Stabilitätsuntersuchungen an Schwarzen Löchern mit Skalarfeldern

Helge Dennhardt

Diplomarbeit
am Institut für Theoretische Physik
der Universität Hannover

29. Oktober 1996

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Skalarfelder mit einem beliebigen Selbstwechselwirkungspotential dahingehend untersucht, welche statischen Konfigurationen sie zusammen mit Schwarzen Löchern bilden, und ob diese gegen kleine Störungen stabil sind. Es werden zwei statische Lösungen vorgestellt, die beide das zugehörige no-hair-Theorem damit umgehen, daß ihr Selbstwechselwirkungspotential negativ wird. Zur Untersuchung ihrer Stabilität werden mögliche Störungen in Tensormoden zerlegt, und ihr Verhalten in den um den statischen Fall linearisierten Feldgleichungen untersucht. Eine Analogie zur Schrödinger-Gleichung hilft schließlich bei der Aufstellung einer Stabilitätsbedingung.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der Arbeit von Olaf Bechmann [1], der verschiedene statische Konfigurationen untersucht hat, in seiner Zeit als Diplomand über deren Stabilität aber keine Aussagen mehr treffen konnte.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

> *Wenn ich mich frage, woher es kommt, daß gerade ich die Relativitätstheorie gefunden habe, so scheint es an folgendem Umstand zu liegen: Der normale Erwachsene denkt nicht über die Raum-Zeit-Probleme nach. Alles, was darüber nachzudenken ist, hat er nach seiner Meinung bereits in der frühen Kindheit getan. Ich dagegen habe mich derart langsam entwickelt, daß ich erst anfing, mich über Raum und Zeit zu wundern, als ich bereits erwachsen war.*
>
> Albert Einstein

Nach der Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein 1915 folgten sehr bald Versuche, mit ihr das Gravitationsfeld von Himmelskörpern zu beschreiben, da deren Bewegung der direkten Beobachtung zugänglich ist und somit aus der vorhergesagten Abweichung von der Newtonschen Himmelsmechanik ein exzellenter Nachweis für die Richtigkeit dieser Theorie gewonnen werden kann.

Die erste derartige Lösung der Gravitationsgleichungen stellte 1916 Schwarzschild vor. Er löste die statischen Einsteinschen Gleichungen für den materiefreien Außenbereich eines kugelsymmetrischen Himmelskörpers. Mit Hilfe dieser nach ihm benannten Schwarzschild-Metrik wurden z.B. die Periheldrehung des Merkur, die Ablenkung von Lichtstrahlen im Gravitationsfeld der Sonne, sowie die Rotverschiebung stark gravitierender Strahlungsquellen korrekt vorhergesagt. Ergebnisse, die wegen ihrer perfekten Übereinstimmung mit der Beobachtung der Allgemeinen Relativitätstheorie zum Durchbruch verhalfen.

Die Lösung von Schwarzschild gab jedoch auch Anlaß zur Postulierung einer völlig neuen, bis dahin noch unbeobachteten Klasse von Himmelskörpern, den Schwarzen Löchern. Anhand der Schwarzschild-Metrik läßt sich zeigen, daß kugelsymmetrische Himmelskörper, deren Radius eine durch ihre Masse vorgegebene Grenze, den Schwarzschild-Radius, unterschreitet, sich unweigerlich auf einen singulären Punkt zusammenziehen, so daß die Schwarzschild-Metrik nun die gesamte Raum-Zeit beschreibt.

Die hervorstechenste Eigenschaft dieser Objekte ist ein Kausalitätshorizont, der bewirkt, daß nichts, was einmal diesen Horizont überschritten hat, mit der Außenwelt kausal in Wechselwirkung treten kann. Die Tatsache, daß dies auch für Lichtstrahlen gilt, gab diesen Objekten schließlich ihren Namen, denn sie erscheinen (klassisch zumindest) für einen äußeren Beobachter absolut schwarz.

Besonders interessant in Hinblick auf diese Arbeit ist die Tatsache, daß die Schwarzschild-Metrik durch die Wahl eines einzigen Parameters, der

Schwarzschild-Masse, vollständig festgelegt ist. Ist diese Masse einmal gewählt, so ist es nicht mehr möglich, das Gravitationsfeld außerhalb des Horizontes in irgendeiner Weise zu variieren.

Sehr bald folgten weitere, komplexere Lösungen der Einsteinschen Gleichungen, meist gekoppelt mit verschiedenen Feldern. So stellten Reissner und Nordström 1916 eine Metrik vor, die einen elektrisch geladenen, kugelsymmetrischen Körper beschreibt, 1963 entwickelte Kerr eine Lösung für den achsensymmetrischen (rotierenden) Fall, die Newman 1965 mit elektrischer Ladung verallgemeinerte, und in neuerer Zeit, ab 1989, gelangen wesentliche Fortschritte für Yang-Mills, Skyrme und Dilatonfelder, sowie Kombinationen aus ihnen, einschließlich Higgs-Feldern.

Alle diese Lösungen haben gemeinsam, daß sie durch eine endliche Zahl von Parametern wie Masse, Ladung und Drehimpuls vollständig festgelegt sind. Werden diese Parameter vorgegeben, ist es nicht mehr möglich, ein zusätzliches Feld im Außenbereich anzuhängen.

Solche no-hair (keine Haare oder „Anhängsel“) Theoreme und Vermutungen sind bis heute Gegenstand vieler Untersuchungen. Im Wesentlichen geht es um die Frage, ob Schwarze Löcher durch die Wahl endlich vieler Parameter vollständig festgelegt sind, oder ob es möglich ist, recht beliebige Felder, die ja üblicherweise kontinuierlich viele Freiheitsgrade beinhalten, statisch im Außenbereich eines Schwarzen Loches hinzuzufügen. Wäre dies möglich, so würde dies bedeuten, daß die bisher gefundenen Lösungen keineswegs eindeutig sind, sondern nur Spezialfälle in einer wahren Mannigfaltigkeit von möglichen Lösungen. Obendrein hätte ein solch enormer Zuwachs von Freiheitsgraden große Auswirkungen auf die Entropie, die ein solches Schwarzes Loch beinhalten kann.

Eine aktuelle Übersicht über die bisherigen Versuche solcher Eindeutigkeitsbeweise oder auch no-hair Theoreme in den letzten 20 Jahren findet sich z.B. bei Bekenstein [2].

Im Laufe dieser Untersuchungen bis heute scheint es, als ob einige Feldarten, namentlich massive Skalarfelder und Vektorfelder, überhaupt nicht im Außenbereich eines Schwarzen Loches vorkommen können. Für Skalarfelder, mit denen ich mich in dieser Arbeit beschäftige, ist also weniger die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösungen interessant, als vielmehr ihre prinzipielle Existenz. Daher wird in diesem Zusammenhang der Begriff no-hair üblicherweise strenger verstanden. Sucht man also bei anderen Feldarten nach der Möglichkeit *zusätzlicher* hairs, so wird hingegen bei Skalarfeldern die Frage gestellt, ob überhaupt irgendein nichttriviales Skalarfeld im Außenbereich eines Schwarzen Loches möglich ist.

Den ersten Versuch, ein no-hair-Theorem für Skalarfelder aufzustellen, machte 1972 Bekenstein [3]. Die wesentliche Eingangsvoraussetzung in seinem Beweis ist die Forderung nach einem nicht negativen, konvexen Selbstwechselwirkungspotential in der Lagrangedichte.

Für den Spezialfall einer kugelsymmetrischen Anordnung, die ich in meiner Arbeit voraussetzen werde, zeigte 1994 Heusler [4] mit relativ einfachen Energieargumenten, daß sich dies noch abschwächen läßt zu der einfachen Forderung nach einem nicht-negativen Potential. Sein no-hair-Theorem basiert auf der Feststellung, daß solche Skalarfelder die sogenannte Starke-Energie-Bedingung brechen, während sie die Schwache-Energie-Bedingung erfüllen. Ich stelle es am Ende des 4. Kapitels vor.

Hat man eingesehen, daß für Skalarfelder mit nicht negativem Selbstwechselwirkungspotential nur triviale oder singuläre Lösungen existieren, ist es naheliegend, sich anzusehen, was geschieht, wenn man diese letzte Bedingung an das Potential auch noch fallen läßt.

Olaf Bechmann hat 1994 in seiner Diplomarbeit [1] eine solche Lösung vorgestellt und ihre Eigenschaften untersucht. Sie beinhaltet ein exponentiell abfallendes, relles Skalarfeld mit einem Selbstwechselwirkungspotential, das in gewissen Regionen negativ wird und somit das no-hair-Theorem von Heusler umgeht.

Die Frage nach der Stabilität dieser Lösung gegenüber infinitesimalen Störungen führte schließlich zu Vergabe dieser Diplomarbeit.

Zusätzlich fanden wir im Laufe dieser Diplomarbeit noch eine weitere statische Lösung der Bewegungsgleichungen. Sie beinhaltet ein mit $1/r$ abfallendes, reelles Skalarfeld mit einem Selbstwechselwirkungspotential, das überall negativ ist, und somit ebenfalls das no-hair-Theorem von Heusler umgeht. Ich stelle diese neue Lösung in Kapitel 5.1 vor und werde ebenfalls ihre Stabilität gegenüber infinitesimalen Störungen untersuchen. Diese Arbeit ist organsiert wie folgt:

Der erste Teil (Kapitel 2 und 3) beinhaltet die in dieser Arbeit verwendeten Konventionen und Definitionen, Postulierung der Wirkung, Herleitung der Bewegungsgleichungen und Spezialisierung auf Kugelsymmetrie.

Anschließend (Kapitel 4) stelle ich einen Katalog von Forderungen auf, die man an mögliche statische Lösungen stellen kann, zeige eventuell ihre Äquivalenz und diskutiere ihre Konsequenzen. In diesem Zusammenhang stelle ich auch das eingangs erwähnte Theorem von Heusler vor.

Im folgenden Abschnitt (Kapitel 5) leite ich dann die zwei uns bisher bekannten statischen Lösungen her, die das no-hair-Theorem umgehen, diskutiere ihren Parameterbereich und stelle zu ausgewählten Parametern ihre Graphen dar.

Die Frage nach der Stabilität dieser beiden Lösungen erfordert zuerst eine ausführliche Diskussion der möglichen Schwingungsformen einer Metrik. Ich leite hierzu eine vollständige Tensormodenzerlegung her (Kapitel 6). Hierbei wird sich zeigen, daß man zwei Klassen von Schwingungen unterscheiden muß, die geraden und die ungeraden. Für beide leite ich getrennt mit Hilfe einer Analogie zur Schrödinger-Gleichung eine Stabilitätsbedingung her (Kapitel 7 und 8).

Anschließend bleibt noch, die beiden bekannten statischen Lösungen in diese Stabilitätsbedingungen einzusetzen, um die Stabilitätsfrage zu entscheiden (Kapitel 9). Eine kurze Zusammenfassung (Kapitel 10) schließlich schließt die Arbeit ab.

2 Allgemeine Gleichungen

In diesem Kapitel werden die Bewegungsgleichungen für die Metrik g_{ij} und ein Skalarfeld Φ, welches ein beliebiges Selbswechselwirkungspotential $V(\Phi)$ besitzt, aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung hergeleitet. Außerdem wird der Energie-Impuls-Tensor der Materie bestimmt und seine Divergenz-Freiheit nachgewiesen.

2.1 Wirkung

Die Wirkung $\mathcal{S}$ eines allgemeinen Materiefeldes läßt sich in der Allgemeinen Relativitätstheorie wie folgt darstellen[1] (mit c=1):

$$\mathcal{S} := \int d^4x \sqrt{-g}\,(\mathcal{L}_{Einstein} + \mathcal{L}_{Materie}) \tag{2.1}$$

Hierbei ist $\mathcal{L}_{Materie}$ der Teil der Wirkung, der Terme des Materiefeldes (hier Φ) enthält, und $\mathcal{L}_{Einstein}$ die aus der Literatur[2] bekannte Einstein-Wirkung mit den üblichen Definitionen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Einstein} &:= R \\
R &:= g^{ij} R_{ij} \\
R_{ij} &:= R^k{}_{ikj} \\
R^i{}_{jkl} &:= \partial_k \Gamma^i{}_{jl} - \partial_l \Gamma^i{}_{jk} + \Gamma^i{}_{mk}\Gamma^m{}_{jl} - \Gamma^i{}_{ml}\Gamma^m{}_{jk} \\
\Gamma^i{}_{jk} &:= \tfrac{1}{2} g^{il}\,(\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}) \\
g &:= \det g_{ij}
\end{aligned}$$

R heißt Ricci-Skalar, R_{ij} Ricci-Tensor, $R^i{}_{jkl}$ Riemann-Tensor, $\Gamma^i{}_{jk}$ Christoffel-Symbol, und g_{ij} ist die Metrik, die über das Längenquadrat $ds^2 := g_{ij}dx^i dx^j$ eines Linienelements dx^i definiert ist, und mit der man Indizes hoch- und runterziehen kann (z.B. $a_i := g_{ij}a^j$).

Ich verwende die übliche Einsteinsche Summenkonvention, d.h. sobald ein Index in einer Gleichung doppelt auftritt, wird über ihn summiert (z.B. $a_i b^i := \sum_i a_i b^i$).

Indizes laufen von 0 bis 3, wobei $x^i := (t, x, y, z)$. Die Signatur der Metrik ist in der Literatur verschieden, ich verwende hier (-1,1,1,1). Dieser Unterschied produziert in einigen Gleichungen Vorzeichen. Beim Vergleich mit anderer Literatur muß dieser Umstand daher evtl. beachtet werden.

[1] Für konform äquivalente Formen der Wirkung siehe Anhang B.

[2] Dies und alle folgenden Definitionen lassen sich überall in der Literatur über Allgemeine Relativitätstheorie finden (z.B. in [5]).

Ich benötige später kovariante Ableitungen. Auf Verktorfeldern lautet sie:

$$\mathcal{D}_i A^j := \partial_i A^j + \Gamma^j{}_{ik} A^k$$
$$\mathcal{D}_i A_j := \partial_i A_j - \Gamma^k{}_{ij} A_k$$

Dies macht die Vorzeichenkonvention des Christoffel-Symbols deutlich.

Als Wirkung für das Skalarfeld verwende ich im folgenden die möglichst allgemeine Form:

$$\mathcal{L}_{Materie} := \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi + V(\Phi) \tag{2.2}$$

Der erste Term ist der kinetische Term, der zweite der Massenterm, auch Selbstwechselwirkungspotential genannt. Daß dieser nicht weiter spezifiziert wird, ist ein wesentlicher Punkt dieser Arbeit.

2.2 Bewegungsgleichungen

Als erstes bestimme ich die Bewegungsgleichungen des Gravitationsfeldes, indem ich die Wirkung (2.1) nach der Metrik g^{ij} variiere:

$$0 \stackrel{!}{=} \delta \mathcal{S} = \int d^4x \Big(\delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_{Einstein}) + \delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_{Materie}) \Big) \tag{2.3}$$

Für den Einstein-Term in der Variation erhält man:

$$\begin{aligned} \delta\Big(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_{Einstein}\Big) &= \delta\Big(\sqrt{-g}\, g^{ij} R_{ij}\Big) \\ &= R\, \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\, R_{ij} \delta g^{ij} + \sqrt{-g}\, g^{ij} \delta R_{ij} \end{aligned}$$

Hierfür wird benötigt:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\, \delta g$$
$$\delta g = -g\, g_{ij}\, \delta g^{ij}$$

Der Term mit der Variation des Ricci-Tensors läßt sich in eine totale Ableitung umschreiben.

$$\sqrt{-g}\, g^{ij} \delta R_{ij} = \partial_k \left(\sqrt{-g}\, \left(g^{ij} \delta \Gamma^k{}_{ij} - g^{ik} \delta \Gamma^j{}_{ij} \right) \right)$$

Er liefert daher keinen Beitrag zu den Bewegungsgleichungen.

Für den Einstein-Term in der Variation ergibt sich somit:

$$\delta\Big(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_{Einstein}\Big) = \sqrt{-g} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right) \delta g^{ij} + \text{totale Ableitung} \tag{2.4}$$

Wenden wir uns nun dem Materie Term zu. Für ihn erhalte ich:

$$\begin{aligned}\delta\Big(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_{Materie}\Big) &= \mathcal{L}_{Materie}\,\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\,\delta\mathcal{L}_{Materie} \\ &= -\sqrt{-g}\,\underbrace{\left(\frac{1}{2}g_{ij}\left(\frac{1}{2}\partial_k\Phi\partial^k\Phi + V(\Phi)\right) - \frac{1}{2}\partial_i\Phi\partial_j\Phi\right)}_{=:T_{ij}}\delta g^{ij}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Wobei T_{ij} Energie-Impuls-Tensor heißt.

Setze ich nun die Variation des Einstein-Terms (2.4) und die Variation des Materie-Terms (2.5) in die Gesamtvariation (2.3) ein, so erhalte ich:

$$0 \stackrel{!}{=} \int d^4x\,\sqrt{-g}\left(R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\,R - T_{ij}\right)\delta g^{ij}$$

Somit ergibt sich die Einsteinsche Bewegungsgleichung:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\,R = T_{ij} \tag{2.6}$$

Diese Gleichung läßt sich auch umformulieren. Durch Kontraktion mit g^{ij} erhält man $-R = T$ (wobei $T := g^{ij}T_{ij}$), und somit:

$$\begin{aligned}R_{ij} &= T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T \\ &= -\frac{1}{2}\partial_i\Phi\partial_j\Phi - \frac{1}{2}g_{ij}V(\Phi)\end{aligned} \tag{2.7}$$

Nun zum Skalarfeld. Die Variation der Wirkung (2.1) nach dem Skalarfeld Φ ergibt mit Hilfe einer partiellen Integration:

$$\begin{aligned}0 \stackrel{!}{=} \delta\mathcal{S} = &\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\delta\mathcal{L}_{Materie} \\ &\int d^4x\,\left(\sqrt{-g}\,\partial_i\Phi\,\partial^i\delta\Phi + \sqrt{-g}\,\partial_\Phi V(\Phi)\,\delta\Phi\right) \\ &\int d^4x\,\left(-\partial^i\left(\sqrt{-g}\,\partial_i\Phi\right)\,\delta\Phi + \sqrt{-g}\,\partial_\Phi V(\Phi)\,\delta\Phi\right) \\ &\int d^4x\,\sqrt{-g}\Big(-\mathcal{D}^i\partial_i\Phi + \partial_\Phi V(\Phi)\Big)\delta\Phi\end{aligned}$$

Somit erhalte ich als Bewegungsgleichung für das Skalarfeld:

$$0 = \mathcal{D}^i\partial_i\Phi - \partial_\Phi V(\Phi) \tag{2.8}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten also:

$$0 = \mathcal{D}^i \partial_i \Phi - \partial_\Phi V(\Phi) \tag{2.9}$$

$$0 = R_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i \Phi \partial_j \Phi + \frac{1}{2} g_{ij} V(\Phi) \tag{2.10}$$

2.3 Energie-Impuls-Tensor

Der Energie-Impuls-Tensor aus Gleichung (2.5)

$$T_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij} \left(\frac{1}{2} \partial_k \Phi \partial^k \Phi + V(\Phi) \right) - \frac{1}{2} \partial_i \Phi \partial_j \Phi \tag{2.11}$$

sollte kovariant divergenzfrei sein. Eine kurze Überprüfung bestätigt dies:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i T_{ij} &= \frac{1}{2} g_{ij} \left(\partial^k \Phi \mathcal{D}^i \partial_k \Phi + \partial^i V(\Phi) \right) - \frac{1}{2} \partial_j \Phi \mathcal{D}^i \partial_i \Phi - \frac{1}{2} \partial_i \Phi \mathcal{D}^i \partial_j \Phi \\
&= \frac{1}{2} \partial^k \Phi \mathcal{D}_j \partial_k \Phi + \frac{1}{2} \partial_\Phi V(\Phi) \partial_j \Phi - \frac{1}{2} \partial_j \Phi \mathcal{D}^i \partial_i \Phi - \frac{1}{2} \partial^i \Phi \mathcal{D}_i \partial_j \Phi \\
&= \frac{1}{2} \partial^i \Phi \left(\mathcal{D}_j \partial_i - \mathcal{D}_i \partial_j \right) \Phi + \frac{1}{2} \partial_j \Phi \underbrace{\left(\partial_\Phi V(\Phi) - \mathcal{D}^i \partial_i \Phi \right)}_{=0 \text{ wegen } (2.9)} \\
&= \frac{1}{2} \partial^i \Phi \left(\partial_j \partial_i - \Gamma^k{}_{ij} \partial_k - \partial_i \partial_j + \Gamma^k{}_{ij} \partial_k \right) \Phi \\
&= 0
\end{aligned}$$

3 Statischer, kugelsymmetrischer Ansatz

Da ich das Skalarfeld in Kombination mit einem nichtrotierenden, ruhenden Schwarzen Loch untersuchen will, ist es jetzt Zeit, Kugelsymmetrie und Statik einzuführen.

3.1 Bewegungsgleichungen

Ich verwende folgende, allgemeine Form einer statischen, kugelsymmetrischen Metrik[3]:

$$g_{Statik} := \begin{pmatrix} -G(r) & & & \\ & 1/G(r) & & \\ & & R(r)^2 & \\ & & & R(r)^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

mit den Koordinaten $x^i := (t, r, \vartheta, \varphi)$.

Dies ist die Schwarzschild-Eichung. Durch Koordinatentransformationen läßt sich die Metrik auch noch in viele andere Formen bringen (siehe dazu z.B. [1]). Diese soll hier jedoch genügen.

Für das Skalarfeld ist in diesen Koordinaten der Ansatz leicht:

$$\Phi(t, r, \vartheta, \varphi) = \Phi(r) \tag{3.2}$$

Skalarfeld und Metrik beinhalten nun nur noch die drei unbekannten Funktionen $G(r)$, $R(r)$ und $\Phi(r)$, die alle nur noch vom Radius r abhängen. Füllt man diesen Ansatz nun in die Bewegungsgleichungen (2.9) und (2.10), so erhält man[4]:

---

[3] Die Funktion R aus dem Ansatz für die Metrik ist nicht zu verwechseln mit dem Ricci-Skalar R. Der Buchstabe R wurde hier trotzdem gewählt, da diese Funktion den Krümmungsradius angibt. Die Oberfläche der Vollkugel ist nämlich genau $4\pi R(r)^2$. Aus dem Zusammenhang sollte immer ersichtlich sein, welches R hier gemeint ist.

[4] Diese Berechungungen, insbesondere die Bestimmung des Ricci-Tensors wurden mit dem Cumpteralgebra-Programm Maple [6] durchgeführt. Eine Auflistung aller Zwischenschritte erschien mir daher wenig sinnvoll.

$$0 = G'\Phi' + 2\frac{GR'\Phi'}{R} + G\Phi'' - \partial_\Phi V(\Phi) \tag{3.3}$$
$$0 = \frac{1}{2}GG'' + \frac{GG'R'}{R} - \frac{1}{2}GV(\Phi) \tag{3.4}$$
$$0 = -\frac{1}{2}\frac{G''}{G} - 2\frac{R''}{R} - \frac{G'R'}{GR} + \frac{1}{2}\Phi'^2 + \frac{1}{2}\frac{V(\Phi)}{G} \tag{3.5}$$
$$0 = -G'RR' - GRR'' + 1 - GR'^2 + \frac{1}{2}R^2V(\Phi) \tag{3.6}$$
$$0 = \left(-G'RR' - GRR'' + 1 - GR'^2 + \frac{1}{2}R^2V(\Phi)\right)\sin^2\vartheta \tag{3.7}$$

Die oberste Gleichung, (3.3), ist die Gleichung für das Skalarfeld (2.9), die übrigen vier sind die Diagonalelemente von (2.10). Alle übrigen Gleichungen von (2.10) sind null.

Die Gleichungen (3.4) bis (3.6) sind unabhängig voneinander. Um dies zu sehen, formt man sie wie folgt um:

- Aus $\frac{1}{2}R\left((\mathbf{3.5}) + (\mathbf{3.4})/G^2\right) + R''$ erhält man:

$$R'' = \frac{1}{4}\Phi'^2 R \tag{3.8}$$

- Aus $2\left(((\mathbf{3.8}) - R'')\cdot G/R - (\mathbf{3.4})/G - (\mathbf{3.6})/R^2\right) + G''$ erhält man:

$$G'' = \frac{1}{2}G\Phi'^2 + 2\frac{GR'^2 - 1}{R^2} \tag{3.9}$$

- Aus $(\mathbf{3.9}) - G'' + (\mathbf{3.4})\cdot 2/G + V(\Phi)$ erhält man:

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}G\Phi'^2 + 2\frac{R'G'}{R} + 2\frac{GR'^2 - 1}{R^2} \tag{3.10}$$

Diese drei Gleichungen sind aufgelöst nach den Größen R'', G'' und $V(\Phi)$. Da jede dieser Größen in den jeweils anderen beiden Gleichungen nicht auftaucht, sind alle drei unabhängig voneinander.

Die Gleichungen (3.3) und (3.7) sind abhängig von den anderen:

$$\begin{aligned}(\mathbf{3.3}) &= \frac{4GR' + 2RG'}{\Phi' R^2}\cdot\left((\mathbf{3.8}) - R''\right) + 2\frac{R'}{R\Phi'}\cdot\left((\mathbf{3.9}) - G''\right)\\ &\quad + \frac{1}{\Phi'}\cdot\left((\mathbf{3.10}) - V(\Phi)\right)'\\ (\mathbf{3.7}) &= (\mathbf{3.6})\cdot\sin^2\vartheta\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen für den statischen, kugelsymmetrischen Fall lauten also:

$$R'' = \frac{1}{4}\Phi'^2 R \tag{3.11}$$

$$G'' = \frac{1}{2}G\Phi'^2 + 2\frac{GR'^2 - 1}{R^2} \tag{3.12}$$

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}G\Phi'^2 + 2\frac{R'G'}{R} + 2\frac{GR'^2 - 1}{R^2} \tag{3.13}$$

3.2 Formale Lösung für G

Für G lassen sich die Gleichungen integrieren.
Dazu betrachte man (3.12) $\cdot R^2$ – (3.11) $\cdot 2GR - 2GR'^2$:

$$\begin{aligned}
& R^2G'' - 2RR''G - 2R'^2G = -2 \\
\Rightarrow\quad & \left(R^2G' - 2RR'G\right)' = -2 \\
\Rightarrow\quad & R^2G' - 2RR'G = -2r + 6M \\
\Rightarrow\quad & G' = 2\frac{R'}{R}G - \frac{2r - 6M}{R^2} \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Die Integrationskonstante nenne ich hier 6M, in Analogie zur Schwarzschild-Metrik. Dazu später mehr.

Diese Differentialgleichung für G läßt sich wie üblich lösen. Zuerst die homogene Gleichung:

$$\begin{aligned}
& G_h' = 2\frac{R'}{R}G_h \\
\Rightarrow\quad & \frac{G_h'}{G_h} = 2\frac{R'}{R} \\
\Rightarrow\quad & \ln(G_h) = 2\ln(R) + \mathrm{const}_1 \\
\Rightarrow\quad & G_h(r) = \mathrm{const}_1 \cdot R(r)^2
\end{aligned}$$

Nun die inhomogene durch Variation der Konstanten:

$$
\begin{aligned}
& G = G_i G_h \qquad \text{(einsetzten in (3.14))} \\
\Rightarrow \qquad & G_i' = -\frac{2r-6M}{R^2 G_h} = -\text{const}_2 \cdot \frac{2r-6M}{R^4} \\
\Rightarrow \qquad & G_i(r) = \text{const}_2 \cdot \int_r^\infty d\tilde{r} \frac{2\tilde{r}-6M}{R(\tilde{r})^4} + \text{const}_3
\end{aligned}
$$

So daß sich insgesamt ergibt:

$$
G(r) = \text{const}_4 \cdot R(r)^2 \int_r^\infty d\tilde{r} \frac{2\tilde{r}-6M}{R(\tilde{r})^4} + \text{const}_5 \cdot R(r)^2 \tag{3.15}
$$

Die Forderung nach asymptotischer Flachheit (siehe Kapitel 4.1) fixiert die anderen beiden Integrationskonstanten:

$$
\begin{aligned}
G \xrightarrow{r\to\infty} \quad & \text{const}_4 \cdot r^2 \int_r^\infty d\tilde{r} 2\tilde{r}^{-3} + \text{const}_5 \cdot r^2 \\
= \quad & \text{const}_4 \cdot 1 + \text{const}_5 \cdot r^2 \\
\stackrel{!}{\to} \quad & 1
\end{aligned}
$$

Die Konstante vor dem r^2-Term muß zwingend Null sein und die andere Eins.

So erhalte ich schließlich die fertige Formel für G:

$$
G(r) = R(r)^2 \int_r^\infty d\tilde{r} \frac{2\tilde{r}-6M}{R(\tilde{r})^4} \tag{3.16}
$$

3.3 Energie-Impuls-Tensor

Der Energie-Impuls-Tensor (2.11) nimmt im statischen, kugelsymmetrischen Spezialfall eine angenehme Form an:

$$
\begin{aligned}
T^i_{\ j} &= \frac{1}{2}\delta^i_{\ j}\left(\frac{1}{2}G\partial_r\Phi\partial_r\Phi + V(\Phi)\right) - \frac{1}{2}G\partial_r\Phi\partial_r\Phi\delta^i_{\ r}\delta^r_j \\
&= \operatorname{diag}\Big(\rho, p_r, p_\vartheta, p_\varphi\Big)
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Hierbei ist:

$$
\begin{aligned}
\rho &:= \frac{1}{4}G\Phi'^2 + \frac{1}{2}V(\Phi) && \text{(Energiedichte)}\\
p_r &:= -\frac{1}{4}G\Phi'^2 + \frac{1}{2}V(\Phi) && \text{(Radialdruck)}\\
p_\vartheta &:= \frac{1}{4}G\Phi'^2 + \frac{1}{2}V(\Phi) && \text{(Tangentialdruck)}\\
p_\varphi &:= \frac{1}{4}G\Phi'^2 + \frac{1}{2}V(\Phi) && \text{(Tangentialdruck)}
\end{aligned}
$$

diag(...) meint eine Diagonalmatrix mit eben diesen Diagonalelementen.

4 Einige Forderungen

Bevor ich nun darangehe, die Gleichungen zu lösen, lohnt es sich, ein paar allgemeine Eigenschaften der darin vorkommenden Größen G, R, Φ und $V(\Phi)$ anzuschauen. Diese Eigenschaften sollen unabhängig von der konkreten Lösung sein, abgeleitet nur aus den Bewegungsgleichungen und ein paar zusätzlichen, plausiblen Forderungen.

4.1 Asymptotische Flachheit

Im Unendlichen soll die Metrik gegen die Vakuumlösung gehen, also:

$$g_{ij} \xrightarrow{r\to\infty} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

Daraus folgt sofort:

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{r\to\infty} 1 \\ R &\xrightarrow{r\to\infty} r \end{aligned} \tag{4.1}$$

Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen (3.11) und (3.13) folgt daraus:

$$\begin{aligned} \Phi &\xrightarrow{r\to\infty} \Phi_0 \in \mathbb{R} \\ V(\Phi) &\xrightarrow{r\to\infty} V(\Phi_0) = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Diese Forderung wurde bei der formalen Lösung für G (3.16) bereits für die Fixierung der Integrationskonstanten verwendet.

4.2 Vorhandensein eines Schwarzen Lochs

Wir interessieren uns nur für Lösungen, die ein Schwarzes Loch darstellen. Dies definiere ich durch das Vorhandensein mindestens einer Nullstelle der Funktion G. Die erste dieser Nullstellen (von außen gesehen) nenne ich meinen Ereignishorizont h. Daher gilt ganz selbstverständlich:

$$\begin{aligned} &G(h) = 0 \\ &G(r) > 0 \quad \text{für} \quad h < r < \infty \end{aligned} \tag{4.3}$$

Später werden auch nichttriviale Lösungen für G auftreten, die keinen Ereignishorizont besitzen, obwohl bei $r = 0$ eine Singularität zu finden ist. Solche „nackten“ Singularitäten, die nicht von einem Horizont umgeben sind, verbiete ich axiomatisch. Dieses Prinzip ist in der Literatur unter der Bezeichnung „kosmischer Zensor“ zu finden.

4.3 Endliche Energie, endlicher Druck

Der Gesamt-Energie-Impuls-Tensor der Materie soll endlich sein. Da dieser nach (3.17) aus Energiedichte und Radial- bzw. Tangentialdruck besteht, entspricht dies der Forderung nach endlicher Gesamt-Energie und endlichem Gesamt-Druck:

$$\begin{aligned}
& \infty > \int\limits_{h \leq r < \infty} d^3x T^i_j = 4\pi \int\limits_h^\infty dr R^2 T^i_j \\
\Rightarrow \quad & \infty > \int\limits_h^\infty dr R^2 \left(\pm\frac{1}{4} G\Phi'^2 + \frac{1}{2} V(\Phi) \right) \qquad \text{nach (3.17)} \\
\Rightarrow \quad & \infty > \int\limits_h^\infty dr R^2 G \Phi'^2 \\
\Rightarrow \quad & \lim_{r\to\infty} \left(r^3 \Phi'^2 \right) = 0 \\
\Rightarrow \quad & |\Phi(r\to\infty) - \Phi_0| < \text{const} \cdot r^{-\frac{1}{2}} \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

4.4 Newtonscher Grenzfall

Die Metrik soll sich weit draußen an die Schwarzschild-Metrik

$$g_{ij} \xrightarrow{r\to\infty} \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2M}{r}\right) & & & \\ & \frac{1}{1-\frac{2M}{r}} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

annähern, damit sich im Limes schwacher Felder (weit draußen) vernünftige Newtonsche Gravitationsgesetze ergeben.

Die Schwarzschild-Metrik ist asymptotisch flach. Es handelt sich hier also um eine Verschärfung von 4.1.

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}
\Phi & \xrightarrow{r\to\infty} \Phi_0 + \text{const}_1 \cdot r^a \qquad , a < 0 \\
R & \xrightarrow{r\to\infty} r + \text{const}_2 \cdot r^b \qquad , b < 1
\end{aligned}$$

schaue ich mir zuerst das Fernverhalten von R an, dann das von G und vergleiche es mit der Schwarzschild-Metrik

$$G \xrightarrow{r\to\infty} 1 - \frac{2M}{r}$$

Also zuerst das Fernverhalten von R. In

$$R'' = \frac{1}{4}\Phi'^2 R$$

(3.11) eingesetzt ergibt sich im Limes $r \to \infty$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \mathrm{const}_3 \cdot r^{b-2} = \mathrm{const}_4 \cdot r^{2a-1} \\ &\Rightarrow \quad b = 2a + 1 \end{aligned}$$

Und schließlich das Fernverhalten von G:

$$\begin{aligned} G &= R^2 \int_r^\infty d\tilde{r} \frac{2\tilde{r} - 6M}{R^4} \qquad \text{(formale Lösung (3.16))} \\ &\xrightarrow{r\to\infty} R^2 \int_r^\infty d\tilde{r} \left(2\tilde{r}^{-3} - 6M\tilde{r}^{-4} - \mathrm{const}_5 \cdot \tilde{r}^{b-4}\right) \\ &\xrightarrow{r\to\infty} R^2 \left(r^{-2} - 2Mr^{-3} - \mathrm{const}_6 \cdot r^{b-3}\right) \\ &\xrightarrow{r\to\infty} 1 - \frac{2M}{r} - \mathrm{const}_7 \cdot r^{b-1} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Die ersten beiden Terme entsprechen genau der Schwarzschild-Metrik. Dies rechtfertigt im Nachhinein den Namen der Integrationskonstanten M. Sollen die beiden Schwarzschild-Terme die führenden Terme sein, so muß $b < 0$ gelten. Wenn $b = 0$ ist, hilft noch eine Redefinition von M, um wieder die Schwarzschild-Form zu erhalten. Zusammen also:

$$\begin{aligned} & b \leq 0 \\ \Rightarrow \quad & a \leq -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \quad & |\Phi(r \to \infty) - \Phi_0| \leq \mathrm{const} \cdot r^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ich erhalte also fast die gleiche Einschränkung für das Skalarfeld Φ wie durch die Forderung nach endlicher Gesamt-Energie der Materie (Abschnitt 4.3).

4.5 Stabilität des Vakuums

Das Vakuum soll stabile Lösung der Bewegungsgleichungen sein. Das Vakuum ist definiert durch:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \eta_{ij} \\ \Phi &= \Phi_0 \end{aligned}$$

Mit $\eta_{ij} := \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, der flachen Minkowski-Metrik.

Setze ich dies in die Bewegungsgleichungen (2.9) und (2.10)

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{D}^i\partial_i\Phi - \partial_\Phi V(\Phi)\\ 0 &= R_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i\Phi\partial_j\Phi + \frac{1}{2}g_{ij}V(\Phi)\end{aligned}$$

ein, so erhalte ich sofort:

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\Phi V(\Phi_0)\\ 0 &= V(\Phi_0)\end{aligned} \tag{4.7}$$

Das Selbstwechselwirkungspotential V muß also an der Stelle Φ_0 ein Extremum oder einen Sattelpunkt besitzen.

Nun bleibt die Forderung, daß es sich auch um eine stabile Lösung handelt. Dazu linearisiere ich die Bewegungsgleichungen um die Vakuumlösung

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \phi\\ g_{ij} &= \eta_{ij} + h_{ij}\end{aligned}$$

und schaue, ob infinitesimale Auslenkungen das Vakuum „zerfallen“ lassen.

- Linearisierung der Gleichung fürs Skalarfeld

  Die linearisierte Gleichung lautet:

  $$\begin{aligned}0 &= \eta^{ij}\partial_i\partial_j\phi - \partial_\Phi^2 V(\Phi_0)\cdot\phi\\ \Rightarrow\quad 0 &= \left(\Box - m^2\right)\phi \qquad m^2 := \partial_\Phi^2 V(\Phi_0)\end{aligned}$$

  Mit $\Box := -\partial_0^2 + \triangle$ und $\triangle := \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$.

  Die allgemeine Lösung

  $$\begin{aligned}\phi &= \int d^3k \quad \tilde{\phi}(\omega,k)e^{i(-\omega t + kx)} + c.c.\\ \omega &= \pm\sqrt{k^2+m^2}\end{aligned}$$

  besteht aus einzelnen Moden zu unterschiedlichem k, deren Zeitentwicklung durch $\exp(-i\omega t)$ gegeben ist. Stabilität der Vakuumlösung bedeutet demnach, daß für jede Mode ω reell ist.

  $$\begin{aligned}&\Rightarrow\quad m^2 + k^2 \geq 0 \qquad \forall k\\ &\Rightarrow\quad m^2 \geq 0\\ &\Rightarrow\quad \partial_\Phi^2 V(\Phi_0) \geq 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

Der Fall, daß die zweite Ableitung des Potentials Null ist, ist streng genommen indifferent und bedarf einer näheren Untersuchung, denn in diesem Fall ist eine Nullmode ($\omega = 0$) möglich. Für sie folgt $k = 0$ und somit $\phi(t,x) = \text{const}$. Diese Mode kann jedoch ausgeschlossen werden mit der Forderung nach endlicher Gesamt-Energie (Abschnitt 4.3), da hierfür das Skalarfeld inklusive seiner Störung schneller als $1/r$ abfallen muß.

Das Selbstwechselwirkungspotential V muß also notwendig an der Stelle Φ_0 ein Minimum besitzen, oder in der zweiten Ableitung Null sein.

- Linearisierung der Gleichung für die Metrik

  Das linearisierte Christoffel-Symbol lautet:

$$\begin{aligned}\Gamma^i{}_{jk} &\approx \frac{1}{2}\eta^{il}\left(\partial_k h_{lj} + \partial_j h_{lk} - \partial_l h_{jk}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_k h^i{}_j + \partial_j h^i{}_k - \partial^i h_{jk}\right)\end{aligned}$$

  Der linearisierte Ricci-Tensor lautet:

$$\begin{aligned}R_{ij} = R^k_{ikj} &\approx \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_j \Gamma^k_{ik}\\ &\approx \frac{1}{2}\left(\partial_k\partial_i h^k_j - \partial_k\partial^k h_{ij} - \partial_j\partial_i h^k_k + \partial_j\partial^k h_{ik}\right)\\ &\approx -\frac{1}{2}\Box h_{ij} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial_i\partial^k\psi_{kj} + \partial_j\partial^k\psi_{ki}\right)}_{\text{Eichterm}}\\ \text{mit} \qquad & \psi_{kj} := h_{kj} - \frac{1}{2}\eta_{kj}\eta^{lm}h_{lm}\end{aligned}$$

  In eine beliebige Koordinatentransformation $x^i \to x^i + \xi^i$ gehen 4 frei wählbare Funktionen ξ^i ein, die sich so wählen lassen, daß die 4 Gleichungen $\partial^k\psi_{kj} = 0$ erfüllt sind (siehe dazu [5]), und der gesamte geklammerte Term somit wegfällt. Er spielt daher nur die Rolle eines Eichterms.

  In dieser speziellen Eichung ergibt sich also:

$$R_{ij} \approx -\frac{1}{2}\Box h_{ij}$$

  Die linearisierte Bewegungsgleichung für die Metrik lautet in dieser Eichung:

$$\begin{aligned} & 0 = R_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i\Phi\partial_j\Phi + \frac{1}{2}g_{ij}V(\Phi)\\ \Rightarrow \quad & 0 \approx -\frac{1}{2}\Box h_{ij} + \frac{1}{2}\eta_{ij}\underbrace{\partial_\Phi V(\Phi_0)}_{=0}\phi + \frac{1}{2}h_{ij}\underbrace{V(\Phi_0)}_{=0}\\ \Rightarrow \quad & 0 \approx \Box h_{ij} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Die allgemeine Lösung hiervon sind ebene Wellen, deren Amplitude zeitlich konstant ist. Bezüglich dieser Gleichung ist das Vakuum auf jeden Fall stabil.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß das Vakuum nur dann eine stabile Lösung der Feldgleichungen ist, wenn V an der Stelle Φ_0 ein Minimum besitzt, oder in der zweiten Ableitung Null ist.

4.6 $\Phi \to -\Phi$ -Symmetrie

Aus ästhetischen Gründen kann man fordern, daß die Wirkung (2.1) invariant unter folgender Vertauschung sein soll:

$$\Phi \to -\Phi \tag{4.10}$$

Dies begegnet einem oft in der theoretischen Physik. Nur die Größe $|\Phi|$ hat physikalische Bedeutung. Bei geladenen (komplexen) Skalarfeldern führt dies sogar zu einem Erhaltungssatz der Ladung.

Für uns hat diese Forderung nur die Auswirkung, daß das Selbstwechselwirkungspotential V invariant unter dieser Vertauschung sein muß. Der Rest der Wirkung besitzt schon diese Invarianz. Also:

$$V(\Phi) = V(-\Phi) \tag{4.11}$$

4.7 Schwache-Energie-Bedingung

Häufig stellt man zusätzliche Forderungen an den Energie-Impuls-Tensor von Materiefeldern, damit sie ein vernünftiges, physikalisches Verhalten aufweisen. Drei Energie-Bedingungen haben sich etabliert. Die erste geht davon aus, daß für einen beliebigen Beobachter mit Vierergeschwindigkeit u^i

$$u_i u^i = -1$$

die von ihm gemessene Energiedichte der Materie nicht negativ ist.

$$-T_{ij} u^i u^j \geq 0$$

Für ein Bezugsystem, in dem der Energie-Impuls-Tensor diagonal ist, bedeutet das:

$$T_0{}^0 \geq 0 \qquad \wedge \qquad T_0{}^0 - T_\alpha{}^\alpha \geq 0 \qquad , \alpha = 1, 2, 3$$

Und für unseren speziellen Energie-Impuls-Tensor (3.17):

$$V(\Phi) \geq -\frac{1}{2} G \Phi'^2 \tag{4.12}$$

4.8 Starke-Energie-Bedingung

Eine zumeist etwas strengere Bedingung an den Energie-Impuls-Tensor lautet, daß für einen beliebigen Beobachter mit Vierergeschwindigkeit u^i gelten muß

$$-\left(T_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}T\right)u^iu^j \geq 0$$

Dies ist die sogenannte Starke-Energie-Bedingung. Sie wird dadurch motiviert, daß dann aus der Einsteinschen Gleichung (2.7) folgt, daß

$$-R_{ij}u^iu^j \geq 0 \qquad \text{und somit } R_0{}^0 \geq 0$$

Für ein Bezugsystem, in dem der Energie-Impuls-Tensor diagonal ist, bedeutet das

$$T_0{}^0 \geq \frac{1}{2}T \qquad \wedge \qquad T_0{}^0 - T_\alpha{}^\alpha \geq 0 \qquad ,\alpha = 1,2,3$$

Und für den speziellen Energie-Impuls-Tensor (3.17) erhält man damit:

$$V(\Phi) \leq 0 \tag{4.13}$$

4.9 Dominante-Energie-Bedingung

Eine weitere Bedingung an den Energie-Impuls-Tensor erhält man aus der Überlegung, daß für einen Beobachter mit Vierer-Geschwindigkeit u^i der Poynting-Vektor j^i,

$$j^i := T^i{}_j u^j$$

der den Energiefluß beschreibt, den der Beobachter aus seinem Bezugsystem sieht, kein raumartiger Vektor sein darf. Das stellt sicher, daß die Materie sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt und die Kausalität verletzt.

$$0 \geq j_i j^i = T_i{}^j u_j T^i{}_k u^k$$

Ist der Energie-Impuls-Tensor diagonal, so wird daraus:

$$\left|T_0{}^0\right| \geq \left|T_\alpha{}^\alpha\right| \qquad ,\alpha = 1,2,3$$

Das bedeutet, die (0,0)-Komponente des Energie-Impuls-Tensors muß alle anderen Diagonalkomponenten betragsmäßig dominieren. Für diese Forderung hat sich der Begriff Dominante-Energie-Bedingung durchgesetzt.

Für unseren speziellen Energie-Impuls-Tensor (3.17) bedeutet das:

$$V(\Phi) \geq 0 \tag{4.14}$$

Wie man sieht, ist dies für unser spezielles System gegensätzlich zur Starken-Energie-Bedingung.

4.10 Ein no-hair-Theorem

Markus Heusler [4] lieferte 1994 ein no-hair-Theorem für nichtsinguläre Skalarfelder, mit positiv definitem Selbstwechselwirkungspotential

$$V(\Phi) \geq 0 \qquad \forall\Phi$$

Es basiert auf der Feststellung, daß solche Felder die Starke-Energie-Bedingung (4.13) global verletzen, während sie andererseits die Schwache-Energie-Bedingung (4.12) global erfüllen.

Wie eben gezeigt wurde (Abschnitt 4.8) folgt aus einer globalen Verletzung der Starken-Energie-Bedingung ${R_0}^0 \leq 0$. Als Konsequenz hieraus ergibt sich eine untere Massengrenze für das Schwarze Loch:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{1}{4\pi}\int_h^\infty d^3x\,\sqrt{-g}\,{R_0}^0 = -\frac{1}{8\pi}\int_h^\infty d^3x\,\sqrt{-g}\,\left(G'' + 2\frac{R'G'}{R}\right) \\
&= -\frac{1}{8\pi}\int_h^\infty d^3x\,\sqrt{-g}\,\left(\partial_r G' + {\Gamma^i}_{ri}G'\right) = -\frac{1}{8\pi}\int_h^\infty d^3x\,\sqrt{-g}\,\mathcal{D}_i\left(\delta^i_r G'\right) \\
&= -\frac{1}{8\pi}\int_h^\infty d^3x\,\partial_i\left(\sqrt{-g}\,\delta^i_r G'\right) = -\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{S}^\infty} d^2x\,\sqrt{-g}\,G' + \frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{S}^h} d^2x\,\sqrt{-g}\,G' \\
&= -\frac{1}{8\pi}\lim_{r\to\infty} G'R^2\int_{\mathcal{S}^r} d\Omega + \frac{1}{8\pi}G'(h)\int_{\mathcal{S}^h} d^2x\,\sqrt{-g} \\
&= -\frac{1}{8\pi}\frac{2M}{r^2}\cdot r^2\cdot 4\pi + \frac{1}{8\pi}G'(h)\cdot\mathcal{A} \\
&= -M + \frac{1}{4\pi}\kappa\mathcal{A}
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathcal{A}$ die Oberfläche des Schwarzen Loches und $\kappa := G'(h)/2$ die Oberflächengravitation. Die Regularität des Skalarfeldes benötige ich, damit die Integrale vernünftig definiert sind. Ich erhalte somit:

$$M \geq \frac{1}{4\pi}\kappa\mathcal{A} \tag{4.15}$$

Wie ebenfalls gezeigt wurde (Abschnitt 4.7) ist für unser System die

Schwache-Energie-Bedingung erfüllt, und somit

$$
\begin{aligned}
0 \leq {T_0}^0 &= {R_0}^0 - \frac{1}{2}R \\
&= -G'' - 3\frac{G'R'}{R} - 2\frac{GR''}{R} + \frac{1}{R^2} - \frac{GR'^2}{R^2} \\
&= -2G'' - 4\frac{G'R'}{R} \\
&= -\frac{2}{R^2}\left(R^2G'\right)'
\end{aligned}
$$

und damit

$$\left(R^2G'\right)' \leq 0$$

In der zweiten Zeile wurde die Bewegungsgleichung (3.12) verwendet. Das Ergebnis sagt nun aus, daß die Kombination R^2G' monoton fällt. Verwende ich dies, so erhalte ich eine obere Massengrenze für das Schwarze Loch

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot \frac{2M}{r^2} = \frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\left(R^2G'\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\lim_{r\to h}\left(R^2G'\right) = \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{G'(h)}{2}\cdot 4\pi R^2 \\
&= \frac{1}{8\pi}\kappa\mathcal{A}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Zusammen mit der unteren Massengrenze (4.15) erhält man die Gleicheit

$$M = \frac{1}{4\pi}\kappa\mathcal{A} \tag{4.17}$$

Dies bedeutet, daß wir in den beiden Energiebedingungen (4.13) und (4.12) jeweils die Gleichheit vorliegen haben, und somit

$$V(\Phi(r)) = 0 \qquad \forall r \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(r) = \Phi_0$$

Das Skalarfeld ist konstant und somit trivial, die Metrik ist die Schwarzschild-Metrik. Dies führt zu folgendem Ergebnis:

Es ist kein nichttriviales, nichtsinguläres Skalarfeld mit positiv definitem Selbstwechselwirkungspotential im Außenbereich eines Schwarzen Loches möglich.

Wenn ich gleich trotzdem zwei statische Lösungen präsentiere, müssen diese selbstverständlich dieses Theorem unterlaufen. Sie tun dies mit einem Selbstwechselwirkungspotential, das auch negativ wird.

5 Statische Lösungen

Nach dieser allgemeinen Diskussion kann ich nun darangehen, mir einige konkrete Lösungen der statischen, kugelsymmetrischen Bewegungsgleichungen (3.11) bis (3.13) zu bestimmen. Leider ist schon die erste der Gleichungen nicht allgemein lösbar. Für verschiedene Felder Φ erhalte ich für R z.t. sehr unterschiedliche Funktionsklassen als Lösung. Daher folgendes Vorgehen:

- Ich gebe einen Ansatz für Φ und damit eine Funktionsklasse vor.
- Nun bestimme ich, soweit möglich, die Funktion R mit Hilfe von (3.11). Hierbei erscheinen zwei Integrationskonstanten. Die eine von ihnen bringe ich mit Hilfe einer Eichtransformation zum Verschwinden, die andere fixiere ich mit der Forderung nach asymptotischer Flachheit.
- Anschließend setze ich das Ergebnis in die formale Lösung für G ein (3.16). Hierbei erscheint ein zusätzlicher Parameter, die Schwarzschild-Masse M.
- Als letztes bestimme ich $V(\Phi(r))$ mit Hilfe von (3.13). Um schließlich das reine Selbstwechselwirkungspotential $V(\Phi)$ zu erhalten, invertiere ich den Ansatzt $\Phi(r)$ zu $r(\Phi)$ und setze ihn ein.
- Ein paar Graphen der erhaltenen Funktionen schließen die jeweiligen Teile ab.

Nun zum ersten Ansatz für Φ:

5.1 Der Ansatz $\Phi = q \cdot r^\alpha$

Im folgenden arbeite ich mit dem Ansatz

$$\Phi(r) = q \cdot r^\alpha \tag{5.1}$$

Aufgrund der Forderung nach einer endlichen Gesamt-Energie der Materie (Abschnitt 4.3), bzw. der Forderung nach einem Newtonschen Grenzfall (Abschnitt 4.4), gilt die Einschränkung

$$\alpha < -\frac{1}{2}$$

5.1.1 Lösung für R

Setze ich diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung (3.11) ein, so erhalte ich:

$$R'' = \frac{1}{4} q^2 \alpha^2 r^{2\alpha-2} R$$

Diese Differentialgleichung läßt sich mit Hilfe von Besselfunktionen[5] lösen.

$$R(r) = \sqrt{r} Z_{\frac{1}{2\alpha}} \left(i \frac{\pm q}{2} \cdot r^\alpha \right) := \sqrt{r} \left(c_1 I_{\frac{1}{2\alpha}} \left(\frac{\pm q}{2} \cdot r^\alpha \right) + c_2 K_{\frac{1}{2\alpha}} \left(\frac{\pm q}{2} \cdot r^\alpha \right) \right)$$

Hierbei sind c_1 und c_2 Integrationskonstanten und I und K die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art.

Das frei wählbare Vorzeichen hat seinen Ursprung in der $\Phi \to -\Phi$ -Symmetrie der Differentialgleichungen und wird die Rechnung bis zum Schluß begleiten, ich verberge es deshalb in der neuen Konstanten $Q := \pm q$.

Die Besselfunktionen sind normalerweise als Lösungen bestimmter Differentialgleichungen (so wie hier) definiert, oder als analytisch nicht lösbare Integrale. Beides hilft uns hier nicht weiter.

Aus Gründen der Machbarkeit muß ich mich hier also auf spezielle Besselfunktionen einschränken.

Die Besselfunktionen lassen sich mit Hilfe endlicher Summen schreiben, wenn gilt:

$$\alpha = \pm \frac{1}{2n+1} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Leider ist davon nur ein einziger Fall konsistent mit obiger Forderung nach endlicher Gesamt-Energie der Materie ($\alpha < -\frac{1}{2}$):

$$\alpha = -1$$

Also:

$$\Phi = \frac{q}{r} \tag{5.2}$$

Ich erhalte damit:

$$\begin{aligned} R(r) = & \quad \sqrt{r} \left(c_1 I_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{Q}{2r} \right) + c_2 K_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{Q}{2r} \right) \right) \\ = & \quad \sqrt{r} \left(c_1 \sqrt{\frac{r}{\pi Q}} \left(e^{\frac{Q}{2r}} + e^{-\frac{Q}{2r}} \right) + c_2 \sqrt{\frac{\pi r}{Q}} e^{-\frac{Q}{2r}} \right) \\ = & \quad c_3 \cdot r \left(e^{\frac{Q}{2r}} + e^{-\frac{Q}{2r}} \right) + c_4 \cdot r e^{-\frac{Q}{2r}} \end{aligned}$$

[5] Zur Definition siehe Anhang A Besselfunktionen

Mit zwei neuen Konstanten c_3 und c_4.

Eine der beiden Integrationskonstanten läßt sich mit Hilfe einer Koordinatentransformation auf einen beliebigen Wert gleichen Vorzeichens bringen und stellt somit (bis auf das Vorzeichen) einen reinen Eichfreiheitsgrad dar. Die Transformation hierfür ist eine kombinierte entgegengesetzte Skalierung der Zeit- und der Radialkoordinate mit einer positiven Konstanten. Möchte ich zum Beispiel c_4 (bis auf sein Vorzeichen) zum Verschwinden bringen, lautet die Transformation:

$$
\begin{aligned}
r &= r'/|c_4| \\
t &= t' \cdot |c_4|
\end{aligned}
$$

Dabei darf nicht vergessen werden, zusätzlich zur eigentlichen Ersetzung der Koordinaten die Metrik g_{ij} mit zwei (wenn auch sehr simplen) Jacobi-Matrizen zu multiplizieren.

Die Auswirkungen auf Φ, G, R und V lassen sich vollständig in die übrigen Parameter q, M und c_3 absorbieren:

$$
\begin{aligned}
q &= q'/|c_4| \\
M &= M'/|c_4| \\
c_3 &= c_3' \cdot |c_4|
\end{aligned}
$$

Es bleibt:

$$
\begin{aligned}
\Phi(r') &= \frac{q'}{r'} \\
G(r') &= R(r')^2 \int_{r'}^{\infty} d\tilde{r} \frac{2\tilde{r} - 6M'}{R(\tilde{r})^4} \\
R(r') &= c_3' \cdot r' \left(e^{\frac{Q'}{2r'}} + e^{-\frac{Q'}{2r'}} \right) \pm r' \cdot e^{-\frac{Q'}{2r'}}
\end{aligned}
$$

Der Freiheitsgrad c_4 ist verschwunden, nur die beliebige Wahl seines Vorzeichens ist geblieben.

Von jetzt ab lasse ich die Striche an den transformierten Größen wieder weg.

Die Forderung nach asymptotischer Flachheit (Abschnitt 4.1) fixiert die übriggebliebene Integrationskonstante c_3:

$$
\begin{aligned}
R \quad &\xrightarrow{r \to \infty} \quad c_3 \cdot 2r \pm r \\
&\xrightarrow{\;\;!\;\;} \quad r
\end{aligned}
$$

Dies ist nur der Fall, wenn:

$$c_3 = 0 \qquad \text{bzw.} \quad c_3 = 1$$

je Nach Vorzeichenwahl.

Setze ich dies in die Formel für R ein, bleibt nur noch:

$$R(r) = r \cdot e^{\pm \frac{Q}{2r}}$$

Das nun entstandene frei wählbare Vorzeichen absorbiere ich schließlich in die Konstante Q (die schon ein freies Vorzeichen enthält), in der Art, daß ein Minuszeichen davor stehen bleibt. Als Endergebnis für R halte ich folgende Formel fest:

$$R(r) = r \cdot e^{-\frac{Q}{2r}} \tag{5.3}$$

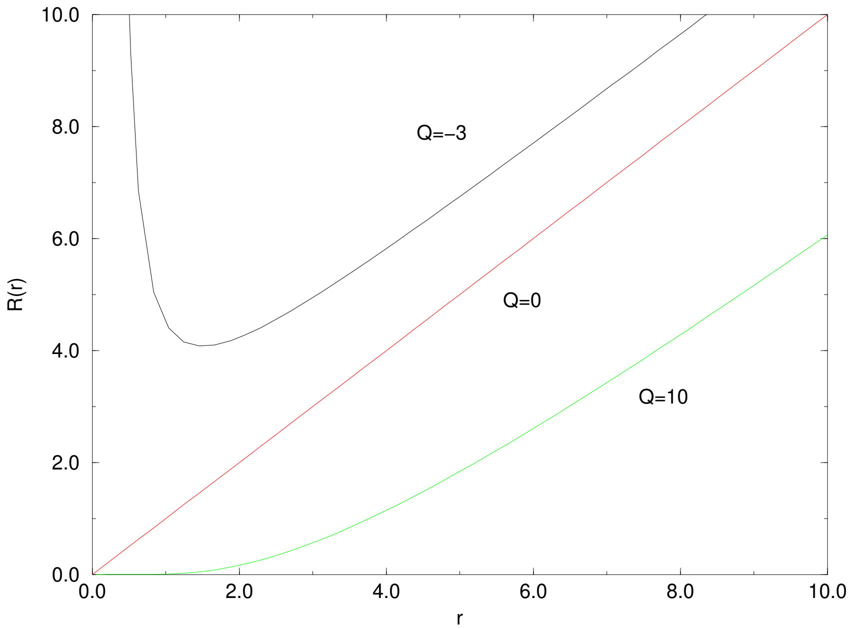

Abbildung 1: Die Funktion $R(r)$ für verschiedene Werte des Parameters Q

Grob lassen sich drei Fälle für die Wahl des Parameters Q unterscheiden:

- Wählt man Q positiv, so beginnt R im Ursprung, ist monoton steigend und wird unendlich, wenn r unendlich wird. R spielt dann also die Rolle einer „ordentlichen“ Radialkoordinate.
- Wählt man Q negativ, so beginnt R für $r = 0$ im positiv unendlichen, fällt monoton bis zu einem Minium, bevor es dann wieder monoton steigt und sich asymptotisch der Schwarzschild-Geraden $R = r$ annähert. Auf dem gesamten Definitionsbereich ist R größer Null und daher physikalisch akzeptabel. Da es aber nicht überall monoton ist, läßt es sich nicht global invertieren und als Radialkoordinate verwenden.
- Der Fall $Q = 0$ ergibt den Schwarzschild-Fall, da hier das Feld Φ identisch verschwindet.

5.1.2 Lösung für G

Nun zum nächsten Schritt. Ich setze dieses Ergebnis für R in die formale Lösung (3.16) für G und löse das Integral.

$$\begin{aligned}
G(r) &= R(r)^2 \int_r^\infty d\tilde{r} \frac{2\tilde{r} - 6M}{R(\tilde{r})^4} \\
&= R(r)^2 \int_r^\infty d\tilde{r} \left(\frac{2}{\tilde{r}} - \frac{6M}{\tilde{r}^2}\right) \frac{1}{\tilde{r}^2} \cdot e^{\frac{2Q}{\tilde{r}}} \\
&= R(r)^2 \cdot \left(\partial_Q - \frac{3}{2} M \partial_Q^2\right) \cdot \int_r^\infty d\tilde{r}\, \frac{1}{\tilde{r}^2} \cdot e^{\frac{2Q}{\tilde{r}}} \\
&= R(r)^2 \cdot \left(\partial_Q - \frac{3}{2} M \partial_Q^2\right) \cdot \left[-\frac{1}{2Q} \cdot e^{\frac{2Q}{\tilde{r}}}\right]_{\tilde{r}=r}^{\tilde{r}=\infty} \\
&= R(r)^2 \cdot \left(\partial_Q - \frac{3}{2} M \partial_Q^2\right) \cdot \frac{-1}{2Q} \cdot \left(1 - e^{\frac{2Q}{\tilde{r}}}\right) \\
&= R(r)^2 \cdot \left[\frac{Q+3M}{2Q^3} + \left(-\frac{Q+3M}{2Q^3} + \frac{Q+3M}{Q^2} \cdot r^{-1} - \frac{3M}{Q} \cdot r^{-2}\right) \cdot e^{\frac{2Q}{r}}\right] \\
&= \left(-\frac{Q+3M}{2Q^3} \cdot r^2 + \frac{Q+3M}{Q^2} \cdot r - \frac{3M}{Q}\right) \cdot e^{\frac{Q}{r}} + \frac{Q+3M}{2Q^3} r^2 \cdot e^{-\frac{Q}{r}}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Mit dem asymptotischen Verhalten

$$G \quad \xrightarrow{r\to\infty} \quad 1 - \frac{2M - \frac{1}{3}Q}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Wie man sieht, liegt hier der in Abschnitt 4.4 erwähnte Fall vor, daß die Integrationskonstante M redefiniert werden muß, um einen führenden Schwarzschild-Term zu erhalten, daher

$$M =: \tilde{M} + \frac{1}{6}Q$$

Und damit das Endergebnis für G:

$$G(r) = \left(-\frac{3Q + 6\tilde{M}}{4Q^3} \cdot r^2 + \frac{3Q + 6\tilde{M}}{2Q^2} \cdot r - \frac{Q + 6\tilde{M}}{2Q}\right) \cdot e^{\frac{Q}{r}} + \frac{3Q + 6\tilde{M}}{4Q^3} r^2 \cdot e^{-\frac{Q}{r}} \tag{5.5}$$

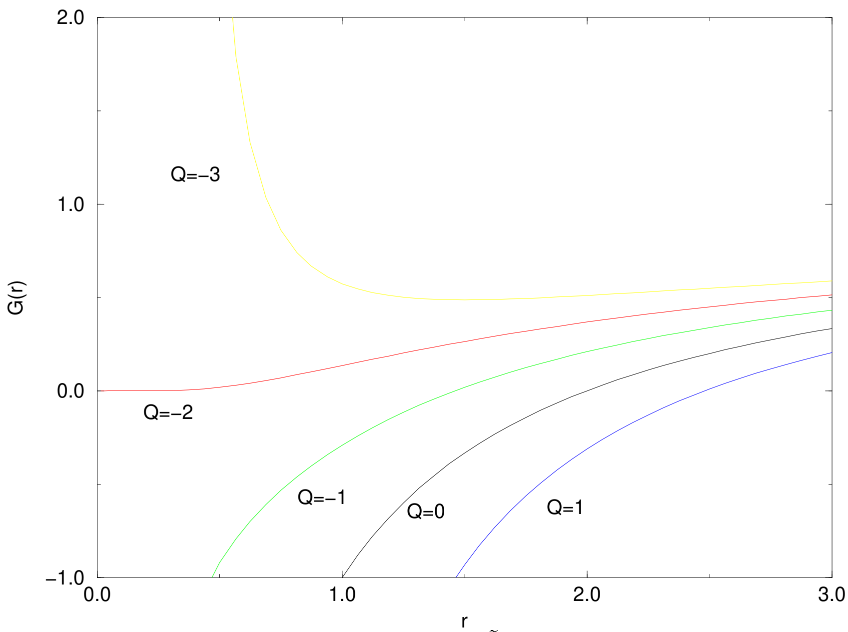

Abbildung 2: Die Funktion $G(r)$ für $\tilde{M} = 1$ und verschiedene Werte Q

Auch hier lassen sich wieder verschiedene Parameterbereiche unterscheiden:

- Für $Q = 0$ (im Limes) erhalte ich die Schwarzschild-Lösung, da das Skalarfeld hierfür vollständig verschwindet.
- Für $Q > 0$ ergibt sich ein Schwarzes Loch, dessen Ausmaße durch die Anwesenheit des Skalarfeldes vergrößert wurden.
- Für $Q < 0$ verringert sich die Größe des Schwarzen Loches, solange bis schließlich bei
- $Q = -2\tilde{M}$ der Ereignishorizont bei $r = 0$ liegt. Die Radialfunktion $R(r)$ ist hier singulär (aufgrund negativem Q), so daß eine „nackte" Singularität vorliegt, die ich axiomatisch verbiete (siehe Abschnitt 4.2).
- Ab dieser Schwelle ($Q < -2\tilde{M}$) erhalte ich nur noch Lösungen für $G(r)$, die alle ohne Nullstelle sind, und bei $r = 0$ gegen unendlich gehen. Es handelt sich nur noch um Löungen, die „nackte" Singularitäten darstellen.

Der Parameterbereich von Q muß daher eingeschränkt werden:

$$Q > -2\tilde{M} \tag{5.6}$$

5.1.3 Lösung für V

Um nun schließlich das zugehörige Selbstwechselwirkungspotential $V(\Phi)$ aus der Wirkung zu erhalten, verwende ich die beiden Lösungen für R und G (5.3) und (5.5) in der Bewegungsgleichung für V (3.13):

$$\begin{aligned}
V(\Phi(r)) &= \frac{1}{2} G \Phi'^2 + 2\frac{R'G'}{R} + 2\frac{GR'^2 - 1}{R^2} \\
&= \frac{3(Q+2\tilde{M})}{2Q^3} \cdot \left(\left(-3 + 3\frac{Q}{r} - \frac{Q^2}{r^2} \right) \cdot e^{\frac{Q}{r}} + \left(3 + 3\frac{Q}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \cdot e^{-\frac{Q}{r}} \right) \\
&= -\frac{3(Q+2\tilde{M})}{Q^3} \cdot \left(\left(3 + \frac{Q^2}{r^2} \right) \cdot \sinh\left(\frac{Q}{r}\right) - 3\frac{Q}{r} \cdot \cosh\left(\frac{Q}{r}\right) \right)
\end{aligned}$$

Der invertierte Ansatz für das Skalarfeld $r = q/\Phi$ erlaubt es nun, V als Funktion von Φ darzustellen:

$$\begin{aligned}
V(\Phi) &= -\frac{3(Q+2\tilde{M})}{Q^3} \cdot \Big((3+\Phi^2) \cdot \sinh(\pm\Phi) - 3(\pm\Phi) \cdot \cosh\Phi \Big) \\
&= -\frac{3(Q+2\tilde{M})}{|Q|^3} \cdot \mathrm{sgn}(\Phi) \Big((3+\Phi^2) \cdot \sinh\Phi - 3\Phi \cdot \cosh\Phi \Big) \\
&= -\lambda \cdot \Big((3+\Phi^2) \cdot \sinh|\Phi| - 3|\Phi| \cdot \cosh\Phi \Big)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\text{mit} \qquad \lambda := \frac{3(Q+2\tilde{M})}{|Q|^3} \qquad > 0$$

Die Konstante λ ist positiv aufgrund der Beschränkung (5.6) des Parameterbereichs von Q.

Da der invertierte Ansatz $r = q/\Phi$ nur positive bzw. nur negative Φ überstreicht (je nach Vorzeichen von q), gilt diese Formel nur für Φ eines Vorzeichens. Für Werte entgegengesetzen Vorzeichens ist sie beliebig fortsetzbar.

Es ist jedoch sinnvoll, hier eine $\Phi \to -\Phi$-Symmetrie (siehe Abschnitt 4.6) zu fordern. Obige Formel erfüllt schon diese Forderung. Sie ist daher das Endergebnis für V.

$$V(\Phi) = -\lambda \cdot \Big(\big(3+\Phi^2\big) \cdot \sinh|\Phi| - 3|\Phi| \cdot \cosh\Phi \Big) \tag{5.8}$$

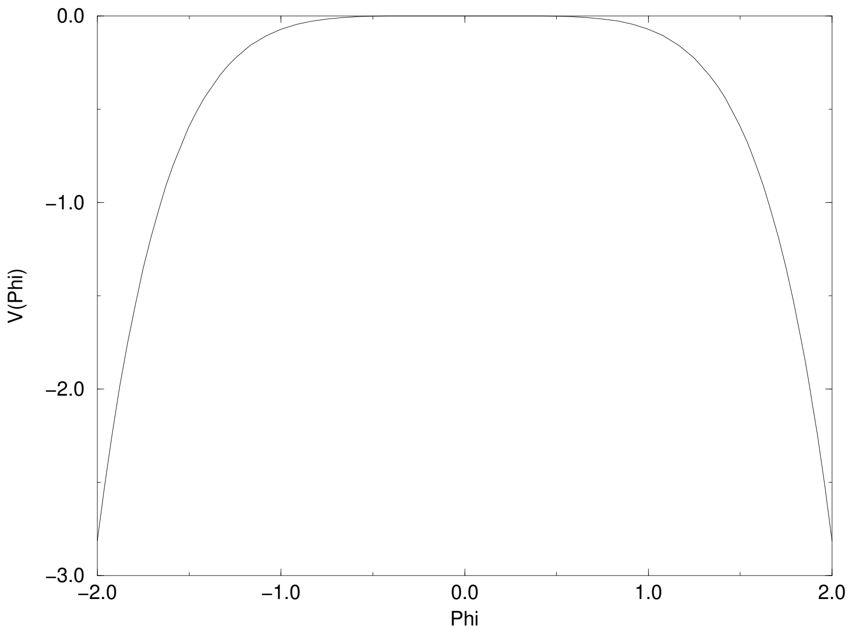

Abbildung 3: Die Funktion $V(\Phi)$ für $\lambda = 1$

Wie man deutlich sehen kann, ist das Selbstwechselwirkungspotential $V(\Phi)$ überall negativ. Daran ändert auch eine andere Wahl des Parameters λ nichts, da er auf positive Werte beschränkt ist. Das no-hair-Theorem (Abschnitt 4.10) wird also mit der Tatsache unterlaufen, daß $V(\Phi)$ nicht positiv definit ist.

Fordert man für λ doch positive Werte, so muß die Parameterbeschränkung (5.6) für Q aufgegeben werden, so daß eine „nackte“ Singularität auftritt. Diese stellt aber wiederum eine Verletzung der Eingangsbedingungen des no-hair-Theorems dar, das nun also auf andere Weise unterlaufen wird.

Das erhaltene Selbstwechselwirkungspotential $V(\Phi)$ (5.8) ist aufgrund der Betragsfunktion im Ursprung nicht analytisch, und verhält sich dort (im Limes für kleine Felder) wie

$$V(\Phi) \qquad \xrightarrow{\Phi \to 0} \qquad -\frac{\lambda}{15} \cdot |\Phi|^5$$

Das bedeutet, daß die zweite Ableitung im Ursprung verschwindet

$$\partial_\Phi^2 V(0) = 0$$

und somit die Forderung nach Vakuumstabilität (Abschnitt 4.5) erfüllt ist.

5.2 Der Ansatz $\Phi = q \cdot e^{-mr}$

Ich gehe nun zu einem anderen Ansatz für das Skalarfeld über, und zwar:

$$\Phi(r) = q \cdot e^{-mr} \tag{5.9}$$

Dieser Ansatz eines exponentiell abfallenden Skalarfeldes wurde von Olaf Bechmann in seiner Arbeit [1] diskutiert. Die Frage nach der Stabilität dieser Lösung führte ursprünglich zur Vergabe dieser Diplomarbeit.

Er erfüllt die Bedingung nach einer endlichen Gesamt-Energie der Materie (Abschnitt 4.3), bzw. der Forderung nach einem Newtonschen Grenzfall (Abschnitt 4.4), falls gilt:

$$m \geq 0$$

5.2.1 Lösung für R

Setze ich diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung (3.11) ein, so erhalte ich:

$$R(r)'' = \frac{1}{4} q^2 m^2 e^{-2mr} R(r)$$

Dies läßt sich umformen zu folgender Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 R(x) + \frac{1}{x}\partial_x R(x) - R(x) &= 0 \\ \text{mit} \quad x := \frac{1}{2}(\pm q) \cdot e^{-mr} \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

deren Lösung sich mit Hilfe von Besselfunktionen[6]. finden läßt (siehe dazu z.B. [10]):

$$R(x) = Z_0(ix) := c_1 \cdot I_0(x) + c_2 \cdot K_0(x)$$

Hierbei sind c_1 und c_2 Integrationskonstanten und I und K wieder die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art.

Das frei wählbare Vorzeichen ist wie im vorigen Kapitel Ausdruck der $\Phi \to -\Phi$ -Symmetrie der Differentialgleichungen.

An dieser Stelle kann man der Lösung schon ansehen, daß der Parameter m durch eine Koordinatentransformation vollständig eliminiert werden kann,

[6] zur Definition der Besselfunktionen, der faktoriellen logarithmischen Funktion ψ sowie der Euler-Konstanten γ siehe Anhang A Besselfunktionen

er stellt keinen echten Freiheitsgrad dar. Die Transformation hierfür ist eine entgegengesetze Skalierung der Radial- und der Zeitkoordinaten:

$$\begin{aligned} t &= t' \cdot m \qquad\qquad (m \text{ ist positiv}) \\ r &= r' \cdot \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Dabei darf wieder nicht vergessen werden, die Metrik g_{ij} mit zwei, wenn auch sehr einfachen, Jacobi-Matrizen zu multiplizieren.

Die Schwarzschild-Masse M aus der formalen Lösung für G (3.16) muß ich hierfür anpassen:

$$M = M' \cdot \frac{1}{m}$$

Sonst bleibt alles beim Alten.

Nach dieser Transformation haben die Größen Φ, x, R und G folgende Form:

$$\begin{aligned} \Phi(r') &= q \cdot e^{-r'} \\ x(r') &= \frac{1}{2}(\pm q) \cdot e^{-r'} \\ R(r') &= c_1 \cdot I_0(x) + c_2 \cdot K_0(x) \\ G(r') &= R(r')^2 \int\limits_{r'}^{\infty} d\tilde{r} \frac{2\tilde{r} - 6M'}{R(\tilde{r})^4} \end{aligned}$$

Der Parameter m ist hierbei völlig weggefallen, sonst hat sich nichts geändert. Von nun an lasse ich die Striche an den transformierten Größen wieder weg. Der transformierte Ansatz für das Skalarfeld lautet nun also:

$$\Phi(r) = q \cdot e^{-r} \tag{5.10}$$

Ich schreibe die Besselfunktionen nun aus. Zum Index 0 lassen sie sich mit unendlichen Summen darstellen:

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \\ K_0(x) &= -\ln\left|\frac{x}{2}\right| \cdot I_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k+1) \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$R(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_1 + c_2 \cdot \left(r - \ln\left|\frac{q}{4}\right| + \psi(k+1)\right)\right) \cdot \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{q}{4} e^{-r}\right)^{2k}$$

Mit einer weiteren Koordinatentransformation läßt sich nun die Form von R noch verändern und die Integrationskonstante c_1 zum Verschwinden bringen. Ich verwende dazu eine Translation der Radialkoordinaten r:

$$r = r' + \ln\left|\frac{q}{4}\right| + \gamma - \frac{c_1}{c_2}$$

Eine Redefinition der Parameter M und q ist hierfür notwendig:

$$\begin{aligned} M &= M' + \frac{1}{3} \cdot \left(\ln\left|\frac{q}{4}\right| + \gamma - \frac{c_1}{c_2}\right) \\ q' &= \mathrm{sgn}(q) \cdot 4\, e^{c_1/c_2 - \gamma} \end{aligned}$$

Nach dieser Translation haben die Größen Φ, R und G folgende Form:

$$\begin{aligned} \Phi(r') &= q' \cdot e^{-r'} \\ R(r') &= c_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\Big(r' + \gamma + \psi(k+1)\Big) \cdot \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{q'}{4}e^{-r'}\right)^{2k} \\ G(r') &= R(r')^2 \int_{r'}^{\infty} d\tilde{r} \frac{2\tilde{r} - 6M'}{R(r')^4} \end{aligned}$$

Wie man deutlich sehen kann, ist die Integrationskonstante c_1 verschwunden. Verändert hat sich nur die Form von R, sonst ist alles beim Alten geblieben. Von nun an lasse ich die Striche an den transformierten Größen wieder weg.

Die Forderung nach asymptotischer Flachheit (Abschnitt 4.1) schließlich fixiert die andere Integrationskonstante:

$$\begin{aligned} R \quad &\xrightarrow{r\to\infty} \quad c_2 \cdot r \\ &\stackrel{!}{\longrightarrow} \quad r \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort:

$$c_2 = 1$$

Hiermit und mit der Definition (A.4) von Ψ erhalte ich das Endergebnis für die Funktion R:

$$R(r) = r + \sum_{k=1}^{\infty}\left(r + \sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l}\right) \cdot \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{q}{4}e^{-r}\right)^{2k} \tag{5.11}$$

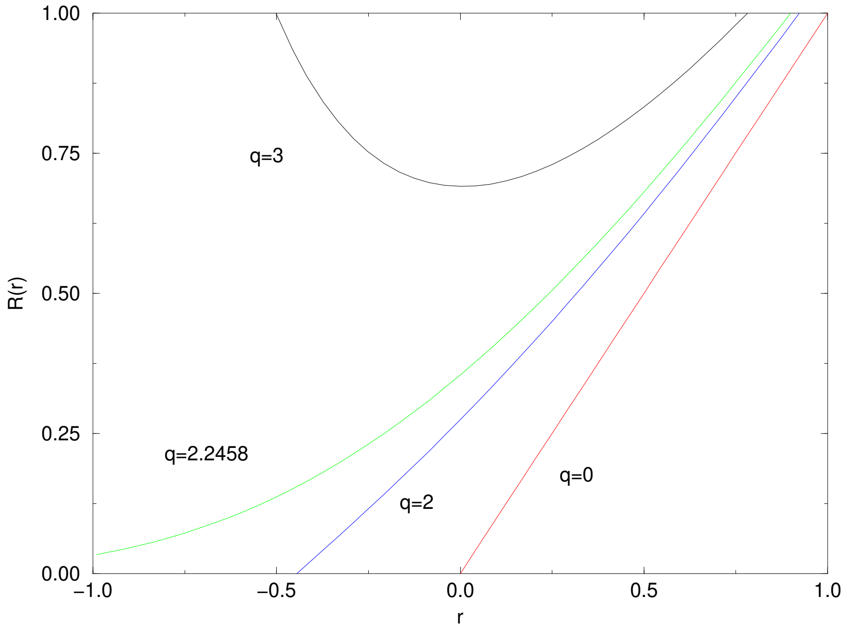

Abbildung 4: Die Funktion $R(r)$ für verschiedene Werte des Parameters q

Für die Wahl des Parameters q lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

- Wählt man $|q| > 4\exp(-\gamma) \approx 2,245837934$, so kommt die Funktion R aus dem positiv Unendlichen, fällt monoton bis zu einem Minimum, um dann wieder monoton anzusteigen und sich der Schwarzschild-Geraden $R = r$ asymptotisch anzunähern. Auf dem gesamten Definitionsbereich ist R größer Null und somit physikalisch akzeptabel. Es läßt sich jedoch nicht global invertieren und als neue Radialkoordinate verwenden.

- Ist $|q| = 4\exp(-\gamma)$, so kommt R für kleine r aus einer Asymptote an die r-Achse und geht für große r über in eine Asymptote an die Schwarzschild-Gerade. R ist überall größer Null, monoton steigend, global invertierbar und daher eine vernünftige Radialkoordinate.

- Für $0 < |q| < 4\exp(-\gamma)$ besitzt R eine Nullstelle, die den Ort der Singularität angibt. Mit einer weiteren Translation ließe sich diese Nullstelle in den Koordinatenursprung bringen. Dies will ich hier jedoch nicht durchführen, da es die Formeln nur unnötig verkompliziert. R ist monoton steigend, global invertierbar und somit ab der Singularität eine vernünftige Radialkoordinate.

- Für $|q| = 0$ schließlich ist der flache Raum erreicht. Das Skalarfeld ist verschwunden, R ist die Schwarzschild-Gerade.

5.2.2 Lösung für G

Nun zum nächsten Schritt. Zur Bestimmung der Funktion G verwende ich wieder die formale Lösung (3.16)

$$G(r) = R(r)^2 \int_r^\infty d\tilde{r} \frac{2\tilde{r} - 6M}{R(\tilde{r})^4}$$

Dabei stellt sich heraus, daß das Integral mit der vierten Potenz einer unendlichen Summe im Nenner so nicht lösbar ist. Aus diesem Grunde entwickle ich den Integranden nach dem in der Summe vorkommenden Term $q/4 \cdot \exp(-r)$ und führe anschließend die Integration aus[7]. Auf diese Weise erhalte ich für G eine Entwicklung der Form

$$G(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k(r, M) + \sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}(r, M) \cdot q^{2l} \operatorname{Ei}(1, 2lr) \right) \cdot q^{2k} e^{-2kr} \qquad (5.12)$$

Mit den Koeffizienten a_k und b_{kl}. Hierbei ist Ei die Exponential-Integral-Funktion, die definiert wird durch:

$$\operatorname{Ei}(1, 2x) := \int_x^\infty d\tilde{x} \, \frac{1}{\tilde{x}} e^{-2\tilde{x}}$$

Die Koeffizienten der ersten Glieder lauten:

$$a_0 = 1 - \frac{2M}{r}$$
$$a_1 = \left(\frac{1}{6} + \frac{M}{2}\right) \cdot r + \frac{1}{24} - \frac{M}{4} - \frac{1}{24} \cdot r^{-1} + \frac{M}{8} \cdot r^{-2}$$
$$a_2 = \left(\frac{11}{192} + \frac{5M}{32}\right) \cdot r + \frac{11}{1536} + \frac{M}{128} + \frac{5}{3072} \cdot r^{-1} + \left(\frac{1}{384} - \frac{5M}{1024}\right) \cdot r^{-2} - \frac{M}{128} \cdot r^{-3}$$
$$\dots$$

[7] Auch diese Rechnung wurde mit dem Computeralgebra-Programm Maple [6] durchgeführt, weswegen ich die wenig instruktiven Zwischenrechnungen weglasse

$$
\begin{array}{ll}
b_{01} = -\frac{1}{3}(3M+1)r^2 & b_{02} = -\frac{1}{48}(18M+7)r^2 \\
b_{03} = -\frac{1}{6144}(666M+281)r^2 & b_{11} = -\frac{1}{24}(3M+1)r(r+1) \\
b_{12} = -\frac{1}{384}(18M+7)r(r+1) & b_{21} = -\frac{1}{3072}(3M+1)(3r+4)(2r+1) \\
\quad \ldots &
\end{array}
$$

Der erste Term a_0 ist der Schwarzschild-Term, während die übrigen für $r \to \infty$ exponentiell abfallen. Im Limes großer Entfernungen ergibt sich daher die Schwarzschild-Metrik.

Für die Erstellung der folgenden Graphen wurde die Entwicklung bis zur Ordnung $k = l = 6$ durchgeführt. Der schwächste Term ist somit $\sim \exp(-12r)$.

Auffällig ist sofort, daß sich die Funktion G für unterschiedliche Werte des Parameters q nur sehr wenig ändert.

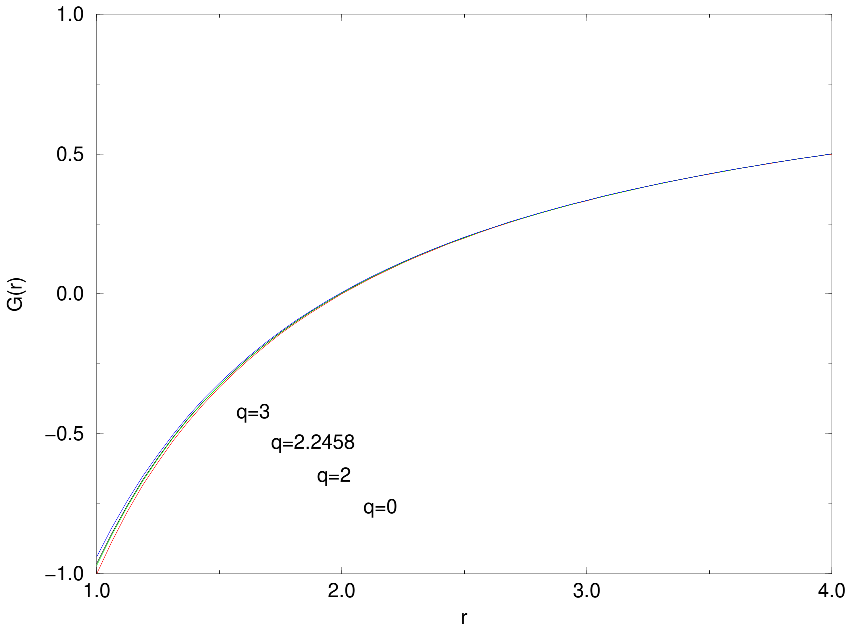

Abbildung 5: Die Funktion $G(r)$ für $M = 1$ und denselben Werten für q, wie in Abbildung 4

Obwohl R bei diesen Parameterwerten ein qualitativ sehr unterschiedliches Verhalten aufweist (vergleiche Abbildung 4), ändert sich G nur minimal. Eine Vergrößerung zeigt, daß sich der Horizont dennoch verschiebt:

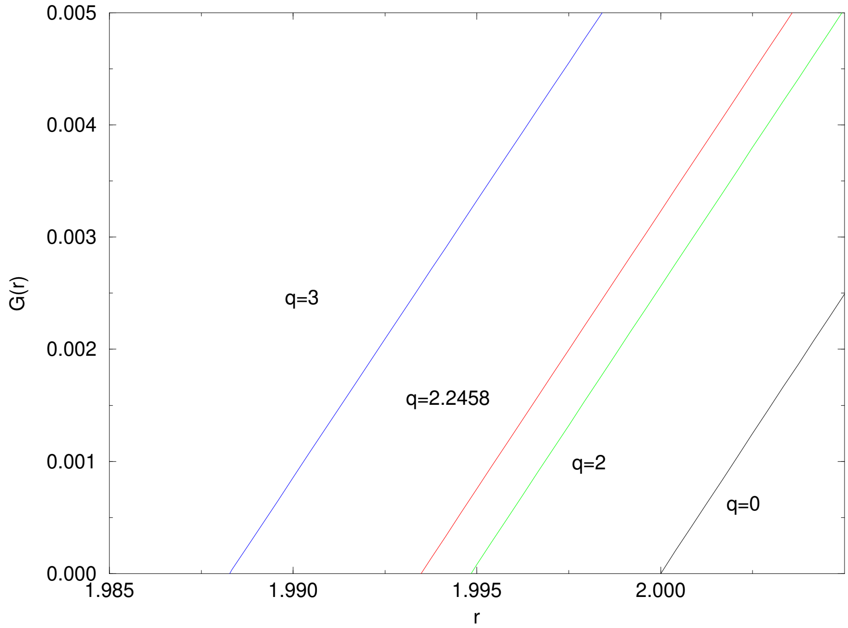

Abbildung 6: Vergrößerung der Funktion $G(r)$ um den Horizont für $M = 1$ und verschiedene Werte des Parameters q

5.2.3 Lösung für V

Als letztes bestimme ich mit Hilfe der statischen Gleichung (3.13)

$$V(\Phi(r)) = \frac{1}{2}G\Phi'^2 + 2\frac{R'G'}{R} + 2\frac{GR'^2 - 1}{R^2}$$

das Selbstwechselwirkungspotential $V(\Phi(r))$. Auch hier entwickle ich nach $q/4 \cdot exp(-r)$, so daß sich wieder folgende Form ergibt:

$$V(\Phi(r)) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(c_k(r,M) + \sum_{l=1}^{\infty} d_{kl}(r,M)\cdot q^{2l}\,\mathrm{Ei}(1,2lr)\right)\cdot q^{2k}e^{-2kr}$$

Mit Koeffizienten c_k und d_{kl}. Die ersten lauten:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0\\
c_1 &= \frac{1}{2} + \frac{2M}{r}\\
c_2 &= \left(\frac{1}{12} + \frac{M}{4}\right)\cdot r - \frac{13}{96} - \frac{7M}{8} + \left(\frac{1}{6} + \frac{3M}{8}\right)\cdot r^{-1} - \frac{M}{8}\cdot r^{-2}\\
&\dots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_{01} &= -2(1+3M)\\
d_{02} &= -\frac{1}{8}(18M+7)\\
d_{03} &= -\frac{1}{1024}(666M+281)\\
d_{11} &= -\frac{1}{768}(1+3M)(40r^2+28r-9)\\
d_{12} &= -\frac{1}{12288}(18M+7)(40r^2+28r-9)\\
d_{21} &= -\frac{1}{36864}(1+3M)(108r^2+186r+59)\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Für die gleich folgenden Graphen wurde die Entwicklung bis zur Ordnung $k = l = 6$ durchgeführt, also bis zu Termen $\sim exp(-12r)$.

In der so erhaltenen Entwicklung muß nur noch die r-Abhängigkeit durch eine Φ-Abhängigkeit ersetzt werden. Hierfür verwende ich den invertierten Ansatz (5.10) des Skalarfeldes.

$$r = -\ln\left|\frac{\Phi}{q}\right| \tag{5.13}$$

Dieser invertierte Ansatz überstreicht nur positive, bzw. nur negative Φ (je nach Vorzeichen von q). Die damit erhaltene Formel von $V(\Phi)$ gilt somit streng genommen nur für Φ eines Vorzeichens. Mit der Forderung nach $\Phi \to -\Phi$-Symmetrie (Abschnitt 4.6) setze ich den Graphen dann symmetrisch fort.

Auf diese Weise erhält man folgende Entwicklung als Endergebnis für V:

$$V(\Phi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(c_k(|\Phi|, M) + \sum_{l=1}^{\infty} d_{kl}(|\Phi|, M) \cdot q^{2l}\,\mathrm{Ei}\left(1, -2l\ln\left|\frac{\Phi}{q}\right|\right)\right) \cdot \Phi^{2k} \tag{5.14}$$

Hierbei sind die Koeffizienten c_k und d_{kl} größtenteils logarithmisch in $|\Phi|$.

Stellt man $V(\Phi)$ grafisch dar, so ergibt sich:

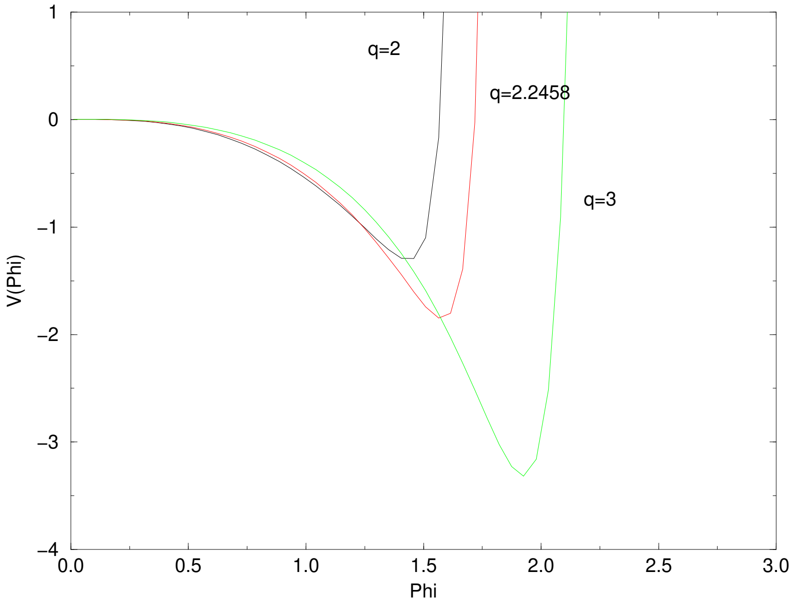

Abbildung 7: $V(\Phi)$ für $M = 1$ und unterschiedliche Werte des Parameters q

Wie man sehen kann, beeinflußt der Parameter q die Abmessungen des Graphen, nicht jedoch seinen qualitativen Verlauf.

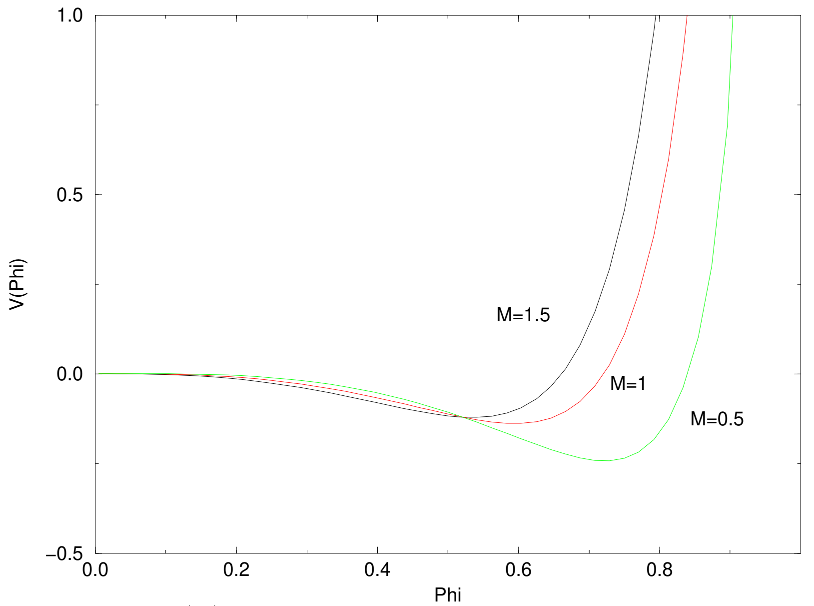

Abbildung 8: $V(\Phi)$ für $q = 1$ und unterschiedliche Werte des Parameters M

Der Parameter M scheint wie der Parameter q nur die Abmessungen des Graphen zu verändern.

Besonders interessant an dieser Lösung für das Selbstwechselwirkungspotential ist die Tatsache, daß es für $\Phi \to 0$ ein Minimum besitzt. Dies wird allerdings erst in der Vergrößerung deutlich:

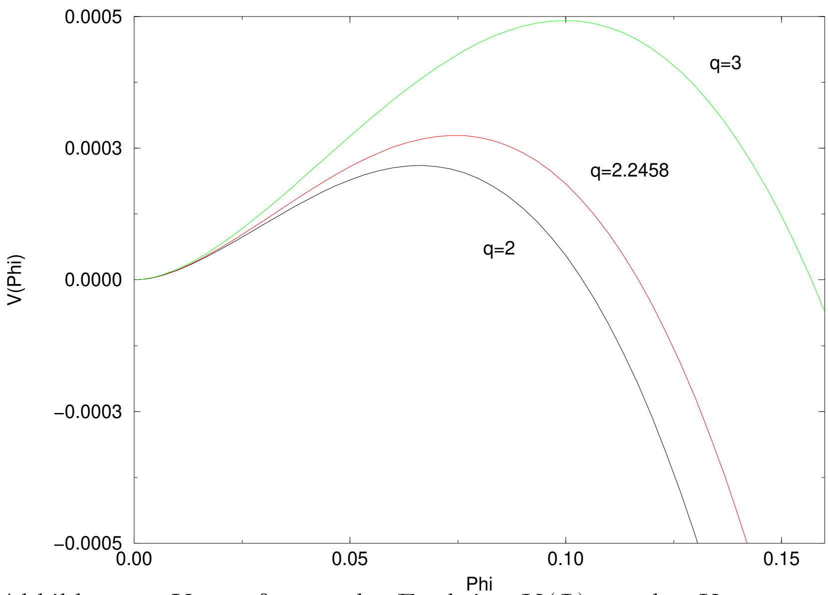

Abbildung 9: Vergrößerung der Funktion $V(\Phi)$ um den Ursprung für $M = 1$ und unterschiedliche Werte des Parameters q

Eine kurze Rechnung bestätigt dies. Für kleine Φ lautet der führende Term der Entwicklung:

$$\begin{aligned} V(\Phi) \quad &\xrightarrow{\Phi \to 0} \quad c_1 \cdot \Phi^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2M}{\ln \left| \frac{\Phi}{q} \right|} \right) \cdot \Phi^2 \\ &\xrightarrow{\Phi \to 0} \quad \frac{1}{2} \Phi^2 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Diese Lösung der statischen Gleichungen erfüllt somit die Forderung nach Vakuumstabilität (Abschnitt 4.5), wofür ein Minimum im Ursprung notwendig war.

Die logarithmischen Terme in der Entwicklung, die entstanden sind durch die Ersetzung (5.13), verhindern jedoch eine Taylorentwicklung um den Ursprung. Das Potential ist dort also nicht analytisch, wohl aber $\mathbb{C}^{\infty}$-glatt.

6 Störungen

Um später Aussagen über die Stabilität statischer Lösungen machen zu können, werden hier infinitesimale Störungen der statischen Lösungen untersucht. Dazu zerlege ich die Störungen zuerst in Tensormoden und vereinfache sie mit Hilfe einer Eichtransformation und einer Drehung. Diesen allgemeinen Störungsansatz fülle ich anschließend in die Bewegungsgleichungen und linearisiere sie mit der Forderung, daß die Störungen infinitesimal klein sein sollen. Die so erhaltenen Bewegungsgleichungen bringe ich schließlich zur besseren Analyse in die Form einer Schrödinger-Gleichung.

Dieser Weg wurde zuerst 1957 von Regge und Wheeler [7] beschrieben, die damit die Stabilität der Schwarzschild-Metrik gegenüber Störungen ungerader Parität nachwiesen. Der Nachweis der Stabilität gegenüber Störungen gerader Parität gelang 1969 Vishveshwara [8] in Kruskalkoordinaten. Ein zum Vorgehen von Regge und Wheeler analoger Nachweis von Zerilli [9] vervollständigte die Arbeiten.

Da es sich hier bei uns um den allgemeineren Fall eines durch ein Skalarfeld mit beliebigem Selbstwechselwirkungspotential deformierten Schwarzen Loches handelt, erhält man im Grenzübergang zum feldfreien Fall ($\Phi \to 0, V(\Phi) \to 0, G \to 1 - \frac{2M}{r}, R \to r$) die von Regge, Wheeler, Vishveshwara und Zerilli beschriebenen Gleichungen.

6.1 Modenzerlegung

Die Abweichung von der statischen, kugelsymmetrischen Metrik g_{ij} sei im folgenden h_{ij} und die Abweichung von der statischen Feldverteilung Φ im folgenden ϕ, beide infinitesimal klein. Zusammen also:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{tot} &= g_{ij} + h_{ij}, \qquad \text{(natürlich mit } h_{ij} = h_{ji}) \\ \Phi^{tot} &= \Phi + \phi \end{aligned} \tag{6.1}$$

Auf diese Weise betrachten wir die Störungen sozusagen als eigenständige Felder, die sich auf einem statischen, kugelsymmetrischen Hintergrund bewegen.

Das Noether-Theorem sagt uns dann sofort, daß die Störungen Erhaltungsgrößen entsprechend der Symmetrie des Hintergrundes besitzten. Hier also Energie, Drehimpuls und Parität.

Da ich nur infinitesimale Störungen betrachte, sind die Bewegungsleichungen zu linearisieren. Weil Lösungen linearer Differentialgleichungen superponierbar sind, darf ich die Störungen nach orthogonalen Funktionen (Moden) entwickeln.

Hierfür bieten sich natürlich die Eigenfunktionen des Energie-, des Drehimpuls- und des Paritätsoperators an, denn die Bewegungsgleichungen können die Moden nicht untereinander mischen (Erhaltungsgrößen).

Ich kann daher die Bewegungsgleichungen für eine einzelne Mode (mit konkreter Energie, konkretem Drehimpuls und konkreter Parität) lösen und anschließend die allgemeine Lösung durch Superposition erhalten.

Für Stabilitätsuntersuchungen gilt dann sogar: Existiert auch nur eine einzige Mode, die exponentiell anwächst, so ist das ganze System instabil

Die Entwicklung nach Energie und Drehimpuls ist schnell gemacht. Energieeigenfunktionen sind:

$$e^{i\omega t}$$

Also Schwingungen zu einer bestimmten Frequenz w.

Drehimpulseigenfunktionen sind die bekannten Kugelfunktionen:

$$Y_L^M(\vartheta, \varphi)$$

mit ganzzahligen Indizes $L = 0, 1, 2, \dots$ und $M = -L, \dots, L$.

Schwieriger wird es bei den Eigenfunktionen der Parität.

6.2 Tensormoden

Hätten wir nur Skalarfelder, wäre die Paritätsunterscheidung überfllüssig. Die Kugelfunktionen Y_L^M sind bereits Eigenfunktionen des Paritätsoperators, und zwar mit Parität $(-1)^L$. Die Störung der Metrik h_{ij} ist jedoch ein Tensorfeld, es enthält Richtungsinformationen, die bei einer Paritätsoperation nicht unbeeinflußt bleiben.

Zur Aufteilung des Tensorfeldes in einen Teil mit gerader und einen mit ungerader Parität, ist es nützlich, das Verhalten der einzelnen Komponenten der Störungen h_{ij} unter allgemeinen Drehungen D zu betrachten.

In Kugelkoordinaten mischen Drehungen D nur die Koordinaten ϑ und φ neu. Die allgemeine Drehung

$$D := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & d_{11} & d_{12} \\ & & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

mit einer 2×2-Matrix d hat dann folgende Wirkung auf die Komponenten der Störungen h_{ij}:

$$D^T h D = \begin{pmatrix} (h_{tt}) & (h_{tr}) & (h_{t\vartheta}, h_{t\varphi})\, d \\ (h_{tr}) & (h_{rr}) & (h_{r\vartheta}, h_{t\varphi})\, d \\ d^T \begin{pmatrix} h_{t\vartheta} \\ h_{t\varphi} \end{pmatrix} & d^T \begin{pmatrix} h_{r\vartheta} \\ h_{r\varphi} \end{pmatrix} & d^T \begin{pmatrix} h_{\vartheta\vartheta} & h_{\vartheta\varphi} \\ h_{\vartheta\varphi} & h_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} d \end{pmatrix}$$

Man sieht deutlich, daß sich die Komponenten nach ihrem Transformationsverhalten gruppieren lassen:

3	Skalare:	h_{tt}, h_{tr} und h_{rr}
2	Vektoren:	$\begin{pmatrix} h_{t\vartheta} \\ h_{t\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_{r\vartheta} \\ h_{r\varphi} \end{pmatrix}$
1	Matrix:	$\begin{pmatrix} h_{\vartheta\vartheta} & h_{\vartheta\varphi} \\ h_{\vartheta\varphi} & h_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$

Die drei Skalare haben, wie alle Skalare, gerade Parität, die Vektoren und die Matrix werde ich auf eine neue Basis beziehen, bei der der eine Basisvektor gerade und der andere ungerade Parität besitzt. Ich verwende hierfür den Gradienten und den Pseudogradienten:

$$\begin{aligned} E^+_\alpha &:= \mathcal{D}_\alpha &&= \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\vartheta \\ \mathcal{D}_\varphi \end{pmatrix} && \text{hat gerade Parität} \\ E^-_\alpha &:= \sqrt{-g}\cdot\epsilon_\alpha{}^\beta\mathcal{D}_\beta &&= \begin{pmatrix} -1/\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\varphi \\ \sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta \end{pmatrix} && \text{hat ungerade Parität} \end{aligned}$$

Griechische Indizes laufen hier und im folgenden nur über ϑ und φ, um obige Zweier-Vektoren, bzw. Zweier-Matrizen kompakter schreiben zu können. $\epsilon_{\alpha\beta}$ ist daher der auf die ϑ und φ-Komponenten beschränkte total antisymmetrische Tensor.

Die kovarianten Ableitungen wirken auf die Kugelfunktionen, die später hintenangestellt werden. Für die folgenden Betrachtungen ist es angenehmer, sie nicht mitzuschreiben.

Die unterschiedliche Parität beider Vektoren kann man schnell einsehen, wenn man sich überlegt, daß in Kugelkoordinaten eine Paritätsoperation nur $\vartheta \to \vartheta + \pi$ bewirkt, und damit $\sin\vartheta \to -\sin\vartheta$.

Die beiden neuen Basisvektoren stehen bezüglich der Restmetrik (wenn man nur die Indizes ϑ und φ betrachtet) auch senkrecht aufeinander:

$$g^{\alpha\beta}E^-_\alpha E^+_\beta = \sqrt{-g}\cdot\epsilon^{\alpha\beta}\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta = 0$$

Das funktioniert nur, wenn hinter den kovarianten Ableitungen eine skalare Funktion f steht (hier $f := Y_L^M(\vartheta,\varphi)\cdot\exp(i\omega t)$).

In diesem Fall ist $\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta$ symmetrisch:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta f &= (\partial_\alpha \mathcal{D}_\beta - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \mathcal{D}_\gamma) f \\
&= (\partial_\alpha \partial_\beta - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \mathcal{D}_\gamma) f \\
&= (\partial_\beta \partial_\alpha - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha} \mathcal{D}_\gamma) f \\
&= (\partial_\beta \mathcal{D}_\alpha - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha} \mathcal{D}_\gamma) f \quad = \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha f
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

Kontrahiert mit dem antisymmetrischen $\epsilon^{\alpha\beta}$ ergibt sich daher Null.

Einen beliebigen Vektor V kann man mit diesen beiden neuen Basisvektoren in zwei Anteile unterschiedlicher Parität aufteilen:

$$
V_\alpha = \underbrace{v_1 \cdot E^+_\alpha}_{\text{gerade}} + \underbrace{v_2 \cdot E^-_\alpha}_{\text{ungerade}}
$$

$$
= \begin{pmatrix} v_1 \mathcal{D}_\vartheta \\ v_1 \mathcal{D}_\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_2 / \sin\vartheta \cdot \mathcal{D}_\varphi \\ v_2 \sin\vartheta \cdot \mathcal{D}_\vartheta \end{pmatrix}
$$

Eine beliebige symmetrische Matrix $M_{\alpha\beta}$ ebenfalls:

$$
M_{\alpha\beta} = \underbrace{m_1 \cdot E^+_\alpha E^+_\beta + m_2 \cdot E^-_\alpha E^-_\beta}_{\text{gerade}} + \underbrace{m_3 \cdot E^+_\alpha E^-_\beta}_{\text{ungerade}} \quad + (\alpha \leftrightarrow \beta)
$$

$$
= \begin{pmatrix} 2m_1 \mathcal{D}^2_\vartheta + 2m_2 / \sin^2\vartheta \cdot \mathcal{D}^2_\varphi & (m_1 - m_2)(\mathcal{D}_\vartheta \mathcal{D}_\varphi + \mathcal{D}_\varphi \mathcal{D}_\vartheta) \\ (m_1 - m_2)(\mathcal{D}_\vartheta \mathcal{D}_\varphi + \mathcal{D}_\varphi \mathcal{D}_\vartheta) & 2m_1 \mathcal{D}^2_\varphi + 2m_2 \sin^2\vartheta \cdot \mathcal{D}^2_\vartheta \end{pmatrix}
$$

$$
+ \begin{pmatrix} -m_3 / \sin\vartheta \cdot (\mathcal{D}_\vartheta \mathcal{D}_\varphi + \mathcal{D}_\varphi \mathcal{D}_\vartheta) & m_3 (\sin\vartheta \cdot \mathcal{D}^2_\vartheta - 1/\sin\vartheta \cdot \mathcal{D}^2_\varphi) \\ m_3 (\sin\vartheta \cdot \mathcal{D}^2_\vartheta - 1/\sin\vartheta \cdot \mathcal{D}^2_\varphi) & m_3 \sin\vartheta \cdot (\mathcal{D}_\vartheta \mathcal{D}_\varphi + \mathcal{D}_\varphi \mathcal{D}_\vartheta) \end{pmatrix}
$$

Hierbei ist $\alpha \leftrightarrow \beta$ eine Kurzschreibweise für eine Symmetrisierung, also einer Addition aller vorigen Terme mit vertauschten Indizes α und β.

Da die doppelten kovarianten Ableitungen auf eine skalare Funktion wirken, darf ich sie mit (6.3) zu einem einzigen Term addieren.

Mit dem Wissen, daß die Ableitungen gleich auf Kugelfunktionen wirken werden, und mit der definierenden Eigenschaft der Kugelfunktionen

$$
\begin{aligned}
&\triangle_{\vartheta,\varphi} Y^M_L = -L(L+1) Y^M_L \\
&\text{mit} \quad \triangle_{\vartheta,\varphi} := R^2 \cdot \, g^{\alpha\beta} \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_\beta
\end{aligned}
$$

läßt sich außerdem der erste Summand (der gerade) noch vereinfachen:

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2(m_1-m_2)\mathcal{D}_\vartheta^2 - 2m_2L(L+1) & 2(m_1-m_2)\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi \\ 2(m_1-m_2)\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi & 2(m_1-m_2)\mathcal{D}_\varphi^2 - 2m_2L(L+1)\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -2m_3/\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi & m_3(\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta^2 - 1/\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\varphi^2) \\ m_3(\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta^2 - 1/\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\varphi^2) & 2m_3\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi \end{pmatrix}$$

Nach einer Redefinition ($m_1 \to m_1 + m_2, -2L(L+1)\ m_2 \to m_2$) erhalte ich schließlich:

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2m_1\mathcal{D}_\vartheta^2 + m_2 & 2m_1\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi \\ 2m_1\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi & 2m_1\mathcal{D}_\varphi^2 + m_2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -2m_3/\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi & m_3(\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta^2 - 1/\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\varphi^2) \\ m_3(\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta^2 - 1/\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\varphi^2) & 2m_3\sin\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi \end{pmatrix}$$

Verwendet man dies nun alles, um die Störungen in einzelne Moden konkreter Frequenz w, Drehimpulsquantenzahlen L und M, und Parität (gerade und ungerade) zu zerlegen, so ergibt sich:

Für die geraden Störungen:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_4\mathcal{D}_\vartheta & h_4\mathcal{D}_\varphi \\ h_2 & h_3 & h_5\mathcal{D}_\vartheta & h_5\mathcal{D}_\varphi \\ h_4\mathcal{D}_\vartheta & h_5\mathcal{D}_\vartheta & 2h_6\mathcal{D}_\vartheta^2 + h_7 & 2h_6\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi \\ h_4\mathcal{D}_\varphi & h_5\mathcal{D}_\varphi & 2h_6\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi & 2h_6\mathcal{D}_\varphi^2 + h_7\sin^2\vartheta \end{pmatrix} Y_L^M(\vartheta,\varphi)e^{i\omega t}$$
$$\phi = \phi(r)\cdot Y_L^M(\vartheta,\varphi)e^{i\omega t} \tag{6.4}$$

Und für die ungeraden Störungen:

$$h_{ij} = \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_8\cdot\mathcal{D}_\varphi & h_8\sin^2\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta \\ 0 & 0 & -h_9\cdot\mathcal{D}_\varphi & h_9\sin^2\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta \\ -h_8\cdot\mathcal{D}_\varphi & -h_9\cdot\mathcal{D}_\varphi & -2h_{10}\cdot\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi & h_{10}(\sin^2\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta^2 - \mathcal{D}_\varphi^2) \\ h_8\sin^2\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta & h_9\sin^2\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta & h_{10}(\sin^2\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta^2 - \mathcal{D}_\varphi^2) & 2h_{10}\sin^2\vartheta\cdot\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi \end{pmatrix}$$
$$\cdot Y_L^M(\vartheta,\varphi)e^{i\omega t} \tag{6.5}$$
$$\phi = 0$$

Die Kugelfunktionen Y_L^M steuern zur Parität noch $(-1)^L$ bei. Trotzdem möchte ich hier die Bezeichnung gerade/ungerade[8] beibehalten. Gerade Störungen seien also hinfort die Störungen mit Parität $(-1)^L$, ungerade Störungen die mit Parität $(-1)^{L+1}$.

h_1 bis h_{10} , die ursprünglichen 10 Freiheitsgrade der Metrik, sind hier nur noch Funktionen von r.

Beachtenswert hierbei ist insbesondere, daß das Skalarfeld nur an den Schwingungen gerader Parität teilnimmt. Die ungeraden Schwingungen sind daher rein gravitativ.

Die Unterscheidung der Moden nach Parität, Drehimpuls und Energie ist somit perfekt. Nun gilt es, das Ergebnis zu vereinfachen.

6.3 Eine Eichtransformation

Eine Möglichkeit, die Moden noch zu vereinfachen, ist eine Koordinatenransformation. Obwohl der statische, kugelsymmetrische Hintergrund g_{ij} schon festliegt, kann durch eine infinitesimale Transformation der Koordinaten x^i das Erscheinungsbild der ebenfalls infinitesimalen Schwingungsmoden noch verändert werden. Die Koordinatentransformation dazu sei

$$x'^i = x^i + \xi^i$$

Hierbei ist ξ ortsabhängig und infinitesimal klein, aber von der gleichen Größenordnung wie die Störungen der Metrik h_{ij}. Die gesamte Metrik transformiert dann wie folgt:

$$\begin{aligned} g'^{tot}_{ij}(x') &= g^{tot}_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \\ &= (g_{kl} + h_{kl}) \left(\delta^k_i - \frac{\partial \xi^k}{\partial x'^i} \right) \left(\delta^l_j - \frac{\partial \xi^l}{\partial x'^j} \right) \\ &\approx (g_{kl} + h_{kl}) \left(\delta^k_i - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \right) \left(\delta^l_j - \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \right) \\ &\approx g_{ij} + h_{ij} - g_{kj} \partial_i \xi^k - g_{ik} \partial_j \xi^k \end{aligned}$$

[8] in der Literatur finden sich auch manchmal die Bezeichnungen elektrisch/magnetisch.

Terme von höherer als erster Ordnung in den Störungen wurden weggelassen, δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol.

Andererseits gilt auch:

$$\begin{aligned} {g'}^{tot}_{ij}(x') &= {g'}^{tot}_{ij}(x+\xi) \\ &\approx {g'}^{tot}_{ij} + \xi^l \partial_l {g'}^{tot}_{ij} \\ &\approx {g'}^{tot}_{ij} + \xi^l \partial_l g^{tot}_{ij} \\ &\approx g'_{ij} + h'_{ij} + \xi^l \partial_l g_{ij} \end{aligned}$$

Zusammen ergibt das:

$$\begin{aligned} g'_{ij} + h'_{ij} &\approx g_{ij} + h_{ij} - g_{kj}\partial_i \xi^k - g_{ik}\partial_j \xi^k - \xi^l \partial_l g_{ij} \\ &= g_{ij} + h_{ij} - g_{kj}\mathcal{D}_i \xi^k + g_{kj}{\Gamma^k}_{il}\xi^l - g_{ik}\mathcal{D}_j\xi^k + g_{ik}{\Gamma^k}_{jl}\xi^l - \xi^l\partial_l g_{ij} \\ &= g_{ij} + h_{ij} - \mathcal{D}_i\xi_j - \mathcal{D}_j\xi_i - \xi^l \underbrace{(\partial_l g_{ij} - {\Gamma^k}_{li} g_{kj} - {\Gamma^k}_{lj} g_{ik})}_{=\mathcal{D}_l\, g_{ij} = 0} \\ &= g_{ij} + h_{ij} - \mathcal{D}_i\xi_j - \mathcal{D}_j\xi_i \end{aligned}$$

Da die Hintergrundmetrik hiermit nicht transformiert werden soll, gilt $g'_{ij} = g_{ij}$ und somit[9]:

$$h'_{ij} = h_{ij} - \mathcal{D}_i\xi_j - \mathcal{D}_j\xi_i \tag{6.6}$$

Die Störung ϕ des Skalarfeldes transformiert ebenfalls. Dies kann man sich folgendermaßen klarmachen:

Das gesamte Skalarfeld Φ^{tot} soll (als Skalarfeld) invariant gegenüber Koordinatentransformationen sein, also:

$$\begin{aligned} {\Phi'}^{tot}(x') &= \Phi^{tot} \\ &= \Phi + \phi \end{aligned}$$

[9] Soll das gesamte System, inklusive der Störungen invariant unter dieser Transformation sein, so erhält man hieraus die berühmte Killing-Gleichung $\mathcal{D}_i\xi_j + \mathcal{D}_j\xi_i = 0$.

Andererseits gilt auch:

$$\begin{aligned}
\Phi'^{\,tot}(x') &= \Phi'^{\,tot}(x+\xi) \\
&\approx \Phi'^{\,tot} + \xi^i \partial_i \Phi'^{\,tot} \\
&\approx \Phi'^{\,tot} + \xi^i \partial_i \Phi^{tot} \\
&\approx \Phi' + \phi' + \xi^i \partial_i \Phi \\
&= \Phi' + \phi' + g^{ij} \xi_i \partial_j \Phi
\end{aligned}$$

Das Hintergrundfeld soll wieder nicht transformiert werden ($\Phi' = \Phi$). Dann ergibt sich zusammen:

$$\phi' = \phi - g^{ij} \xi_i \partial_j \Phi$$

Legt man nun den kugelsymmetrischen Ansatz (3.1) und (3.2) zugrunde, wird daraus:

$$\phi' = \phi - G \xi_r \partial_r \Phi \tag{6.7}$$

Die Störung des Skalarfeldes ϕ transformiert also nur mit, wenn die Radialkoordinate r geändert wird.

Das gesamte Transformationsgesetz lautet somit:

$$h'_{ij} = h_{ij} - \mathcal{D}_i \xi_j - \mathcal{D}_j \xi_i \tag{6.8}$$

$$\phi' = \phi - G \xi_r \partial_r \Phi \tag{6.9}$$

6.4 Anwendung auf die Schwingungsmoden

Um nun zu sehen, wie man mit einer solchen Transformation die beiden Anteile (6.4) und (6.5) von h_{ij} vereinfachen kann, zerlege ich ξ ebenfalls in einzelne Moden. Dazu schaue ich mir wieder das Verhalten unter räumlichen Drehungen an:

$$D \cdot \xi_i = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ d \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Hierbei sind D und d die schon verwendeten Drehmatrizen (6.2).

Es liegen also vor:

$$\text{2 Skalare:} \quad \xi_0 \quad \text{und} \quad \xi_1$$

$$\text{1 Vektor:} \quad \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Die Modenzerlegung von ξ in Energie- und Impulseigenfunktionen, sowie die Aufteilung in Anteile gerader und ungerader Parität ergibt demnach:

$$\xi_i = \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_+ \mathcal{D}_\vartheta \\ \xi_+ \mathcal{D}_\varphi \end{pmatrix} \cdot Y_L^M(\vartheta, \varphi)\, e^{i\omega t}}_{gerade} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\xi_- / \sin\vartheta \cdot \mathcal{D}_\varphi \\ \xi_- \sin\vartheta \cdot \mathcal{D}_\vartheta \end{pmatrix} \cdot Y_L^M(\vartheta, \varphi)\, e^{i\omega t}}_{ungerade} \tag{6.10}$$

Hierbei sind ξ_0, ξ_1, ξ_+ und ξ_- nur noch Funktionen von r.

Mit diesen 4 frei wählbaren Funktionen ist es nun möglich, 4 der Freiheitsgrade der Störungen h_{ij} aus (6.4) und (6.5) zu eliminieren, und zwar 3 gerade (h_4, h_5, h_6) und einen ungeraden (h_{10}):

- Ich transformiere die Störungen h_{ij} zuerst mit

$$\xi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_+ \mathcal{D}_\vartheta \\ \xi_+ \mathcal{D}_\varphi \end{pmatrix} \cdot Y_L^M(\vartheta, \varphi) e^{i\omega t}$$

  und erhalte:

$$-\mathcal{D}_i \xi_j - \mathcal{D}_j \xi_i =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\xi_+ \mathcal{D}_t \mathcal{D}_\vartheta & -\xi_+ \mathcal{D}_t \mathcal{D}_\varphi \\ 0 & 0 & -\mathcal{D}_r \xi_+ \mathcal{D}_\vartheta & -\mathcal{D}_r \xi_+ \mathcal{D}_\varphi \\ -\xi_+ \mathcal{D}_t \mathcal{D}_\vartheta & -\mathcal{D}_r \xi_+ \mathcal{D}_\vartheta & -2\xi_+ \mathcal{D}_\vartheta^2 & -2\xi_+ \mathcal{D}_\vartheta \mathcal{D}_\varphi \\ -\xi_+ \mathcal{D}_t \mathcal{D}_\varphi & -\mathcal{D}_r \xi_+ \mathcal{D}_\varphi & -2\xi_+ \mathcal{D}_\vartheta \mathcal{D}_\varphi & -2\xi_+ \mathcal{D}_\varphi^2 \end{pmatrix} \cdot Y_L^M(\vartheta, \varphi) e^{i\omega t}$$

  Mit der Wahl $\xi_+ = h_6$ läßt sich der Freiheitsgrad h_6 aus (6.4) vollständig eliminieren. Die Auswirkungen auf die übrigen Komponenten können durch Redefinition ($h_4 \to h_4 + \xi_+ \mathcal{D}_t, h_5 \to h_5 + \mathcal{D}_r \xi_+$) absorbiert werden.

- Dann transformiere ich die Störungen h_{ij} mit

$$\xi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\xi_-/\sin\vartheta \cdot \mathcal{D}_\varphi \\ \xi_- \sin\vartheta \cdot \mathcal{D}_\vartheta \end{pmatrix} \cdot Y_L^M(\vartheta,\varphi) e^{i\omega t}$$

und erhalte:

$$-\mathcal{D}_i\xi_j - \mathcal{D}_j\xi_i = \frac{1}{\sin\vartheta} \cdot$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_-\mathcal{D}_t\mathcal{D}_\varphi & -\xi_- \sin^2\vartheta\mathcal{D}_t\mathcal{D}_\vartheta \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_r\xi_-\mathcal{D}_\varphi & -\mathcal{D}_r\xi_- \sin^2\vartheta\mathcal{D}_\vartheta \\ \xi_-\mathcal{D}_t\mathcal{D}_\varphi & \mathcal{D}_r\xi_-\mathcal{D}_\varphi & 2\xi_-\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi & -\xi_-(\sin^2\vartheta\mathcal{D}_\vartheta^2 - \mathcal{D}_\varphi^2) \\ -\xi_- \sin^2\vartheta\mathcal{D}_t\mathcal{D}_\vartheta & -\mathcal{D}_r\xi_- \sin^2\vartheta\mathcal{D}_\vartheta & -\xi_-(\sin^2\vartheta\mathcal{D}_\vartheta^2 - \mathcal{D}_\varphi^2) & -2\xi_- \sin^2\vartheta\mathcal{D}_\vartheta\mathcal{D}_\varphi \end{pmatrix}$$
$$\cdot Y_L^M(\vartheta,\varphi) e^{i\omega t}$$

Mit der Wahl $\xi_- = h_{10}$ läßt sich diesmal der Freiheitsgrad h_{10} aus (6.5) eliminieren. Die Auswirkungen auf die übrigen Komponenten können durch Redefinition ($h_8 \to h_8 + \xi_-\mathcal{D}_t, h_9 \to h_9 + \mathcal{D}_r\xi_-$) absorbiert werden.

- Anschließend transformiere ich die Störungen h_{ij} mit

$$\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot Y_L^M(\vartheta,\varphi) e^{i\omega t}$$

und erhalte:

$$-\mathcal{D}_i\xi_j - \mathcal{D}_j\xi_i = \begin{pmatrix} -2\xi_0\mathcal{D}_t & -\mathcal{D}_r\xi_0 & -\xi_0\mathcal{D}_\vartheta & -\xi_0\mathcal{D}_\varphi \\ -\mathcal{D}_r\xi_0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_0\mathcal{D}_\vartheta & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_0\mathcal{D}_\varphi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y_L^M(\vartheta,\varphi) e^{i\omega t}$$

Mit der Wahl $\xi_0 = h_4$ läßt sich der Freiheitsgrad h_4 aus (6.4) vollständig eliminieren. Die Auswirkungen auf die übrigen Komponenten können wieder durch Redefinition ($h_1 \to h_1 + 2\xi_0\mathcal{D}_t, h_2 \to h_2 + \mathcal{D}_r\xi_0$) absorbiert werden.

- Zum Schluß transformiere ich die Störungen h_{ij} mit

$$\xi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot Y_L^M(\vartheta,\varphi) e^{i\omega t}$$

und erhalte:

$$-\mathcal{D}_i\xi_j - \mathcal{D}_j\xi_i = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{D}_t\xi_1 & 0 & 0 \\ -\mathcal{D}_t\xi_1 & -2\mathcal{D}_r\xi_1 & -\mathcal{D}_\vartheta\xi_1 & -\xi_1\mathcal{D}_\varphi \\ 0 & -\mathcal{D}_\vartheta\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_1\mathcal{D}_\varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y_L^M(\vartheta,\varphi)e^{i\omega t}$$

Mit der Wahl $\xi_1 = h_5$ läßt sich diesmal der Freiheitsgrad h_5 aus (6.4) eliminieren. Die Auswirkungen auf die übrigen Komponenten und das Skalarfeld können ebenso durch Redefinition ($h_2 \to h_2 + \mathcal{D}_t\xi_1, h_3 \to h_3 + 2\mathcal{D}_r\xi_1, \phi \to \phi + G\xi_1\partial_r\Phi$) absorbiert werden.

Nachdem ich nun 4 Freiheitsgrade durch Eichfixierung eliminiert habe, sehen die Störungen aus wie folgt:

Für die geraden Störungen:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & 0 & 0 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_7\sin^2\vartheta \end{pmatrix} Y_L^M(\vartheta,\varphi)e^{i\omega t}$$

$$\phi = \phi(r) \cdot Y_L^M(\vartheta,\varphi)e^{i\omega t} \tag{6.11}$$

Und für die ungeraden Störungen:

$$h_{ij} = \frac{1}{\sin\vartheta}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_8 \cdot \mathcal{D}_\varphi & h_8\sin^2\vartheta \cdot \mathcal{D}_\vartheta \\ 0 & 0 & -h_9 \cdot \mathcal{D}_\varphi & h_9\sin^2\vartheta \cdot \mathcal{D}_\vartheta \\ -h_8 \cdot \mathcal{D}_\varphi & -h_9 \cdot \mathcal{D}_\varphi & 0 & 0 \\ h_8\sin^2\vartheta \cdot \mathcal{D}_\vartheta & h_9\sin^2\vartheta \cdot \mathcal{D}_\vartheta & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y_L^M(\vartheta,\varphi)e^{i\omega t}$$

$$\phi = 0 \tag{6.12}$$

6.5 Eine Drehung

Durch die Modenzerlegung konnten wir uns auf jede Mode einzeln konzentrieren. Eine Eichtransformation machte es möglich, die Zahl der Freiheitsgrade zu reduzieren. Jetzt ist nur noch eine Vereinfachung der Schreibweise möglich. Dazu folgender Gedanke:

Der statische Hintergrund unserer betrachteten Störungsfelder ist kugelsymmetrisch, die Störungsmoden sind es nicht. Zur Entwicklung in Tensormoden habe ich eine willkürliche Achse ausgezeichnet (die z-Achse), denn der Index M an den Kugelfunktionen Y_L^M gibt die Orientierung der Mode zur z-Achse an.

Da nun das Problem jedoch kugelsymmetrisch ist, wird der Index M keinerlei Auswirkungen auf die Bewegungsgleichung der Mode haben. Er wird nur wichtig, wenn wir, nachdem wir die Bewegungsgleichungen für die Radialfunktionen gelöst haben, die vollständige Lösung aus den einzelnen Moden superponieren. Für die Frage nach der Stabilität jeder einzelnen Mode ist er sogar völlig ohne Bedeutung.

Ich werde ihn daher so wählen, daß meine Gleichungen eine besonders einfache Form annehmen. Dies ist der Fall bei $M = 0$. Ich führe also sozusagen für jede einzelne Mode eine Drehung durch, die M auf Null bringt.

Für $M = 0$ ist die Kugelfunktion überhaupt nicht mehr von φ abhängig. Sie läßt sich dann durch ein Legendre-Polynom[10] darstellen:

$$Y_L^0(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \cdot P_L(\cos\vartheta)$$

Die störende Wurzel ist eine Konstante die ich ohne weiteres in meine verbliebenen Freiheitsgrade h_1 bis h_3 und h_7 bis h_9 absorbieren kann.

Weil die Legendre-Polynome keinerlei φ-Abhängigkeit haben, ist jede Ableitung nach diesem Winkel automatisch Null.

Die einzige verbliebene Ableitung ist nun nur noch die kovariante Anleitung nach ϑ, $\mathcal{D}_\vartheta$, die ich aus dem Tensor herausziehen kann. Da sie nur noch auf eine skalare Funktion, das Legendre-Polynom, wirkt, kann ich sie durch eine partielle Ableitung, ∂_ϑ, ersetzen.

[10] Zur Definition siehe z.B. [10].

Alles zusammen ergibt:

Für die geraden Störungen:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & 0 & 0 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_7 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} P_L(\cos\vartheta) e^{i\omega t}$$

$$\phi = \phi(r) \cdot P_L(\cos\vartheta) e^{i\omega t} \tag{6.13}$$

Und für die ungeraden Störungen:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_8 \\ 0 & 0 & 0 & h_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_8 & h_9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sin\vartheta \; \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta) e^{i\omega t}$$

$$\phi = 0 \tag{6.14}$$

Regge & Wheeler [7] bezeichneten diese spezielle Form der Schwingungsmoden als kanonisch (mit der Notation $h_1 \to H_0 \cdot G$, $h_2 \to H_0$, $h_3 \to H_2/G$, $h_7 \to K \cdot R^2$, $h_8 \to h_0$, $h_9 \to h_1$).

7 Ungerade Störungen

Wenden wir uns zunächst den ungeraden Störungen (6.14) zu. Ich setze den im vorigen Kapitel aufwendig hergeleiteten Störungsansatz für die ungeraden Störungen in die Bewegungsleichungen ein und linearisiere diese.

Um dann eine Trennung des Radialanteils vom winkelabhängigen Teil der Gleichungen zu erreichen, ist eine Fallunterscheidung notwendig, in der zwei Spezialfälle ($L = 0$ und $L = 1$) aussortiert werden.

Die verbliebenen reinen Radialgleichungen bringe ich schließlich in die Form einer Schrödinger-Gleichung. Um diese Analogie perfekt zu machen, müssen die zugelassenen Funktionenklassen überprüft und ein geeignetes Skalarprodukt gewählt werden.

Ist dies entschieden, ist es endlich möglich mit Hilfe von Eigenwertsätzen aus der Quantenmechanik eine Stabilitätsbedingung herzuleiten.

7.1 Differentialgleichungen

Ich fülle also den Störungsansatz (6.1)

$$\begin{aligned} g_{ij}^{tot} &= g_{ij} + h_{ij} \\ \Phi^{tot} &= \Phi + \phi \end{aligned}$$

mit den ungeraden Störungen (6.14)

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_8 \\ 0 & 0 & 0 & h_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_8 & h_9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sin\vartheta \; \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta) e^{i\omega t}$$

$$\phi = 0$$

in die Bewegungsgleichungen (2.9) und (2.10)

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}^i \partial_i \Phi - \partial_\Phi V(\Phi) \\ 0 &= R_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i \Phi \partial_j \Phi + \frac{1}{2} g_{ij} V(\Phi) \end{aligned}$$

und nehme dabei nur Terme linear in den Störungen h_8 und h_9.

Hierbei treten zweite und dritte Ableitungen der Legendre-Polynome $P_L(\cos\vartheta)$ auf, die ich mit Hilfe ihrer definierenden Eigenschaft

$$\partial_\vartheta^2 P_L(\cos\vartheta) = -\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \cdot \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta) - L(L+1) \cdot P_L(\cos\vartheta)$$

in ihrem Ableitungsgrad reduziere, bis nur noch Terme vom Grade 0 und 1 übrigbleiben.

Auf diese Weise erhält man nach einiger Rechnung schließlich drei Differentialgleichungen:

$$0 = \left[\left(\frac{1}{2} \frac{L(L+1)}{R^2} - \frac{R'G'}{R} + \frac{1}{2} V(\Phi) \right) \cdot \mathbf{h_8} + i\omega \frac{GR'}{R} \cdot \mathbf{h_9} + \frac{1}{2} i\omega G \cdot \mathbf{h}_9' + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} G \cdot \mathbf{h}_8'' \right] \cdot \sin\vartheta \, \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta) e^{i\omega t} \tag{7.1}$$

$$0 = \left[\left(\frac{\frac{1}{2}L(L+1) - 1}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{G} \right) \cdot \mathbf{h_9} + i\omega \frac{R'}{GR} \cdot \mathbf{h_8} - \frac{1}{2} \frac{i\omega}{G} \cdot \mathbf{h}_8' \right] \cdot$$
$$\cdot \sin\vartheta \, \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta) e^{i\omega t} \tag{7.2}$$

$$0 = \left[\frac{i\omega}{G} \cdot \mathbf{h_8} - G' \cdot \mathbf{h_9} - G \cdot \mathbf{h}_9' \right] \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{1}{2} L(L+1) \sin\vartheta \, P_L(\cos\vartheta) + \cos\vartheta \, \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta) \right) \cdot e^{i\omega t} \tag{7.3}$$

Dies sind die Elemente (0,3), (1,3) und (2,3) der Bewegungsgleichung (2.10) für das Gravitationsfeld, wobei in (7.2) die statischen Gleichungen (3.11) und (3.13) zur Elimination von R'' und V verwendet wurden.

Alle übrigen Elemente sind Null bzw. symmetrisch, geben also keine weitere Information. Die Bewegungsgleichung (2.9) für das Skalarfeld gibt hier ebenfalls Null, es nimmt an ungeraden Schwingungen nicht teil.

7.2 Fallunterscheidung $L = 0$, $L = 1$ und $L \geq 2$

In den Differentialgleichungen lassen sich drei Anteile unterscheiden. Zum einen ein Radialfaktor, der ausschließlich von der Radialkoordinate r abhängt (eckig geklammert), dann ein Winkelfaktor, der ausschließlich von der verbliebenen Winkelkoordinate ϑ abhängt und schließlich ein reiner Zeitfaktor $\exp(i\omega t)$.

Da die Differentialgleichungen für alle Zeiten gelten, und der Zeitfaktor niemals Null werden kann, muß der Rest immer schon von sich aus Null sein.

Da die Differentialgleichungen auch für alle Winkel ϑ gelten, ist es naheliegend, den Radialteil ebenfalls Null zu setzen. Man muß jedoch achtgeben auf die Fälle, wo der winkelabhängige Anteil identisch Null ist und die Differentialgleichungen zur Identität degenerieren.

Daher folgende Fallunterscheidung:

- **Der Fall** $L = 0$**:**

  Hier ist $P_0(\cos\vartheta) = 1$, alle drei Gleichungen degenerieren und sind automatisch erfüllt.

  Dies ist aber auch nicht verwunderlich, da beide Störungsfreiheitsgrade h_8 und h_9 aus (6.14) verschwinden, es ist also gar keine ungerade Schwingung mit $L = 0$ möglich.

  Schwingungen zu $L = 0$ sind Monopolschwingungen. Ungerade Monopolschwingungen sind also prinzipiell nicht möglich.

- **Der Fall** $L = 1$**:**

  Hier ist $P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta$ und nur Gleichung (7.3) degeneriert.

  Dies hat zur Folge, daß h_8 und h_9 durch die Bewegungsgleichungen nicht mehr vollständig festgelegt werden und ihre Lösungen eine frei wählbare Funktion von r enthalten.

  Die Ursache hierfür liegt darin, daß der Störungsfreiheitsgrad h_{10} aus (6.5) von selbst vollständig verschwindet und nicht mehr in Kapitel 6.4 weggeeicht werden muß. Der somit „frei“ gewordene Eichfreiheitsgrad ξ_- aus (6.10) ist die Ursache für das Verschwinden der Gleichung (7.3) und der frei wählbaren Funktion in den Lösungen für h_8 und h_9.

  In der Tat kann man diesen ungenutzen Eichfreiheitsgrad ξ_- nun dafür verwenden, z.B. h_8 zu eliminieren:

  Dazu transformiere ich die Störungen h_{ij} mit

$$\xi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_- \end{pmatrix} \cdot \sin\vartheta\, \partial_\vartheta P_1(\cos\vartheta) e^{i\omega t}$$

  und erhalte:

$$-\mathcal{D}_i\xi_j - \mathcal{D}_j\xi_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\omega\xi_- \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{D}_r\xi_- \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\omega\xi_- & -\mathcal{D}_r\xi_- & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sin\vartheta\, \partial_\vartheta P_1(\cos\vartheta) e^{i\omega t}$$

  Mit der Wahl $i\omega\xi_- = h_8$ läßt sich der Freiheitsgrad h_8 eliminieren. Die Auswirkungen auf h_9 können wieder durch Redefinition ($h_9 \to h_9 + \mathcal{D}_r\xi_-$) absorbiert werden.

  Ich darf daher überall in den Bewegungsgleichungen (7.1) bis (7.3) h_8 Null setzen. Besonders Gleichung (7.2) nimmt dann eine einfache Form an:

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{G} \cdot \mathbf{h_9} \cdot \sin^2\vartheta\, e^{i\omega t} \tag{7.4}$$

Dies gilt für alle Winkel ϑ und alle Zeiten t, daher folgt: sofort:

$$\mathbf{h_9} = 0 \tag{7.5}$$

Es existiert keine ungerade Schwingung zu $L = 1$.

Schwingungen mit $L = 1$ sind Dipolschwingungen. Das Gravitationsfeld kann also keine ungeraden Dipolschwingungen durchführen (Das Skalarfeld schwingt bei ungeraden Moden sowieso nicht mit).

- **Der Fall $L \geq 2$:**

Hier endlich degeneriert keine der drei Differentialgleichungen mehr. Da alle drei Gleichungen für beliebige Winkel ϑ und alle Zeiten t gelten, muß ihr Radialanteil jeweils Null sein:

$$0 = \left(\frac{1}{2}\frac{L(L+1)}{R^2} - \frac{R'G'}{R} + \frac{1}{2}V(\Phi)\right) \cdot \mathbf{h_8} + i\omega\frac{GR'}{R} \cdot \mathbf{h_9} + \frac{1}{2}i\omega G \cdot \mathbf{h_9'} + \\ - \frac{1}{2}G \cdot \mathbf{h_8''} \tag{7.6}$$

$$0 = \left(\frac{\frac{1}{2}L(L+1) - 1}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{G}\right) \cdot \mathbf{h_9} + i\omega\frac{R'}{GR} \cdot \mathbf{h_8} - \frac{1}{2}\frac{i\omega}{G} \cdot \mathbf{h_8'} \tag{7.7}$$

$$0 = \frac{i\omega}{G} \cdot \mathbf{h_8} - G' \cdot \mathbf{h_9} - G \cdot \mathbf{h_9'} \tag{7.8}$$

Gleichung (7.6) ist abhängig von den anderen beiden, es gilt nämlich:

$$\frac{i\omega}{G} \cdot (\mathbf{7.6}) = \left(G\partial_r + G' + 2\frac{GR'}{R}\right) \cdot (\mathbf{7.7}) + \left(\frac{L(L+1)}{2} - 1\right)\frac{1}{R^2} \cdot (\mathbf{7.8})$$

Auch hierbei müssen allerdings wieder die statischen Gleichungen (3.11) und (3.13) zur Elimination von R'' und V verwenden werden.

Übrig bleiben die beiden unabhängigen Differentialgleichungen ersten

Grades für h_8 und h_9:

$$L \geq 2:$$

$$0 = \left(\frac{\frac{1}{2}L(L+1) - 1}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{G} \right) \cdot \mathbf{h_9} + i\omega \frac{R'}{GR} \cdot \mathbf{h_8} - \frac{1}{2}\frac{i\omega}{G} \cdot \mathbf{h_8'} \tag{7.9}$$

$$0 = \frac{i\omega}{G} \cdot \mathbf{h_8} - G' \cdot \mathbf{h_9} - G \cdot \mathbf{h_9'} \tag{7.10}$$

Bei $L = 2$ liegt der Quadrupol. Ungerade Schwingungen des Gravitationsfeldes sind also mindestens Quadrupolschwingungen.

7.3 Schrödinger-Form der Differentialgleichungen

Diese beiden Differentialgleichungen beschreiben die ungeraden Schwingungen vollständig. Würde man konkrete statische Lösungen für G und R vorgeben, so könnte man zumindest numerisch diese beiden Gleichungen lösen und eine vollständige Beschreibung der ungeraden Schwingungen erhalten.

Uns soll hier jedoch die Stabilitätsfrage interessieren und damit nur die möglichen Werte für ω. Speziell interessiert uns, ob ω auch einen negativen Imaginärteil haben kann. In diesem Fall würde nämlich die angenommene Zeitentwicklung der Schwingungsmoden

$$e^{i\omega t}$$

die Moden beliebig wachsen lassen, bis sie schließlich den Bereich der linearen Näherung, der hier betrachtet wird, verlassen. Die statische Lösung, die dem zugrunde liegt, wäre dann (linear) instabil.

Es ist nun möglich, Aussagen über den Wertebereich von ω zu machen, ohne die Differentialgleichungen (7.9) und (7.10) zu lösen. Dazu forme ich sie zuerst in eine Eigenwertgleichung für ω^2 um, indem ich (7.10) nach h_8 auflöse und in (7.9) einsetze:

$$\mathbf{h_8} = \frac{G}{i\omega} \cdot \left(G' \cdot \mathbf{h_9} + G\mathbf{h_9}' \right) \tag{7.11}$$

$$\left(2\frac{GG'R'}{R} - G'^2 - GG'' - \frac{G}{R^2}\left(L(L+1)-2\right)\right)\cdot \mathbf{h_9} + \\ + \left(2\frac{G^2R'}{R} - 3GG'\right)\cdot \mathbf{h}_9' - G^2 \cdot \mathbf{h}_9'' = \omega^2 \cdot \mathbf{h_9} \tag{7.12}$$

Gleichung (7.12) bestimmt nun die gesamte Dynamik. Hat man sie für h_9 gelöst, so läßt sich mittels (7.11) h_8 bestimmen.

Um nun über dieses Eigenwertproblem etwas aussagen zu können, wäre es schön, Sätze aus der Quantenmechanik verwenden zu können, die ja solche eindimensionalen Eigenwertprobleme zu Genüge behandeln. Für diesen Zweck ist es möglich, obige Differentialgleichung auf die Form einer Schrödinger-Gleichung zu bringen.

Störend sind hierfür die beiden Terme erster Ordnung in der Ableitung. Der eine verschwindet, wenn man eine neue dynamische Größe Ψ anstelle von h_9 einführt:

$$\Psi(\mathbf{r}) := \frac{G(r)}{R(r)} \cdot \mathbf{h_9}(\mathbf{r}) \tag{7.13}$$

Verwende ich dies in der Eigenwertgleichung oben, so erhalte ich:

$$\left(2\frac{G^2R'^2}{R^2} - \frac{GG'R'}{R} - \frac{G^2R''}{R} + \frac{G}{R^2}\left(L(L+1)-2\right)\right)\cdot \Psi + \\ - GG'\cdot\Psi' - G^2\cdot\Psi'' = \omega^2\cdot\Psi \tag{7.14}$$

Der andere Term erster Ordnung in der Ableitung wird gleich auf andere Weise verschwinden. Es gibt im Moment nämlich noch einen anderen wesentlichen Unterschied zur Schrödinger-Form, und zwar den Definitionsbereich der Funktion Ψ. Die Koordinate r läuft von 0 bis ∞, während im eindimensionalen Schrödinger-Problem die Koordinate von $-\infty$ bis ∞ geht.

Dem läßt sich abhelfen, indem ich eine neue Koordinate x einführe, mit:

$$dx := \frac{1}{G(r)} \cdot dr \tag{7.15}$$

Diese neue Koordinate x hat folgende Eigenschaften:

- Sie ist im ganzen Außenbereich des Schwarzen Loches ($r \in]h, \infty[$) regulär, da G hier ungleich Null ist.
- Sie ist im ganzen Außenbereich des Schwarzen Loches monoton steigend, da G hier positiv ist. Insbesondere ist deshalb $x(r)$ invertierbar zu $r(x)$. Die alte Koordinatenabhängigkeit läßt sich dort also jederzeit wiederherstellen.

- Für $r \to \infty$ geht G aufgrund asymptotischer Flachheit (Abschnitt 4.1) gegen 1. Somit gleichen sich dx und dr im Unendlichen an, so daß x ebenfals gegen Unendlich geht.

$$x \quad \xrightarrow{r \to \infty} \quad \infty$$

- Für $r \to h$ geht G gegen Null, so wurde der Ereignishorizont definiert (Abschnitt 4.2). dx wächst hierbei unendlich an, so daß x gegen $-\infty$ geht, wenn sich r von rechts dem Horizont nähert.

$$x \quad \xrightarrow{r \to h+} \quad -\infty$$

Die neue Koordinate x kann ich also verwenden, um den gesamten Außenbereich des Schwarzen Loches durchzuparametrisieren:

$$\begin{array}{ccc} r & \longleftrightarrow & x \\ [h, \infty] & \longleftrightarrow & [-\infty, \infty] \end{array}$$

Streng genommen interessiert uns ja auch nur der Außenbereich. Ist er stabil, bleibt der Horizont an seinem Ort und das Schwarze Loch bleibt (zumindest von außen gesehen) unverändert.

Verwende ich nun diese neue Koordinate in der Eigenwertgleichung (7.14), so schreibt sie sich:

$$-\partial_x^2 \Psi + \left(\frac{G}{R^2} \left(L(L+1) - 2 \right) + R \left(\partial_x^2 \frac{1}{R} \right) \right) \cdot \Psi = \omega^2 \Psi \tag{7.16}$$

Dies ist nun endlich die Form einer Schrödinger-Gleichung. Um die Analogie perfekt zu machen, muß noch untersucht werden, welche Funktionsklassen für Ψ erlaubt sind.

7.4 Der Hilbertraum der $\Psi(x)$

Ich untersuche die Funktion Ψ anhand ihrer Definition (7.13):

$$\Psi := \frac{G}{R} \cdot \mathbf{h_9}$$

Folgende Aussagen lassen sich treffen:

- Da h_9 als infinitesimale Störung angenommen wurde, ist h_9 überall beschränkt. Insbesondere Polstellen können nicht vorkommen. Zusammen mit der Tatsache, daß G und R im Außenbereich des Schwarzen Loches ebenfalls beschränkt sind („nackte" Singularitäten sind ausgeschlossen) und R hier auch keine Nullstelle besitzt, folgt daraus die Beschränktheit von Ψ über den gesamten Definitionsbereich.

$$\Psi(x) < \infty \qquad \forall x$$

- Für $r \to \infty$ soll die infinitesimale Störung h_9 irgendwann gegen Null gehen. Da G aufgrund asymptotischer Flachheit (Kapitel 4.1) gegen 1 geht, R gegen r, sowie r gegen x, ergibt sich zusammen:

$$\Psi(x \to \infty) < \frac{\text{const}}{x}$$

- Für $x \to -\infty$ ist die Sache komplizierter. Ich betrachte zuerst das Verhalten von $G(r)$ bei Annäherung an den Horizont h. Üblicherweise schneidet hier die Funktion G die r-Achse, d.h. sie besitzt am Horizont eine endliche Steigung, echt größer Null:

$$G(r) \xrightarrow{r \to h} \text{const}_1 \cdot (r-h) \qquad , \text{const}_1 > 0$$

  Ausnahmen hiervon müßten gesondert betrachtet werden, sie treten in den vorliegenden statischen Lösungen aber nicht auf.

  Dies führt zu folgendem asymptotischen Verhalten von x:

$$\begin{aligned} dx &\xrightarrow{r \to h+} \frac{\text{const}_2}{r-h} \cdot dr \\ x &\xrightarrow{r \to h+} \text{const}_2 \cdot \ln(r-h) + \text{const}_3 \\ r - h &\xrightarrow{x \to -\infty} \text{const}_4 \cdot e^{\text{const}_1 \cdot x} \end{aligned}$$

  Zusammen mit der Tatsache, daß R am Horizont gegen eine Konstante geht, läßt sich nun das asymptotische Verhalten von Ψ konstruieren:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\xrightarrow{x \to -\infty} \frac{\text{const}_1 \cdot (r-h)}{R(h)} \cdot h_9(h) \\ &\xrightarrow{x \to -\infty} \text{const}_5 \cdot e^{\text{const}_1 \cdot x} \end{aligned}$$

  Die Funktion $\Psi(x)$ geht hier also sogar exponentiell gegen Null.

Diese drei Aussagen garantieren, daß die Funktion $\Psi(x)$ quadratintegrabel ist. Dies benötige ich für die Definition eines vernünftigen Skalarproduktes:

$$< \Psi, \Omega > \;:= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi(x) \cdot \Omega(x)^* \tag{7.17}$$

Der Raum der zugelassenen Ψ (beschränkt, nach rechts kleiner $1/r$ abfallend, nach links exponentiell) bildet zusammen mit diesem Skalarprodukt einen Hilbertraum. Dieser Hilbertraum der Ψ ist ein Unterraum des Hilbertraums der quadratintegrablen Funktionen, die üblicherweise in der Quantenmechanik betrachtet werden.

Aus der Quantenmechanik ist bekannt, daß die Eigenfunktionen der Schrödinger-Gleichung eine vollständige Basis des Hilbertraumes darstellen. Folglich sind sie auch eine vollständige Basis des Unterraumes der Ψ-Funktionen.

Selbst wenn einzelne Eigenfunktionen nicht aus dem Raum der zugelassenen Ψ-Funktionen sind, lassen sie sich trotzdem mit anderen Eigenfunktionen in der Art superponieren, daß das Ergebnis wieder eine gültige Ψ-Funktion ist. Mehr noch, wegen der Beliebigkeit der Ψ-Funktionen im mittleren Teil finde ich zu jeder Eigenfunktion auch eine gültige Ψ-Funktion, die diese Eigenfunktion anteilig enthält.

Finde ich also nur eine einzige Eigenfunktion des Schrödinger-Problems, die sich am Ende als instabile Mode herausstellt, so lassen sich immer gültige Ψ-Funktionen konstruieren, die diese Mode enthalten, womit das gesamte System (linear) instabil wäre.

Das gesamte Problem ist nun also reduziert auf die Suche nach dem Eigenwertspektrum der Schrödinger-Gleichung

$$-\partial_x^2\Psi + \underbrace{\left(\frac{G}{R^2}\left(L(L+1)-2\right) + R\left(\partial_x^2\frac{1}{R}\right)\right)}_{V_{eff}} \cdot\Psi = \omega^2\Psi \tag{7.18}$$

7.5 Stabilitätsbedingung

Wie schon am Anfang des Abschnittes 7.3 dargestellt, entscheidet die Anwesenheit eines negativen Imaginärteils von ω die Frage nach Stabilität der zugehörigen Mode.

Der hier vorliegende Hamiltonoperator ist hermitesch, da G und R reell sind und ∂_x^2 hermitesch ist bezüglich des verwendeten Skalarproduktes (7.17). Die Eigenwerte ω^2 können daher nur reell sein.

Das ergibt zwei Fälle:

- $\omega^2 > 0$: In diesem Fall sind die beiden möglichen Werte für ω positiv und negativ reell, es handelt sich um eine stabile Mode.

- $\omega^2 < 0$: In diesem Fall sind die beiden möglichen Werte positiv und negativ imaginär, es exisitiert dann also eine Mode mit einem negativ imaginären ω, eine instabile Mode.

Das ganze Sytem wird demnach instabil, sobald die Schrödinger-Gleichung einen negativen Eigenwert besitzt.

Das effektive Potential $V_{eff}(x)$ aus unserer Schrödinger-Gleichung (7.18)

$$\begin{aligned} V_{eff} &:= \frac{G}{R^2}\left(L(L+1)-2\right) + R\partial_x^2\frac{1}{R} \\ &= \frac{G}{R^2}\left(L(L+1)-2\right) + RG\partial_r G\partial_r\frac{1}{R} \\ &= \frac{G}{R^2}\left(L(L+1)-2\right) + 2\frac{G^2R'^2}{R^2} - \frac{GG'R'}{R} - \frac{G^2R''}{R} \end{aligned}$$

gehört zu einer besonderen Klasse von Potentialen, es geht für $x \to \pm\infty$ gegen Null:

$$\begin{aligned} V_{eff} &\xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\left(L(L+1)-2\right) + 2\frac{1\cdot 0}{r^2} - \frac{1\cdot 0\cdot 0}{r} - \frac{1\cdot 0}{r} \\ &\xrightarrow{x\to\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{eff} &\xrightarrow{r\to h+} \frac{0}{R(h)^2}\left(L(L+1)-2\right) + 2\frac{0\cdot R'(h)^2}{R(h)^2} - \frac{0\cdot G'(h)R'(h)}{R(h)} - \frac{0\cdot R''(h)}{R(h)} \\ &\xrightarrow{x\to-\infty} 0 \end{aligned}$$

Für eindimensionale Schrödinger-Probleme mit solchen Potentialen gibt es eine klare Aussage über negative Eigenwerte (siehe dazu z.B. [11]):

> *Ist das Potential positiv definit, so exisitiert kein negativer Eigenwert.*

Da ein einziger negativer Eigenwert eine instabile Mode bedeuten würde, die das ganze Sytem auseinanderfallen ließe, ist dies eine hinreichende (jedoch nicht notwendige) Bedingung für Stabilität.

$$V_{eff}(x) = \frac{G}{R^2}\left(L(L+1)-2\right) + R\left(\partial_x^2\frac{1}{R}\right) \quad \overset{!}{\geq} \quad 0 \qquad \forall x \in [-\infty, +\infty]$$

Der erste Term im effektiven Potential, der die Rolle einer Drehimpulsbarriere spielt, wird geringer mit kleinerer Drehimpulsquantenzahl L. Die Schwingungen zu beliebigem L sind daher stabil, wenn die Schwingungen zum niedrigsten L stabil sind.

Das kleinstmögliche L ist 2, wie in der Fallunterscheidung in Abschnitt 7.2 festgestellt wurde. Hiermit formuliert sich die Stabilitätsbedingung dann wie folgt:

$$4\frac{G}{R^2} + R\left(\partial_x^2 \frac{1}{R}\right) \quad \overset{!}{\geq} \quad 0 \qquad \forall x \in [-\infty, +\infty]$$

Oder wieder mit der alten Koordinate r:

$$4\frac{G}{R^2} + 2\frac{G^2 R'^2}{R^2} - \frac{GG'R'}{R} - \frac{G^2 R''}{R} \quad \overset{!}{\geq} \quad 0 \qquad \forall r \in [h, +\infty] \tag{7.19}$$

Die beiden uns bekannten statischen Lösungen werden in Kapitel 9 mit dieser Bedingung auf Stabilität getestet.

8 Gerade Störungen

Nachdem der mathematische Apparat nun für die ungeraden Störungen entwickelt und erprobt wurde, ist es jetzt an der Zeit, ihn auf die wesentlich komplexeren geraden Störungen anzuwenden.

8.1 Differentialgleichungen

Ich fülle also wieder den Störungsansatz (6.1)

$$\begin{aligned} g_{ij}^{tot} &= g_{ij} + h_{ij} \\ \Phi^{tot} &= \Phi + \phi \end{aligned}$$

diesmal mit den geraden Störungen (6.13)

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & 0 & 0 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_7 \sin^2\vartheta \end{pmatrix} P_L(\cos\vartheta) e^{i\omega t}$$

$$\phi = \phi(r) \cdot P_L(\cos\vartheta) e^{i\omega t}$$

in die Bewegungsgleichungen (2.9) und (2.10)

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}^i \partial_i \Phi - \partial_\Phi V(\Phi) \\ 0 &= R_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i \Phi \partial_j \Phi + \frac{1}{2} g_{ij} V(\Phi) \end{aligned}$$

und nehme dabei wieder nur Terme linear in den Störungen, diesmal h_1, h_2, h_3, h_7 und ϕ.

Hierbei treten ebenfalls zweite und dritte Ableitungen der Legendre-Polynome $P_L(\cos\vartheta)$ auf, die ich wieder mit Hilfe ihrer definierenden Eigenschaft

$$\partial_\vartheta^2 P_L(\cos\vartheta) = -\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \cdot \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta) - L(L+1) \cdot P_L(\cos\vartheta)$$

in ihrem Ableitungsgrad reduziere, bis nur noch Terme vom Grade 0 und 1 übrigbleiben.

Auf diese Weise erhält man nach einiger Rechnung diesmal 8 Differentialgleichungen, was einem die erhöhte Komplexität gegenüber den ungeraden Störungen deutlich vor Augen führt:

$$
\begin{aligned}
0 = \Bigg[& \frac{1}{2}\frac{G'\Phi'}{G}\cdot\mathbf{h_1} + i\omega\Phi'\cdot\mathbf{h_2} + \left(-G^2\Phi'' - \frac{3}{2}GG'\Phi' - 2\frac{G^2R'\Phi'}{R}\right)\cdot\mathbf{h_3} + \\
& - 2\frac{GR'\Phi'}{R^3}\cdot\mathbf{h_7} + \left(-\frac{L(L+1)}{R^2} + \frac{\omega^2}{G} - \partial_\Phi^2 V(\Phi)\right)\cdot\phi - \frac{1}{2}\Phi'\cdot\mathbf{h_1'} + \\
& - \frac{1}{2}\Phi' G^2\cdot\mathbf{h_3'} + \frac{G\Phi'}{R^2}\cdot\mathbf{h_7'} + \left(G' + 2\frac{GR'}{R}\right)\cdot\phi' + G\cdot\phi''\Bigg]\cdot P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{8.1}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \Bigg[& \left(\frac{1}{2}V(\Phi) + \frac{1}{2}\frac{L(L+1)}{R^2} - \frac{1}{4}\frac{G'^2}{G}\right)\cdot\mathbf{h_1} + i\omega\left(2\frac{GR'}{R} + \frac{1}{2}G'\right)\cdot\mathbf{h_2} + \\
& + \left(-\frac{G^2G'R'}{R} - \frac{1}{2}G^2G'' - \frac{1}{4}GG'^2 + \frac{1}{2}G\omega^2\right)\cdot\mathbf{h_3} + \left(\frac{\omega^2}{R^2} - \frac{GG'R'}{R^3}\right)\cdot\mathbf{h_7} + \\
& - \frac{1}{2}G\partial_\Phi V(\Phi)\cdot\phi + \left(\frac{1}{4}G' - \frac{GR'}{R}\right)\cdot\mathbf{h_1'} + \frac{1}{2}\frac{GG'}{R^2}\cdot\mathbf{h_7'} + i\omega G\cdot\mathbf{h_2'} + \\
& - \frac{1}{4}G^2G'\cdot\mathbf{h_3'} - \frac{1}{2}G\cdot\mathbf{h_1''}\Bigg]\cdot P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{8.2}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \Bigg[& \left(\frac{1}{2}\frac{L(L+1)}{R^2}\right)\cdot\mathbf{h_2} + i\omega\frac{GR'}{R}\cdot\mathbf{h_3} + \\
& + i\omega\left(\frac{1}{2}\frac{G'}{GR^2} + \frac{R'}{R^3}\right)\cdot\mathbf{h_7} + \frac{1}{2}i\omega\Phi'\cdot\phi - \frac{i\omega}{R^2}\cdot\mathbf{h_7'}\Bigg]\cdot P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{8.3}
$$

$$
0 = \left[\frac{1}{2}G'\cdot\mathbf{h_2} - \frac{1}{2}i\omega G\cdot\mathbf{h_3} - \frac{1}{2}\frac{i\omega}{R^2}\cdot\mathbf{h_7} + \frac{1}{2}G\cdot\mathbf{h_2'}\right]\cdot\partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t} \tag{8.4}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \Bigg[& \left(\frac{1}{4}\frac{G'^2}{G^3} - \frac{1}{2}\frac{G''}{G^2}\right)\cdot\mathbf{h_1} - \frac{1}{2}i\omega\frac{G'}{G^2}\cdot\mathbf{h_2} + \left(\frac{G'R'}{GR^3} - 2\frac{R'^2}{R^4} + 2\frac{R''}{R^3}\right)\cdot\mathbf{h_7} + \\
& + \left(\frac{1}{4}\frac{G'^2}{G} + \frac{G'R'}{R} + \frac{1}{2}V(\Phi) - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{G} + \frac{1}{2}\frac{L(L+1)}{R^2}\right)\cdot\mathbf{h_3} + \frac{1}{2}\frac{\partial_\Phi V(\Phi)}{G}\cdot\phi + \\
& - \frac{1}{4}\frac{G'}{G^2}\cdot\mathbf{h_1'} - \frac{i\omega}{G}\cdot\mathbf{h_2'} + \left(\frac{GR'}{R} + \frac{1}{4}G'\right)\cdot\mathbf{h_3'} + \left(-\frac{1}{2}\frac{G'}{GR^2} + 2\frac{R'}{R^3}\right)\cdot\mathbf{h_7'} + \\
& + \Phi'\cdot\phi' + \frac{1}{2G}\cdot\mathbf{h_1''} - \frac{1}{R^2}\cdot\mathbf{h_7''}\Bigg]\cdot P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{8.5}
$$

$$0 = \left[\left(-\frac{1}{2}\frac{R'}{GR} - \frac{1}{4}\frac{G'}{G^2} \right) \cdot \mathbf{h_1} - \frac{i\omega}{2G} \cdot \mathbf{h_2} + \left(\frac{1}{4}G' + \frac{1}{2}\frac{GR'}{R} \right) \cdot \mathbf{h_3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\Phi' \cdot \phi + \frac{R'}{R^3} \cdot \mathbf{h_7} + \frac{1}{2G} \cdot \mathbf{h_1'} - \frac{1}{2R^2} \cdot \mathbf{h_7'} \right] \cdot \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t} \tag{8.6}$$

$$0 = \left[\left(-\frac{1}{2}\frac{G'RR'}{G} - \frac{1}{2}\frac{L(L+1)}{G} \right) \cdot \mathbf{h_1} - i\omega RR' \cdot \mathbf{h_2} + \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{2}GL(L+1) + \frac{3}{2}GG'RR' + G^2R'^2 + G^2RR'' \right) \cdot \mathbf{h_3} +$$
$$+ \left(\frac{1}{2}V(\Phi) - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{G} + \frac{1}{2}\frac{L(L+1)}{R^2} \right) \cdot \mathbf{h_7} + \frac{1}{2}R^2\partial_\Phi V(\Phi) \cdot \phi + \frac{1}{2}RR' \cdot \mathbf{h_1'} +$$
$$\left. + \frac{1}{2}G^2RR' \cdot \mathbf{h_3'} - \frac{1}{2}G' \cdot \mathbf{h_7'} - \frac{1}{2}G \cdot \mathbf{h_7''} \right] \cdot P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t} +$$
$$+ \left[-\frac{1}{2G} \cdot \mathbf{h_1} + \frac{1}{2}G \cdot \mathbf{h_3} \right] \cdot \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\, \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t} \tag{8.7}$$

$$0 = \left[-\frac{1}{2}\frac{G'RR'}{G} \cdot \mathbf{h_1} - i\omega RR' \cdot \mathbf{h_2} + \left(\frac{3}{2}GG'RR' + G^2RR'' + G^2R'^2 \right) \cdot \mathbf{h_3} + \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{2}V(\Phi) - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{G} + \frac{1}{2}\frac{L(L+1)}{R^2} \right) \cdot \mathbf{h_7} + \frac{1}{2}R^2\partial_\Phi V(\Phi) \cdot \phi + \frac{1}{2}RR' \cdot \mathbf{h_1'} +$$
$$\left. + \frac{1}{2}G^2RR' \cdot \mathbf{h_3'} - \frac{1}{2}G' \cdot \mathbf{h_7'} - \frac{1}{2}G \cdot \mathbf{h_7''} \right] \cdot \sin^2\vartheta\, P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t} +$$
$$+ \left[\frac{1}{2G} \cdot \mathbf{h_1} - \frac{1}{2}G \cdot \mathbf{h_3} \right] \cdot \cos\vartheta\, \sin\vartheta\, \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t} \tag{8.8}$$

Die erste Gleichung ist die für das Skalarfeld (2.9) und die übrigen der Reihe nach die Komponenten (0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2) und (3,3) der Gleichung (2.10) für das Gravitationsfeld. Alle übrigen Komponenten sind Null, bzw. symmetrisch, geben also keine weitere Information.

In Gleichung (8.3) habe ich wieder die statischen Gleichungen (3.12) und (3.13) zur Elimination von G'' und V verwendet. Sie vereinfacht sich dadurch ein wenig.

Die letzen beiden Gleichungen (8.7) und (8.8) haben jeweils linear unabhängige Winkelanteile. Das ist für die gleich folgende Fallunterscheidung unpraktisch. Ich betrachte daher besser ihre Summe und ihre Differenz:

Zuerst die Differenz (**8.7**) – (**8.8**)/ $\sin^{2}\vartheta$:

$$0 = \left[G \cdot \mathbf{h_3} - \frac{1}{G} \cdot \mathbf{h_1}\right] \cdot \left(\frac{1}{2} L(L+1)\, P_L(\cos\vartheta) + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\, \partial_\vartheta P_L(\cos\vartheta)\right) \cdot e^{i\omega t} \tag{8.9}$$

Dann ihre Summe (**8.7**) + (**8.8**)/ $\sin^{2}\vartheta$:

$$\begin{aligned} 0 = \Bigg[& \left(-\frac{G' R R'}{G} - \frac{1}{2}\frac{L(L+1)}{G}\right) \cdot \mathbf{h_1} - 2i\omega R R' \cdot \mathbf{h_2} + R^2 \partial_\Phi V(\Phi) \cdot \phi + \\ & + \left(3 G G' R R' + \frac{1}{2} G L(L+1) + 2G^2 R'^2 + 2G^2 R R''\right) \cdot \mathbf{h_3} + R R' \cdot \mathbf{h_1'} + \\ & + \left(V(\Phi) + \frac{L(L+1)}{R^2} - \frac{\omega^2}{G}\right) \cdot \mathbf{h_7} + G^2 R R' \cdot \mathbf{h_3'} - G' \cdot \mathbf{h_7'} - G \cdot \mathbf{h_7''} \Bigg] \cdot \\ & \cdot\ P_L(\cos\vartheta)\, e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{8.10}$$

In den Differentialgleichungen lassen sich nun wieder drei Anteile unterscheiden. Der Radialfaktor, der ausschließlich von r abhängt (eckig geklammert), ein Winkelfaktor, der ausschließlich von ϑ abhängt und ein reiner Zeitfaktor $\exp(i\omega t)$.

Der Zeitfaktor kann nicht Null werden, bei den Winkelfaktoren müssen jedoch wieder die Fälle aussortiert werden, wo sie identisch Null sind, und die jeweiligen Gleichungen zur Identität degenerieren.

Ich unterscheide daher wieder nach unterschiedlichen Drehimpulsquantenzahlen L:

8.2 Multipolschwingungen ($L \geq 2$)

Hier degeneriert keine der Differentialgleichungen, ab dem Quadrupol besitzt das System die volle Komplexität.

Da alle 8 Differentialgleichungen für beliebige Winkel ϑ und alle Zeiten t gelten, muß ihr Radialanteil jeweils Null sein. Zitiere ich also im folgenden einzelne Gleichungen, so ist jeweils nur ihr Radialanteil gemeint.

Zuerst fällt Gleichung (8.9) auf. Mit ihr läßt sich h_3 aus den übrigen Gleichungen eliminieren:

$$\mathbf{h_3} = \frac{1}{G^2} \cdot \mathbf{h_1}$$

Die Gleichungen (8.2) und (8.5) erweisen sich als abhängig von den anderen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{8.5}) =& \frac{1}{G^2}\cdot(\mathbf{8.2}) - \frac{2i\omega}{G^2}\cdot(\mathbf{8.4}) + \left(2\partial_r + 4\frac{R'}{R} + 2\frac{G'}{G}\right)\cdot(\mathbf{8.6})\\
(\mathbf{8.2}) =& \frac{1}{i\omega}\left(G^2\partial_r + \frac{G'}{G} + 2\frac{G^2R'}{R}\right)\cdot(\mathbf{8.3}) + \left(i\omega + \frac{i}{\omega}\frac{L(L+1)G}{R^2}\right)\cdot(\mathbf{8.4}) +\\
&+ \left(-G^2\partial_r - GG' + 2\frac{G^2R'}{R}\right)\cdot(\mathbf{8.6}) - \frac{1}{2}\frac{G}{R^2}\cdot(\mathbf{8.10})
\end{aligned}
$$

Hierbei wurden außerdem die statischen Gleichungen (3.11) bis (3.13) zur Elimination von R'', G'' und V verwendet.

Die drei Differentialgleichungen ersten Grades lassen sich auflösen:

- Aus $-2G\cdot(\mathbf{8.6}) + G/(i\omega)\cdot(\mathbf{8.3}) + h_1'$ erhält man:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h_1'} =& \frac{R'}{R}\cdot\mathbf{h_1} + \left(-\frac{1}{2\omega}\frac{L(L+1)G}{R^2} + i\omega\right)\cdot\mathbf{h_2} + \left(\frac{1}{2}\frac{G'}{R^2} - \frac{GR'}{R^3}\right)\cdot\mathbf{h_7} +\\
&- \frac{1}{2}G\Phi'\cdot\phi
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

- Aus $-2/G\cdot(\mathbf{8.4}) + h_2'$ erhält man:

$$
\mathbf{h_2'} = -\frac{G'}{G}\cdot\mathbf{h_2} + \frac{i\omega}{G^2}\cdot\mathbf{h_1} + \frac{i\omega}{GR^2}\cdot\mathbf{h_7} \tag{8.12}
$$

- Aus $R^2/(i\omega)\cdot(\mathbf{8.3}) + h_7'$ erhält man:

$$
\mathbf{h_7'} = -\frac{i}{2\omega}L(L+1)\cdot\mathbf{h_2} + \frac{RR'}{G}\cdot\mathbf{h_1} + \left(\frac{1}{2}\frac{G'}{G} + \frac{R'}{R}\right)\cdot\mathbf{h_7} + \frac{1}{2}R^2\Phi'\cdot\phi \tag{8.13}
$$

Mit ihrer Hilfe lassen sich die beiden noch verbliebenen Differentialgleichungen zweiten Grades auf eine angenehmere Form bringen.

Gleichung (8.1) wird mittels $(\mathbf{8.1}) - \Phi'\cdot(\mathbf{8.11}) + \Phi'G/R^2\cdot(\mathbf{8.13})$ zu:

$$
\begin{aligned}
0 =& \left(-\Phi'' - 2\frac{\Phi'R'}{R}\right)\cdot\mathbf{h_1} + \left(G\Phi'^2 - \partial_\Phi^2V(\Phi) - \frac{L(L+1)}{R^2} + \frac{\omega^2}{G}\right)\cdot\phi +\\
&+ \left(G' + 2\frac{GR'}{R}\right)\cdot\phi' + G\cdot\phi''
\end{aligned}
$$

Gleichung (8.10) wird mittels $(\mathbf{8.10}) + 2RR'\cdot(\mathbf{8.11}) - 2GR'/R\cdot(\mathbf{8.13})$ zu:

$$
\begin{aligned}
0 =& \left(2RR'' + 2R'^2\right)\cdot\mathbf{h_1} + \left(-4\frac{GR'^2}{R^2} + V(\Phi) + \frac{L(L+1)}{R^2} - \frac{\omega^2}{G}\right)\cdot\mathbf{h_7} +\\
&+ \left(-GRR'\Phi' + R^2\partial_\Phi V(\Phi)\right)\cdot\phi + \left(2\frac{GR'}{R} - G'\right)\cdot\mathbf{h_7'} - G\cdot\mathbf{h_7''}
\end{aligned}
$$

Das vollständige Differentialgleichungssystem für Multipolschwingungen ($L \geq 2$) lautet demnach:

$$0 = \left(-\Phi'' - 2\frac{\Phi' R'}{R}\right) \cdot \mathbf{h_1} + \left(G\Phi'^2 - \partial_\Phi^2 V(\Phi) - \frac{L(L+1)}{R^2} + \frac{\omega^2}{G}\right) \cdot \phi + \\ + \left(G' + 2\frac{GR'}{R}\right) \cdot \phi' + G \cdot \phi'' \tag{8.14}$$

$$0 = \left(2RR'' + 2R'^2\right) \cdot \mathbf{h_1} + \left(-4\frac{GR'^2}{R^2} + V(\Phi) + \frac{L(L+1)}{R^2} - \frac{\omega^2}{G}\right) \cdot \mathbf{h_7} + \\ + \left(-GRR'\Phi' + R^2 \partial_\Phi V(\Phi)\right) \cdot \phi + \left(2\frac{GR'}{R} - G'\right) \cdot \mathbf{h_7'} - G \cdot \mathbf{h_7''} \tag{8.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h_1'} =& \frac{R'}{R} \cdot \mathbf{h_1} + \left(-\frac{1}{2\omega}\frac{L(L+1)G}{R^2} + i\omega\right) \cdot \mathbf{h_2} + \left(\frac{1}{2}\frac{G'}{R^2} - \frac{GR'}{R^3}\right) \cdot \mathbf{h_7} + \\
& - \frac{1}{2} G\Phi' \cdot \phi \\
\mathbf{h_2'} =& -\frac{G'}{G} \cdot \mathbf{h_2} + \frac{i\omega}{G^2} \cdot \mathbf{h_1} + \frac{i\omega}{GR^2} \cdot \mathbf{h_7} \\
\mathbf{h_7'} =& -\frac{i}{2\omega} L(L+1) \cdot \mathbf{h_2} + \frac{RR'}{G} \cdot \mathbf{h_1} + \left(\frac{1}{2}\frac{G'}{G} + \frac{R'}{R}\right) \cdot \mathbf{h_7} + \frac{1}{2} R^2 \Phi' \cdot \phi \\
\mathbf{h_3} =& \frac{1}{G^2} \cdot \mathbf{h_1}
\end{aligned}$$

Leider ist es im Zeitraum dieser Diplomarbeit nicht gelungen, diese Differentialgleichungen auf die Form einer Schrödinger-Gleichung zu bringen und somit eine Stabilitätsbedingung herzuleiten.

Die zu erwartende Struktur ist jedoch schon an dieser Stelle deutlich. Es sollte möglich sein, das System durch geeignete Koordinatentransformationen auf eine Form zu bringen, in der die Dynamik ausschließlich durch die Gleichung (8.14) für das Skalarfeld und die Gleichung (8.15) für das Gravitationsfeld bestimmt wird.

Diese beiden Differentialgleichungen dürften koppeln, so daß die zugehörige Schrödinger-Gleichung eine zweikomponentige Ψ-Funktion besitzt, sowie ein matrixwertiges Potential V_{eff}.

Eine mögliche Ursache dafür, daß trotz intensiver Bemühungen keine hyperbolische Form der Differentialgleichungen erreicht werden konnte, ist in einem Artikel von Brodbeck, Heusler, Lavrelashvili, Straumann und Volkov [12] zu finden. Dort wird betont, daß zur Erreichung eines hyperbolischen Differentialgleichungssystems wie der Schrödinger-Gleichung der kinetische Term der effektiven Wirkung positiv definit sein muß.

Entwickelt man die bei uns vorliegende Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sqrt{(-g)}\,\left(R + \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i \Phi \partial^j \Phi + V(\Phi)\right)$$

nach den Störungen h_1,h_2,h_3,h_7 und ϕ und betrachtet nur kinetische Terme, d.h. Terme die aus Zeitableitungen hervorgingen ($\sim \omega^2$), so ergibt sich in zweiter Ordnung in den Störungen für den Radialanteil:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin}^{(2)} \quad &\sim \quad 2GR^2 \cdot \mathbf{h_3}^2 + \frac{\mathbf{h_7}^2}{G^2 R^2} + \frac{R^2}{G} \cdot \phi^2 + \\ &\quad - \frac{4}{G^2} \cdot \mathbf{h_1}\,\mathbf{h_7} - 2\frac{R^2}{G} \cdot \mathbf{h_1}\,\mathbf{h_3} - 6 \cdot \mathbf{h_3}\,\mathbf{h_7} \end{aligned} \tag{8.16}$$

Dieser kinetische Term ist aufgrund der ungünstigen Mischterme nicht positiv definit. Nach dem Argument aus [12] sollte es daher nicht möglich sein, eine hyperbolische Form der Differentialgleichungen zu erreichen.

Ist dies die Ursache für das aufgetretene Problem, dann ist die von Regge und Wheeler vorgeschlagene kanonische Eichung der geraden Schwingungen (6.13) für diese Untersuchung ungeeignet und eine andere Eichung vonnöten. Anhand dieser Forderung nach einem positiv definiten kinetischen Term in der effektiven Lagrangedichte ließe sich auch gezielt nach einer geeigneteren Eichung suchen. Im Zeitraum dieser Diplomarbeit war mir dies jedoch nicht mehr möglich.

Eine Vorentscheidung bezüglich Stabilität der geraden Schwingungen ist jedoch auch in dieser Eichung möglich:

Bei der Untersuchung der ungeraden Schwingungen in Kapitel 7 konnte beobachtet werden, daß die Stabilitätsbedingung für kleine Drehimpulsquantenzahlen L aufgrund des Fehlens der Drehimpulsbarriere grundsätzlich strenger war, als für große L. Es ist daher plausibel, anzunehmen, daß auch bei den geraden Schwingungen die Mode zu niedrigstem L entscheidend ist für die Stabilitätsfrage.

Für die Monopolschwingungen ($L = 0$) läßt sich auch tatsächlich eine Stabilitätsbedingung herleiten. Zunächst jedoch der Fall $L = 1$.

8.3 Dipolschwingungen ($L = 1$)

Hier ist $P_0(\cos\vartheta) = \cos\vartheta$, und nur Gleichung (8.9) degeneriert.

Dies ist wieder eine Folge des Verschwindens eines Freiheitsgrades aus den Störungen (6.4). Für $L = 1$ ($M = 0$) sehen sie aus wie folgt:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & -h_4 \sin\vartheta & 0 \\ h_2 & h_3 & -h_5 \sin\vartheta & 0 \\ -h_4 \sin\vartheta & -h_5 \sin\vartheta & (-2h_6 + h_7)\cdot\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2h_6 + h_7)\cdot\cos\vartheta\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t}$$

Wie man deutlich sehen kann, sind die Freiheitsgrade h_6 und h_7 nicht mehr linear unabhängig. Mit der Redefinition $h_6 \to h_6 + h_7/2$ läßt sich der Freiheitsgrad h_7 vollständig eliminieren.

$$\mathbf{h_7} = 0$$

Auch für die Dipolschwingungen konnten die Differentialgleichungen nicht in die Form einer Schrödinger-Gleichung gebracht werden. Dies steht im Einklang mit dem Argument aus [12]. Verwendet man $h_7 = 0$ im kinetischen Term der effektiven Lagrangedichte (8.16), so ergibt sich für ihn:

$$\mathcal{L}^{(2)}_{kin} \quad \sim \quad 2GR^2 \cdot \mathbf{h_3}^2 + \frac{R^2}{G}\cdot\phi^2 - 2\frac{R^2}{G}\cdot\mathbf{h_1}\,\mathbf{h_3}$$

Dieser kinetische Term ist ebenfalls aufgrund des Mischterms nicht positiv definit. Es sollte daher in dieser Eichung nicht möglich sein, ein hyperbolisches Differentialgleichungssystem für die Dipolschwingungen zu erreichen.

Es läßt sich dennoch sehen, daß mit $h_7 = 0$ die Gravitationsschwingung (Gleichung 8.15) verschwindet und nur das Skalarfeld eine echte Bewegungsgleichung behält (Gleichung 8.14). Das Gravitationsfeld kann somit nicht selbst Dipolschwingungen ausführen, es kann nur denen des Skalarfeldes folgen.

8.4 Monopolschwingungen ($L = 0$)

In diesem Fall ist $P_0(\cos\vartheta) = 1$, so daß die Gleichungen (8.4) und (8.6) sowie (8.9) degenerieren.

Dies hat seinen Ursprung wieder in „frei" werdenden Eichtransformationen. Die Freiheitsgrade h_4, h_5 und h_6 der geraden Störungen (6.4) verschwinden von selbst, und müssen daher nicht in Abschnitt 6.4 weggeeicht werden. Somit können die Eichfreiheitsgrade ξ_0, ξ_1 und ξ_+ aus (6.10) anders verwendet werden.

ξ_+ ist für $L = 0$ und $M = 0$ jedoch schon von sich aus Null und daher wenig hilfreich. Mit ξ_0 und ξ_1 hingegen erreicht man einiges:

Ich transformiere die Störungen h_{ij} mit:

$$\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t}$$

und erhalte:

$$-\mathcal{D}_i\xi_j - \mathcal{D}_j\xi_i = \begin{pmatrix} -2i\omega\xi_0 & -\mathcal{D}_r\xi_0 - i\omega\xi_1 & 0 & 0 \\ -\mathcal{D}_r\xi_0 - i\omega\xi_1 & -2\mathcal{D}_r\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t}$$

Mit der Wahl $2i\omega\xi_0 = h_1$ läßt sich der Freiheitsgrad h_1 eliminieren. Die Auswirkungen auf h_2 lassen sich durch Redefinition $h_2 \rightarrow h_2 + \mathcal{D}_r\xi_0$ absorbieren.

$$\mathbf{h_1} = 0$$

Anschließend läßt sich mit einer Wahl von ξ_1 der Freiheitsgrad h_3 auf einen beliebigen Wert bringen. Die Auswirkungen auf h_2 und ϕ lassen sich absorbieren mit $h_2 \rightarrow h_2 + i\omega\xi_1$ und $\phi \rightarrow \phi + G\Phi'\xi_1$. Ich wähle h_3 so, daß gilt:

$$\mathbf{h_3} = -\frac{1}{2}\frac{R\Phi'}{GR'} \cdot \phi + \frac{1}{GRR'} \cdot \mathbf{h_7'}$$

Mit dieser Wahl reduziert sich die Bewegungsgleichung (8.3) zu

$$\mathbf{h_7} = 0$$

Womit der Freiheitsgrad h_7 verschwindet. Diese Wahl gibt bessere Differentialgleichungen als die direkte Wahl $h_3 = 0$.

Mit diesen Ergebnissen läßt sich Gleichung (8.10) nach h_2 auflösen:

$$\mathbf{h_2} = \frac{i}{16\omega} \cdot \left(4\frac{RG\Phi''}{R'} + \frac{R^2G\Phi'^3}{R'^2} - 4G\Phi'\right) \cdot \phi + \frac{i}{4\omega}\frac{GR\Phi'}{R'} \cdot \phi'$$

Hierbei wurde außerdem die statische Gleichung (3.13) zu Elimination von $V(\Phi)$ verwendet.

Setzt man dies alles in die übrigen Differentialgleichungen ein, so degenerieren sie unter Zuhilfenahme der statischen Gleichungen (3.11) bis (3.13) zu einem Vielfachen der Gleichung (8.1), die nun die Form

$$
\begin{aligned}
0 = &\left(-\frac{1}{8}\frac{\Phi'^4 R^2 G}{R'^2} + \frac{3}{2}G\Phi'^2 + \frac{\Phi' R G \Phi''}{R'} + \frac{1}{2}\frac{\Phi'^2 R G'}{R'} - \partial_\Phi^2 V(\Phi) + \frac{\omega^2}{G}\right)\cdot\phi + \\
&+ \left(2\frac{GR'}{R} + G'\right)\cdot\phi' + G\cdot\phi''
\end{aligned}
$$

annimmt. Zusammenfassend lautet das Differentialgleichungssystem für Monopolschwingungen nun:

$$
\begin{aligned}
0 = &\left(-\frac{1}{8}\frac{\Phi'^4 R^2 G}{R'^2} + \frac{3}{2}G\Phi'^2 + \frac{\Phi' R G \Phi''}{R'} + \frac{1}{2}\frac{\Phi'^2 R G'}{R'} - \partial_\Phi^2 V(\Phi) + \frac{\omega^2}{G}\right)\cdot\phi + \\
&+ \left(2\frac{GR'}{R} + G'\right)\cdot\phi' + G\cdot\phi'' \qquad (8.17)\\
\mathbf{h_1} =& 0\\
\mathbf{h_2} =& \frac{i}{16\omega}\cdot\left(4\frac{RG\Phi''}{R'} + \frac{R^2 G \Phi'^3}{R'^2} - 4G\Phi'\right)\cdot\phi + \frac{i}{4\omega}\frac{GR\Phi'}{R'}\cdot\phi'\\
\mathbf{h_3} =& -\frac{1}{2}\frac{R\Phi'}{GR'}\cdot\phi\\
\mathbf{h_7} =& 0
\end{aligned}
$$

Wie man sehen kann, bestimmt Gleichung (8.17) die Dynamik vollständig. Hat man sie für ϕ gelöst, so liegen die übrigen Größen fest. Hier wird die Tatsache deutlich, daß nur das Skalarfeld Monopolschwingungen ausführen kann, das Gravitationsfeld kann der Schwingung des Skalarfeldes nur folgen.

Nach dem Argument aus [12] sollte diesmal eine hyperbolische Form der Differentialgleichungen erreichbar sein. Mit $h_1 = 0$ und $h_7 = 0$ lautet der kinetische Term der effektiven Lagrangedichte (8.16):

$$
\mathcal{L}_{kin}^{(2)} \quad \sim \quad 2GR^2\cdot\mathbf{h_3}^2 + \frac{R^2}{G}\cdot\phi^2
$$

Der kinetische Term ist diesmal positiv definit. Demnach lassen sich die Monopolschwingungen auch in dieser Eichung, die sich für größere L als ungünstig erwiesen hat, in die Form einer Schrödinger-Gleichung bringen.

8.4.1 Schrödinger-Form der Differentialgleichungen

Mit einer geeigneten Wahl für die Wellenfunktion Ψ

$$\Psi(r) := R(r) \cdot \phi(r) \tag{8.18}$$

nimmt die Differentialgleichung für das Skalarfeld (8.17), die nun die Dynamik vollständig bestimmt, folgende Form an:

$$V_{eff} \cdot \Psi - GG' \cdot \Psi' - G^2 \cdot \Psi'' = \omega^2 \cdot \Psi \qquad \text{,mit}$$

$$V_{eff} := \frac{1}{8}\frac{\Phi'^4 R^2 G^2}{R'^2} - \frac{5}{4}G^2\Phi'^2 - \frac{\Phi' R G^2 \Phi''}{R'} - \frac{1}{2}\frac{\Phi'^2 RGG'}{R'} + \frac{R'GG'}{R} + G\partial_\Phi^2 V(\Phi) \tag{8.19}$$

Hierbei wurde wieder die statische Gleichung (3.11) zur Elimination von R'' verwendet.

Ebenso wie bei den ungeraden Schwingungen (Kapitel 7.3) führe ich nun die neue Koordinate x ein via

$$dx := \frac{1}{G} \cdot dr$$

so daß für $x \in [-\infty, \infty]$ der gesamte Außenbereich des Schwarzen Loches $r \in [h, \infty]$ durchparametrisiert wird, und die Bewegungsgleichung nun die Form einer Schrödinger-Gleichung annimmt:

$$-\partial_x^2 \cdot \Psi + V_{eff} \cdot \Psi = \omega^2 \cdot \Psi \tag{8.20}$$

8.4.2 Der Hilbertraum der $\Psi(x)$

Über die Wellenfunktion Ψ lassen sich anhand ihrer Definition (8.18) folgende Aussagen treffen:

- $\Psi(x)$ ist im Endlichen überall beschränkt, da weder R noch ϕ im Außenbereich des Schwarzen Loches Polstellen besitzt.
- Für $x \to \infty$ ($r \to \infty$) geht R gegen r (asymptotischer Flachheit). Zusammen mit der Forderung, daß ϕ mindestens wie $1/r$ gegen Null geht, geht Ψ insgesamt gegen eine Konstante.
- Für $x \to -\infty$ ($r \to h$) geht Ψ gegen die Konstante $R(h) \cdot \phi(h)$.

Dies alles stellt sicher, daß es sich bei der Funktion $\Psi(x)$ um eine lokal quadratintegrable, beschränkte Funktion handelt.

Der Raum der zugelassenen Ψ bildet somit zusammen mit dem Skalarprodukt

$$< \Psi, \Omega >:= \int_{-c}^{c} dx\, \Psi(x) \cdot \Omega(x)^*$$

einen Hilbertraum. c ist ein cut-off, der beliebig groß gewählt werden kann, so daß Ergebnisse auch im Limes $c \to \infty$ gelten.

Dieser Hilbertraum der Ψ ist der Hilbertraum der lokal quadratintegrablen, beschränkten Funktionen, die üblicherweise in der Quantenmechanik betrachtet werden.

Die Eigenfunktionen dieser Schrödinger-Gleichung bilden somit wieder eine vollständige Basis für den Raum der zugelassenen Ψ, obwohl sie selber nicht dazugehören müssen. Aufgrund der Beliebigkeit der Ψ-Funktionen im mittleren Teil finde ich auch wieder zu jeder Eigenfunktion der Schrödinger-Gleichung ein Ψ, das diese Eigenfunktion anteilig enthält.

Eine einzige Eigenfunktion, die sich am Ende als instabile Mode herausstellt, würde demnach wieder genügen, um das ganze System auseinanderfallen zu lassen. Das Problem ist somit reduziert auf die Suche nach dem Eigenwertspektrum der Schrödinger-Gleichung (8.20).

8.4.3 Stabilitätsbedingung

Ebenso wie in Kapitel 7.5 ist auch hier ein positiv definites effektives Potential hinreichend (jedoch nicht notwendig) für Stabilität.

Das effektive Potential (8.19) hat diesmal andere Eigenschaften, im negativ Unendlichen geht es zwar gegen Null,

$$\lim_{x \to -\infty} V_{eff}(x) = \lim_{r \to h} V_{eff}(r) = 0$$

aber im positiv Unendlichen erreicht es einen konstanten Wert:

$$\lim_{x \to \infty} V_{eff}(x) = \lim_{r \to \infty} V_{eff}(r) = \partial_{\Phi}^2 V(\Phi_0)$$

Ist diese Konstante negativ, so lassen sich immer kontinuierlich viele Moden zu negativen Eigenwerten finden, die Instabilität bedeuten. Positivität oder Verschwinden dieser Konstante ist daher notwendig für Stabilität.

Die Stabilitätsbedingung für Monopolschwingungen lautet demnach:

$$\partial_\Phi^2 V(\Phi_0) \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{System stabil, wenn} \quad V_{eff}(r) \geq 0 \qquad \forall r \in [h, +\infty] \\ < 0 & \text{System instabil} \end{cases} \tag{8.21}$$

$$V_{eff} := \frac{1}{8}\frac{\Phi'^4 R^2 G^2}{R'^2} - \frac{5}{4}G^2\Phi'^2 - \frac{\Phi' R G^2 \Phi''}{R'} - \frac{1}{2}\frac{\Phi'^2 R G G'}{R'} + \frac{R' G G'}{R} + G\partial_\Phi^2 V(\Phi)$$

Es zeigt sich somit, daß die Forderung nach Vakuumstabilität (Abschnitt 4.5) eine notwendige Bedingung ist.

9 Stabilität

Nachdem nun Stabilitätsbedingungen für ungerade und für gerade Moden hergeleitet sind, bleibt nur noch, die gefundenen, statischen Lösungen einzusetzen. Ich beginne mit der q/r-Lösung.

9.1 Der Ansatz $\Phi = q \cdot r^{\alpha}$

Die für diesen Ansatz gefundene Lösung lautete (Kapitel 5.1):

$$\Phi(r) = \frac{\pm Q}{r}$$

$$R(r) = r \cdot e^{-\frac{Q}{2r}}$$

$$G(r) = \left(-\frac{3Q+6\tilde{M}}{4Q^3} \cdot r^2 + \frac{3Q+6\tilde{M}}{2Q^2} \cdot r - \frac{Q+6\tilde{M}}{2Q} \right) \cdot e^{\frac{Q}{r}} + \frac{3Q+6\tilde{M}}{4Q^3} r^2 \cdot e^{-\frac{Q}{r}}$$

$$V(\Phi) = -\lambda \cdot \Big(\big(3+\Phi^2\big) \cdot \sinh|\Phi| - 3|\Phi| \cdot \cosh \Phi \Big)$$

$$\text{mit} \qquad \lambda := \frac{3(Q+2\tilde{M})}{|Q|^3} > 0 \qquad ,\text{da} \qquad Q > -2\tilde{M}$$

Setze ich dies in die Stabilitätsbedingung für die ungeraden Störungen (7.19)

$$V_{eff}(r) \quad \overset{!}{\geq} \quad 0 \qquad \forall r \in [h, +\infty]$$

$$\text{mit} \qquad V_{eff} := 4\frac{G}{R^2} + 2\frac{G^2 R'^2}{R^2} - \frac{GG'R'}{R} - \frac{G^2 R''}{R}$$

ein, so erhalte ich für das effektive Potential:

$$\begin{aligned} V_{eff} = \Bigg[&-\frac{9}{64Q^4}\Big(2\tilde{M}+Q\Big)\Big(33Q+2\tilde{M}\Big) + \frac{9}{16Q^3}\Big(2\tilde{M}+Q\Big)\Big(17Q+10\tilde{M}\Big) \cdot r^{-1} + \\ &- \frac{3}{8Q^2}\Big(74\tilde{M}Q + 9Q^2 + 48\tilde{M}^2\Big) \cdot r^{-2} - \frac{3}{8Q}\Big(Q-6\tilde{M}\Big)\Big(Q+6\tilde{M}\Big) \cdot r^{-3} + \\ &+ \frac{3}{16}\Big(Q+6\tilde{M}\Big)^2 \cdot r^{-4} \Bigg] \cdot e^{2\frac{Q}{r}} - \frac{9}{64Q^4}\Big(2\tilde{M}+Q\Big)^2 \cdot e^{-2\frac{Q}{r}} + \\ &+ \frac{9}{32Q^4}\Big(2\tilde{M}+Q\Big)\Big(17Q+2\tilde{M}\Big) - \frac{9}{16Q^3}\Big(Q+10\tilde{M}\Big)\Big(2\tilde{M}+Q\Big) \cdot r^{-1} + \\ &- \frac{3}{16Q^2}\Big(Q+6\tilde{M}\Big)\Big(2\tilde{M}+Q\Big) \cdot r^{-2} \end{aligned} \tag{9.1}$$

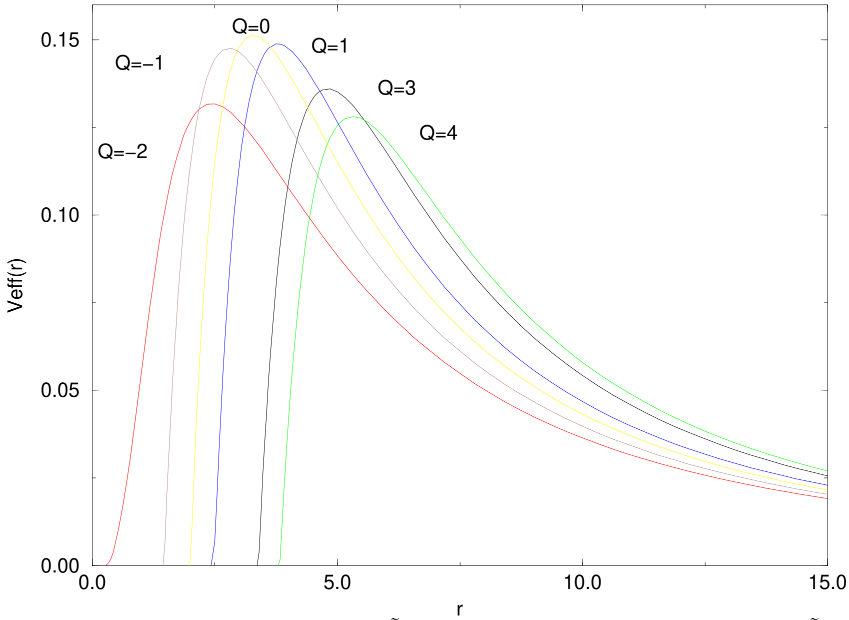

Abbildung 10: V_{eff} für $\tilde{M} = 1$ und verschiedene $Q > -2\tilde{M}$

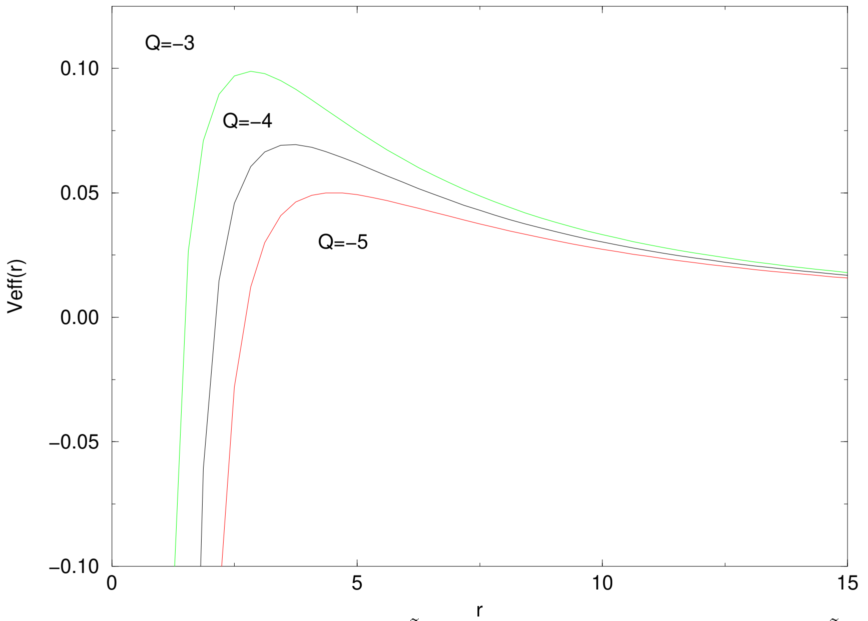

Abbildung 11: V_{eff} für $\tilde{M} = 1$ und verschiedene $Q < -2\tilde{M}$

Das effektive Potential (Abbildung 10), beginnt mit dem Wert Null am Horizont (der sich verschiebt für unterschiedliche Werte von Q), steigt auf ein Maximum an und fällt exponentiell ab. Das Potential ist somit nirgendwo im Außenbereich des Schwarzen Loches negativ, folglich ist das System stabil gegen ungerade Schwingungen.

Für kleine Schwingungen, die von außen das Schwarze Loch erreichen, stellt dieses Potential eine Barriere dar. Interessant hierbei ist, daß diese Barriere für $Q = 0$, den Schwarzschild-Fall, am größten ist.

Bemerkenswert ist auch, daß die „nackten" Singularitäten, die man bei einer Überschreitung des Parameterbereiches von Q, für $Q < -2\tilde{M}$, erhält, vermutlich instabil sind (Abbildung 11). Ihre Singularität liegt ohne jeden Horizont im Ursprung bei $r = 0$, so daß das effektive Potential überall positiv sein müßte, um Stabilität zu garantieren. In der Tat wird es jedoch in der Nähe der Singularität negativ. Eine nähere Untersuchung auf negative Eigenwerte würde hier Gewißheit in der Stabilitätsfrage bringen.

Nun zu den Monopolschwingungen. Die Stabilitätsbedingung hierfür (8.21) beinhaltet eine Fallunterscheidung. Wie am Ende von Kapitel 5.1 schon festgestellt wurde, liegt für diese statische Lösung der erste Fall vor.

$$\partial_\Phi^2 V(0) = 0$$

Das System ist demnach stabil, wenn das effektive Potential

$$V_{eff} := \frac{1}{8}\frac{\Phi'^4 R^2 G^2}{R'^2} - \frac{5}{4}G^2\Phi'^2 - \frac{\Phi' R G^2 \Phi''}{R'} - \frac{1}{2}\frac{\Phi'^2 R G G'}{R'} + \frac{R' G G'}{R} + G\partial_\Phi^2 V(\Phi)$$

im Außenbereich des Schwarzen Loches nirgendwo negativ wird. Für einige positive Werte des Parameters Q ist es in Abbildung 12 dargestellt.

Sehr schön ist ist dabei zu sehen, daß für wachsende Q die Höhe der Barriere abnimmt, und das effektive Potential ab einem Schwellwert negativ wird, so daß das System potentiell instabil wird. Eine genauere Untersuchung auf negative Eigenwerte würde auch hier Gewißheit bringen.

Der Schwellwert, ab dem das Potential auch negativ wird, läßt sich leicht bestimmen, indem man sich das Vorzeichen des führenden Terms im positiv Unendlichen anschaut:

$$V_{eff} \quad \xrightarrow{r \to \infty} \quad \left(2\tilde{M} - \frac{4}{3}|Q|^3\right) \cdot r^{-3}$$

Für Stabilität ist ein positives Vorzeichen hinreichend:

$$|Q|^3 \leq \frac{3}{2}\tilde{M}$$

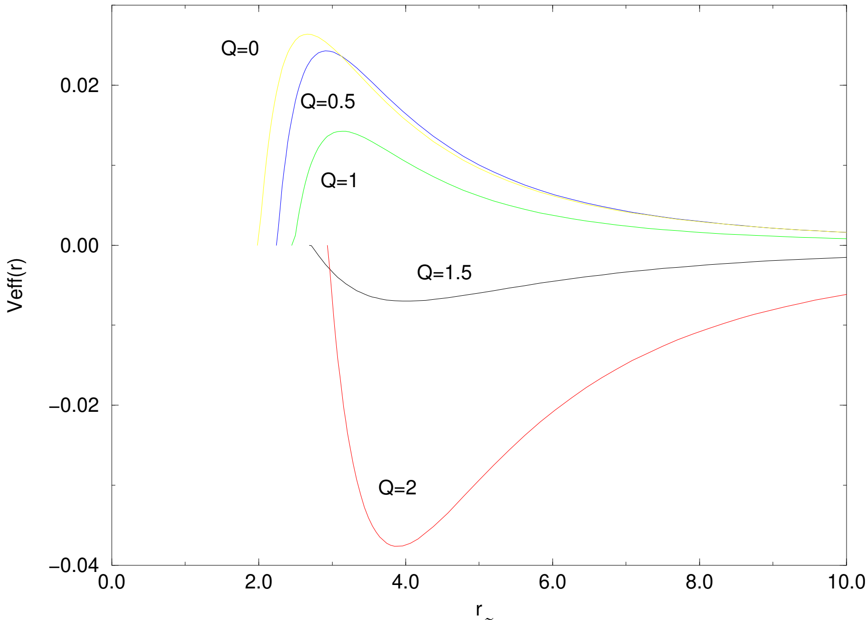

Abbildung 12: V_{eff} mit $\tilde{M} = 1$ und positivem Q

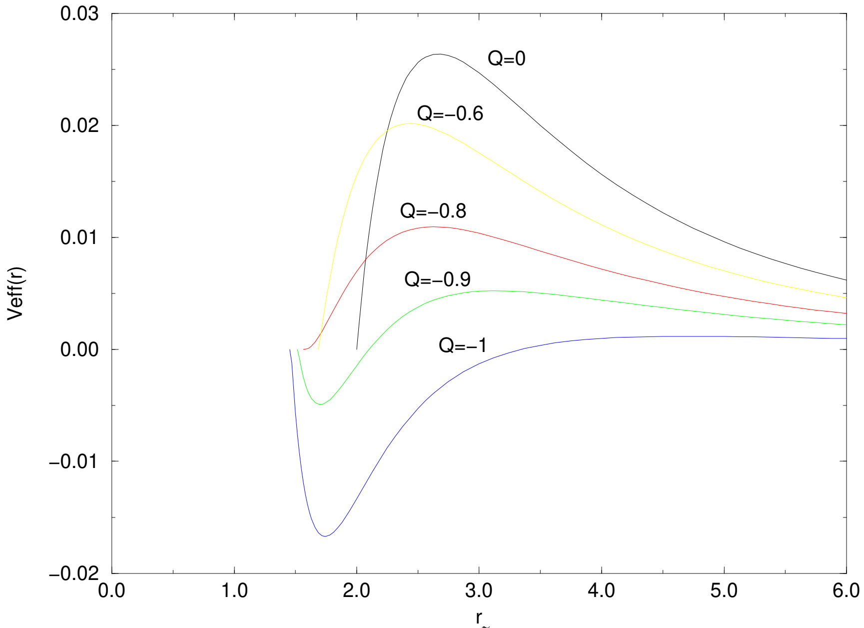

Abbildung 13: V_{eff} mit $\tilde{M} = 1$ und negativem Q

Für negative Werte des Parameters Q läßt sich ein ähnliches Verhalten beobachten (Abbildung 13). Die Höhe der Barriere nimmt wieder kontinuierlich ab, bis das effektive Potential ab einem Schwellwert in Horizontnähe negativ wird. Leider läßt sich der Schwellwert hierfür nur numerisch erhalten. Für $\tilde{M} = 1$ liegt er bei $Q \approx 0.8$.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß es bei dieser speziellen statischen Lösung der Bewegungsgleichungen einen Parameterbereich für Q gibt, in dem das System stabil ist, zumindest gegen ungerade Schwingungen und gegen Monopolschwingungen.

Dieser Parameterbereich, die „Insel der Stabilität", liegt um den Schwarzschild-Fall $Q = 0$ herum. Er wird nach oben begrenzt durch die Schwelle $|Q|^3 \leq \frac{3}{2}\tilde{M}$, ab der die Monopolschwingungen potentiell instabil werden. Für die untere Begrenzung kommt noch eine numerisch zu bestimmende Schwelle hinzu. Außerdem wird ab $Q = -2\tilde{M}$ die Singularität „nackt", und auf dem ungeraden Sektor potentiell instabil.

Die Barriere, die das effektive Potential darstellt, ist sowohl für die ungeraden Schwingungen als auch für die Monopolschwingungen im Schwarzschild-Fall $Q = 0$ am größten. Ein Skalarfeld dieser speziellen Form wirkt also destabilisierend, es darf vom Betrage her nicht zu große Werte annehmen.

9.2 Der Ansatz $\Phi = q \cdot e^{-mr}$

Für diesen Ansatz lautete die gefundene Lösung (Kapitel 5.2):

$$\Phi(r) = q \cdot e^{-r}$$
$$R(r) = r + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(r + \sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l}\Big) \cdot \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{q}{4}e^{-r}\right)^{2k}$$
$$G(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k(r,M) + \sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}(r,M)\cdot q^{2l}\,\mathrm{Ei}(1,2lr)\right)\cdot q^{2k}e^{-2kr}$$
$$V(\Phi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(c_k(|\Phi|,M) + \sum_{l=1}^{\infty} d_{kl}(|\Phi|,M)\cdot q^{2l}\,\mathrm{Ei}\left(1,-2l\ln\left|\frac{\Phi}{q}\right|\right)\right)\cdot \Phi^{2k}$$

---

mit Koeffizienten a_k, b_{kl}, c_k und d_{kl}, die aus der Entwicklung folgen.
Setze ich dies in die Stabilitätsbedingung für die ungeraden Störungen (7.19)

$$V_{eff}(r) \overset{!}{\geq} 0 \qquad \forall r \in [h, +\infty]$$

$$\text{mit} \qquad V_{eff} := 4\frac{G}{R^2} + 2\frac{G^2R'^2}{R^2} - \frac{GG'R'}{R} - \frac{G^2R''}{R}$$

ein, und entwickle nach $\exp(-r)$, so erhalte ich für das effektive Potential einen Ausdruck der Form:

$$V_{eff}(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e_k(r,M) + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} f_{klm}(r,M)\cdot q^{2(m+l)}\,\mathrm{Ei}(1,2mr)\cdot\mathrm{Ei}(1,2lr)\right)\cdot q^{2k}e^{-2kr} \tag{9.2}$$

mit Koeffizienten e_k und f_{klm}. Die ersten lauten:

$$\begin{aligned}
e_0 =& \frac{6}{r^2} - 18\frac{M}{r^3} + 12\frac{M^2}{r^4}\\
e_1 =& -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(3+16M)\cdot r^{-1} - \frac{1}{4}(16M^2+5M+3)\cdot r^{-2} +\\
&+ \frac{1}{8}(26M-9)\cdot r^{-3} - \frac{1}{8}M(24M-31)\cdot r^{-4} - 3M^2\cdot r^{-5}\\
&\dots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{010} =& -2(1+3M) + 2M(3M+1) \cdot r^{-1} \\
f_{011} =& 0 \\
f_{020} =& -\frac{1}{8}(7+18M) + \frac{1}{8}M(7+18M) \cdot r^{-1} \\
f_{021} =& 0 \\
f_{110} =& \frac{1}{6}(3M+1) \cdot r^2 - \frac{1}{12}(3M+1)(4M-1) \cdot r - \frac{1}{12}(3M-1)(3M+1) + \\
& -\frac{1}{24}(3M+1)(6M-1) \cdot r^{-1} - \frac{1}{8}M(3M+1) \cdot r^{-2} \\
f_{111} =& -\frac{1}{36}(3M+1)^2 r^4 \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

Für die folgenden Graphen wurde die Entwicklung bis zur Ordnung $k = l = m = 6$ durchgeführt, also wieder bis zu Termen $\sim \exp(-12r)$.

Schaut man sich das effektive Potential grafisch an, so fällt auf, daß es sich für unterschiedliche Parameterwerte nur minimal ändert.

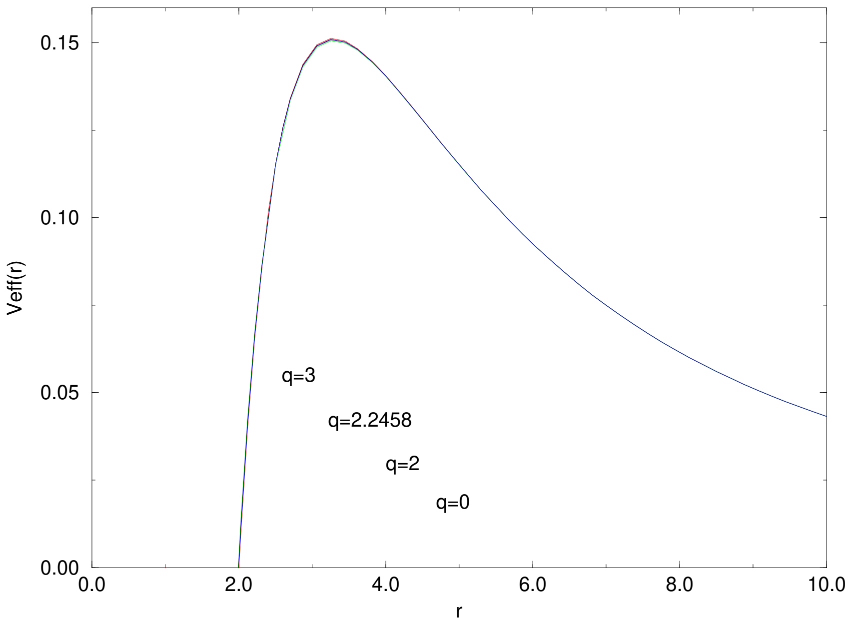

Abbildung 14: V_{eff} mit $M = 1$ und denselben Werten für q, wie in Abb. 4

Eine Vergrößerung am Horizont macht jedoch deutlich, daß sich das effektive Potential zusammen mit dem Horizont verschiebt, so daß die Nullstelle immer direkt am Horizont liegt. Das Potential wird somit im Außenbereich niemals negativ, folglich ist das System gegen ungerade Störungen stabil.

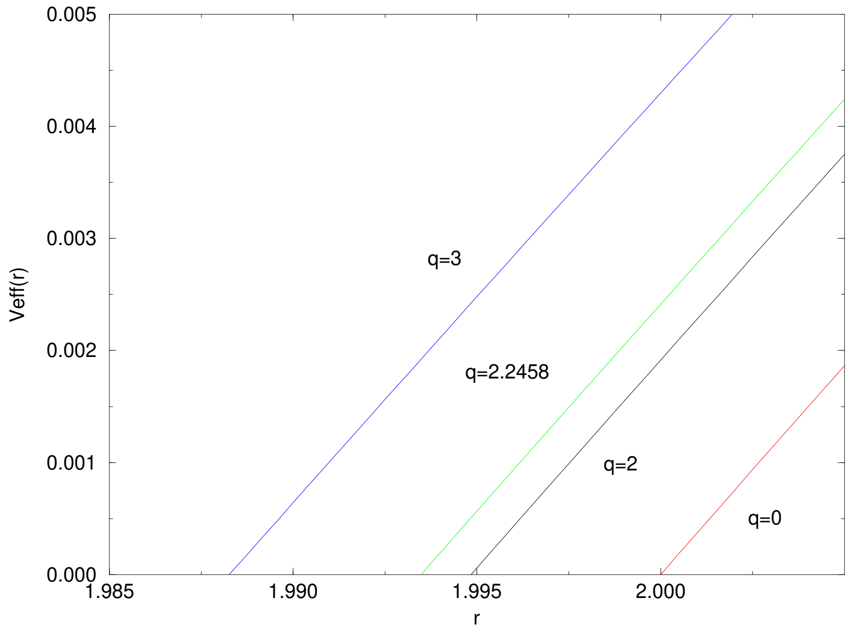

Abbildung 15: Vergrößerung von V_{eff} um den Horizont mit $M = 1$ für verschiedene Werte des Parameters q

Betrachten wir nun die Monopolschwingungen. Die Stabilitätsbedingung hierfür (8.21) beinhaltet eine Fallunterscheidung. Wie am Ende von Kapitel 5.2 schon festgestellt wurde, liegt für diese statische Lösung der erste Fall vor.

$$\partial_\Phi^2 V(0) = 1 \geq 0$$

Die Positivität des effektiven Potentials ist somit eine hinreichende, wenn auch nicht notwendige Bedingung für Stabilität. Das effektive Potential für die Monopolschwingungen lautete:

$$V_{eff} := \frac{1}{8}\frac{\Phi'^4 R^2 G^2}{R'^2} - \frac{5}{4}G^2\Phi'^2 - \frac{\Phi' R G^2 \Phi''}{R'} - \frac{1}{2}\frac{\Phi'^2 R G G'}{R'} + \frac{R' G G'}{R} + G\partial_\Phi^2 V(\Phi)$$

Wie die Abbildung deutlich macht (Abbildung 16), ändert sich das effektive Potential wieder kaum für unterschiedliche Parameterwerte, obwohl R hier qualitativ sehr unterschiedliches Verhalten zeigt (Abbildung 4). Eine Vergrößerung zeigt jedoch, daß es sich zusammen mit dem Horizont verschiebt.

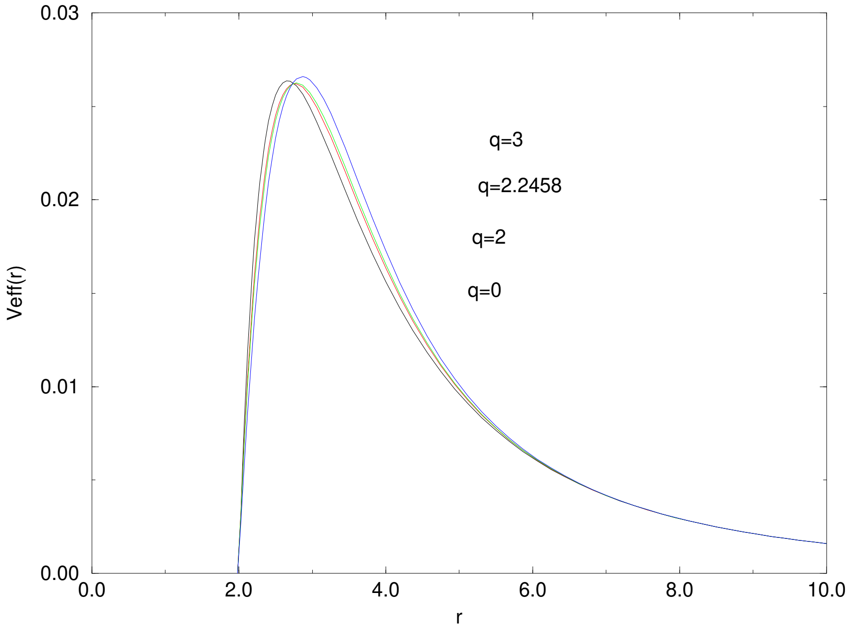

Abbildung 16: V_{eff} mit $M = 1$ für verschiedene Werte des Parameters q

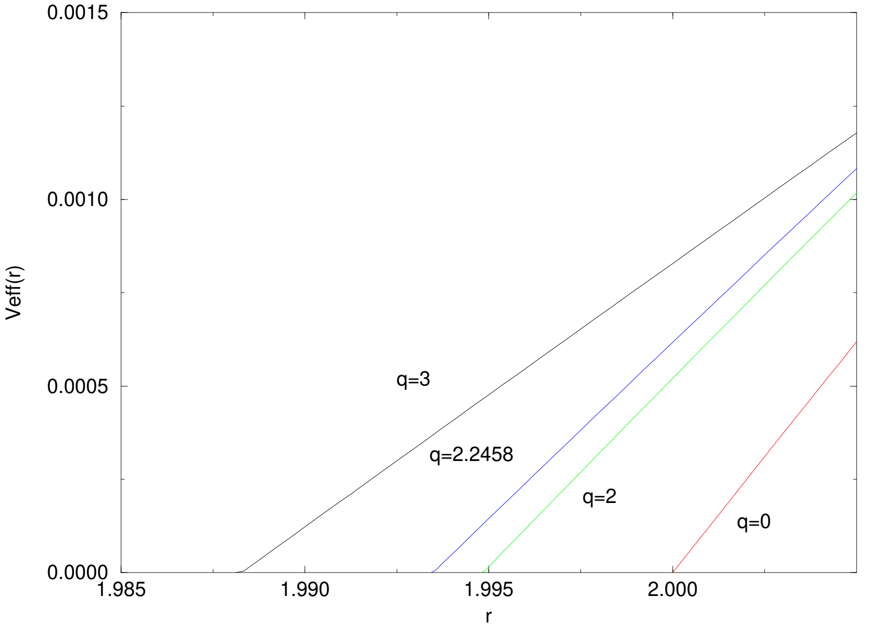

Abbildung 17: Vergrößerung von V_{eff} um den Horizont mit $M = 1$ für verschiedene Werte des Parameters q

V_{eff} beginnt somit immer am Horizont mit dem Wert Null, steigt bis zu einem Maximum, um dann exponentiell abzufallen. Es ist überall positiv, folglich ist das System auch gegen Monopolschwingungen stabil.

10 Zusammenfassung

Im Laufe dieser Arbeit wurden für ein Schwarzes Loch, das an ein Skalarfeld mittels der Wirkung (2.1) koppelt, zwei Stabilitätsbedingungen hergleitet, eine für Schwingungen ungerader Parität (7.19) und eine für Monopolschwingungen (8.21).

Leider ist es im Zeitraum dieser Diplomarbeit nicht gelungen, eine Stabilitätsbedingung für die allgmeinen Schwingungen gerader Parität zu erreichen. Eine mögliche Ursache und somit ein Ansatzpunkt für zukünftige Untersuchungen wurde angegeben.

Da jedoch von diesen Schwingungen gerader Parität der Monopolsektor aufgrund fehlender Drehimpulsbarriere wahrscheinlich am ehesten instabil wird, kann mit Hilfe dieser beiden Bedingungen eine Vorentscheidung für die beiden uns bekannten statischen Lösungen getroffen werden:

- Die Lösung, die ein Skalarfeld der Form $\Phi = \frac{Q}{r}$ beinhaltet und erst im Laufe dieser Arbeit gefunden wurde (Kapitel 5.1), ist für einen begrenzten Parameterbereich um den Schwarzschild-Fall herum stabil gegen diese beiden Schwingungsformen. Sie wird potentiell instabil, wenn der Parameterbereich verlassen und somit das Skalarfeld dem Betrage nach zu groß wird, eine numerische Untersuchung des Frequenzspektrums wird dann Gewißheit bringen.

- Die Lösung, die ein Skalarfeld der Form $\Phi = q \cdot e^{-mr}$ beinhaltet und schon von Olaf Bechmann in seiner Diplomarbeit vorgestellt wurde (Kapitel 5.2), scheint für alle Parameterwerte stabil zu sein. Für die ungeraden Schwingungen und die Monopolschwingungen sind keine instabilen Regionen zu entdecken.

Abgesehen von den Stabilitätsaussagen über die beiden uns bekannten statischen Lösungen sind auch die beiden Stabilitätsbedingungen (7.19) und (8.21) selbst als Ergebnis dieser Arbeit festzuhalten. Die konkrete statische Lösung, deren Stabilität mit ihnen untersucht werden soll, ist nicht näher spezifiziert. Sie lassen sich daher auch auf zukünftige Lösungen anwenden und stellen somit ein allgemeines Handwerkszeug zur Stabilitätsuntersuchung dar.

A Besselfunktionen

In den Kapiteln 5.1 und 5.2 wurden Besselfunktionen zur Lösung der statischen Gleichungen verwendet. Da die Konventionen in der Literatur variieren können, seien die verwendeten Definitionen hier noch einmal aufgeführt. Grundlage hierfür ist die Darstellung nach Gradshteyn [10].

Besselfunktionen $Z_\nu(x)$ sind definiert als Lösungen der Differentialgleichung

$$\partial_x^2 Z_\nu(x) + \frac{1}{x}\partial_x Z_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \cdot Z_\nu(x) = 0 \tag{A.1}$$

In Kapitel 5.2 tauchen sie auf als Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \partial_x^2 R(x) + \frac{1}{x}\partial_x R(x) - R(x) = 0 \\ \Longrightarrow\quad & R(x) = Z_0(ix) \end{aligned}$$

Und in Kapitel 5.1 lösen sie

$$\begin{aligned} & \partial_r^2 R(r) = c^2 r^{2\alpha-2} \cdot R(r) \\ \Longrightarrow\quad & R(r) = \sqrt{r} \cdot Z_{\frac{1}{2\alpha}}\left(i\frac{\pm c}{\alpha} \cdot r^\alpha\right) \end{aligned}$$

Der Lösungsraum ist zweiparametrig

$$Z_\nu(ix) = c_1 \cdot I_\nu(x) + c_2 \cdot K_\nu(x).$$

mit den zwei frei wählbaren Integrationskonstanten c_1 und c_2. Die Funktionen I_ν und K_ν heißen modifizierte Besselfunktionen erster und zweiter Art.

Sie lassen sich als analytisch nicht lösbare Integrale oder als unendliche Summen schreiben, die hier aber nicht weiter halfen. Für die speziellen Besselfunktionen mit halbzahligem Index (Kapitel 5.1) existiert jedoch eine geschlossene Form mit endlicher Summe:

$$\begin{aligned} I_{\pm(n+\frac{1}{2})}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \cdot \left[e^z \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} \pm (-1)^{n+1} e^{-z} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} \right] \\ K_{\pm(n+\frac{1}{2})}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} \end{aligned}$$

Für den im Text verwendeten Spezialfall $n = 0$ ergibt sich hierfür:

$$\begin{aligned} I_{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \cdot \left(e^z + e^{-z}\right) \\ K_{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot e^{-z} \end{aligned} \tag{A.2}$$

Für die speziellen Besselfunktionen zum Index $\nu = 0$ (Kapitel 5.2) existiert ebenfalls eine geschlossene Form, leider mit unendlicher Summe:

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \\ K_0(x) &= -\ln\left(\frac{x}{2}\right) I_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k+1) \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \end{aligned} \tag{A.3}$$

Hierbei ist $\psi(x)$ die faktorielle logarithmische Funktion, definiert durch:

$$\psi(x+1) := \partial_x \ln(x!)$$

Sie läßt sich als unendliche Summe schreiben:

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x} \right)$$

Für ganzzahlige Argumente vereinfacht sich dies zu:

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \tag{A.4}$$

Wobei γ die Euler-Konstante ist, definiert durch:

$$\gamma := \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = 0.5772156649\ldots$$

Anhand der Definition von ψ läßt sich sofort die im Text verwendete Beziehung $\psi(1) = -\gamma$ ablesen.

B Konform äquivalente Wirkungen

Im Verlauf dieser Arbeit wurde davon ausgegangen, daß das Skalarfeld an die Gravitation koppelt mittels der Wirkung (2.1)

$$\mathcal{S} = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\left(R + \frac{1}{2}g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi + V(\Phi)\right)$$

Es gibt jedoch noch viele andere Möglichkeiten, das Skalarfeld mit der Gravitation zu verbinden. Interessanterweise sind viele von ihnen konform äquivalent zu dieser.

Die folgende Tabelle äquivalenter Wirkungen ist einer Abhandlung von Jai-chan Hwang [13] entnommen, in der er die konforme Transformation diskutiert, die zwischen diesen Wirkungen vermittelt.

$f(\Phi, R)$ Gravitation	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}f(\Phi, R) - \frac{1}{2}\omega(\Phi)g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi - V(\Phi)$
$f(R)$ Gravitation	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}f(R)$
R^2 Gravitation	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(R - \frac{R^2}{6M^2}\right)$
Allgemeine Skalar-Tensor-Gravitation	$\mathcal{L} = \Phi R - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi}g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi - V(\Phi)$
Brans-Dicke Theorie	$\mathcal{L} = \Phi R - \frac{\omega}{\Phi}g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi$
$F(\Phi)R$ Gravitation	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}F(\Phi)R - \frac{1}{2}\omega(\Phi)g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi - V(\Phi)$
Dilaton Gravitation	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}e^{-\Phi}\left(R - g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi\right)$
Allgemein gekoppeltes Skalarfeld	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\gamma - \xi\Phi^2\right)R - \frac{1}{2}g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi - V(\Phi)$
Nichtminimal gekoppeltes Skalarfeld	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(1 - \xi\Phi^2\right)R - \frac{1}{2}g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi - V(\Phi)$
Konform gekoppeltes Skalarfeld	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\Phi^2\right)R - \frac{1}{2}g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi - V(\Phi)$
Minimal gekoppeltes Skalarfeld	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi - V(\Phi)$
Induzierte Gravitation	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon\Phi^2 R - \frac{1}{2}g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi - V(\Phi)$

Literatur

[1] Olaf Bechmann, *Skalare Deformation Schwarzer Löcher*, Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik Hannover, 1994

Olaf Bechmann und Olaf Lechtenfeld, *Exact black-hole solution with self-interacting scalar field*, Class. Quantum Grav, 12 (1995), Seite 1473-1481

[2] Jacob D. Bekenstein, *Black hole hair: twenty-five years after*, Racah Institute of Physics, The Hebrew University, Jerusalem 1996, Preprint gr-qc/9605059

[3] Jacob D. Bekenstein, *Nonexistence of Baryon Number for Static Black Holes*, Physical Review D Vol. 5, 1972, Seite 1239 ff

[4] Markus Heusler, *A mass bound for spherically symmetric black hole spacetimes*, Enrico Fermi Institute, University of Chicago, 1994, Preprint gr-qc/9411054

[5] L. D. Landau und E.M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, Band 2, Verlag Harri Deutsch, 1992

[6] *Maple V Release 2.0a*, University of Waterloo, 1981-1993

[7] Tullio Regge und John A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity*, Physical Review Vol. 108 Nr. 4, 15. November 1957, Seite 1063 ff

[8] C. V. Vishveshwara, *Stability of the Schwarzschild Metric*, Physical Review D Vol. 1 Nr. 10, 15. Mai 1970, Seite 2870 ff

C. V. Vishveshwara und Lester A. Edelstein, *Differential Equations for Perturbations on the Schwarzschild Metric*, Physical Review D Vol. 1 Nr. 12, 15. Juni 1970, Seite 3514 ff

[9] Frank J. Zerilli, *Effective Potential for Even-Parity Regge-Wheeler Gravitational Perturbation Equations*, Physical Review Letters Vol. 24 Nr. 13, 30. März 1970, Seite 737ff

[10] I. S. Gradshteyn und I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press New York and London, 1965

[11] Franz Schwabl, *Quantenmechanik*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1990, Kapitel 3.6 *Allgemeine Diskussion der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung*

[12] Brodbeck, Heusler, Lavrelashvili, Straumann und Volkov, *Stability Analysis of New Solutions of the EYM system with Cosmological Constant*, Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich, 1996, Preprint hep-th/9605166

[13] Jai-chan Hwang, *Cosmological Perturbations in Generalized Gravity Theories: Conformal Transformation*, Department of Astronomy and Atmospheric Sciences, Kyungpook National University, Taegu, Korea 1996, Preprint gr-qc/9605024

Danksagung

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld für die Betreuung, lange Diskussionen und die Möglichkeit, in Hannover eine Diplomarbeit in Allgemeiner Relativitätstheorie zu machen, wo ohne Frage mein Interessensschwerpunkt liegt. Außerdem bei Torsten Thumstädter, der mir bei einigen mathematischen Problemen wesentlich weiterhalf, sowie bei Herrn Paul für den Account in unserem CAD-Pool, wo ich viel Zeit mit Maple verbrachte. Aber auch allen anderen Mitarbeitern des Instituts sei herzlich gedankt für ihre Unterstützung im Laufe meines Studiums, das nun schließlich in diese Diplomarbeit mündet.

Auch meinen beiden kleinen Geschwistern möchte ich danken für die vielen kleinen Momente, besonders währende der Endphase dieser Diplomarbeit, in denen sie mich in die Realität zurückgeholt haben.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Helge Dennhardt