

Hausübung 5

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld, Daniel Westerfeld

Aufgabe 1: Aufspaltung eines Atomstrahls

(5 Punkte)

Jemand experimentiert mit einem Strahl von Helium-Atomen im angeregten 3S_1 Triplett-Zustand (Elektronen Konfiguration $1s2s$, Kernspin 0). Die Atome werden demnach durch Zustandsvektoren in \mathbb{C}^3 charakterisiert. In einer geeigneten Basis wird die benutzte Stern-Gerlach-Messapparatur durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Sie spaltet den Atomstrahl (im Zustand $|\psi\rangle$) auf in drei Teile, deren Atome sich dann jeweils in den Eigenzuständen

$$|\rightarrow\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\circ\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\leftarrow\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

befinden. Die drei Teilstrahlen passieren unmittelbar darauf eine zweite, identische Messapparatur, welche gegenüber der ersten um 90° gedreht ist. Diese Drehung ist in \mathbb{C}^3 realisiert durch die Matrix

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

sodass der zweite Satz von Eigenzuständen lautet

$$|\uparrow\rangle = \mathcal{R}|\rightarrow\rangle, \quad |\bullet\rangle = \mathcal{R}|\circ\rangle, \quad |\downarrow\rangle = \mathcal{R}|\leftarrow\rangle.$$

Bestimmen Sie die Intensitäten $W_{\alpha i}$ mit $i = \rightarrow, \circ, \leftarrow$ und $\alpha = \uparrow, \bullet, \downarrow$ der neun Teilstrahlen nach der zweiten Aufspaltung. Hat einer der Teilstrahlen Intensität Null? Wie groß ist die Gesamtintensität?

Aufgabe 2: Projektoren

(2+0.5+1+1.5=5 Punkte)

In der Präsenzübung haben Sie sich mit Projektoren beschäftigt. Betrachten Sie als Beispiel den Atomstrahl aus Aufgabe 1, d.h. ein Quantensystem mit Zustandsraum \mathbb{C}^3 und Orthonormalbasis $\{|\rightarrow\rangle, |\circ\rangle, |\leftarrow\rangle\}$.

[PÜ 3.1] Welche der folgenden Operatoren sind Projektoren (mit Beweis)? Können Sie $\alpha \in \mathbb{C}$ so wählen, dass P_2 ein Projektor ist?

- $P_1 = |\rightarrow\rangle\langle\circ|$
- $P_2 = \alpha|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|$
- $P_3 = \frac{1}{2}(|\rightarrow\rangle + |\circ\rangle)(\langle\rightarrow| + \langle\circ|)$
- $P_4 = |\rightarrow\rangle\langle\rightarrow| + |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|$

[PÜ 3.2] Berechnen Sie $[P_3, P_4]$.

Im Kontext von Aufgabe 1 entsprechen die Projektoren Filtern. Der Zustand nach Durchlaufen eines Filters P ist gegeben durch $\frac{P|\psi\rangle}{\|P|\psi\rangle\|}$.

[PÜ 3.2] Wir betrachten nun einen Messprozess, bei dem ein im Zustand $|\rightarrow\rangle$ präparierter Atomstrahl zunächst einen durch P_3 beschriebenen Filter passiert und danach einen P_4 Filter. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom beide Filter passiert?

[PÜ 3.3] Nun tauschen wir die Reihenfolge der beiden Filter. Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom beide Filter passiert? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus der vorherigen Teilaufgabe. Können Sie einen Zustand präparieren, sodass die Messreihenfolge keine Rolle spielt?