

## [P1] Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Betrachten Sie ein System von  $N$  Spins, welche sich jeweils im Zustand „up“ oder „down“ befinden können. Da nichts weiteres über den Zustand bekannt ist, haben alle Zustände die gleiche Wahrscheinlichkeit  $p = 2^{-N}$ .

Angenommen, man misst jetzt die Differenz zwischen der Anzahl der „up“ und der Anzahl der „down“ Spins (zum Beispiel durch Messung des Magnetfeldes), und findet dass die Differenz den festen Wert  $2s$  annimmt. Welche Wahrscheinlichkeit muss man jeder Konfiguration des Systems mit dieser neuen Information zuweisen?

## [P2] Einzelne Spins

Betrachten Sie nun eine große Anzahl  $N$  von Spins, welche sich wiederum jeweils im Zustand „up“ oder „down“ befinden können. Sei  $2s$  die Differenz zwischen der Anzahl der „up“ und der Anzahl der „down“ Spins. In der Gegenwart eines externen magnetischen Feldes  $B$  ist die Gesamtenergie des Systems

$$U = -2smB \quad (1)$$

für eine Konstante  $m$ .

Angenommen, alle möglichen Konfigurationen sind gleich wahrscheinlich. Geben Sie die ungefähre Wahrscheinlichkeit dafür an, dass man einen bestimmten Spin im Zustand „up“ findet, unter der Bedingung, dass die Gesamtenergie  $U$  beträgt.

## [P3] Shannon-Entropie

Die *Shannon-Entropie*  $S(P)$  einer Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  mit  $p_i > 0$  und  $\sum_i p_i = 1$  ist definiert als

$$S(P) = \sum_i p_i \log \frac{1}{p_i} = - \sum_i p_i \log p_i. \quad (2)$$

- (a) Wie hoch ist die Shannon-Entropie im Fall gleichverteilter Wahrscheinlichkeiten?
- (b) Finden Sie das Minimum und das Maximum von  $S$  bei vorgegebener Anzahl  $n$  möglicher Ergebnisse. Für welche Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Minimum und Maximum erreicht?

*Hinweis:* Der Logarithmus ist eine konkave Funktion.

- (c) Zeigen Sie, dass die Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung von zwei unabhängigen Systemen gleich der Summe der Entropien der einzelnen Systeme ist.
- (d) Die Eigenwerte eines Quantenzustands  $\rho$  (Dichtematrix) bilden eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Shannon-Entropie  $S(\rho)$  einer solchen Verteilung heißt *von-Neumann-Entropie* von  $\rho$ . Wie kann  $S(\rho)$  kompakt durch  $\rho$  ausgedrückt werden?