2 p_2(x, y, z) = 6 p_2(x, y, z), \quad L_z p_2(x, y, z) = 2 p_2(x, y, z), \quad L_+ p_2(x, y, z) = 0.$$

Dieses Polynom entspricht dem Zustand $|\ell, m\rangle$ mit höchstem Gewicht $m = \ell = 2$.

- (b) Berechnen Sie für das soeben gefundene Polynom die weiteren Polynome

$$p_{2-k} = (L_-)^k p_2(x, y, z)$$

für $k = 1, \dots, 5$. Proportionalitätsfaktoren dürfen vernachlässigt werden.

- (c) Transformieren Sie schließlich die $p_m(x, y, z)$ in Kugelkoordinaten und nehmen Sie dabei an, dass $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist. Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der expliziten Form für die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{\ell,m}(\varphi, \theta) = e^{im\varphi} P_{\ell,m}(\cos \theta),$$

wobei die benötigten assoziierten Legendre-Polynome definiert durch

$$P_{2,2} = 3 \sin^2 \theta, \quad P_{2,1} = 3 \sin \theta \cos \theta, \quad P_{2,0} = \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta$$

gegeben sind und die Symmetrien

$$P_{2,-1} = P_{2,1}, \quad P_{2,-2} = P_{2,2}$$

besitzen.