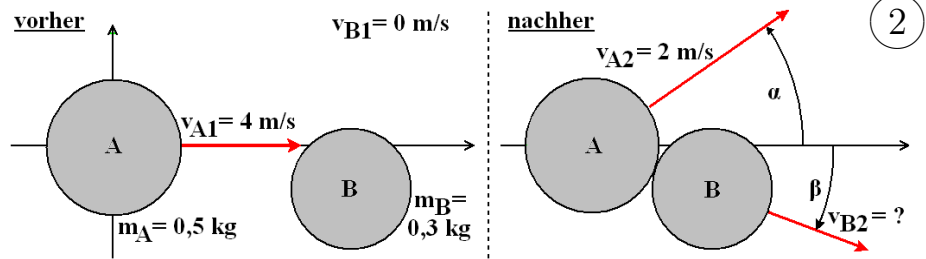


Aufgabe 21: Die Abbildung zeigt einen elastischen Stoß zwischen zwei Scheiben auf einer reibungsfreien Unterlage. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von B und die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  nach dem Stoß.



2

Aufgabe 22: In der Vorlesung wurde mit einer Kugel auf ein Pendel geschossen. Hier nochmal die Eckdaten des Versuchs: Masse der Kugel 0.5 g, Masse des Pendels 168 g, 5 Schwingungsperioden in 21.6 s. Horizontale Auslenkung des Körpers im Schattenwurf: 8.6 willkürliche Einheiten, Größe des 11 cm Pendelkörpers im Schattenwurf: 5 willkürliche Einheiten.

3

Wie groß war die Geschwindigkeit der Pistolenkugel vor dem Auftreffen?

Aufgabe 23: Ein auf der  $x$ -Achse bewegliches Teilchen (Masse  $m$ , Ladung  $q$ ) sei harmonisch gebunden, so dass es bei Auslenkung eine rücktreibende Kraft  $F_1 = -kx = -m\Omega^2 x$  erfährt. Zu Zeiten  $t < 0$  ruht das Teilchen in seiner Gleichgewichtslage am Ursprung. Ab  $t = 0$  wird es von einer vertikal einfallenden elektromagnetischen Welle getroffen, was zu einer zusätzlichen Kraft  $F_2 = m\gamma \sin \omega t$  auf das Teilchen führt. Formulieren Sie einen Ansatz zur Lösung der Newtonschen Gleichung und bestimmen Sie  $x(t)$  zunächst für  $\omega \neq \Omega$ . Wie vereinfacht sich  $x(t)$  für  $\Omega \rightarrow 0$ ? Testen Sie das Ergebnis durch Einsetzen in die Newtonsche Gleichung. Um das Verhalten bei „Resonanz“ zu untersuchen, setzen Sie  $\omega = \Omega + \epsilon$  und führen den Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  aus. Welcher Ansatz wäre genau bei  $\omega = \Omega$  erfolgreich gewesen?

5

*Hinweise:* Ansatz mit zwei Schwingungen,  $\sin(\omega + \epsilon)t = ?$ ,  $\sin \epsilon t = \epsilon t + O(\epsilon^3)$ ,  $\cos \epsilon t = 1 + O(\epsilon^2)$ .

Aufgabe 24: Der dreidimensionale harmonische Oszillator ist gegeben durch das Potenzial  $V(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ , wobei  $m=1$  gesetzt wurde. Wie lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen? Anstatt diese zu lösen, gehen wir über die Erhaltungssätze. Wie beim Kepler-Problem gibt es ungewöhnlich viele erhaltene Größen, nämlich neun an der Zahl:

5

$$\ell_i = \varepsilon_{ijk} x_j \dot{x}_k \quad \text{und} \quad q_{ij} = \dot{x}_i \dot{x}_j + \omega^2 x_i x_j \quad \text{für} \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (*)$$

Identifizieren Sie die physikalische Bedeutung von  $\ell_i$  und  $e := \frac{1}{2}q_{ii} = ?$  und verifizieren Sie die Erhaltung  $\dot{\ell}_i = 0$  und  $\dot{q}_{ij} = 0$  unter Benutzung der Bewegungsgleichungen. Als nächstes drücken Sie  $q_{ij}\ell_j$  und  $\ell^2 = \ell_i \ell_i$  durch  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  aus. Beweisen Sie damit, dass

$$Q(\vec{r}) := x_i (2e \delta_{ij} - q_{ij}) x_j = \ell^2 = \text{konstant}.$$

Im folgenden notieren wir  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ . Da eine Zentralkraft vorliegt, bleibt die Bahnkurve in einer Ebene, und wir wählen unsere Koordinaten so, dass  $z(t) = 0$ . Welche der Größen in (\*) sind dann noch ungleich Null? Schreiben Sie  $Q(x, y) = ? = \ell^2$  aus. Was für eine Bahn beschreibt diese Gleichung? (Hilfe: durch Achsen-Wahl kann man stets  $q_{12}=0$  erreichen.)

*Hinweis:* Der Index-Kalkül spart enorm an Schreibearbeit. Alternativ können Sie aber auch alle Komponenten ausschreiben:  $\ell_1 = x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2$ ,  $q_{12} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \omega^2 x_1 x_2$ ,  $q_{ii} = q_{11} + q_{22} + q_{33}$ ,  $q_{2j}\ell_j = q_{21}\ell_1 + q_{22}\ell_2 + q_{23}\ell_3$ ,  $Q(\vec{r}) = ?$ .