

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
LEIBNIZ UNIVERSITÄT HANNOVER

Nichtkommutative supersymmetrische Solitonen

DIPLOMARBEIT
ZUR ERLANGUNG DES AKADEMISCHEN GRADES
DIPLOM-PHYSIKER

vorgelegt von
Dipl.-Math. Christian Gutschwager

Eingereicht am 20. August 2007

1. Gutachter: Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
2. Gutachter: Prof. Dr. Norbert Dragon

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Nicht-kommutative bosonische Koordinaten	5
2.1	Das \star -Produkt	5
2.2	Die Operator-Formulierung	6
2.3	Die Moyal-Weyl-Abbildung	7
3	Feldgleichungen	8
3.1	Antichiraler Superraum	8
3.2	$\mathcal{N} = 1$ -erweitertes Sigma-Modell	8
3.3	lineares System	11
4	Supersymmetrische Solitonen	12
4.1	nicht-kommutative Solitonen	14
4.2	Energiedichte	14
4.2.1	Auswirkung einer Translation auf die Energiedichte	15
5	Rang-1-Solitonen	19
5.1	$U(1)$ -Solitonen	19
5.1.1	Energie	21
5.2	$U(2)$ Solitonen	22
5.2.1	Energie	23
6	Rang-2-Solitonen	28
6.1	Streuung von nicht-kommutativen bosonischen Solitonen	28
6.1.1	$U(1)$ -Solitonen	30
6.1.2	$U(2)$ -Solitonen	31
6.2	Streuung von nicht-kommutativen supersymmetrischen Solitonen	32
6.2.1	$U(1)$ -Solitonen	34
6.2.2	$U(2)$ -Solitonen, Fall 1	42
6.2.3	$U(2)$ -Solitonen, Fall 2	47
7	Zusammenfassung und Ausblick	52
A	Anhang	53
A.1	$U(2)$ -Soliton von Kapitel 6.2.2	53

1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir nicht-kommutative supersymmetrische Solitonen die den Gleichungen eines $2+1$ -dimensionalen $\mathcal{N} = 1$ -erweiterten Sigma-Modells gehorchen. Diese ergeben sich durch Reduktion der auf den anti-chiralen Unterraum eingeschränkten $2+2$ -dimensionalen supersymmetrischen selbstdualen Yang-Mills-(SSDYM-) Gleichungen auf $2+1$ Dimensionen¹ und anschließender Eichfixierung.

Die offenen Strings der bosonischen $N = 2$ -Stringtheorie werden durch die bosonischen SDYM-Gleichungen in einem $2+2$ -dimensionalen Zielraum beschrieben. Liegt ein B -Feld als Hintergrundfeld vor, so wird diese Theorie nicht-kommutativ. Wir können die betrachteten nicht-kommutativen SSDYM-Gleichungen als Erweiterung hiervon auffassen.

In der Twistor-Stringtheorie hat man den Supertwistorraum $\mathbb{C}P^{3|4}$ als Zielraum und findet dort eine $\mathcal{N} = 4$ -SSDYM-Theorie, welche die $\mathcal{N} = 1$ -SSDYM-Gleichungen als Untersektor enthält (siehe [Popov]).

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut. Wir werden zuerst die beiden Möglichkeiten angeben, wie wir die Nichtkommutativität beschreiben können.

In Kapitel 3 werden wir die $2+2$ -dimensionalen SSDYM-Gleichungen auf die Gleichungen des $\mathcal{N} = 1$ -erweiterten Sigma-Modells reduzieren und zeigen, dass diese Gleichungen (bekanntermaßen) auch durch die Kompatibilitätsbedingungen eines linearen Gleichungssystems beschrieben werden.

In Kapitel 4 werden wir die Gleichungen des linearen Systems lösen und die Bedingungen an die Feldkonfigurationen ablesen, die die Solitonen beschreiben. Weiterhin werden wir die Energiedichte im statischen Fall supersymmetrisch erweitern und die Auswirkung einer fermionischen Translation (d.h. einer Translation die fermionische Parameter enthält der Erzeuger und Vernichter auf die Gesamtenergie untersuchen.

In Kapitel 5 werden wir dann für den abelschen ($U(1)$) und den nicht-abelschen ($U(n), n \geq 2$) Fall Rang-1-Solitonen konstruieren und ihre Energie berechnen.

In Kapitel 6 werden wir das Dressing-Verfahren für bosonische Solitonen nachvollziehen und es anschließend supersymmetrisch erweitern. Dies werden wir dann benutzen um supersymmetrische zeitabhängige Rang-2-Solitonen zu konstruieren, welche unter gewissen Umständen wechselwirkende Solitonen beschreiben.

¹Dies liefert die so genannten Bogomolny-Gleichungen

2 Nicht-kommutative bosonische Koordinaten

Wir wollen Solitonen betrachten mit nicht-kommutierenden bosonische Koordinaten. Um die Nicht-Kommutativität zu erreichen können wir zwei äquivalente Darstellungen benutzen. Wir können entweder das \star -Produkt benutzen, bei dem wir einfach das normale Produkt zwischen zwei Funktionen umdefinieren, oder wir betrachten die Koordinaten einfach wie aus der Quantentheorie gewohnt als Operatoren mit entsprechenden Kommutator-Relationen. Wir werden im folgenden beide Möglichkeiten kurz darstellen und im Anschluss noch kurz die Moyal-Weyl-Abbildung betrachten mit der wir zwischen diesen beiden Darstellungen wechseln können.

2.1 Das \star -Produkt

Um aus kommutierenden bosonischen Koordinaten x^i nicht-kommutierende zu machen benutzen wir das Moyal- \star -Produkt. Für zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen $f(x^i), g(x^i)$ definieren wir das \star -Produkt als

$$(f \star g)(x^l) := f(x^l) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j} g(x^l) \quad (2.1)$$

wobei θ^{ij} antisymmetrisch und reell ist. Damit erhalten wir:

$$[x^i, x^j]_{\star} = x^i \star x^j - x^j \star x^i = i\theta^{ij} \quad (2.2)$$

Uns wird im folgenden besonders das \star -Produkt in 1+2-Dimensionen mit $(x^i) = (t, x, y)$ und Minkowski-Metrik

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

interessieren. Wir wählen t als mit x und y kommutierend und:

$$\theta_{xy} = -\theta_{yx} = \theta > 0 \quad (2.4)$$

Es sind also alle Kommutatoren 0 bis auf:

$$[x, y]_{\star} = i\theta \quad (2.5)$$

Führen wir die Koordinaten

$$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy \quad (2.6)$$

ein, so wird ihr Kommutator:

$$[z, \bar{z}]_{\star} = 2\theta \quad (2.7)$$

Die folgende Kombination aus t und y werden wir im folgenden auch des öfteren benutzen:

$$u = \frac{1}{2}(t + y) \quad v = \frac{1}{2}(t - y) \quad (2.8)$$

Damit gilt:

$$\partial_u = \partial_t + \partial_y \quad \partial_v = \partial_t - \partial_y \quad (2.9)$$

2.2 Die Operator-Formulierung

Eine weitere Möglichkeit nicht-kommutative bosonische Koordinaten darzustellen ist die aus der Quantenmechanik bekannte Formulierung durch Operatoren. Mit dieser Formulierung lässt sich oft einfacher rechnen, da man im Gegensatz zum \star -Produkt keine unendlichen Summen hat. Dazu führen wir Operator-wertige Koordinaten $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y})$ ein und fordern

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta \quad (2.10)$$

während \hat{t} mit \hat{x} und \hat{y} vertauscht. Definieren wir analog

$$\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y} \quad \hat{z}^\dagger = \hat{x} - i\hat{y} \quad (2.11)$$

so erhalten wir entsprechend:

$$[\hat{z}, \hat{z}^\dagger] = 2\theta \quad (2.12)$$

Dies legt die Einführung von Erzeugern und Vernichtern nahe. Definieren wir

$$a = \frac{\hat{z}}{\sqrt{2\theta}} \quad a^\dagger = \frac{\hat{z}^\dagger}{\sqrt{2\theta}} \quad (2.13)$$

so erhalten wir:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2.14)$$

Wie in der Quantenmechanik kann man nun einen Fock-Raum \mathcal{H} einführen mit Vakuum $|0\rangle$ und den üblichen Gleichungen:

$$\begin{aligned} a|0\rangle &= 0 & |n\rangle &= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle & a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ N &= a^\dagger a & N|n\rangle &= n|n\rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.3 Die Moyal-Weyl-Abbildung

Für den Wechsel zwischen den beiden Formulierungen der nicht-kommutativen Koordinaten benutzen wir die Moyal-Weyl-Abbildung. Sie bildet eine Funktion $f(t, z, \bar{z})$ auf eine Operator-wertige Funktion $F(t, a, a^\dagger)$, welche auf \mathcal{H} operiert, folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned} f(t, z, \bar{z}) \longrightarrow F(t, a, a^\dagger) &= - \int \frac{dpd\bar{p}}{(2\pi)^2} dzd\bar{z} f(t, z, \bar{z}) e^{-i[\bar{p}(\sqrt{2\theta}a-z)+p(\sqrt{2\theta}a^\dagger-\bar{z})]} \\ &= \text{Weyl-geordnet} \left\{ f(t, \sqrt{2\theta}a, \sqrt{2\theta}a^\dagger) \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die inverse Abbildung lautet

$$\begin{aligned} F(t, a, a^\dagger) \longrightarrow f(t, z, \bar{z}) &= 2\pi\theta \int \frac{dpd\bar{p}}{(2\pi)^2} \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left\{ F(t, a, a^\dagger) e^{-i[\bar{p}(\sqrt{2\theta}a-z)+p(\sqrt{2\theta}a^\dagger-\bar{z})]} \right\} \\ &= F_\star(t, \frac{z}{\sqrt{2\theta}}, \frac{\bar{z}}{\sqrt{2\theta}}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei man F_\star erhält, indem man gewöhnliche Produkte durch \star -Produkte ersetzt. Ist die Operator-wertige Funktion bereits Weyl-geordnet, so wählt man am besten (2.16) für die Rücktransformation.

Unter der Moyal-Weyl-Abbildung gilt des weiteren:

$$f \star g \longrightarrow \hat{f}\hat{g} \quad \int dx dy f = 2\pi\theta \text{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f} = 2\pi\theta \sum_{n \geq 0} \langle n | \hat{f} | n \rangle \quad (2.18)$$

Aus Ableitung werden Kommutatoren:

$$\partial_x f \longrightarrow \frac{i}{\theta} [\hat{y}, \hat{f}] =: \hat{\partial}_x \hat{f} \quad \partial_y f \longrightarrow -\frac{i}{\theta} [\hat{x}, \hat{f}] =: \hat{\partial}_y \hat{f} \quad (2.19)$$

$$\partial_z f \longrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2\theta}} [a^\dagger, \hat{f}] = \hat{\partial}_z \hat{f} \quad \partial_{\bar{z}} f \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\theta}} [a, \hat{f}] = \hat{\partial}_{\bar{z}} \hat{f} \quad (2.20)$$

Wir werden häufig die Abkürzungen

$$f^+ = [a^\dagger, f] \quad f^- = [a, f] \quad (2.21)$$

benutzen.

Die einfachsten Zusammenhänge sind die folgenden:

$$\begin{array}{l} f : 1 \quad z \quad \bar{z} \quad z\bar{z} - \theta \quad z\bar{z} \quad z\bar{z} + \theta \\ \hat{f} : 1 \quad \sqrt{2\theta}a \quad \sqrt{2\theta}a^\dagger \quad 2\theta N \quad 2\theta(N + \frac{1}{2}) \quad 2\theta(N + 1) \end{array} \quad (2.22)$$

Der Einfachheit halber werden wir im folgenden die Hüte weglassen und nicht zwischen \bar{z} und z^\dagger unterscheiden.

3 Feldgleichungen

Wir erhalten die nicht-kommutativen supersymmetrischen Solitonen als Lösungen des $\mathcal{N} = 1$ -erweiterten Sigma-Modells, welches wir aus den von $2 + 2$ auf $2 + 1$ Dimensionen reduzierten supersymmetrischen selbstdualen Yang-Mills-(SSDYM-)Gleichungen und anschließender Eichfixierung erhalten. Für die explizite Konstruktion von Solitonen bietet sich jedoch ein anderer äquivalenter Weg an. Wir werden in Kapitel 3.3 sehen, dass wir die Gleichungen des Sigma-Modells auch als Kompatibilitätsbedingungen eines linearen Gleichungssystems erhalten und aus der Lösung des Gleichungssystems sowie aus den im Gleichungssystem auftauchenden Koeffizienten die Solitonen ablesen können.

3.1 Antichiraler Superraum

Wir beginnen mit dem Raum \mathbb{R}^{2+2} mit Metrik $g = \text{diag}(-1, -1, 1, 1)$ und Koordinaten (t, t', x, y) . Auf diesem Raum können wir Koordinaten mit Spinorindices $\alpha, \dot{\alpha}$ einführen:

$$x^{1\dot{1}} = \frac{1}{2}(t - y), \quad x^{1\dot{2}} = \frac{1}{2}(x + t'), \quad x^{2\dot{1}} = \frac{1}{2}(x - t'), \quad x^{2\dot{2}} = \frac{1}{2}(t + y) \quad (3.1)$$

Weiterhin ist bekannt, dass wir in diesem Raum reelle Majorana-Weyl-Spinoren $\theta^\alpha = \bar{\theta}^\alpha$ und $\eta^{\dot{\alpha}} = \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$ als anti-kommutierende Objekte einführen dürfen. Damit erhalten wir einen Superraum $\mathbb{R}^{2+2|2}$.

An skalare Superfelder $f(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \theta^\alpha, \eta^{\dot{\alpha}})$ können wir die Antichiralitätsbedingung

$$D_\alpha f = 0 \quad (3.2)$$

mit

$$D_\alpha = \partial_\alpha + \eta^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \partial_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}}, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \quad \partial_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \eta^{\dot{\alpha}}} \quad (3.3)$$

stellen. Diese Bedingung lässt sich leicht mit einer Koordinatentransformation

$$(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \theta^\alpha, \eta^{\dot{\alpha}}) \rightarrow (x^{\alpha\dot{\alpha}} - \theta^\alpha \eta^{\dot{\alpha}}, \theta^\alpha, \eta^{\dot{\alpha}}) \quad (3.4)$$

lösen. In den neuen Koordinaten lautet der Operator D_α dann:

$$D_\alpha = \partial_\alpha \quad (3.5)$$

und die Antichiralitätsbedingung besagt einfach, dass das Superfeld f in den transformierten Koordinaten nicht von θ^α abhängen darf. Im folgenden werden wir uns auf diesen antichiralen Superraum beschränken. Eine detailliertere Einführung findet man beispielsweise in [LeChi]

3.2 $\mathcal{N} = 1$ -erweitertes Sigma-Modell

Kommen wir nun zu den SSDYM-Gleichungen für ein Superfeld \mathcal{A} welche wir auf die Gleichungen des $\mathcal{N} = 1$ -erweiterten Sigma-Modells reduzieren wollen. Die SSDYM-Gleichungen haben mit

$$\nabla_{\alpha\dot{\alpha}} = \partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \mathcal{A}_{\alpha\dot{\alpha}} \quad \nabla_{\dot{\alpha}} = \partial_{\dot{\alpha}} + \mathcal{A}_{\dot{\alpha}} \quad (3.6)$$

in 2 + 2 Dimensionen die folgende Gestalt:

$$[\nabla_{\alpha\dot{\alpha}}, \nabla_{\beta\dot{\beta}}] + [\nabla_{\alpha\dot{\beta}}, \nabla_{\beta\dot{\alpha}}] = 0 \quad (3.7)$$

$$[\nabla_{\dot{\alpha}}, \nabla_{\beta\dot{\beta}}] + [\nabla_{\dot{\beta}}, \nabla_{\beta\dot{\alpha}}] = 0 \quad (3.8)$$

Die Reduktion von 2 + 2 auf 2 + 1 Dimensionen erfolgt durch Symmetrisieren der bosonischen Koordinaten. Wir lassen die Punkte weg² und zerlegen:

$$x^{\alpha\beta} = x^{(\alpha\beta)} + \epsilon^{\alpha\beta}y \quad (3.9)$$

Die Reduktion besteht nun aus der einfachen Forderung:

$$\partial_y \equiv 0 \quad (3.10)$$

Betrachten wir die Gleichungen (3.1) so bedeutet die obige Forderung einfach, dass wir keine Abhängigkeit mehr von t' in unseren Feldern haben.

Auch bei den fermionischen Koordinaten und den Feldern $\mathcal{A}_{\alpha\dot{\beta}}$ lassen wir die Punkte weg und symmetrisieren die $\mathcal{A}_{\alpha\dot{\beta}}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1\dot{2}} &= \mathcal{A}_{12} + \epsilon_{12}\phi \\ \mathcal{A}_{2\dot{1}} &= \mathcal{A}_{12} + \epsilon_{21}\phi \end{aligned} \quad (3.11)$$

Damit lassen sich die neuen Felder durch die alten folgendermaßen ausdrücken

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{12} &= \frac{1}{2} (\mathcal{A}_{1\dot{2}} + \mathcal{A}_{2\dot{1}}) \\ \phi &= \frac{1}{2} (\mathcal{A}_{1\dot{2}} - \mathcal{A}_{2\dot{1}}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

und die Gleichungen (3.7) werden zu:

$$\begin{aligned} \partial_{11}\mathcal{A}_{22} - \partial_{22}\mathcal{A}_{11} + [\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{22}] \\ + \partial_{12}(\mathcal{A}_{12} - \phi) - \partial_{12}(\mathcal{A}_{12} + \phi) + [\mathcal{A}_{12} + \phi, \mathcal{A}_{12} - \phi] &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\partial_{11}(\mathcal{A}_{12} - \phi) - \partial_{12}\mathcal{A}_{11} + [\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{12} - \phi] = 0 \quad (3.14)$$

$$\partial_{12}\mathcal{A}_{22} - \partial_{22}(\mathcal{A}_{12} + \phi) + [\mathcal{A}_{12} + \phi, \mathcal{A}_{22}] = 0 \quad (3.15)$$

Aus den Gleichungen (3.8) werden:

$$\partial_1\mathcal{A}_{11} - \partial_{11}\mathcal{A}_1 + [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{11}] = 0 \quad (3.16)$$

$$\partial_1(\mathcal{A}_{12} + \phi) - \partial_{12}\mathcal{A}_1 + [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{12} + \phi] + \partial_2\mathcal{A}_{11} - \partial_{11}\mathcal{A}_2 + [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_{11}] = 0 \quad (3.17)$$

$$\partial_1(\mathcal{A}_{12} - \phi) - \partial_{12}\mathcal{A}_1 + [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{12} - \phi] = 0 \quad (3.18)$$

$$\partial_2(\mathcal{A}_{12} + \phi) - \partial_{12}\mathcal{A}_2 + [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_{12} + \phi] = 0 \quad (3.19)$$

$$\partial_2(\mathcal{A}_{12} - \phi) - \partial_{12}\mathcal{A}_2 + [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_{12} - \phi] + \partial_1\mathcal{A}_{22} - \partial_{22}\mathcal{A}_1 + [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{22}] = 0 \quad (3.20)$$

$$\partial_2\mathcal{A}_{22} - \partial_{22}\mathcal{A}_2 + [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_{22}] = 0 \quad (3.21)$$

²Dass dies gerechtfertigt ist, kann man zum Beispiel in [LeChi] nachlesen.

Es gibt zwei bekannte Arten dieses Gleichungssystem zu lösen. Bei der Leznov-Methode führt man ein Superfeld Υ ein und setzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= 0 & \mathcal{A}_2 &= \partial_1 \Upsilon \\ \mathcal{A}_{11} &= 0 & \mathcal{A}_{12} + \phi &= \partial_{11} \Upsilon \\ \mathcal{A}_{12} - \phi &= 0 & \mathcal{A}_{22} &= \partial_{12} \Upsilon \end{aligned} \quad (3.22)$$

Bei der Yang-Methode führt man ein Superfeld Φ ein und setzt stattdessen:

$$\mathcal{A}_2 = \Phi^{-1} \partial_2 \Phi, \quad \mathcal{A}_{12} + \phi = \Phi^{-1} \partial_{12} \Phi, \quad \mathcal{A}_{22} = \Phi^{-1} \partial_{22} \Phi \quad (3.23)$$

Das Υ und das Φ werden unsere Solitonen sein.

Wir benutzen die Leznov-Methode, welche alle bis auf die folgenden 3 Gleichungen löst, die unser Sigma-Modell beschreiben:

$$\partial_{12} \partial_{12} \Upsilon - \partial_{22} \partial_{11} \Upsilon + [\partial_{11} \Upsilon, \partial_{12} \Upsilon] = 0 \quad (3.24)$$

$$\partial_2 \partial_{11} \Upsilon - \partial_{12} \partial_1 \Upsilon + [\partial_1 \Upsilon, \partial_{11} \Upsilon] = 0 \quad (3.25)$$

$$\partial_2 \partial_{12} \Upsilon - \partial_{22} \partial_1 \Upsilon + [\partial_1 \Upsilon, \partial_{12} \Upsilon] = 0 \quad (3.26)$$

Entwickelt man Υ nach den fermionischen Koordinaten als

$$\Upsilon = \Upsilon_0 + \Upsilon_1 \eta^1 + \Upsilon_2 \eta^2 + \Upsilon_{12} \eta^1 \eta^2 \quad (3.27)$$

so erhält man aus dem übrig gebliebenem Gleichungssystem 12 Gleichungen, von denen sich jedoch 3 als Konsistenzbedingungen der anderen 9 ergeben. Die 9 Gleichungen lauten mit $\beta = 1, 2$:

$$\begin{aligned} (\partial_{12} \partial_{12} - \partial_{22} \partial_{11}) \Upsilon_0 + [\partial_{11} \Upsilon_0, \partial_{12} \Upsilon_0] &= 0 \\ \partial_{1\beta} \Upsilon_2 - \partial_{\beta 2} \Upsilon_1 + [\Upsilon_1, \partial_{1\beta} \Upsilon_0] &= 0 \\ \partial_{1\beta} \Upsilon_{12} + \{\Upsilon_1, \partial_{1\beta} \Upsilon_1\} &= 0 \\ \partial_{\beta 2} \Upsilon_{12} + \{\Upsilon_1, \partial_{1\beta} \Upsilon_2\} - [\Upsilon_{12}, \partial_{1\beta} \Upsilon_0] &= 0 \\ \partial_{1\beta} [\Upsilon_1, \Upsilon_{12}] &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Fordert man noch $\{\Upsilon_1, \Upsilon_1\} = 0$ so folgt $\{\Upsilon_1, \partial_{1\beta} \Upsilon_1\} = 0$ und es bietet sich an, die Gleichungen folgendermaßen nacheinander zu lösen:

$$(\partial_{12} \partial_{12} - \partial_{22} \partial_{11}) \Upsilon_0 + [\partial_{11} \Upsilon_0, \partial_{12} \Upsilon_0] = 0 \quad (3.29)$$

$$\partial_{11} \Upsilon_2 = \partial_{12} \Upsilon_1 + [\partial_{1\beta} \Upsilon_0, \Upsilon_1] = 0 \quad (3.30)$$

$$\partial_{12} \Upsilon_2 = \partial_{22} \Upsilon_1 + [\partial_{1\beta} \Upsilon_0, \Upsilon_1] = 0$$

$$\partial_{12} \Upsilon_{12} = \partial_{11} \Upsilon_{12} = 0 \quad (3.31)$$

$$\partial_{22} \Upsilon_{12} = -\{\Upsilon_1, \partial_{12} \Upsilon_2\} + [\Upsilon_{12}, \partial_{12} \Upsilon_0] \quad (3.32)$$

$$\{\Upsilon_1, \partial_{11} \Upsilon_2\} - [\Upsilon_{12}, \partial_{11} \Upsilon_0] = 0 \quad (3.33)$$

$$[\partial_{11} \Upsilon_1, \Upsilon_{12}] = [\partial_{12} \Upsilon_1, \Upsilon_{12}] = 0$$

3.3 lineares System

Kommen wir nun zu dem linearen System welches uns eine einfache Möglichkeit liefert Solitonen zu konstruieren. Es lautet bekanntermaßen:

$$(\zeta \partial_x - \partial_u - A) \psi = 0 \quad (3.34a)$$

$$(\zeta \partial_v - \partial_x - B) \psi = 0 \quad (3.34b)$$

$$(\zeta \partial_1 - \partial_2 - C) \psi = 0 \quad (3.34c)$$

mit $\psi = \psi(x^a, \eta^\alpha, \zeta)$ und $x^a = (x, u, v)$ während (A, B, C) nur von x^a und η^α abhängen.

Dies ist offenbar nicht für beliebige A, B, C lösbar. Dieses Gleichungssystem ist lösbar, wenn die Kommutatoren der Operatoren vor dem ψ verschwinden. Für die ersten beiden Gleichungen erhalten wir folgende Kompatibilitätsbedingung:

$$[\zeta \partial_x - \partial_u - A, \zeta \partial_v - \partial_x - B] = 0 \quad (3.35)$$

Da dies für alle ζ gelten muss, können wir diesen Kommutator nach ζ entwickeln und erhalten die beiden folgenden Gleichungen:

$$\partial_u B - \partial_x A + [A, B] = 0 \quad (3.36)$$

$$\partial_x B - \partial_v A = 0 \quad (3.37)$$

Die beiden anderen Kompatibilitätsbedingungen liefern:

$$\partial_2 B - \partial_x C + [C, B] = 0 \quad (3.38)$$

$$\partial_1 B - \partial_v C = 0 \quad (3.39)$$

$$\partial_2 A - \partial_u C + [C, A] = 0 \quad (3.40)$$

$$\partial_1 A - \partial_x C = 0 \quad (3.41)$$

Diese sechs Gleichungen lassen sich wieder mit einem Superpotential Υ lösen. Die Wahl

$$\begin{aligned} A &= \partial_x \Upsilon \\ B &= \partial_v \Upsilon \\ C &= \partial_1 \Upsilon \end{aligned} \quad (3.42)$$

löst drei der Gleichungen. Die übrigen werden zu unseren Leznov-Gleichungen (siehe (3.24)) mit folgender Identifikation:

$$\begin{aligned} x^{11} &= v \\ x^{12} &= x \\ x^{22} &= u \end{aligned} \quad (3.43)$$

Um den Yang-Fall zu erhalten löst man die Gleichungen stattdessen mit dem Ansatz:

$$A = \Phi^{-1} \partial_u \Phi, \quad B = \Phi^{-1} \partial_x \Phi, \quad C = \Phi^{-1} \partial_2 \Phi \quad (3.44)$$

4 Supersymmetrische Solitonen

Wir wollen nun das lineare System (3.34) für ψ lösen. Aufgrund von Eichfreiheit können wir an ψ die Realitätsbedingung

$$\psi\psi^\dagger = 1 \quad (4.1)$$

stellen, mit:

$$\psi^\dagger = (\psi(x^a, \eta^\alpha, \bar{\zeta}))^\dagger \quad (4.2)$$

Damit lässt sich das lineare System (3.34) umschreiben auf:

$$A = [(\zeta\partial_x - \partial_u)\psi]\psi^\dagger = -\psi(\zeta\partial_x - \partial_u)\psi^\dagger \quad (4.3a)$$

$$B = [(\zeta\partial_v - \partial_x)\psi]\psi^\dagger = -\psi(\zeta\partial_v - \partial_x)\psi^\dagger \quad (4.3b)$$

$$C = [(\zeta\partial_1 - \partial_2)\psi]\psi^\dagger = -\psi(\zeta\partial_1 - \partial_2)\psi^\dagger \quad (4.3c)$$

Wobei wir hier den Trick

$$(L\psi)\psi^\dagger = (L\psi)\psi^\dagger + \psi L\psi^\dagger - \psi L\psi^\dagger = L \underbrace{(\psi\psi^\dagger)}_{=1} - \psi L\psi^\dagger = -\psi L\psi^\dagger \quad (4.4)$$

mit $L = (\zeta\partial_x - \partial_u)$ bzw. $L = (\zeta\partial_v - \partial_x)$ bzw. $L = (\zeta\partial_1 - \partial_2)$ benutzt haben.

Entwickeln wir ψ für $\zeta \rightarrow 0$ oder $\zeta \rightarrow \infty$ so erhalten wir unsere Solitonen wie man schnell mit dem Gleichungssystem (4.3) bestätigt als:

$$\begin{aligned} \psi &= \Phi^{-1} + O(\zeta) && \text{für } \zeta \rightarrow 0 \\ \psi &= 1 - \zeta^{-1}\Upsilon + O(\zeta^{-2}) && \text{für } \zeta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.5)$$

Mit $\Phi^{-1} = \Phi^\dagger$ ist natürlich auch Φ ein Soliton und wir werden im folgenden meist die Entwicklung $\psi = \Phi + O(\zeta)$ für $\zeta \rightarrow 0$ annehmen.

Um das lineare System (4.3) zu lösen fordern wir, dass (4.3) analytisch bezüglich ζ ist. Wie man an der linken Seite von (4.3) erkennt hängt das lineare System nicht von ζ ab, während ψ nicht-trivial von $\zeta \in \mathbb{C}$ abhängig ist. Also ist ψ eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} mit Polen $\mu_k \in \mathbb{C}$ mit konstanten μ_k .

Um das System zu lösen werden wir zuerst annehmen, dass ψ einen einfachen Pol μ hat mit $\text{Im}\mu < 0$. Machen wir den Ansatz

$$\psi(x, u, v, \eta^1, \eta^2, \zeta) = 1 + \frac{\mu - \bar{\mu}}{\zeta - \mu} P(x, u, v, \eta^1, \eta^2) \quad (4.6)$$

und setzen ihn in die Realitätsbedingung (4.1) ein, so erhalten wir:

$$1 = 1 + \frac{(\zeta - \bar{\mu})(\mu - \bar{\mu})P - (\zeta - \mu)(\mu - \bar{\mu})P^\dagger - (\mu - \bar{\mu})^2 PP^\dagger}{(\zeta - \mu)(\zeta - \bar{\mu})} \quad (4.7)$$

Dies ist erfüllt, wenn für P gilt:

$$P = P^\dagger = P^2 \quad (4.8)$$

P ist also ein Projektor.

Setzen wir

$$L_1 = \zeta \partial_x - \partial_u \quad L_2 = \zeta \partial_v - \partial_x \quad L_3 = \zeta \partial_1 - \partial_2 \quad (4.9)$$

und werten die rechten Seiten des linearen Systems (4.3) für $\zeta = \mu$ aus, so erhalten wir für $i = 1 \dots 3$:

$$\frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu - \mu} (L_i P) \left(1 - \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu - \bar{\mu}} P \right) = \frac{\mu - \bar{\mu}}{0} (L_i P) (1 - P) \quad (4.10)$$

Damit die rechte Seite von (4.3) auch an der Stelle $\zeta = \mu$ analytisch ist, muss folglich gelten:

$$(L_i P) (1 - P) = 0 \quad (4.11)$$

Ist r der Matrix-Rang des Projektors P , so können wir P ansetzen als

$$P = T \left(T^\dagger T \right)^{-1} T^\dagger \quad (4.12)$$

wobei T eine $n \times r$ -Matrix ist.

Mit (4.12) wird (4.11) nach einer kurzen Rechnung zu:

$$T \left(T^\dagger T \right)^{-1} \left(L_i T^\dagger - \left(L_i T^\dagger \right) T \left(T^\dagger T \right)^{-1} T^\dagger \right) = 0 \quad (4.13)$$

Diese Gleichung ist offenbar erfüllt, wenn

$$L_i T^\dagger = \gamma_i^\dagger T^\dagger \quad \bar{L}_i T = T \gamma_i \quad (4.14)$$

gilt, wobei für $i = 1, 2$ die γ_i beliebige komplexe $r \times r$ -Matrizen sind. γ_3 muss natürlich eine fermionische $r \times r$ -Matrix aus der Graßmann-Algebra sein. Mit

$$\eta = \eta^1 + \bar{\mu} \eta^2 \quad \bar{\eta} = \eta^1 + \mu \eta^2 \quad (4.15)$$

lässt sich die Gleichung (4.14) für $i = 3$ leicht lösen. Als allgemeine Lösung erhalten wir

$$T = T_0(\eta) e^{\frac{\bar{\eta}}{\bar{\mu} - \mu} \gamma_3} \quad (4.16)$$

mit $\gamma_3 = \gamma_3(w, \eta)$.

Da $\text{Im} \mu < 0$, also insbesondere $\mu \notin \mathbb{R}$, ist $\bar{\mu} - \mu \neq 0$ und wir schreiben im folgenden einfach $\gamma = \frac{\gamma_3}{\bar{\mu} - \mu}$. Da $\bar{\eta} \eta = 0$ ist, gilt: $\exp(\bar{\eta} \gamma) = 1 + \bar{\eta} \gamma$. Damit erhalten wir aus der Forderung $\partial_{\bar{\eta}} T = T \gamma$:

$$\partial_{\bar{\eta}} T = \partial_{\bar{\eta}} (T_0 + T_0 \bar{\eta} \gamma) = T_0 \gamma \quad (4.17)$$

$$T \gamma = (T_0 + T_0 \bar{\eta} \gamma) \gamma = T_0 \gamma + T_0 \bar{\eta} \gamma^2 \quad (4.18)$$

Aus der Gleichheit folgt nun $\gamma^2 = 0$.

Für $i = 1, 2$ lässt sich die Gleichung (4.14) ähnlich lösen und wir erhalten mit

$$w = x + \bar{\mu}u + \bar{\mu}^{-1}v \quad (4.19)$$

als allgemeine Lösung

$$T = T_0(w, \eta) e^{\bar{\eta}\gamma'} e^{\bar{w}\alpha'} \quad (4.20)$$

mit $\alpha' = \alpha'(w, \eta)$. Statische Solitonen erhalten wir für $\mu = -i$, denn dann ist $w = z$ und ψ unabhängig von t .

Im kommutativen Fall fallen die beiden exp-Funktionen aus dem Projektor P raus, so dass im kommutativen Fall als allgemeine Lösung

$$T = T_0(w, \eta) \quad (4.21)$$

bleibt.

4.1 nicht-kommutative Solitonen

Nicht-kommutative Solitonen erhalten wir, indem wir nun annehmen, dass die Koordinaten x, y operatorwertig sind und folgender Kommutatorrelation genügen:

$$[x, y] = i\theta \quad \theta \in \mathbb{R}_{>0} \quad (4.22)$$

Dies überträgt sich auf die Koordinaten w, \bar{w} von denen P abhängt folgendermaßen:

$$[w, \bar{w}] = \frac{i}{2}\theta (\mu - \bar{\mu} - \mu^{-1} + \bar{\mu}^{-1}) = 2\beta > 0 \quad (4.23)$$

Dies legt wie in Kapitel 2.2 beschrieben die Einführung von Erzeugern $c^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\bar{w}$ und Vernichtern $c = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}w$ nahe und wir erhalten eine Erzeuger-/Vernichter-Algebra

$$[c, c^\dagger] = 1 \quad (4.24)$$

zusammen mit einem Fock-Raum:

$$c|0\rangle = 0 \quad |n\rangle = \frac{(c^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (4.25)$$

Im statischen Fall wird $w = z$ und wir schreiben wie in Kapitel 2.2 auch a statt c .

4.2 Energiedichte

Um die Energie der supersymmetrischen Solitonen zu bestimmen müssen wir die Energiedichte für statische bosonische Solitonen

$$\varepsilon_{\text{bos}} = \text{tr}_{U(n)} \{ \partial_z \Phi, \partial_{\bar{z}} \Phi \}_* \quad (4.26)$$

verallgemeinern (siehe [LeNon]). Wir erhalten als supersymmetrische Energiedichte, wobei wir hier und in Zukunft die $U(n)$ -Spur nicht explizit angeben werden:

$$\varepsilon = \int d\eta d\bar{\eta} [(\partial_\eta + i\eta\partial_z)\Phi, (\partial_{\bar{\eta}} + i\bar{\eta}\partial_{\bar{z}})\Phi] \quad (4.27)$$

Dies gilt nur für statische Solitonen. Für zeitabhängige supersymmetrische Solitonen ist noch keine Energiedichte bekannt.

Für den Fall das wir ein statisches Soliton betrachten ist

$$\Phi = 1 - 2P \quad (4.28)$$

und wir können die Energiedichte für P statt Φ auswerten und anschließend mit 4 multiplizieren. Zerlegen wir P als

$$P = P^0 + P^1\eta + P^2\bar{\eta} + P^{12}\eta\bar{\eta} \quad (4.29)$$

und berücksichtigen in der folgenden Rechnung, dass

$$\int d\eta d\bar{\eta} (f^0 + f^1\eta + f^2\bar{\eta} + f^{12}\eta\bar{\eta}) = -f^{12}, \quad (4.30)$$

wir also nur die Terme proportional zu $\eta\bar{\eta}$ berücksichtigen müssen, so wird die Energiedichte ε zu:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int d\eta d\bar{\eta} [-P^1 + P^{12}\bar{\eta} + i\partial_z P^0\eta - i\partial_z P^2\eta\bar{\eta}, -P^2 - P^{12}\eta + i\bar{\eta}\partial_{\bar{z}}P^0 + i\partial_{\bar{z}}P^1\eta\bar{\eta}] \\ &= \int d\eta d\bar{\eta} \{ [-P^1, i\partial_{\bar{z}}P^1] - \{P^{12}, -P^{12}\} + \{i\partial_z P^0, i\partial_{\bar{z}}P^0\} + [-i\partial_z P^2, -P^2] \} \eta\bar{\eta} \\ &= \underbrace{\{\partial_z P^0, \partial_{\bar{z}}P^0\}}_{=\varepsilon^0} + \underbrace{i[P^1, \partial_{\bar{z}}P^1]}_{=\varepsilon^1} + \underbrace{i[P^2, \partial_z P^2]}_{=\varepsilon^2} - \underbrace{2P^{12} \star P^{12}}_{=\varepsilon^{12}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.2.1 Auswirkung einer Translation auf die Energiedichte

Im folgenden betrachten wir die Auswirkung eines unitären Translationsoperators U , der durch Konjugation den Vernichter a auf $a - \eta\alpha$ verschiebt, auf die Energiedichte. Hierbei ist α natürlich eine Grassmannvariable. Mit der BCH-Formel lässt sich U zerlegen als:

$$\begin{aligned} U &= \exp(\alpha_f a^\dagger - \bar{\alpha}_f a) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\alpha_f \bar{\alpha}_f} e^{\eta\alpha a^\dagger} e^{\bar{\eta}\bar{\alpha}a} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\eta\bar{\eta}\alpha\bar{\alpha}\right) (1 + \eta\alpha a^\dagger)(1 + \bar{\eta}\bar{\alpha}a) \end{aligned} \quad (4.32)$$

und durch Konjugieren erhalten wir:

$$U^\dagger = \left(1 - \frac{1}{2}\eta\bar{\eta}\alpha\bar{\alpha}\right) (1 - \eta\alpha a^\dagger)(1 - \bar{\eta}\bar{\alpha}a) \quad (4.33)$$

Die später benötigten Kommutator-Relationen sind:

$$[U, a] = -\eta\alpha U \quad [U, a^\dagger] = \bar{\eta}\bar{\alpha}U \quad (4.34)$$

$$[a, U^\dagger] = -\eta\alpha U^\dagger \quad [a^\dagger, U^\dagger] = \bar{\eta}\bar{\alpha}U^\dagger \quad (4.35)$$

Damit gilt:

$$UaU^\dagger = a - \eta\alpha \quad (4.36)$$

Für den bosonischen Anteil der Energie gilt beim Projektor P :

$$E_b[P] \propto \text{Tr}_{\mathcal{H}} [a, P] [a^\dagger, P] \quad (4.37)$$

Für den transformierten Projektor UPU^\dagger erhalten wir:

$$\begin{aligned} E_b [UPU^\dagger] &\propto \text{Tr}_{\mathcal{H}} [a, UPU^\dagger] [a^\dagger, UPU^\dagger] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} [U^\dagger a U, P] [U^\dagger a^\dagger U, P] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} [a + \eta\alpha, P] [a^\dagger - \bar{\eta}\bar{\alpha}, P] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} [a, P] [a^\dagger, P] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Diese Transformation ändert also wie zu erwarten nichts am bosonischen Teil der Energie.

Wir benutzen die Abkürzungen

$$X^+ = [a^\dagger, X] \quad X^- = [a, X] \quad (4.39)$$

mit denen für die Energie des Solitons $\Phi = 1 - 2P$ folgendes gilt:

$$E[P] = 8\pi\theta \int d\eta d\bar{\eta} \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[\partial_\eta P - \frac{i}{\sqrt{2\theta}} \eta P^+, \partial_{\bar{\eta}} P + \frac{i}{\sqrt{2\theta}} \bar{\eta} P^- \right] \quad (4.40)$$

Für den Integranden von $E[UPU^\dagger]$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} E[UPU^\dagger] &\propto \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[\partial_\eta (UPU^\dagger) - \frac{i\eta}{\sqrt{2\theta}} (UPU^\dagger)^+, \partial_{\bar{\eta}} (UPU^\dagger) + \frac{i\bar{\eta}}{\sqrt{2\theta}} (UPU^\dagger)^- \right] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[(\alpha a^\dagger - \frac{1}{2} \bar{\eta} \alpha \bar{\alpha}) U P U^\dagger + U (\partial_\eta P) U^\dagger + U P U^\dagger (-\frac{1}{2} \bar{\eta} \alpha \bar{\alpha} - \alpha (a^\dagger + \bar{\eta} \bar{\alpha})) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\eta}{\sqrt{2\theta}} (-\bar{\eta} \bar{\alpha}) U P U^\dagger - \frac{i\eta}{\sqrt{2\theta}} U P^+ U^\dagger - \frac{i\eta}{\sqrt{2\theta}} U P U^\dagger (\bar{\eta} \bar{\alpha}), \right. \\ &\quad \left. (\frac{1}{2} \eta \alpha \bar{\alpha} + \bar{\alpha} (a - \eta \alpha)) U P U^\dagger + U (\partial_{\bar{\eta}} P) U^\dagger + U P U^\dagger (\frac{1}{2} \eta \alpha \bar{\alpha} - \bar{\alpha} a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\bar{\eta}}{\sqrt{2\theta}} \eta \alpha U P U^\dagger + \frac{i\bar{\eta}}{\sqrt{2\theta}} U P^- U^\dagger + \frac{i\bar{\eta}}{\sqrt{2\theta}} U P U^\dagger (-\eta \alpha) \right] \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[\alpha a^\dagger U P U^\dagger + U (\partial_\eta P) U^\dagger + U P U^\dagger (-\alpha a^\dagger) - \frac{i\eta}{\sqrt{2\theta}} U P^+ U^\dagger, \right. \\ &\quad \left. \bar{\alpha} a U P U^\dagger + U (\partial_{\bar{\eta}} P) U^\dagger + U P U^\dagger (-\bar{\alpha} a) + \frac{i\bar{\eta}}{\sqrt{2\theta}} U P^- U^\dagger \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$= \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left[\partial_{\eta} P - \frac{i}{\sqrt{2\theta}} \eta P^{+} + \alpha P^{+}, \partial_{\bar{\eta}} P + \frac{i}{\sqrt{2\theta}} \bar{\eta} P^{-} + \bar{\alpha} P^{-} \right] \quad (4.42)$$

Für die Energie liefert das Konjugieren mit U also eine Verschiebung:

$$\eta \longrightarrow \eta + i\sqrt{2\theta}\alpha \qquad \bar{\eta} \longrightarrow \bar{\eta} - i\sqrt{2\theta}\bar{\alpha} \quad (4.43)$$

Somit gilt für den konjugierten Projektor:

$$\begin{aligned} UPU^{\dagger} &= P^0 + \underbrace{\left(P^1 - \alpha P^{0+} \right)}_{P'^1} \eta + \underbrace{\left(P^2 - \bar{\alpha} P^{0-} \right)}_{P'^2} \bar{\eta} \\ &\quad + \underbrace{\left(P^{12} - \bar{\alpha} P^{1-} + \alpha P^{2+} - \alpha \bar{\alpha} P^{0+-} \right)}_{=P'^{12}} \eta \bar{\eta} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Wir wissen, dass für die Energie des Solitons folgendes gilt:

$$E[P] = -16\pi\theta \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{2\theta} P^{0+} P^{0-} + \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \left(iP^2 P^{2+} - iP^1 P^{1-} \right) + P^{12} P^{12} \right\} \quad (4.45)$$

Mit

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} (AB^{-}) = \text{Tr}_{\mathcal{H}} (-A^{-}B) \quad (4.46)$$

berechnen wir den Beitrag zur Energie von P'^1 :

$$\begin{aligned} &\text{Tr}_{\mathcal{H}} \left(P'^1 P'^{1-} \right) \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left\{ P^1 P^1 - \alpha P^{0+} P^{1-} + \alpha P^1 P^{0+-} \right\} \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left\{ \underbrace{P^1 P^1}_{=0 \text{ falls } P \text{ nur eine Graßmannvariable enthält}} + 2\alpha P^1 P^{0+-} \right\} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Durch Konjugieren erhalten wir:

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} \left(P'^2 P'^{2+} \right) = \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left\{ \underbrace{P^2 P^2}_{=0 \text{ falls } P \text{ nur eine Graßmannvariable enthält}} + 2\bar{\alpha} P^2 P^{0+-} \right\} \quad (4.48)$$

Für den Beitrag von $P'^{12} P'^{12}$ zur Energie berechnen wir:

$$\begin{aligned} &\text{Tr}_{\mathcal{H}} \left(P'^{12} P'^{12} \right) \\ &= \text{Tr}_{\mathcal{H}} \left\{ P^{12} P^{12} + 2P^{12} \left(-\bar{\alpha} P^{1-} + \alpha P^{2+} - \alpha \bar{\alpha} P^{0+-} \right) - \alpha \bar{\alpha} \left[P^{1-}, P^{2+} \right] \right\} \\ &= 2\text{Tr}_{\mathcal{H}} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} P^{12} P^{12} + \alpha P^{12} P^{2+} - \bar{\alpha} P^{12} P^{1-}}_{=0 \text{ falls } P \text{ nur eine Graßmannvariable enthält}} - \alpha \bar{\alpha} \left(P^{12} P^{0+-} + P^{1-} P^{2+} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Hatte das ursprüngliche Soliton $\Phi = 1 - 2P$ nur eine Grassmannvariable, so verändert sich die Energie von Φ durch konjugieren mit U also folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{-16\pi\theta} \left(E[UPU^\dagger] - E[P] \right) \\ & = 2\text{Tr}_{\mathcal{H}} \left\{ \alpha P^1 P^{0+-} + \bar{\alpha} P^2 P^{0+-} - \alpha \bar{\alpha} \left(P^{12} P^{0+-} + P^{1-} P^{2+} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.50)$$

5 Rang-1-Solitonen

Wir konstruieren nun Solitonen und berechnen für den statischen Fall ihre jeweilige Energie. Die Beschränkung auf den statischen Fall ist dabei keine Einschränkung, da dieser bei Rang-1-Solitonen durch eine Lorentztransformation immer erreicht werden kann. Es wird sich herausstellen, dass die Supersymmetrie keinen Einfluss auf die Energie hat.

5.1 $U(1)$ -Solitonen

Wir betrachten zuerst den abelschen Fall ($U(1)$) von Rang-1-Solitonen. Den einfachsten Fall der sich von den nicht-supersymmetrischen Solitonen unterscheidet erhalten wir für:

$$|T\rangle = |\alpha_{b+f}\rangle \quad \alpha_{b+f} = \alpha + \eta\alpha_o \quad (5.1)$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned} |\alpha_{b+f}\rangle &= e^{\eta\alpha_o c^\dagger} e^{\alpha c^\dagger} |0\rangle \\ &= \left(1 + \eta\alpha_o c^\dagger\right) |\alpha\rangle \\ &= |\alpha\rangle + \lambda c^\dagger |\alpha\rangle \end{aligned} \quad (5.2)$$

mit der Abkürzung $\lambda = \eta\alpha_o$. Außerdem haben wir hier verwendet, dass die Reihenentwicklung der exp-Funktion für die Grassmann-Variable η aufgrund von $\eta^2 = 0$ nach dem zweiten Term abbricht.

$$e^{\eta\beta} = 1 + \eta\beta \quad (5.3)$$

erfüllt die definierende Gleichung der exp-Funktion

$$\begin{aligned} \partial_\eta e^{\eta\beta} &= \partial_\eta (1 + \eta\beta) = \beta \\ \beta e^{\eta\beta} &= \beta (1 + \eta\beta) = \beta - \eta\beta^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

nur wenn β (in unserem Fall α_o) auch eine Grassmann-Variable mit $\beta^2 = 0$ ist. Da $\eta\beta$ bosonischen Charakter hat war natürlich vorher schon klar, dass β fermionisch sein muss.

Da

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = e^{|\alpha|^2} \quad (5.5)$$

erhalten wir:

$$\langle T|T\rangle = e^{|\alpha_e|^2} \underbrace{(1 + \lambda\bar{\alpha} + \bar{\lambda}\alpha + \bar{\lambda}\lambda(1 + |\alpha|^2))}_{=:A} \quad (5.6)$$

Mit Hilfe der geometrischen Reihe bestimmen wir das Inverse zu A als:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} &= 1 - (\lambda\bar{\alpha} + \bar{\lambda}\alpha + \bar{\lambda}\lambda(1 + |\alpha|^2)) + 2\lambda\bar{\lambda}|\alpha|^2 \\ &= 1 - \lambda\bar{\alpha} - \bar{\lambda}\alpha + \bar{\lambda}\lambda(-1 + |\alpha|^2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Damit wird der Projektor P zu:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{A} \left(1 + \lambda c^\dagger\right) |\alpha\rangle \langle\alpha| \left(1 + \bar{\lambda} c\right) \\
&= e^{-|\alpha|^2} \left\{ |\alpha\rangle \langle\alpha| + \lambda \left(-\bar{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha| + c^\dagger |\alpha\rangle \langle\alpha|\right) + \bar{\lambda} \left(-\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| + |\alpha\rangle \langle\alpha| c\right) \right. \\
&\quad \left. + \lambda \bar{\lambda} \left((|\alpha|^2 - 1) |\alpha\rangle \langle\alpha| - \alpha c^\dagger |\alpha\rangle \langle\alpha| - \bar{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha| c + c^\dagger |\alpha\rangle \langle\alpha| c \right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Spezialisieren wir uns auf den Fall $\alpha = 0$ so wird P zu:

$$P = |0\rangle\langle 0| + \lambda |1\rangle\langle 0| + \bar{\lambda} |0\rangle\langle 1| + \lambda \bar{\lambda} (-|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \tag{5.9}$$

Betrachten wir den statischen Fall $\mu = -i$, so wird das Soliton Φ zu:

$$\Phi = 1 - 2P \tag{5.10}$$

Um das Profil von Φ in z, \bar{z} - (bzw. x, y)-Koordinaten zu erhalten benötigen wir die Moyal-Weyl-Transformierten der Abbildungen $|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 0|, |0\rangle\langle 1|$ und $|1\rangle\langle 1|$. Wir wissen aus [LeNon], dass für den Projektor auf das Vakuum gilt:

$$|0\rangle\langle 0| = \text{Weyl-geordnet} \left\{ 2e^{-2cc^\dagger} \right\} \tag{5.11}$$

und damit liefert die inverse Moyal-Weyl Abbildung:

$$|0\rangle\langle 0| = \text{Weyl-geordnet} \left\{ 2e^{-2cc^\dagger} \right\} \longrightarrow 2e^{-2\frac{z\bar{z}}{2\theta}} = 2e^{-\frac{|z|^2}{\theta}} \tag{5.12}$$

Für die anderen Abbildungen erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
|1\rangle\langle 0| &= c^\dagger |0\rangle\langle 0| \longrightarrow \frac{\bar{z}}{\sqrt{2\theta}} \star 2e^{-\frac{|z|^2}{\theta}} \\
&= \frac{\bar{z}}{\sqrt{2\theta}} 2e^{-\frac{|z|^2}{\theta}} - \theta \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \left(-\frac{\bar{z}}{\theta}\right) 2e^{-\frac{|z|^2}{\theta}} \\
&= 4 \frac{\bar{z}}{\sqrt{2\theta}} e^{-\frac{|z|^2}{\theta}}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Konjugiert man dies, so erhalten wir:

$$|0\rangle\langle 1| = |0\rangle\langle 0| c \longrightarrow 4 \frac{z}{\sqrt{2\theta}} e^{-\frac{|z|^2}{\theta}} \tag{5.14}$$

Und schließlich berechnet man leicht:

$$\begin{aligned}
|1\rangle\langle 1| &= c^\dagger |0\rangle\langle 0| c \longrightarrow \left(4 \frac{\bar{z}}{\sqrt{2\theta}} e^{-\frac{|z|^2}{\theta}}\right) \star \frac{z}{\sqrt{2\theta}} \\
&= 2 \frac{|z|^2}{\theta} e^{-\frac{|z|^2}{\theta}} - 2 \left(e^{-\frac{|z|^2}{\theta}} - \frac{|z|^2}{\theta} e^{-\frac{|z|^2}{\theta}} \right) \\
&= \left(4 \frac{|z|^2}{\theta} - 2 \right) e^{-\frac{|z|^2}{\theta}}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Damit lautet unser Soliton in z, \bar{z} -Koordinaten:

$$\Phi = 1 - 2P = 1 - 4e^{-\frac{|z|^2}{\theta}} \left\{ 1 + \frac{2\bar{z}}{\sqrt{2\theta}}\lambda + \frac{2z}{\sqrt{2\theta}}\bar{\lambda} + 2 \left(\frac{|z|^2}{\theta} - 1 \right) \lambda\bar{\lambda} \right\} \quad (5.16)$$

5.1.1 Energie

Wir wollen nun die Energie und Energiedichte bestimmen. Für die Energiedichte ε gilt nach Gleichung (4.31)

$$\varepsilon = \{\partial_z P^0, \partial_{\bar{z}} P^0\} + i [P^1, \partial_{\bar{z}} P^1] + i [P^2, \partial_z P^2] - 2P^{12} \star P^{12} \quad (5.17)$$

Da wir nur eine Graßmannvariable α_o haben gilt

$$P^1 \star \partial_{\bar{z}} P^1 \propto \alpha_o^2 = 0 \quad (5.18)$$

und ebenso:

$$P^2 \star \partial_z P^2 \propto \bar{\alpha}_o^2 = 0 \quad P^{12} \star P^{12} \propto \alpha_o^2 \bar{\alpha}_o^2 = 0 \quad (5.19)$$

Um die unendliche Summe beim \star -Produkt zu umgehen, bleiben wir im Operator-Formalismus und erhalten als Energiedichte (wegen $\mu = -i$ ist $a = c$):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \{\partial_z P^0, \partial_{\bar{z}} P^0\} = \left\{ \left[\frac{a}{\sqrt{2\theta}}, P^0 \right], \left[-\frac{a^\dagger}{\sqrt{2\theta}}, P^0 \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2\theta} \left\{ \underbrace{(a|0\rangle\langle 0|)}_{=0} - \underbrace{|0\rangle\langle 0|a)}_{=|1\rangle}, \underbrace{(a^\dagger|0\rangle\langle 0|)}_{=|1\rangle} - \underbrace{|0\rangle\langle 0|a^\dagger)}_{=0} \right\} \\ &= \frac{1}{2\theta} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Damit lautet die Energiedichte in z, \bar{z} -Koordinaten:

$$\varepsilon = \frac{2e^{-\frac{|z|^2}{\theta}}}{\theta^2} \quad (5.21)$$

Dies ist auch die entsprechenden Energiedichte im nicht-supersymmetrischen Fall mit $|T\rangle = |0\rangle$.

Damit erhalten wir dieselbe Energie wie im rein bosonischen Fall:

$$E = E_{\text{bos}} = 4 * 2\pi\theta \text{Tr}_{\mathcal{H}} \varepsilon = 8\pi \quad (5.22)$$

5.2 $U(2)$ Solitonen

Kommen wir nun zu den nicht-abelschen $U(2)$ -Solitonen. Wir betrachten wieder einen einfachen Fall von $U(2)$ -Rang-1-Solitonen bei dem wir auf

$$|T\rangle = \begin{pmatrix} \lambda_{b+f} = \lambda + \lambda_f \\ a + \alpha_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \beta\eta \\ a + \alpha\eta \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

projizieren, mit anti-kommutierenden β und α und $|\lambda| \neq 1$.

Für

$$P = |T\rangle \frac{1}{\langle T|T\rangle} \langle T| \quad (5.24)$$

benötigen wir das Inverse von $\langle T|T\rangle$. Es ist

$$\begin{aligned} \langle T|T\rangle &= |\lambda|^2 + \bar{\lambda}\lambda_f + \lambda\bar{\lambda}_f + \lambda_f\bar{\lambda}_f + a^\dagger a + \bar{\alpha}_f a + a^\dagger \alpha_f + \bar{\alpha}_f \alpha_f \\ &= b + f\eta + g\bar{\eta} + h\eta\bar{\eta} \end{aligned} \quad (5.25)$$

mit

$$\begin{aligned} b &= l + N & f &= \bar{\lambda}\beta + a^\dagger \alpha \\ g &= -\lambda\bar{\beta} + a\bar{\alpha} & h &= \beta\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha} \end{aligned} \quad (5.26)$$

wobei wir die Abkürzung

$$l = |\lambda|^2 \quad (5.27)$$

eingeführt und

$$\overline{\beta\eta} = \bar{\eta}\bar{\beta} = -\bar{\beta}\bar{\eta} \quad (5.28)$$

verwendet haben. Bei der Bestimmung des inversen von $\langle T|T\rangle$ müssen wir beachten, dass es sich bei b, f und g um Operatoren handelt, die nicht miteinander vertauschen. Man rechnet leicht nach, dass für das inverse gilt:

$$(b + f\eta + g\bar{\eta} + h\eta\bar{\eta}) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b}f\frac{1}{b}\eta - \frac{1}{b}g\frac{1}{b}\bar{\eta} + \left(-\frac{1}{b}h\frac{1}{b} + \frac{1}{b}g\frac{1}{b}f\frac{1}{b} - \frac{1}{b}f\frac{1}{b}g\frac{1}{b} \right) \eta\bar{\eta} \right) = 1 \quad (5.29)$$

Um die Rechnung einfach zu halten, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$N_x = N + x \quad (5.30)$$

$$c = \frac{1}{b} = \frac{1}{l + N} \quad (5.31)$$

$$c_x = \frac{1}{l + N + x} \quad (5.32)$$

Damit gilt:

$$ac_x = c_{x+1}a \quad aN_x = N_{x+1}a \quad (5.33)$$

$$a^\dagger c_x = c_{x-1}a^\dagger \quad a^\dagger N_x = N_{x-1}a^\dagger \quad (5.34)$$

Entwickeln wir nach den fermionischen Koordinaten

$$(\langle T | T \rangle)^{-1} = c + F\eta + G\bar{\eta} + K\eta\bar{\eta} \quad (5.35)$$

so gilt:

$$F = -\bar{\lambda}\beta c^2 - \alpha a^\dagger c_1 c \quad (5.36)$$

$$G = \lambda\bar{\beta}c^2 + \bar{\alpha}c c_1 a \quad (5.37)$$

Mit

$$cgcfc = l\beta\bar{\beta}c^3 - \lambda\bar{\beta}\alpha a^\dagger c_1^2 c + \bar{\lambda}\beta\bar{\alpha}c c_1^2 a + \alpha\bar{\alpha}c^2 c_1 N_1 \quad (5.38)$$

und

$$-cfcgc = l\beta\bar{\beta}c^3 - \lambda\bar{\beta}\alpha a^\dagger c_1 c^2 + \bar{\lambda}\beta\bar{\alpha}c^2 c_1 a + \alpha\bar{\alpha}c^2 c_{-1} N \quad (5.39)$$

erhalten wir:

$$K = \alpha\bar{\alpha}c^2(N_1 c_1 + N c_{-1} - 1) + \beta\bar{\beta}c^2(2lc - 1) - \bar{\lambda}\bar{\alpha}\beta c_1 c(c + c_1)a + \lambda\alpha\bar{\beta}a^\dagger c c_1(c + c_1) \quad (5.40)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} P = & \begin{pmatrix} lc & \lambda c a^\dagger \\ ac\bar{\lambda} & N_1 c_1 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} lF + \beta c\bar{\lambda} & \beta c a^\dagger + \lambda F a^\dagger \\ aF\bar{\lambda} + \alpha c\bar{\lambda} & aF a^\dagger + \alpha c a^\dagger \end{pmatrix} \eta \\ & + \begin{pmatrix} lG - \lambda c\bar{\beta} & \lambda G a^\dagger - \lambda c\bar{\alpha} \\ aG\bar{\lambda} - ac\bar{\beta} & aG a^\dagger - ac\bar{\alpha} \end{pmatrix} \bar{\eta} \\ & + \begin{pmatrix} lK - \beta G\bar{\lambda} + \lambda F\bar{\beta} + \beta c\bar{\beta} & \lambda K a^\dagger - \beta G a^\dagger + \lambda F\bar{\alpha} + \beta c\bar{\alpha} \\ aK\bar{\lambda} - \alpha G\bar{\lambda} + aF\bar{\beta} + \alpha c\bar{\beta} & aK a^\dagger - \alpha G a^\dagger + aF\bar{\alpha} + \alpha c\bar{\alpha} \end{pmatrix} \eta\bar{\eta} \end{aligned} \quad (5.41)$$

5.2.1 Energie

Wir wollen nun die Energie und Energiedichte bestimmen. Für die Energiedichte ε gilt nach Gleichung (4.31)

$$\varepsilon = \underbrace{-\frac{1}{2\theta} \{P^{0+}, P^{0-}\}}_{=\varepsilon^0} + \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\theta}} [P^1, P^{1-}]}_{=\varepsilon^1} - \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\theta}} [P^2, P^{2+}]}_{=\varepsilon^2} \underbrace{-2P^{12}P^{12}}_{=\varepsilon^{12}} \quad (5.42)$$

Für die Energiedichte ε benötigen wir also die $U(2)$ -Spuren von

$$\{P^{0+}, P^{0-}\}, [P^1, P^{1-}], [P^2, P^{2+}] \text{ sowie } (P^{12})^2. \quad (5.43)$$

Aus $P^\dagger = P$ folgt $(P^1)^\dagger = -P^2$ und damit das

$$\left[P^2, \left[a^\dagger, P^2 \right] \right] = \left(\left[P^1, \left[a, P^1 \right] \right] \right)^\dagger. \quad (5.44)$$

Bilden wir die $U(2)$ -Spur von $\{[a, P^0], [a^\dagger, P^0]\}$ und sortieren nach c_x -Potenzen, so erhalten wir wie im rein bosonischen Fall:

$$\begin{aligned} \text{tr}_{U(2)} \left\{ [a, P^0], [a^\dagger, P^0] \right\} = & \\ & cc_1 (2l^2 N_1 + 4lNN_1 + 2N^2 N_1) + c_1^2 (-l^2 N_1 - 2lN_1^2 - lN_1 N_2 - N_1^3 - N_1^2 M) \\ & + c^2 (-2l^2 N_1 - 2lN^2 - lN_{-1}N - N^3) + cc_{-1} (2l^2 N + 2lNN_{-1}) \\ & + c_{-1}^2 (-l^2 N - lNN_{-1}) + c_1 c_2 (2lN_1 N_2 + 2N_1^2 N_2) + c_2^2 (-lN_1 N_2 - N_1 N_2^2) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Dies lässt sich mithilfe von $N_x + l = c_x^{-1}$ vereinfachen zu:

$$\begin{aligned} \text{tr}_{U(2)} \left\{ [a, P^0], [a^\dagger, P^0] \right\} = & -N - N_1 + c_1 2N_1 (l + N) - c_1^2 (lN_1 N_2 + NN_1^2) \\ & - c^2 (l^2 N_1 + lNN_{-1}) + c 2lN - c_{-1} lN + c_2 N_1 N_2 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Da die einzelnen Terme von ε^0 bei der Summe $\sum_{N=0}^{\infty}$ nicht absolut konvergieren, muss man an dieser Stelle aufpassen wenn man Terme umordnen will. Aus diesem Grund verzichten wir darauf und berechnen mit Maple:

$$\sum_{N=0}^K \left\{ [a, P^0], [a^\dagger, P^0] \right\} = -2 + 2l \frac{(l + K + 1)^3 - l}{(l + K)(l + K + 1)^2 (l + K + 2)} \quad (5.47)$$

Wir erhalten also:

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} \text{tr}_{U(2)} \left\{ [a, P^0], [a^\dagger, P^0] \right\} = -2 \quad (5.48)$$

Dies ist der zu erwartende normale bosonische Beitrag zu der Energie (siehe [LeSca]).

Sortieren wir $\text{tr}_{U(2)} [P^1, P^{1-}]$ wieder nach c_x Potenzen, so erhalten wir diesmal:

$$\begin{aligned} \text{tr}_{U(2)} [P^1, [a, P^1]] = & \alpha\beta\bar{\lambda} \left\{ \right. \\ & c^3 c_1 (3l^2 N_1 + 4lNN_1 + N^2 N_1) + c^3 c_{-1} (-3l^2 N - lN^2 - 2lNN_{-1}) + cc_{-1} (-N) \\ & + c^2 c_1 (-3NN_1 - 3lN_1) + cc_{-1}^3 (l^2 N + lNN_{-1}) + cc_{-1}^2 (-lN) + c^2 (3N) \\ & + c^2 c_{-1} (N^2 + 4lN) + c^3 (-3lN - N^2) + cc_1^3 (-l^2 N_1 - lNN_1 - 3lN_1^2 - 3NN_1^2) \\ & + cc_1^2 (4lN_1 + 3N_1^2 + 3NN_1) + cc_1 (-3N_1) + c_1^3 c_2 (3lN_1 N_2 + 3N_1^2 N_2) + c_1^2 (N_1) \\ & \left. + c_1^3 (-lN_1 - 3N_1^2) + c_1 c_2^3 (-lN_1 N_2 - N_1 N_2^2) + c_1^2 c_2 (-N_1 N_2) + c_1 c_2^2 (N_1 N_2) \right\} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Dies lässt sich wiederum mit $N_x + l = c_x^{-1}$ vereinfachen, wobei der Ausdruck in den geschweiften Klammern zu

$$2(c^2 c_1 lN_1 + c^2 c_{-1} lN + c^2 N - c^3 2lN + cc_1^2 NN_1 - c_1^3 2N_1^2 + c_1^2 c_2 N_1 N_2 - cc_1 N_1) \quad (5.50)$$

wird. Auch hier konvergieren die einzelnen Summenglieder nicht absolut, so dass wir nicht umordnen dürfen. Mit Maple finden wir

$$\sum_{N=0}^K \text{tr}_{U(2)} [P^1, [a, P^1]] = \alpha\beta\bar{\lambda} \left\{ -\frac{4l(K+1)}{(l+K+2)(l+K+1)(l+K)(l+K+1)^2} \right\}. \quad (5.51)$$

ε^1 und ε^2 liefern also keinen Beitrag zur Gesamtenergie. Durch Konjugieren erhält man:

$$\begin{aligned} \text{tr}_{U(2)} \left[P^2, \left[a^\dagger, P^2 \right] \right] = \\ \bar{\alpha}\bar{\beta}\lambda 2(c^2 c_1 l N_1 + c^2 c_{-1} l N + c^2 N - c^3 2l N + c c_1^2 N N_1 - c_1^3 2N_1^2 + c_1^2 c_2 N_1 N_2 - c c_1 N_1) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Um $\text{tr}_{U(2)} P^{12} P^{12}$ zu bestimmen zerlegen wir zuerst P^{12} . Da beim Quadrieren auf jedes λ ein $\bar{\lambda}$ trifft, lassen wir zur Vereinfachung die $\bar{\lambda}$ weg und ersetzen λ durch $l = \lambda\bar{\lambda}$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} P^{12} = & \begin{pmatrix} l c^2 (N_1 c_1 + N c_{-1} - 1) & l c^2 (N_1 c_1 + N c_{-1} - 1) a^\dagger - l a^\dagger c_1 c \\ a c^2 (N_1 c_1 + N c_{-1} - 1) - c c_1 a & c_1^2 (N_2 c_2 + N_1 c - 1) N_1 - 2 N_1 c c_1 + c \end{pmatrix} \alpha \bar{\alpha} \\ & + \begin{pmatrix} l c^2 (2l c - 1) - 2l c^2 + c & l c^2 (2l c - 1) a^\dagger - l c^2 a^\dagger \\ a c^2 (2l c - 1) - a c^2 & c_1^2 (2l c_1 - 1) N_1 \end{pmatrix} \beta \bar{\beta} \\ & + \begin{pmatrix} -l c_1 c (c + c_1) a + c c_1 a & -l c_1 c (c + c_1) N_1 + c c_1 N_1 + l c^2 - c \\ -a c_1 c (c + c_1) a & -a c_1 c (c + c_1) N_1 + a c^2 \end{pmatrix} \bar{\alpha} \beta \\ & + \begin{pmatrix} l^2 a^\dagger c c_1 (c + c_1) - l a^\dagger c c_1 & l^2 a^\dagger c c_1 (c + c_1) a^\dagger \\ l N_1 c c_1 (c + c_1) - l c^2 - N_1 c c_1 + c & l N_1 c c_1 (c + c_1) a^\dagger - l c^2 a^\dagger \end{pmatrix} \alpha \bar{\beta} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \text{tr}_{U(2)} P^{12} P^{12} = \alpha \bar{\alpha} \beta \bar{\beta} \{ \\ & 2l c^2 (N_1 c_1 + N c_{-1} - 1) (l c^2 (2l c - 1) - 2l c^2 + c) \\ & + (-l c_1 c (c + c_1) + c c_1) N_1 (l^2 c c_1 (c + c_1) - l c c_1) \\ & + (-l c c_{-1} (c_{-1} + c) + c_{-1} c) N (l^2 c_{-1} c (c_{-1} + c) - l c_{-1} c) \\ & + (l c^2 (N_1 c_1 + N c_{-1} - 1) - l c c_{-1}) N (c^2 (2l c - 1) - c^2) \\ & + (l c_1^2 (N_2 c_2 + N_1 c - 1) - l c_1 c) N_1 (c_1^2 (2l c_1 - 1) - c_1^2) \\ & + (l c^2 (2l c - 1) - l c^2) N (c^2 (N_1 c_1 + N c_{-1} - 1) - c_{-1} c) \\ & + (l c_1^2 (2l c_1 - 1) - l c_1^2) N_1 (c_1^2 (N_2 c_2 + N_1 c - 1) - c c_1) \\ & - 2(-l c_1 c (c + c_1) N_1 + c c_1 N_1 + l c^2 - c)^2 \\ & + (-c c_{-1} (c_{-1} + c)) N N_{-1} (l^2 c_{-1} c (c_{-1} + c)) \\ & + (-c_2 c_1 (c_1 + c_2)) N_2 N_1 (l^2 c_1 c_2 (c_1 + c_2)) \\ & + 2(c_1^2 (N_2 c_2 + N_1 c - 1) N_1 - 2 N_1 c c_1 + c) (c_1^2 (2l c_1 - 1) N_1) \\ & + (-c_2 c_1 (c_1 + c_2) N_2 + c_1^2) N_1 (l N_2 c_1 c_2 (c_1 + c_2) - l c_1^2) \\ & + (l N_1 c c_1 (c + c_1) - l c^2) N (-c_1 c (c + c_1) N_1 + c^2) \} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Mit Maple berechnet man, dass die Fockraumspur 0 ergibt. Wir erhalten also durch die Supersymmetrie wieder keinen zusätzlichen Beitrag zu der Energie.

Wir wollen die Energie nun noch mit dem in Kapitel 4.2.1 beschriebenen Weg berechnen. Wir hatten dort gesehen, dass eine Verschiebung von a auf $a - \eta\alpha$ nach Gleichung (4.50) eine Änderung der Energie gemäß

$$\begin{aligned} & \frac{1}{-16\pi\theta} \left(E[UPU^\dagger] - E[P] \right) \\ & = 2\text{Tr}_{\mathcal{H}} \left\{ \alpha P^1 P^{0+-} + \bar{\alpha} P^2 P^{0+-} - \alpha\bar{\alpha} \left(P^{12} P^{0+-} + P^{1-} P^{2+} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.55)$$

mit sich führt.

Beginnen wir mit folgendem T

$$T = \begin{pmatrix} \lambda + \beta\eta \\ a \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

welches mit einer Translation auf unser ursprüngliches T transformiert werden kann.

Das zu diesem T gehörende Soliton, enthält nur eine Graßmannvariable und somit ist die dazugehörige Energie gleich der Energie im rein bosonischen Fall. Aus der obigen Rechnung lesen wir ab, dass für den Projektor gilt:

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} lc & \lambda ca^\dagger \\ ac\bar{\lambda} & N_1 c_1 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} c^2 N \bar{\lambda} & c^2 N a^\dagger \\ -ac^2 \bar{\lambda}^2 & -c_1^2 N_1 \bar{\lambda} \end{pmatrix} \beta \eta \\ &+ \begin{pmatrix} -c^2 N \lambda & c^2 \lambda^2 a^\dagger \\ -ac^2 N & c_1^2 N_1 \lambda \end{pmatrix} \bar{\beta} \bar{\eta} \\ &+ \begin{pmatrix} c^3 N(N-l) & -2\lambda N c^3 a^\dagger \\ -2\bar{\lambda} N_1 c_1^3 a & N_1 c_1^3 (l - N_1) \end{pmatrix} \beta \bar{\beta} \eta \bar{\eta} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Um die Änderung der Energie zu berechnen benötigen wir noch

$$P^{0+-} = \begin{pmatrix} lc_{-1} c c_1 (l - N_1) & a^\dagger 2l \lambda c c_1 c_2 \\ a 2l \bar{\lambda} c_{-1} c c_1 & l c c_1 c_2 (N - l) \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

$$P^{1-} = \begin{pmatrix} c^2 c_1^2 (l^2 - N N_1) a \bar{\lambda} & c^2 c_1^2 (2N N_1 l + N l^2 + N_1 l^2) \\ c_1^2 c_2^2 (N_1 + N_2 + 2l) a^2 \bar{\lambda}^2 & c_1^2 c_2^2 (N_1 N_2 - l^2) a \bar{\lambda} \end{pmatrix} \beta \quad (5.59)$$

$$P^{2+} = \begin{pmatrix} a^\dagger \lambda c^2 c_1^2 (l^2 - N N_1) & a^\dagger \lambda^2 c_1^2 c_2^2 (N_1 + N_2 + 2l) \\ c^2 c_1^2 (2N N_1 l + N l^2 + N_1 l^2) & a^\dagger \lambda c_1^2 c_2^2 (N_1 N_2 - l^2) \end{pmatrix} \bar{\beta} \quad (5.60)$$

wobei wir hier schon die Terme vereinfacht haben.

Damit berechnet man leicht:

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} \text{Tr}_{U(2)} P^1 P^{0+-} = \text{Tr}_{\mathcal{H}} \bar{\lambda} \beta (lc^3 N + c^3 N^2 - lac^3 a^\dagger - c_1^3 N_1 \underbrace{N_1}_{=aa^\dagger}) \quad (5.61)$$

Unter der Fockraumspur dürfen wir in den beiden letzten Termen das a^\dagger von rechts nach links schreiben, so dass $\text{Tr}_{\mathcal{H}} P^1 P^{0+-}$ verschwindet. Weiter berechnet man direkt:

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} \text{Tr}_{U(2)} P^2 P^{0+-} = \text{Tr}_{\mathcal{H}} \lambda \bar{\beta} (-lc^3 N + c^3 Nl - c_1^3 N_1^2 + c_1^3 N_1^2) = 0 \quad (5.62)$$

Nach kurzer Rechnung erhält man des weiteren

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} (P^{12} P^{0+-}) = \text{Tr}_{\mathcal{H}} (-2Nlc_{-1}c^2c_1)\beta\bar{\beta} \quad (5.63)$$

und:

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} (P^{1-} P^{2+}) = \text{Tr}_{\mathcal{H}} (c^3c_1lN + cc_1^3lN_1)\beta\bar{\beta} \quad (5.64)$$

Mit Maple berechnen wir schnell den Grenzwert

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}} (P^{12} P^{0+-}) = -\text{Tr}_{\mathcal{H}} (P^{1-} P^{2+}) = (1 + 2l - 2l^2\psi^{(1)}(l))\beta\bar{\beta} \quad (5.65)$$

und auch eine direkte Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_{\mathcal{H}} (P^{12} P^{0+-} + P^{1-} P^{2+}) \\ & = \text{Tr}_{\mathcal{H}} Nlc_{-1}c^3c_1 \{(N-1+l) - 2(N+l) + (N+1+l)\} \beta\bar{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

Hierbei haben wir wieder ausgenutzt, dass unter der Fockraumspur gilt:

$$cc_1^3lN_1 = c_{-1}c^3lN \quad (5.67)$$

In der obigen Formel bezeichnet $\psi^{(1)}$ eine Polygammafunktion, die Trigammafunktion:

$$\psi^{(1)}(z) = (\partial_z)^2 \ln(\Gamma(z)) = \int_0^\infty dt \frac{te^{-zt}}{1-e^{-t}} \quad (5.68)$$

Dies bestätigt unser ursprüngliches Ergebnis das zur Energie nur der bosonische Anteil beiträgt.

6 Rang-2-Solitonen

Um zeitabhängige Rang-2-Solitonen zu erzeugen benutzen wir die Dressing-Methode, mit der man neue Solitonen rekursiv aus bekannten Solitonen geringeren Ranges erzeugen kann. Wir schauen uns dazu zuerst an wie die Methode im bosonischen Fall funktioniert.

6.1 Streuung von nicht-kommutativen bosonischen Solitonen

Wir skizzieren hier noch einmal den Weg Solitonen mit dem Dressing-Verfahren zu konstruieren bei denen $\tilde{\psi}$ Pole höherer Ordnung hat, wie in [LeSca] beschrieben. Dazu nehmen wir an, dass wir eine Lösung ψ des linearen Systems

$$(\zeta\partial_x - \partial_u)\psi = A\psi \quad (\zeta\partial_v - \partial_x)\psi = B\psi \quad (6.1)$$

haben. Wir betrachten wieder den einfachsten Fall, dass $\psi = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{\mu_k - \bar{\mu}_k}{\zeta - \mu_k} P_k$ nur einen einfachen Pol bei $\zeta = -i$ hat, so dass

$$\psi = 1 - \frac{2i}{\zeta + i} P \quad (6.2)$$

und für unser Soliton Φ gilt:

$$\Phi = 1 - 2P \quad (6.3)$$

Entwickeln wir Gleichung (4.3)

$$A = -\psi(\zeta\partial_x - \partial_u)\psi^\dagger \quad (6.4a)$$

$$B = -\psi(\zeta\partial_v - \partial_x)\psi^\dagger \quad (6.4b)$$

mit (6.2) für große ζ so erhalten wir:

$$A = -2i\partial_x P \quad B = 2i\partial_y P \quad (6.5)$$

Das Dressing-Verfahren besteht nun darin eine neue Lösung $\tilde{\psi}$ zu neuen \tilde{A}, \tilde{B} mit

$$\tilde{\psi} = \chi\psi \quad \chi = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{\mu_k - \bar{\mu}_k}{\zeta - \mu_k} P_k \quad (6.6)$$

anzusetzen. Wählen wir also für ψ die statische Lösung mit nur einem Pol und setzen χ als vom gleichen Typ an, so erhalten wir

$$\tilde{\psi} = \chi\psi = \left(1 - \frac{2i}{\zeta + i} \tilde{P}\right) \left(1 - \frac{2i}{\zeta + i} P\right) \quad (6.7)$$

und $\tilde{\psi}$ hat einen Pol der Ordnung 2. Einsetzen von $\tilde{\psi}$ in die neue Realitätsbedingung

$$\tilde{\psi}\tilde{\psi}^\dagger = 1 \quad (6.8)$$

liefert wieder:

$$\tilde{P}^\dagger = \tilde{P} = \tilde{P}^2 \quad (6.9)$$

Also ist auch \tilde{P} ein Projektor und lässt sich wieder als

$$\tilde{P} = \tilde{T} \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} \tilde{T}^\dagger \quad (6.10)$$

mit einer $n \times \tilde{r}$ -Matrix \tilde{T} schreiben.

Da $\tilde{\psi}$ wieder eine Lösung des linearen System mit anderen \tilde{A}, \tilde{B} sein soll, erhalten wir aus dem linearen System durch Einsetzen des Ansatz (6.7), unter Benutzung von (6.4) und der Realitätsbedingung $\psi\psi^\dagger = 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= -\tilde{\psi}(\zeta)(\zeta\partial_x - \partial_u)[\tilde{\psi}(\bar{\zeta})]^\dagger \\ &= \left(1 - \frac{2i}{\zeta + i}\tilde{P}\right) A \left(1 + \frac{2i}{\zeta - i}\tilde{P}\right) - \left(1 - \frac{2i}{\zeta + i}\tilde{P}\right) (\zeta\partial_x - \partial_u) \left(1 + \frac{2i}{\zeta - i}\tilde{P}\right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= -\tilde{\psi}(\zeta)(\zeta\partial_v - \partial_x)[\tilde{\psi}(\bar{\zeta})]^\dagger \\ &= \left(1 - \frac{2i}{\zeta + i}\tilde{P}\right) B \left(1 + \frac{2i}{\zeta - i}\tilde{P}\right) - \left(1 - \frac{2i}{\zeta + i}\tilde{P}\right) (\zeta\partial_v - \partial_x) \left(1 + \frac{2i}{\zeta - i}\tilde{P}\right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Da \tilde{A} und \tilde{B} nicht von ζ abhängen, müssen die Pole bei $\zeta = \pm i$ auf den rechten Seiten in (6.11) und (6.12) behebbar, die zugehörigen Residuen also gleich 0, sein. Durch addieren und subtrahieren der Residuen voneinander und mit (6.5) erhält man die Gleichungen:

$$(1 - \tilde{P}) \left\{ \partial_{\bar{z}}\tilde{P} + (\partial_{\bar{z}}P)\tilde{P} \right\} = 0 \quad (1 - \tilde{P}) \left\{ \frac{i}{2}\partial_t\tilde{P} + (\partial_zP)\tilde{P} \right\} = 0 \quad (6.13)$$

Dies lässt sich mit

$$(1 - \tilde{P})\tilde{P} = 0 \quad (1 - \tilde{P})\tilde{T} = 0 \quad (6.14)$$

vereinfachen zu

$$(1 - \tilde{P}) \left\{ a\tilde{T} + [a, P]\tilde{T} \right\} \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} \tilde{T}^\dagger = 0 \quad (1 - \tilde{P}) \left\{ \partial_t\tilde{T} - i\gamma [a^\dagger, P]\tilde{T} \right\} \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} \tilde{T}^\dagger = 0 \quad (6.15)$$

wobei wir die Abkürzung $\gamma = -\sqrt{\frac{2}{\theta}}$ eingeführt haben. Dies können wir mit den Forderungen

$$a\tilde{T} + [a, P]\tilde{T} = \tilde{T}Z_1 \quad \partial_t\tilde{T} - i\gamma [a^\dagger, P]\tilde{T} = \tilde{T}Z_2 \quad (6.16)$$

mit Funktionen $Z_i(t, a, a^\dagger)$ lösen. Im abelschen Fall wählt man hierbei $Z_i = z_i \in \mathbb{C}$ und im nicht-abelschen Fall $Z_1 = a$ und $Z_2 = 0$.

6.1.1 $U(1)$ -Solitonen

In [LeSca] wurde das Dressing-Verfahren im abelschen Fall mit folgendem Ergebnis angewandt:

Für

$$P = |0\rangle\langle 0| \quad (6.17)$$

und $z_1 = z_2 = 0$ berechnet man:

$$|\tilde{T}\rangle = |0\rangle + i\gamma t |1\rangle \quad (6.18)$$

und damit:

$$\tilde{P} = \frac{1}{1 + \gamma^2 t^2} (|0\rangle\langle 0| + i\gamma t |1\rangle\langle 0| - i\gamma t |0\rangle\langle 1| + \gamma^2 t^2 |1\rangle\langle 1|) \quad (6.19)$$

Für das Soliton $\Phi = 1 - 2(P + \tilde{P} - 2P\tilde{P})$ erhält man also

$$\Phi = 1 - \frac{2}{1 + \gamma^2 t^2} (\gamma^2 t^2 |0\rangle\langle 0| + i\gamma t |1\rangle\langle 0| - i\gamma t |0\rangle\langle 1| + \gamma^2 t^2 |1\rangle\langle 1|) \quad (6.20)$$

und damit für große Zeiten:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi = 1 - 2(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (6.21)$$

Es liegt für große Zeiten eine 2-Soliton-Konfiguration vor und es findet keine Streuung statt.

Man kann noch die Energiedichte bestimmen als:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \partial_t \Phi^\dagger \partial_t \Phi + \partial_z \Phi^\dagger \partial_{\bar{z}} \Phi + \partial_{\bar{r}} \Phi^\dagger \partial_z \Phi \\ &= \gamma^2 \left\{ \frac{2}{(1 + \gamma^2 t^2)^2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + \frac{4\gamma^2 t^2}{(1 + \gamma^2 t^2)^2} |0\rangle\langle 0| \right. \\ &\quad + \frac{2\gamma^2 t^2}{1 + \gamma^2 t^2} (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - \frac{\sqrt{2}\gamma^2 t^2}{(1 + \gamma^2 t^2)^2} (|2\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 2|) \\ &\quad \left. + \frac{i\sqrt{2}\gamma^3 t^3}{(1 + \gamma^2 t^2)^2} (\sqrt{2}|1\rangle\langle 0| - \sqrt{2}|0\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 2|) \right\} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Die Energie berechnet man als 16π , welches die doppelte Energie von unseren Rang-1-Solitonen ist.

Überführt man die Energiedichte mit der inversen Moyal-Weyl-Abbildung (2.17) in z, \bar{z} -Koordinaten an, so erhält man mit $r^2 = z\bar{z}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\star &= \frac{16e^{-r^2/\theta}}{\theta^2(1 + 2t^2/\theta)^2} \left\{ 2t^2 + r^2 + \frac{2r^2}{\theta} \left(\frac{r^2}{\theta} - 1 \right) \left(1 + \frac{2t^2}{\theta} \right) t^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\theta} (x^2 - y^2) t^2 - \frac{4}{\theta^2} yr^2 t^3 \right\} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Untersucht man die Maxima von ε_\star so findet man eine Ringstruktur mit zeitabhängiger Größe und Form.

6.1.2 $U(2)$ -Solitonen

In [LeSca] wurde auch ein $U(2)$ -Rang-2-Soliton konstruiert.

Für

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

erhält man:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{z} \\ -1 \end{pmatrix} \star \frac{2i}{1 + z\bar{z} + \theta} \star (t + h(z)) \quad (6.25)$$

mit einer beliebigen meromorphen Funktion $h(z)$.

Für $h = 0$ erhält man

$$\varepsilon_\star = 16 \frac{1 + 2r^2 + r^4 + 4t^2(1 + 2r^2)}{(1 + 2r^2 + r^4 + 4t^2)^2} [1 + O(\theta/r^2)] \quad (6.26)$$

und einen Grenzwert für große Zeiten:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi_\star \rightarrow -1 \quad (6.27)$$

Das bedeutet, dass für $h = 0$ auch keine Streuung stattfindet. Jedoch liegt wieder wie im abelschen Fall eine ringartige Struktur vor.

Für $h = z^2$ erhalten wir jedoch

$$\varepsilon_\star = 16 \frac{1 + 10r^2 + 5r^4 + 4t^2(1 + 2r^2) - 8t(x^2 - y^2)}{(1 + 2r^2 + 5r^4 + 4t^2 + 8t(x^2 - y^2))^2} [1 + O(\theta/r^2)] \quad (6.28)$$

mit Maxima nahe der Punkte $z^2 + t = 0$ (für diesen Fall ist $\tilde{T} = T$). Für große Zeiten haben wir also die Maxima ("Energieklumpen") bei $z = \pm\sqrt{-t}$. Mit $z = x + iy$ erhalten wir also zwei Solitonen, die sich entlang der x -Achse beschleunigt aufeinander zu bewegen, um 90° streuen und sich entlang der y -Achse langsamer werdend voneinander entfernen.

6.2 Streuung von nicht-kommutativen supersymmetrischen Solitonen

Wir untersuchen nun die Auswirkungen der Supersymmetrie auf das Dressing-Verfahren. ψ erfüllt dabei die zusätzliche Gleichung des linearen Systems:

$$(\zeta\partial_1 - \partial_2)\psi = C\psi \quad (6.29)$$

Für ψ mit einem einfachen Pol bei $\zeta = -i$ erhalten wir aus (6.29) mit Hilfe der Realitätsbedingung $\psi\psi^\dagger = 1$ und im Grenzfall $\zeta \rightarrow \infty$:

$$C = -\left(1 - \frac{2i}{\zeta}P\right)(\zeta\partial_1 - \partial_2)\left(1 + \frac{2i}{\zeta}P\right) = -2i\partial_1P + O\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad (6.30)$$

Wir setzen wieder $\tilde{\psi}$ als

$$\tilde{\psi} = \chi\psi \quad (6.31)$$

und auch χ als

$$\chi = 1 - \frac{2i}{\zeta + i}\tilde{P} \quad (6.32)$$

an. Mit der gleichen Rechnung wie im bosonischen Fall erhalten wir wieder

$$\tilde{P}^\dagger = \tilde{P} = \tilde{P}^2 \quad (6.33)$$

und setzen \tilde{P} wieder an als

$$\tilde{P} = \tilde{T} \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} \tilde{T}^\dagger \quad (6.34)$$

mit einer $n \times \tilde{r}$ -Matrix \tilde{T} .

Da $\tilde{\psi}$ noch zusätzlich zu den bosonischen Gleichungen

$$(\zeta\partial_1 - \partial_2)\tilde{\psi} = \tilde{C}\tilde{\psi} \quad (6.35)$$

erfüllt, erhalten wir zusätzlich zu (6.11) und (6.12) noch:

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= -\tilde{\psi}(\zeta)(\zeta\partial_1 - \partial_2)[\tilde{\psi}(\bar{\zeta})]^\dagger \\ &= \left(1 - \frac{2i}{\zeta + i}\tilde{P}\right)C\left(1 + \frac{2i}{\zeta - i}\tilde{P}\right) - \left(1 - \frac{2i}{\zeta + i}\tilde{P}\right)(\zeta\partial_1 - \partial_2)\left(1 + \frac{2i}{\zeta - i}\tilde{P}\right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

Da auch \tilde{C} nicht von ζ abhängt müssen die Pole bei $\zeta = \pm i$ auf der rechten Seite von (6.36) behebbar, die zugehörigen Residuen also gleich 0, sein. Wir erhalten als Bedingung an \tilde{P} :

$$(1 - \tilde{P})\left((2i\partial_1P)\tilde{P} + \underbrace{(i\partial_1 - \partial_2)}_{=2i\partial_{\bar{\eta}}}\tilde{P}\right) = 0 \quad (6.37)$$

Benutzen wir wieder

$$(1 - \tilde{P})\tilde{P} = 0 \quad (1 - \tilde{P})\tilde{T} = 0 \quad (6.38)$$

und

$$\partial_1 = \partial_\eta + \partial_{\bar{\eta}} \quad (6.39)$$

so wird die Bedingung zu

$$(1 - \tilde{P})(\partial_{\bar{\eta}}\tilde{T} + ((\partial_\eta + \partial_{\bar{\eta}})P)\tilde{T})\frac{1}{\tilde{T}^\dagger\tilde{T}}\tilde{T}^\dagger = 0 \quad (6.40)$$

welche wir mit folgendem Ansatz lösen:

$$\partial_{\bar{\eta}}\tilde{T} + ((\partial_\eta + \partial_{\bar{\eta}})P)\tilde{T} = \tilde{T}Z_3 \quad (6.41)$$

Diese Gleichung mischt η - und $\bar{\eta}$ -Ableitung. Dies wird dafür sorgen, dass wenn wir später mit Objekten $\lambda = \alpha\eta$ in T starten, in \tilde{T} auch Objekte der Form $\alpha\bar{\eta}$ auftauchen werden.

Leider kennen wir keine Energiedichte für nicht-statische supersymmetrische Solitonen, so dass wir weder die Maxima der Energiedichte noch die Gesamtenergie berechnen können. Weiter können wir natürlich auch nicht feststellen, ob die Supersymmetrie eine Auswirkung auf die Gesamtenergie hat oder ob wieder nur der bosonische Anteil beiträgt.

6.2.1 $U(1)$ -Solitonen

Wir wenden nun das supersymmetrische Dressing-Verfahren auf das $U(1)$ -Soliton aus Kapitel 5.1 an. Dort hatten wir für

$$|T\rangle = |\eta\alpha\rangle = |0\rangle + \lambda|1\rangle \quad (6.42)$$

mit

$$\lambda = \eta\alpha \quad \bar{\lambda} = \bar{\alpha}\bar{\eta} = -\bar{\eta}\bar{\alpha} \quad (6.43)$$

den folgenden Projektor berechnet:

$$P = |0\rangle\langle 0| + \lambda|1\rangle\langle 0| + \bar{\lambda}|0\rangle\langle 1| + \lambda\bar{\lambda}(-|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (6.44)$$

Für das Dressing-Verfahren benötigen wir:

$$P^- = -|0\rangle\langle 1| + \lambda(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) - \bar{\lambda}\sqrt{2}|0\rangle\langle 2| + \lambda\bar{\lambda}(2|0\rangle\langle 1| - \sqrt{2}|1\rangle\langle 2|) \quad (6.45)$$

$$P^+ = |1\rangle\langle 0| + \lambda\sqrt{2}|2\rangle\langle 0| + \bar{\lambda}(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|) + \lambda\bar{\lambda}(-2|1\rangle\langle 0| + \sqrt{2}|2\rangle\langle 1|) \quad (6.46)$$

$$\partial_\eta P = \alpha|1\rangle\langle 0| + \alpha\bar{\lambda}(-|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (6.47)$$

$$\partial_{\bar{\eta}} P = -\bar{\alpha}|0\rangle\langle 1| - \bar{\alpha}\lambda(-|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (6.48)$$

Wir müssen die Gleichungen

$$a|\tilde{T}\rangle + P^-|\tilde{T}\rangle = |\tilde{T}\rangle Z_1 \quad (6.49)$$

$$\partial_t|\tilde{T}\rangle - i\gamma P^+|\tilde{T}\rangle = |\tilde{T}\rangle Z_2 \quad (6.50)$$

$$\partial_{\bar{\eta}}|\tilde{T}\rangle + ((\partial_\eta + \partial_{\bar{\eta}})P)|\tilde{T}\rangle = |\tilde{T}\rangle Z_3 \quad (6.51)$$

lösen, wobei wir annehmen werden, dass $Z_i = z_i$ Konstanten sind, die wir wie üblich als

$$z_i = z_i^0 + z_i^1\eta + z_i^2\bar{\eta} + z_i^{12}\eta\bar{\eta} \quad (6.52)$$

zerlegen. Hierbei ist z_3 natürlich fermionisch, folglich z_3^1, z_3^2 bosonisch. Weiterhin machen wir den Ansatz

$$|\tilde{T}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} T_n |n\rangle \quad (6.53)$$

und zerlegen wieder:

$$T_i = T_i^0 + T_i^1\eta + T_i^2\bar{\eta} + T_i^{12}\eta\bar{\eta} \quad (6.54)$$

Wir beginnen damit Gleichung (6.49) zu lösen und zerlegen sie dafür nach $|n\rangle$. Für die $|0\rangle$ -Komponente erhalten wir:

$$T_1 - T_1 + \lambda T_0 - \sqrt{2}\bar{\lambda}T_2 + 2\lambda\bar{\lambda}T_1 = T_0 z_1 \quad (6.55)$$

Zerlegen wir dies nach den Komponenten $0, \eta, \bar{\eta}, \eta\bar{\eta}$ so erhalten wir für die 0-Komponente

$$0 = T_0^0 z_1^0 \quad (6.56)$$

welches wir mit

$$z_1^0 = 0 \quad (6.57)$$

lösen damit T_0^0 nicht verschwindet. Die η -Komponente liefert:

$$-\alpha T_0^0 = \underbrace{T_0^1 z_1^0}_{=0} + T_0^0 z_1^1 \quad \Longrightarrow \quad z_1^1 = -\alpha \quad (6.58)$$

Fahren wir erstmal mit den Gleichungen für $|1\rangle$ fort, so erhalten wir

$$\sqrt{2}T_2 - \lambda T_1 - \sqrt{2}\lambda\bar{\lambda}T_2 = T_1 z_1 \quad (6.59)$$

wobei uns die 0- und die η -Komponenten folgende Gleichungen liefern:

$$0 : \quad \sqrt{2}T_2^0 = T_1^0 z_1^0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_2^0 = 0 \quad (6.60)$$

$$\eta : \quad \sqrt{2}T_2^1 + \alpha T_1^0 = T_1^0(-\alpha) \quad \Longrightarrow \quad T_2^1 = -\sqrt{2}\alpha T_1^0 \quad (6.61)$$

Setzen wir dies in die $\bar{\eta}$ -Komponente von (6.55) ein, so erhalten wir:

$$-\sqrt{2}\bar{\alpha} \underbrace{T_2^0}_{=0} = T_0^0 z_1^2 \quad \Longrightarrow \quad z_1^2 = 0 \quad (6.62)$$

Die $\bar{\eta}$ -Komponente von (6.59) liefert nun:

$$\sqrt{2}T_2^2 = T_1^0 \underbrace{z_1^2}_{=0} + T_1^2 \underbrace{z_1^0}_{=0} \quad \Longrightarrow \quad T_2^2 = 0 \quad (6.63)$$

Aus der $\eta\bar{\eta}$ -Komponente von (6.55) folgt nun:

$$\alpha T_0^2 + \underbrace{2\bar{\alpha}\alpha T_1^0 + 2\alpha\bar{\alpha}T_1^0}_{=0} = T_0^0 z_1^{12} + T_0^2(-\alpha) \quad \Longrightarrow \quad z_1^{12} = 0 \quad (6.64)$$

Und schließlich liefert die $\eta\bar{\eta}$ -Komponente von (6.59):

$$\sqrt{2}T_2^{12} - \alpha T_1^2 = T_1^2(-\alpha) \quad \Longrightarrow \quad T_2^{12} = \sqrt{2}\alpha T_1^2 \quad (6.65)$$

Wir erhalten also

$$T_2 = -\sqrt{2}\alpha T_1^0 \eta + \sqrt{2}\alpha T_1^2 \eta\bar{\eta} = \sqrt{2}\lambda(T_1^0 + T_1^2 \bar{\eta}) \quad (6.66)$$

und

$$z_1 = -\alpha \eta \quad (6.67)$$

und damit aus (6.49) für $n \geq 3$: $T_n = 0$.

Kommen wir nun zur Gleichung (6.51):

$$\partial_{\bar{\eta}} \left| \tilde{T} \right\rangle + ((\partial_{\eta} + \partial_{\bar{\eta}})P) \left| \tilde{T} \right\rangle = \left| \tilde{T} \right\rangle z_3 \quad (6.68)$$

Wir erhalten als $|0\rangle$ - und $|1\rangle$ -Term:

$$|0\rangle : \quad \partial_{\bar{\eta}} T_0 - \alpha \bar{\lambda} T_0 - \bar{\alpha} T_1 + \bar{\alpha} \lambda T_0 = T_0 z_3 \quad (6.69)$$

$$|1\rangle : \quad \partial_{\bar{\eta}} T_1 + \alpha T_0 + \alpha \bar{\lambda} T_1 - \bar{\alpha} \lambda T_1 = T_1 z_3 \quad (6.70)$$

Entwickeln von (6.69) liefert:

$$0 : \quad -T_0^2 - \bar{\alpha} T_1^0 = T_0^0 z_3^0 \quad (6.71)$$

$$\eta : \quad -T_0^{12} - \bar{\alpha} T_1^1 - \bar{\alpha} \alpha T_0^0 = T_0^0 z_3^1 - T_0^1 z_3^0 \quad (6.72)$$

$$\bar{\eta} : \quad -\alpha \bar{\alpha} T_0^0 - \bar{\alpha} T_1^2 = T_0^0 z_3^2 - T_0^2 z_3^0 \quad (6.73)$$

$$\eta \bar{\eta} : \quad -\alpha \bar{\alpha} T_0^1 - \bar{\alpha} T_1^{12} + \bar{\alpha} \alpha T_0^2 = (T_0 z_3) |_{\eta \bar{\eta}} \quad (6.74)$$

Entwickeln wir (6.70), so erhalten wir:

$$0 : \quad -T_1^2 + \alpha T_0^0 = T_1^0 z_3^0 \quad (6.75)$$

$$\eta : \quad -T_1^{12} + \alpha T_0^1 + \bar{\alpha} \alpha T_1^0 = T_1^0 z_3^1 - T_1^1 z_3^0 \quad (6.76)$$

$$\bar{\eta} : \quad \alpha T_0^2 + \alpha \bar{\alpha} T_1^0 = T_1^0 z_3^2 - T_1^2 z_3^0 \quad (6.77)$$

$$\eta \bar{\eta} : \quad \alpha T_0^{12} + \alpha \bar{\alpha} T_1^1 - \bar{\alpha} \alpha T_1^2 = (T_1 z_3) |_{\eta \bar{\eta}} \quad (6.78)$$

Diese Gleichungen können wir benutzen um $T_0^2, T_1^2, T_0^{12}, T_1^{12}$ in Abhängigkeit von $T_0^0, T_1^0, T_0^1, T_1^1$ zu bestimmen und wir erhalten aus den 0- und η -Komponenten:

$$T_0^2 = -\bar{\alpha} T_1^0 - T_0^0 z_3^0 \quad (6.79)$$

$$T_1^2 = \alpha T_0^0 - T_1^0 z_3^0 \quad (6.80)$$

$$T_0^{12} = -\bar{\alpha} T_1^1 - (\bar{\alpha} \alpha + z_3^1) T_0^0 + T_0^1 z_3^0 \quad (6.81)$$

$$T_1^{12} = \alpha T_0^1 + (\bar{\alpha} \alpha - z_3^1) T_1^0 + T_1^1 z_3^0 \quad (6.82)$$

Man prüft leicht nach, dass auch die Gleichungen der $\bar{\eta}$ -Komponente erfüllt werden, wenn wir berücksichtigen, dass z_3^0 fermionisch ist, also $(z_3^0)^2 = 0$:

$$\underbrace{-\alpha \bar{\alpha} T_0^0 - \bar{\alpha} \alpha T_0^0}_{=0} + \bar{\alpha} T_1^0 z_3^0 = \bar{\alpha} T_1^0 z_3^0 - T_0^0 \underbrace{z_3^0 z_3^0}_{=0} \quad (6.83)$$

$$\underbrace{-\alpha \bar{\alpha} T_1^0 + \alpha \bar{\alpha} T_1^0}_{=0} - \alpha T_0^0 z_3^0 = -\alpha T_0^0 z_3^0 - T_1^0 \underbrace{z_3^0 z_3^0}_{=0} \quad (6.84)$$

Die Gleichungen der $\eta \bar{\eta}$ -Komponente liefern jeweils die Bedingung $z_3^{12} = 0$:

$$-\alpha \bar{\alpha} T_0^1 - \bar{\alpha} \alpha T_0^1 + \bar{\alpha} T_1^0 z_3^1 - \bar{\alpha} T_1^1 z_3^0 - \bar{\alpha} \alpha T_0^0 z_3^0 = T_0^0 z_3^{12} + \bar{\alpha} T_1^0 + T_0^0 z_3^0 z_3^1 - \bar{\alpha} T_1^1 z_3^0 - (\bar{\alpha} \alpha + z_3^1) T_0^0 z_3^0 \quad (6.85)$$

$$-\alpha\bar{\alpha}T_1^1 - \alpha T_0^0 z_3^1 + \alpha T_0^1 z_3^0 + \alpha\bar{\alpha}T_1^1 + \bar{\alpha}\alpha T_1^0 z_3^0 = T_1^0 z_3^{12} - \alpha T_0^0 + T_1^0 z_3^0 z_3^1 + \alpha T_0^1 z_3^0 + (\bar{\alpha}\alpha - z_3^1) T_1^0 z_3^0 \quad (6.86)$$

Die $|2\rangle$ -Komponente von (6.51) liefert uns

$$\partial_{\bar{\eta}} T_2 = T_2 z_3 \quad (6.87)$$

Wobei die 0- und die $\bar{\eta}$ -Komponente dieser Gleichung aufgrund der Form von T_2 trivial erfüllt sind. Die η -Komponente lautet

$$-\sqrt{2} \underbrace{\alpha T_1^2}_{=-\alpha T_1^0 z_3^0} = -T_2^1 z_3^0 = \sqrt{2}\alpha T_1^0 z_3^0 \quad (6.88)$$

ist also auch erfüllt. Die $\eta\bar{\eta}$ Komponente liefert uns $z_3^2 = 0$:

$$0 = T_2^1 z_3^2 + T_2^{12} z_3^0 = -\sqrt{2}\alpha T_1^0 z_3^2 - \sqrt{2}\alpha T_1^0 \underbrace{z_3^0 z_3^0}_{=0} \quad (6.89)$$

Es bleibt noch die Gleichung (6.50) zu lösen, welche uns die Zeitentwicklung von \tilde{T} liefert. Die $|0\rangle$ - und $|1\rangle$ -Komponenten von (6.50) lauten:

$$|0\rangle : \quad \partial_t T_0 = T_0 z_2 + i\gamma(-\bar{\lambda}T_0) \quad (6.90)$$

$$|1\rangle : \quad \partial_t T_1 = T_1 z_2 + i\gamma(T_0 + \bar{\lambda}T_1 - 2\lambda\bar{\lambda}T_0) \quad (6.91)$$

Die 0- und die η -Komponenten dieser beiden Gleichungen können wir jeweils direkt lösen:

$$|0\rangle, 0 : \quad \partial_t T_0^0 = T_0^0 z_2^0 \quad \implies T_0^0 = e^{z_2^0 t} A \quad (6.92)$$

$$|0\rangle, \eta : \quad \partial_t T_0^1 = \underbrace{T_0^0 z_2^1}_{=e^{z_2^0 t} A z_2^1} + T_0^1 z_2^0 \quad \implies T_0^1 = e^{z_2^0 t} (A z_2^1 t + \beta) \quad (6.93)$$

$$|1\rangle, 0 : \quad \partial_t T_1^0 = T_1^0 z_2^0 + i\gamma T_0^0 \quad \implies T_1^0 = e^{z_2^0 t} (i\gamma A t + C) \quad (6.94)$$

$$|1\rangle, \eta : \quad \partial_t T_1^1 = T_1^0 z_2^1 + T_1^1 z_2^0 + i\gamma T_0^1 \quad \implies T_1^1 = e^{z_2^0 t} (i\gamma A z_2^1 t^2 + (C z_2^1 + i\gamma\beta)t + \delta) \quad (6.95)$$

Hierbei sind A und C freie bosonische und β und δ freie fermionische Parameter. Damit liegen die restlichen Komponenten auch fest. Wir überprüfen noch ob die restlichen Gleichungen Einschränkungen an die Parameter liefern. Wir erhalten für die $|0\rangle, \bar{\eta}$ -Komponente:

$$\partial_t T_0^2 = \underbrace{\partial_t(-\bar{\alpha}T_1^0 - T_0^0 z_3^0)}_{=-\bar{\alpha}T_1^0 z_2^0 - \bar{\alpha}i\gamma T_0^0 - T_0^0 z_2^0 z_3^0} = T_0^0 z_2^2 + \underbrace{T_0^2 z_2^0}_{=-\bar{\alpha}T_1^0 z_2^0 - T_0^0 z_3^0 z_2^0} - i\gamma\bar{\alpha}T_0^0 \quad (6.96)$$

Dies liefert uns also die Bedingung: $z_2^2 = 0$. Die linke Seite der $|0\rangle, \eta\bar{\eta}$ -Komponente lautet:

$$\begin{aligned} \partial_t T_0^{12} &= \partial_t(-\bar{\alpha}T_1^1 - (\bar{\alpha}\alpha + z_3^1)T_0^0 + T_0^1 z_3^0) \\ &= -\bar{\alpha}T_1^0 z_2^1 - \bar{\alpha}T_1^1 z_2^0 - \bar{\alpha}i\gamma T_0^1 - (\bar{\alpha}\alpha + z_3^1)T_0^0 z_2^0 + T_0^0 z_2^1 z_3^0 + T_0^1 z_2^0 z_3^0 \end{aligned} \quad (6.97)$$

Für die r.h.s. erhalten wir

$$\begin{aligned} T_0^{12} - T_0^1 z_2^2 + T_0^2 z_2^1 + T_0^0 z_2^{12} - i\gamma \bar{\alpha} T_0^1 \\ = -\bar{\alpha} T_1^1 z_2^0 - (\bar{\alpha}\alpha + z_3^1) T_0^0 z_2^0 + T_0^1 z_3^0 z_2^0 - \bar{\alpha} T_1^0 z_2^1 - T_0^0 z_3^0 z_2^1 + T_0^0 z_2^{12} - i\gamma \bar{\alpha} T_0^1 \end{aligned} \quad (6.98)$$

wobei wir schon $z_2^2 = 0$ verwendet haben. Die beiden Seiten sind also gleich für $z_2^{12} = 0$. Durch einsetzen rechnet man leicht nach, dass auch die Gleichungen für die $|1\rangle$, $\bar{\eta}$ - und $\eta\bar{\eta}$ -Komponenten erfüllt sind und auch die Gleichung der $|2\rangle$ -Komponente von (6.50)

$$\partial_t T_2 = T_2 z_2 + i\gamma\sqrt{2}\lambda(T_0 + \bar{\lambda}T_1) \quad (6.99)$$

keine weiteren Einschränkungen liefert.

Wir erhalten also für $|\tilde{T}\rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{|\tilde{T}\rangle}{e^{z_2^0 t}} = \\ \left\{ A + (Az_2^1 t + \beta)\eta - (\bar{\alpha}(i\gamma At + C) + Az_3^0)\bar{\eta} \right. \\ \left. + (-\bar{\alpha}(i\gamma Az_2^1 t^2 + (Cz_2^1 + i\gamma\beta)t + \delta) - (\bar{\alpha}\alpha + z_3^1)A + (Az_2^1 t + \beta)z_3^0)\eta\bar{\eta} \right\} |0\rangle \\ + \left\{ (i\gamma At + C) + (i\gamma Az_2^1 t^2 + (Cz_2^1 + i\gamma\beta)t + \delta)\eta + (\alpha A - (i\gamma At + C)z_3^0)\bar{\eta} \right. \\ \left. + (\alpha(Az_2^1 t + \beta) + (\bar{\alpha}\alpha - z_3^1)(i\gamma At + C) + (i\gamma Az_2^1 t^2 + (Cz_2^1 + i\gamma\beta)t + \delta)z_3^0)\eta\bar{\eta} \right\} |1\rangle \\ - \sqrt{2}\alpha(i\gamma At + C)(\eta + z_3^0\eta\bar{\eta}) |2\rangle \end{aligned} \quad (6.100)$$

Da das Abspalten von Faktoren von $|\tilde{T}\rangle$ den Projektor \tilde{P} nicht ändern können wir o.B.d.A. $z_2^0 = 0$ setzen. Weiterhin dürfen wir durch A teilen und welches eine Reskalierung der übrigen freien Parameter bewirkt, also setzen wir $A = 1$. Aufgrund der Freiheit in der Wahl des Zeitnullpunkts t_0 , welche nur eine Verschiebung der Zeitskala bewirkt, können wir $C = 0$ setzen. Um $|\tilde{T}\rangle$ auf eine einfache Form zu bringen, teilen wir noch durch den Vorfaktor $B = \langle 0|\tilde{T}\rangle$ vor $|0\rangle$. Wir erhalten mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} = 1 - (z_2^1 t + \beta)\eta + (\bar{\alpha}i\gamma t + z_3^0)\bar{\eta} \\ + \{i\gamma z_2^1 \bar{\alpha} t^2 + (z_2^1 z_3^0 + i\gamma\beta\bar{\alpha})t + \beta z_3^0 + \bar{\alpha}\delta + \bar{\alpha}\alpha + z_3^1\}\eta\bar{\eta} \end{aligned} \quad (6.101)$$

für den reskalierten Anteil von $|1\rangle$

$$\left\langle 1 \left| \frac{1}{B} \right| \tilde{T} \right\rangle = i\gamma t + \delta\eta + (\alpha - \bar{\alpha}\gamma^2 t^2)\bar{\eta} + 2i\gamma t(\bar{\alpha}\delta + \bar{\alpha}\alpha)\eta\bar{\eta} \quad (6.102)$$

sowie für den reskalierten Anteil von $|2\rangle$:

$$\left\langle 2 \left| \frac{1}{B} \right| \tilde{T} \right\rangle = -\sqrt{2}(i\gamma t\alpha\eta + \gamma^2 t^2 \alpha\bar{\alpha}\eta\bar{\eta}) \quad (6.103)$$

Für $|T'\rangle = \frac{1}{B} |\tilde{T}\rangle$ berechnet man nun:

$$\begin{aligned} \langle T' | T' \rangle = & 1 + \gamma^2 t^2 - i\gamma t (\delta + \bar{\alpha} - \alpha \gamma^2 t^2) \eta \\ & - i\gamma t (\bar{\delta} + \alpha - \bar{\alpha} \gamma^2 t^2) \bar{\eta} \\ & + (2\gamma^2 t^2 (\bar{\alpha} \delta + \bar{\alpha} \alpha + \bar{\delta} \alpha) + \delta \bar{\delta} + \bar{\alpha} \alpha - \bar{\alpha} \alpha \gamma^4 t^4) \eta \bar{\eta} \end{aligned} \quad (6.104)$$

Um $\langle T' | T' \rangle$ einfach invertieren zu können, bietet sich die Wahl

$$\delta = -\alpha - \bar{\alpha} = \bar{\delta} \quad (6.105)$$

an. Damit verändert sich der $|1\rangle$ -Anteil von $|T'\rangle$ zu

$$\langle 1 | T' \rangle = i\gamma t - (\alpha + \bar{\alpha})\eta + (\alpha - \bar{\alpha} \gamma^2 t^2) \bar{\eta} \quad (6.106)$$

und mit

$$X = 1 + \gamma^2 t^2 \quad (6.107)$$

erhalten wir:

$$\langle T' | T' \rangle = X + i\gamma t X \alpha \eta + i\gamma t X \bar{\alpha} \bar{\eta} + \eta \bar{\eta} \alpha \bar{\alpha} (X^2 - 2) \quad (6.108)$$

Dies lässt sich leicht mit der Formel

$$\frac{1}{X+f} = \frac{1}{X(1+\frac{f}{X})} = \frac{1}{X} \left(1 - \frac{f}{X} + \left(\frac{f}{X} \right)^2 \right) \quad (6.109)$$

invertieren und man erhält:

$$\frac{1}{\langle T' | T' \rangle} = \frac{1}{X} \underbrace{\left(1 - i\gamma t \alpha \eta - i\gamma t \bar{\alpha} \bar{\eta} + \eta \bar{\eta} \frac{\alpha \bar{\alpha}}{X} (1 + \gamma^4 t^4) \right)}_{=:Z} \quad (6.110)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} |T'\rangle \frac{1}{\langle T' | T' \rangle} = & \frac{1}{X} \{ |0\rangle Z \\ & + |1\rangle \left(i\gamma t - (\alpha + \bar{\alpha} - \alpha \gamma^2 t^2) \eta + \alpha \bar{\eta} - \frac{2i\gamma^3 t^3}{X} \alpha \bar{\alpha} \eta \bar{\eta} \right) \\ & + |2\rangle (-\sqrt{2} \alpha i \gamma t \eta) \} \end{aligned} \quad (6.111)$$

Schließlich erhalten wir für den Projektor $\tilde{P} = |T'\rangle \frac{1}{\langle T'|T'\rangle} \langle T'|$:

$$\begin{aligned}
X\tilde{P} = & |0\rangle\langle 0| Z \\
& + |0\rangle\langle 1| \left\{ -i\gamma t - \bar{\alpha}\eta + (\alpha + \bar{\alpha} - \bar{\alpha}\gamma t^2)\bar{\eta} + 2\frac{i\gamma^3 t^3}{X}\alpha\bar{\alpha}\eta\bar{\eta} \right\} \\
& + |0\rangle\langle 2| (-\sqrt{2}\bar{\alpha}i\gamma t\bar{\eta}) \\
& + |1\rangle\langle 0| \left\{ i\gamma t - (\bar{\alpha} + \alpha - \alpha\gamma^2 t^2)\eta + \alpha\bar{\eta} + \frac{2i\gamma^3 t^3}{X}\bar{\alpha}\alpha\eta\bar{\eta} \right\} \\
& + |1\rangle\langle 1| \left\{ \gamma^2 t^2 + i\gamma t\alpha\eta + i\gamma t\bar{\alpha}\bar{\eta} + (1 + 2\gamma^2 t^2 + 3\gamma^4 t^4)\frac{\bar{\alpha}\alpha}{X}\eta\bar{\eta} \right\} \\
& + |1\rangle\langle 2| \sqrt{2}(\bar{\alpha}\gamma^2 t^2\bar{\eta} - i\gamma t\bar{\alpha}\alpha\eta\bar{\eta}) \\
& + |2\rangle\langle 0| \sqrt{2}(-\alpha i\gamma t\eta) \\
& + |2\rangle\langle 1| \sqrt{2}(-\alpha\gamma^2 t^2\eta + i\gamma t\bar{\alpha}\alpha\eta\bar{\eta}) \\
& + |2\rangle\langle 2| 2\gamma^2 t^2\alpha\bar{\alpha}\eta\bar{\eta}
\end{aligned} \tag{6.112}$$

Für das Soliton benötigt man noch das Produkt $\tilde{P}P$. Man erhält:

$$\begin{aligned}
X\tilde{P}P = & |0\rangle\langle 0| \left\{ 1 - i\gamma t\bar{\alpha}\bar{\eta} + \frac{\alpha\bar{\alpha}}{X}\eta\bar{\eta}(1 - \gamma^2 t^2) \right\} \\
& + |1\rangle\langle 0| \left\{ i\gamma t - (\alpha + \bar{\alpha})\eta + \alpha\bar{\eta} - \frac{2i\gamma^3 t^3}{X}\alpha\bar{\alpha}\eta\bar{\eta} \right\} \\
& + |2\rangle\langle 0| \sqrt{2}(-\alpha i\gamma t\eta) \\
& + |0\rangle\langle 1| \bar{\alpha}\bar{\eta} \\
& + |1\rangle\langle 1| (i\gamma t\bar{\alpha}\bar{\eta} + \alpha\bar{\alpha}\eta\bar{\eta}) \\
& + |2\rangle\langle 1| \sqrt{2}\bar{\alpha}\alpha i\gamma t\eta\bar{\eta}
\end{aligned} \tag{6.113}$$

Für $\Phi = (1 - 2\tilde{P})(1 - 2P) = 1 - 2(\tilde{P} + P - 2\tilde{P}P)$ berechnet man nun:

$$\begin{aligned}
X(\tilde{P} + P - 2\tilde{P}P) = & |0\rangle\langle 0| \left\{ \gamma^2 t^2 - i\gamma t\alpha\eta + i\gamma t\bar{\alpha}\bar{\eta} - 2\frac{\alpha\bar{\alpha}}{X}\eta\bar{\eta} \right\} \\
& + |0\rangle\langle 1| \left\{ -i\gamma t - \bar{\alpha}\eta + \alpha\bar{\eta} + \frac{2i\gamma^3 t^3}{X}\alpha\bar{\alpha}\eta\bar{\eta} \right\} \\
& + |0\rangle\langle 2| \sqrt{2}(-i\gamma t\bar{\alpha}\bar{\eta}) \\
& + |1\rangle\langle 0| \left\{ i\gamma t + \bar{\alpha}\eta - \alpha\bar{\eta} + \frac{2i\gamma^3 t^3}{X}\alpha\bar{\alpha}\eta\bar{\eta} \right\} \\
& + |1\rangle\langle 1| \left\{ \gamma^2 t^2 + i\gamma t\alpha\eta - i\gamma t\bar{\alpha}\bar{\eta} - \frac{2\alpha\bar{\alpha}}{X}\eta\bar{\eta}(1 + \gamma^2 t^2 + \gamma^4 t^4) \right\} \\
& + |1\rangle\langle 2| \sqrt{2}(\gamma^2 t^2\bar{\alpha}\bar{\eta} + i\gamma t\bar{\alpha}\alpha\eta\bar{\eta}) \\
& + |2\rangle\langle 0| \sqrt{2}(i\gamma t\alpha\eta) \\
& + |2\rangle\langle 1| \sqrt{2}(-\gamma^2 t^2\alpha\eta + i\gamma t\bar{\alpha}\alpha\eta\bar{\eta}) \\
& + |2\rangle\langle 2| 2(\gamma^2 t^2\alpha\bar{\alpha}\eta\bar{\eta})
\end{aligned} \tag{6.114}$$

Entwickeln wir dies für große Zeiten, so erhalten wir mit $X \rightarrow \gamma^2 t^2$:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi = 1 - 2 \left\{ (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) - \sqrt{2}\alpha\eta |2\rangle\langle 1| + \sqrt{2}\bar{\alpha}\bar{\eta} |1\rangle\langle 2| + 2\alpha\bar{\alpha}\eta\bar{\eta} (|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|) \right\} \quad (6.115)$$

Wir erhalten wie zu erwarten, den Anteil aus dem rein bosonischen Fall plus weitere Terme mit fermionischen Parametern. Eine interessante Beobachtung ist, dass dies auch der mit unserem Translationsoperator aus Gleichung (4.32) konjugierte bosonische Ausdruck ist. Mit $\lambda = \eta\alpha = -\alpha\eta$ und

$$U = \exp(\lambda a^\dagger - \bar{\lambda} a) = \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \bar{\lambda} \right) (1 + \lambda a^\dagger)(1 - \bar{\lambda} a) \quad (6.116)$$

erhält man:

$$U(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)U^\dagger = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| - \sqrt{2}\alpha\eta |2\rangle\langle 1| + \sqrt{2}\bar{\alpha}\bar{\eta} |1\rangle\langle 2| + 2\alpha\bar{\alpha}\eta\bar{\eta} (|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|) \quad (6.117)$$

6.2.2 $U(2)$ -Solitonen, Fall 1

Um $U(2)$ -Rang-2-Solitonen zu konstruieren starten wir das Dressing-Verfahren mit einem vereinfachten T aus Abschnitt 5.2. Wir wählen als T :

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \quad (6.118)$$

mit:

$$z = \sqrt{2\theta}a \quad (6.119)$$

Hierbei handelt es sich bei z immer noch um einen Operator. Falls man (was wir nicht tun werden) das Soliton oder die Energiedichte in der z -Ebene angeben will, muss man entsprechend alle Produkte durch \star -Produkte ersetzen.

Als Projektor P haben wir damit

$$P = \begin{pmatrix} c & c\bar{z} \\ zc & c_1N_1 \end{pmatrix} \quad (6.120)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$N_x = z\bar{z} + 2\theta x \quad c_x = \frac{1}{1 + N_x} \quad (6.121)$$

benutzen. Damit gilt wieder:

$$zN_x = N_{x+1}z \quad \bar{z}N_x = N_{x-1}\bar{z} \quad (6.122)$$

$$zc_x = c_{x+1}z \quad \bar{z}c_x = c_{x-1}\bar{z} \quad (6.123)$$

Später benötigen wir wieder:

$$P^- = [z, P] = 2\theta \begin{pmatrix} -c_1cz & c_1c \\ -zc_1cz & zc_1c \end{pmatrix} \quad (6.124)$$

$$P^+ = [\bar{z}, P] = 2\theta \begin{pmatrix} \bar{z}c_1c & \bar{z}cc_1\bar{z} \\ -c_1c & -c_1c\bar{z} \end{pmatrix} \quad (6.125)$$

Mit dem Dressing-Verfahren bestimmen wir wieder Bedingungen an \tilde{T} , wobei für \tilde{T} folgendes gilt:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} \quad (6.126)$$

Wir zerlegen wieder wie gewohnt:

$$w = w^0 + w^1\eta + w^2\bar{\eta} + w^{12}\eta\bar{\eta} \quad x = x^0 + x^1\eta + x^2\bar{\eta} + x^{12}\eta\bar{\eta} \quad (6.127)$$

Da P nicht von η und $\bar{\eta}$ abhängt, vereinfacht sich die Gleichung

$$\partial_{\bar{\eta}}\tilde{T} + ((\partial_{\eta} + \partial_{\bar{\eta}})P)\tilde{T} = \tilde{T}Z_3 \quad (6.128)$$

zu

$$\partial_{\bar{\eta}} T = T z_3 \quad (6.129)$$

wobei wir annehmen werden, dass z_3 nicht von t, z, \bar{z} abhängt. Da wir keine Matrixmultiplikation in Gleichung (6.129) haben überträgt sich die Gleichung direkt auf w und x :

$$\partial_{\bar{\eta}} w = w z_3 \quad \partial_{\bar{\eta}} x = x z_3 \quad (6.130)$$

Zerlegen wir Gleichung (6.129) in ihre Komponenten, so erhalten wir:

$$0 : \quad -\tilde{T}^2 = \tilde{T}^0 z_3^0 \quad (6.131)$$

$$\eta : \quad -\tilde{T}^{12} = \tilde{T}^0 z_3^1 - \tilde{T}^1 z_3^0 \quad (6.132)$$

$$\bar{\eta} : \quad 0 = \tilde{T}^0 z_3^2 - \tilde{T}^2 z_3^0 \quad (6.133)$$

$$\eta \bar{\eta} : \quad 0 = \tilde{T}^{12} z_3^0 + \tilde{T}^1 z_3^2 - \tilde{T}^2 z_3^1 + \tilde{T}^0 z_3^{12} \quad (6.134)$$

Dies liefert uns wieder \tilde{T}^2 und \tilde{T}^{12} als Kombination aus \tilde{T}^0 und \tilde{T}^1 . Gleichungen (6.133) und (6.134) sind dabei erfüllt, wenn wir

$$z_3^2 = z_3^{12} = 0 \quad (6.135)$$

setzen.

Wir erhalten also:

$$\tilde{T} = \tilde{T}^0 + \tilde{T}^1 \eta + (-\tilde{T}^0 z_3^0) \bar{\eta} + (\tilde{T}^1 z_3^0 - \tilde{T}^0 z_3^1) \eta \bar{\eta} \quad (6.136)$$

Dies lässt sich faktorisieren als:

$$\tilde{T} = (\tilde{T}^0 + \tilde{T}^1 \eta)(1 - z_3^0 \bar{\eta} - z_3^1 \eta \bar{\eta}) \quad (6.137)$$

Da der rechte Faktor nicht zu dem Projektor beiträgt, können wir ihn weglassen bzw. ohne Einschränkung

$$z_3^0 = z_3^1 = 0 \quad (6.138)$$

setzen.

Lösen wir nun die zweite Gleichung aus dem Dressing-Verfahren die folgendermaßen lautet:

$$\frac{z}{\sqrt{2\theta}} \tilde{T} = \frac{-1}{\sqrt{2\theta}} P^- \tilde{T} + \tilde{T} z_1 \quad (6.139)$$

wobei, wir die Brüche erhalten, da wir mit $z = \sqrt{2\theta} a$ statt a rechnen.

Wie in [LeSca] setzen wir

$$z_1^0 = \frac{z}{\sqrt{2\theta}} \quad (6.140)$$

und erhalten mit der Abkürzung

$$\hat{z}_1 = z_1 - z_1^0 \quad (6.141)$$

folgende Gleichung:

$$\tilde{T}^- = -P^- \tilde{T} + \tilde{T} \sqrt{2\theta} \hat{z}_1 \quad (6.142)$$

Wir gehen im folgenden davon aus, dass \hat{z} nicht von t, z und \bar{z} abhängt.

Nach einer Reskalierung

$$\hat{z}_1 := \sqrt{2\theta} \hat{z}_1 \quad (6.143)$$

lautet die obige Gleichung in Komponenten:

$$[z, w] = 2\theta c_1 c z w - 2\theta c_1 c x + w \hat{z}_1 \quad (6.144)$$

$$[z, x] = 2\theta z c_1 c z w - 2\theta z c_1 c x + x \hat{z}_1 \quad (6.145)$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung von links mit z und ziehen die zweite Gleichung ab, so erhalten wir:

$$[z, \underbrace{z w - x}_{=f+f^1\eta}] = (z w - x) \hat{z}_1 \quad (6.146)$$

wobei wir $f + f^1\eta$ eingeführt haben, mit:

$$x = z w - f - f^1\eta \quad (6.147)$$

Zerlegen wir die obere Gleichung in ihre Komponenten so erhalten wir in der 0-Komponente wie im bosonischen Fall:

$$[z, z w^0 - x^0] = 0 \quad \implies \quad f = f(t, z) \quad (6.148)$$

Die η -Komponente liefert uns

$$[z, z w^1 - x^1] = [z, f^1] = f z_1^1 \quad \implies \quad f^1 = \frac{\bar{z}}{2\theta} f z_1^1 + g(t, z) \nu \quad (6.149)$$

mit einem fermionischen Parameter ν . Die Gleichungen für die $\bar{\eta}$ - und $\eta\bar{\eta}$ -Komponenten werden erfüllt, wenn wir

$$z_1^2 = z_1^{12} = 0 \quad (6.150)$$

setzen. Damit lautet unser Ausdruck für x folgendermaßen:

$$x = z w - f - \bar{z} f \frac{z_1^1}{2\theta} \eta - g \nu \eta \quad (6.151)$$

Kommen wir nun zu der Gleichung welche uns die Zeitabhängigkeit von \tilde{T} liefert:

$$\partial_t \tilde{T} = \underbrace{\frac{i\gamma}{\sqrt{2\theta}}}_{= \frac{-i}{\theta}} P^+ \tilde{T} + \tilde{T} \hat{z}_2 \quad (6.152)$$

Wobei wir wieder $z_2^0 = 0$ gesetzt haben und wieder die Abkürzung $\hat{z}_2 = z_2 - z_2^0$ verwenden. Benutzen wir gleich die Gleichung für x so liefert uns die erste Komponente:

$$\partial_t w = -2i\bar{z}c_1 c w - 2i\bar{z}c_1 c \bar{z} (z w - f - \bar{z} f \frac{z_1^1}{2\theta} \eta - g \nu \eta) + w \hat{z}_1 \quad (6.153)$$

Die 0-Komponente wird zu

$$\partial_t w^0 = -2i\bar{z}c_1 w + 2i\bar{z}c_1 c\bar{z}f \quad (6.154)$$

welche wir wie in [LeSca] mit

$$w^0 = 1 + c\bar{z}f \quad f = -2i(t + H(z)) \quad (6.155)$$

lösen.

Die η -Komponente von (6.152) liefert uns

$$\partial_t w^1 = -2i\bar{z}c_1 w^1 + 2i\bar{z}cc_1 \bar{z}\bar{z}f \frac{z_1^1}{2\theta} + 2i\bar{z}cc_1 \bar{z}g\nu + z_2^1 + c\bar{z}f z_2^1 \quad (6.156)$$

welche wir mit

$$w^1 = c\bar{z}\bar{z}f \frac{z_1^1}{2\theta} + \bar{z} \frac{z_1^1}{2\theta} + c\bar{z}g\nu + \nu \quad g = -2i(t + j(z)) \quad z_2^1 = 0 \quad (6.157)$$

lösen. Mit $z_2^2 = z_2^{12} = 0$ sind auch die Gleichungen der $\bar{\eta}$ - und $\eta\bar{\eta}$ -Komponente erfüllte und man überprüft schnell, dass auch die Gleichungen für x von (6.152) und auch Gleichung (6.144) erfüllt sind.

Mit den Abkürzungen

$$\alpha = \frac{1}{2\theta} z_1^1 \eta \quad \beta = \nu \eta \quad (6.158)$$

erhalten wir:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 + \bar{z}c_1 f \\ z - c_1 f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{z}c_1 \bar{z}f\alpha + \bar{z}\alpha + \bar{z}c_1 g\beta + \beta \\ -c_1 \bar{z}f\alpha + N_1 \alpha - c_1 g\beta + z\beta \end{pmatrix} \quad (6.159)$$

Dies lässt sich zerlegen als:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} (1 + \bar{z}\alpha + \beta) + \begin{pmatrix} \bar{z} \\ -1 \end{pmatrix} (c_1 f + c_1 \bar{z}f\alpha + c_1 g\beta) \quad (6.160)$$

Für \tilde{P} spielen Faktoren von \tilde{T} keine Rolle, so dass wir \tilde{T} mit $(1 - \bar{z}\alpha - \beta)$ multiplizieren dürfen, um den Faktor vor $T = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$ auf 1 zu bringen, und wir erhalten

$$\tilde{T} = T + T^\perp (c_1 f + c_1 [\bar{z}, f]\alpha + c_1 (g - f)\beta) \quad (6.161)$$

wobei wir die Abkürzung

$$T^\perp = \begin{pmatrix} \bar{z} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (6.162)$$

mit

$$T^\dagger T^\perp = 0 \quad (6.163)$$

eingeführt haben. Wir sehen, dass der η -Anteil von \tilde{T} zeitunabhängig ist.

$[\bar{z}, f]$ ist bis auf einen Faktor, den wir durch eine Umskalierung in α absorbieren können, die Ableitung h von $H(z)$. Durch die Wahl $j(z) = f(z) + \frac{i}{2}k(z)$ erhalten wir insgesamt:

$$\tilde{T} = T + T^\perp c_1 (f(t, z) + h(z)\alpha + k(z)\beta) \quad (6.164)$$

Durch eine andere Wahl von g kann man den α -Term zum verschwinden bringen, so dass wir im folgenden $\alpha = 0$ setzen. so dass wir als allgemeine Lösung erhalten

$$\tilde{T} = T + T^\perp \frac{-2i}{1 + z\bar{z} + 2\theta} ((t + H(z)) + k(z)\nu\eta) \quad (6.165)$$

Diese Lösung könnte man noch etwas verallgemeinern, indem wir $k(z)\nu$ durch eine Summe der Form $\sum_i k_i(z)\nu_i$ ersetzen. An dem dazugehörigen Φ kann man leider nicht mehr viel erkennen, außer dass man wieder den Anteil aus dem rein bosonischen Fall erhält plus einige Terme mit fermionischen Parametern. Den bosonischen Anteil kann man wieder in Abhängigkeit von $H(z)$ wie im rein bosonischen Fall als wechselwirkende bosonische Solitonen deuten welche zusätzlich noch eine Auswirkung auf die fermionischen Koordinaten haben. Das Φ und die dazugehörige Berechnung findet man im Anhang A.1.

6.2.3 $U(2)$ -Solitonen, Fall 2

Wir betrachten nun noch Solitonen mit Rang 2 für ein allgemeineres T , mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ f + g\eta \end{pmatrix} \quad T^\dagger = (1, \bar{f} - \bar{g}\bar{\eta}) \quad (6.166)$$

wobei f und g beliebige Funktionen von z sind und untersuchen, welche Einschränkungen wir an f, g erhalten, wenn wir \tilde{T} auf die Form

$$\tilde{T} = T + T^\perp h(t, z, \bar{z}, \eta, \bar{\eta}) \quad (6.167)$$

mit

$$T^\perp = \begin{pmatrix} \bar{f} - \bar{g}\bar{\eta} \\ -1 \end{pmatrix} \quad T^\dagger T^\perp = 0 \quad (6.168)$$

bringen wollen. Aus Kapitel 6.2.2 und [LeSca] wissen wir, dass dies in einigen Fällen, darunter alle in [LeSca] untersuchten, möglich ist. Jedoch wissen wir auch aus Kapitel 6.2.1, dass diese Form nicht immer möglich ist.

Für

$$T^\dagger T = 1 + \bar{f}f + \bar{f}g\eta - \bar{g}f\bar{\eta} - \bar{g}g\eta\bar{\eta} \quad (6.169)$$

bestimmen wir wie gewohnt

$$\frac{1}{T^\dagger T} = c - c\bar{f}g\eta + c\bar{g}f\bar{\eta} + \underbrace{c(\bar{g}g + \bar{f}g\bar{g}f - \bar{g}f\bar{c}f\bar{g})}_{=:K} c\eta\bar{\eta} \quad (6.170)$$

wobei wie üblich c das Inverse des bosonischen Anteils bezeichnet:

$$c = \frac{1}{1 + \bar{f}f} \quad (6.171)$$

Damit erhalten wir den Projektor:

$$\begin{aligned} P = & \begin{pmatrix} c & c\bar{f} \\ fc & fc\bar{f} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -c\bar{f}gc & -c\bar{f}gc\bar{f} \\ -fc\bar{f}gc + gc & -fc\bar{f}gc\bar{f} + gc\bar{f} \end{pmatrix} \eta \\ & + \begin{pmatrix} c\bar{g}fc & c\bar{g}fc\bar{f} - c\bar{g} \\ fc\bar{g}fc & fc\bar{g}fc\bar{f} - fc\bar{g} \end{pmatrix} \bar{\eta} \\ & + \begin{pmatrix} K & K\bar{f} - c\bar{f}gc\bar{g} \\ fK - gc\bar{g}fc & fK\bar{f} - fc\bar{f}gc\bar{g} - gc\bar{g}fc\bar{f} + gc\bar{g} \end{pmatrix} \eta\bar{\eta} \end{aligned} \quad (6.172)$$

Wir machen also den Ansatz

$$\tilde{T} = T + T^\perp h(t, z, \bar{z}, \eta, \bar{\eta}) \quad (6.173)$$

und zerlegen wie gewohnt h als:

$$h = h^0 + h^1\eta + h^2\bar{\eta} + h^{12}\eta\bar{\eta} \quad (6.174)$$

Beginnen wir nun mit der dritten Gleichung des Dressing-Verfahrens:

$$\partial_{\bar{\eta}}\tilde{T} + ((\partial_{\eta} + \partial_{\bar{\eta}})P)\tilde{T} = \tilde{T}z_3 \quad (6.175)$$

mit $z_3 = 0$ wird diese Gleichung zu:

$$\begin{pmatrix} \bar{g} \\ 0 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} \bar{f} - \bar{g}\bar{\eta} \\ -1 \end{pmatrix} (-h^2 - h^{12}\eta) = (P^1 + P^2 - P^{12}\bar{\eta} + P^{12}\eta) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ f + g\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} - \bar{g}\bar{\eta} \\ -1 \end{pmatrix} h \right] \quad (6.176)$$

Mit

$$(P^1 + P^2) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} h^0 \right] = \begin{pmatrix} -c\bar{f}g + c\bar{g}h^0 \\ -fc\bar{f}g + g + fc\bar{g}h^0 \end{pmatrix} \quad (6.177)$$

erhalten wir für die bosonische Komponente von Gleichung (6.176):

$$\begin{pmatrix} \bar{g} \\ 0 \end{pmatrix} h^0 + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} (-h^2) = \begin{pmatrix} -c\bar{f}g + c\bar{g}h^0 \\ -fc\bar{f}g + g + fc\bar{g}h^0 \end{pmatrix} \quad (6.178)$$

Die zweite Komponente legt uns h^2 als

$$h^2 = (1 - fc\bar{f})g + fc\bar{g}h^0 \quad (6.179)$$

fest und einsetzen in die erste Komponente zeigt, dass auch diese damit erfüllt wird. (Hätten wir nicht zu Beginn $z_3 = 0$ gesetzt, so hätten wir an dieser Stelle diese Bedingung erhalten.)

Die η -Komponente von Gleichung (6.176) wird zu:

$$\begin{pmatrix} \bar{g} \\ 0 \end{pmatrix} h^1 + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} (-h^{12}) = (P^1 + P^2) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} h^1 \right] + P^{12} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} h^0 \right] \quad (6.180)$$

Aus der zweiten Komponente lesen wir h^{12} ab als

$$h^{12} = (fc\bar{f} - 1)gc\bar{f}g + (fc\bar{f} - 1)gc\bar{g}h^0 + fc\bar{g}h^1 \quad (6.181)$$

welches auch die erste Komponente erfüllt. Durch Einsetzen überprüft man leicht, dass auch die $\bar{\eta}$ - und $\eta\bar{\eta}$ -Komponenten von Gleichung (6.176) erfüllt sind.

Lösen wir nun die erste Gleichung des Dressing-Verfahrens. Wir wählen $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}z$ und erhalten damit folgende Bedingung:

$$\partial_{\bar{z}}\tilde{T} + (\partial_{\bar{z}}P)\tilde{T} = 0 \quad (6.182)$$

Die bosonische Komponente von obiger Gleichung lautet:

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}}\bar{f} \\ 0 \end{pmatrix} h^0 + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} \partial_{\bar{z}}h^0 + \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}}c & \partial_{\bar{z}}(c\bar{f}) \\ f\partial_{\bar{z}}c & f\partial_{\bar{z}}(c\bar{f}) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} h^0 \right] = 0 \quad (6.183)$$

Um dies zu lösen betrachten wir in Analogie zu Kapitel 6.2.2 und [LeSca] die Differenz von der von links mit f multiplizierten ersten Komponente und der zweiten Komponenten. Wir erhalten:

$$f(\partial_{\bar{z}}\bar{f})h^0 + (f\bar{f} + 1)\partial_{\bar{z}}h^0 = \partial_{\bar{z}}((1 + f\bar{f})h^0) = 0 \quad (6.184)$$

Mit

$$d = \frac{1}{1 + f\bar{f}} \quad (6.185)$$

erhalten wir als Lösung:

$$h^0 = du(t, z) \quad (6.186)$$

Für die Ableitung einer inversen Funktion gilt:

$$XX^{-1} = 1 \quad \longrightarrow \quad \partial_{\bar{z}}XX^{-1} + X\partial_{\bar{z}}X^{-1} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_{\bar{z}}X^{-1} = -X^{-1}\partial_{\bar{z}}XX^{-1} \quad (6.187)$$

In unserem Fall haben wir also:

$$\partial_{\bar{z}}h^0 = \partial_{\bar{z}}du = -df\partial_{\bar{z}}\bar{f}du \quad (6.188)$$

Unter Berücksichtigung von $df = fc$ überprüft man durch Einsetzen, dass die bosonische Komponente von Gleichung (6.182) damit erfüllt ist. Die η -Komponente von Gleichung (6.182) wird zu:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}}\bar{f} \\ 0 \end{pmatrix} h^1 + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} \partial_{\bar{z}}h^1 + \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}}c & \partial_{\bar{z}}(c\bar{f}) \\ f\partial_{\bar{z}}c & f\partial_{\bar{z}}(c\bar{f}) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} h^1 \right] \\ & + \begin{pmatrix} -\partial_{\bar{z}}(c\bar{f}gc) & -\partial_{\bar{z}}(c\bar{f}gc\bar{f}) \\ -f\partial_{\bar{z}}(c\bar{f}gc) + g\partial_{\bar{z}}c & -f\partial_{\bar{z}}(c\bar{f}gc\bar{f}) + g\partial_{\bar{z}}(c\bar{f}) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} h^0 \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.189)$$

Betrachten wir wie mittlerweile üblich die Differenz zwischen der mit f multiplizierten ersten Komponente dieser Gleichung und der zweiten Komponente, so erhalten wir:

$$\partial_{\bar{z}}(d^{-1}h^1) = -gc\partial_{\bar{z}}\bar{f}du \quad (6.190)$$

Wenn wir annehmen, dass $g \neq 0$ und $\partial_{\bar{z}}\bar{f} \neq 0$ müssen wir annehmen, dass

$$u = fu'(t, z) \quad (6.191)$$

und mit $df = fc$ sowie Formel (6.187) sieht man, dass wir als Lösung folgendes erhalten:

$$h^1 = dgc u' + dv(t, z) \quad (6.192)$$

Dies löst auch die einzelnen Komponenten von Gleichung (6.189). Jedoch wissen wir aus Kapitel 6.2.2 (Gleichung (6.155)), dass wir im allgemeinen aus u keinen Faktor f abspalten können, so dass die Annahme (6.191) nicht für alle Fälle gerechtfertigt ist. Aber fahren wir erst einmal fort.

Kommen wir nun zu der verbleibenden Gleichung des Dressing-Verfahrens, welche uns die Zeitabhängigkeit von u und v festlegt. Mit $z_2 = 0$ lautet diese:

$$\partial_t \tilde{T} = 2i(\partial_z P)\tilde{T} \quad (6.193)$$

Der bosonische Anteil lautet:

$$\begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} \partial_t h^0 = 2i \begin{pmatrix} \partial_z c & \partial_z c \bar{f} \\ \partial_z (fc) & \partial_z (fc) \bar{f} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} h^0 \right] \quad (6.194)$$

Betrachten wir wieder die übliche Differenz, so erhalten wir

$$(f\bar{f} + 1) \partial_t du = -2i \partial_z f \quad (6.195)$$

welches wir mit

$$u = -2i(\partial_z ft + w(z)) \quad (6.196)$$

lösen. Die η -Komponente von Gleichung (6.193) lautet:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} \partial_t h^1 = & 2i \begin{pmatrix} -\partial_z (c\bar{f}gc) & -\partial_z (c\bar{f}gc)\bar{f} \\ -\partial_z (fc\bar{f}gc) + \partial_z (gc) & -\partial_z (fc\bar{f}gc)\bar{f} + \partial_z (gc)\bar{f} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} h^0 \right] \\ & + 2i \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_z c & \partial_z c \bar{f} \\ \partial_z (fc) & \partial_z (fc) \bar{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix}}_{=0} h^1 \end{aligned} \quad (6.197)$$

Betrachten wir wieder die bekannte Differenz, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2i} d^{-1} \partial_t h^1 = \frac{1}{2i} \partial_t (gcu' + v) = \partial_z fc\bar{f}g + gc\bar{f}\partial_z f - \partial_z g \quad (6.198)$$

Um dies zu lösen multiplizieren wir von links mit f um $\partial_t u' f = \partial_t u = -2i \partial_z f$ benutzen zu können, und wir erhalten:

$$\partial_t v(t, z) f = 2i(-\partial_z gf + 2g\partial_z f - \partial_z fcg) \quad (6.199)$$

Falls $\partial_z f \neq 0$ so ist c eine Funktion von \bar{z} und damit ist diese Gleichung nur lösbar, falls entweder $\partial_z f = 0$ oder $g = 0$ gilt (In Kapitel 6.2.2 war $f = z, g = 0$).

- Für $g = 0$ lösen wir Gleichung (6.199) mit

$$v(t, z) = -2iv'(z) \quad (6.200)$$

und erhalten für \tilde{T} :

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} \\ -1 \end{pmatrix} \frac{-2i}{1 + f\bar{f}} ((\partial_z ft + w) + v'\eta) \quad (6.201)$$

Wobei w eine beliebige bosonische und v' eine beliebige fermionische Funktion von z ist. Dies reproduziert unser Ergebnis aus Kapitel 6.2.2

- Für $\partial_z f = 0$ sind $f, \bar{f}, c = d \in \mathbb{C}$ und wir lösen Gleichung (6.199) mit

$$v(t, z) = -2i(\partial_z gt + v'(z)) \quad (6.202)$$

und erhalten für \tilde{T} :

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ f + g\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{f} - \bar{g}\bar{\eta} \\ -1 \end{pmatrix} \frac{-2i}{1 + f\bar{f}} \left\{ w + (\partial_z g t + v')\eta + (g + cf\bar{g}w)\bar{\eta} \right. \\ \left. + (-c^2 g\bar{g}w + cf\bar{g}(\partial_z g t + v'))\eta\bar{\eta} \right\} \quad (6.203)$$

Wobei wieder w eine beliebige bosonische und v' eine beliebige fermionische Funktion von z ist. In diesem Fall findet im bosonischen Anteil von \tilde{T} (und damit auch im bosonischen Anteil von \tilde{P} und Φ) keine Zeitentwicklung statt.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben mithilfe des linearen Systems supersymmetrische Rang-1- und Rang-2-Solitonen konstruiert und für den Rang-1 Fall die Energie bestimmt. Es hat sich herausgestellt, dass die Supersymmetrie in den hier betrachteten (und weiteren in dieser Arbeit nicht genannten) Konfigurationen keine Auswirkung auf die Energie hat, obwohl sich die Energiedichte geändert hat. Weiterhin hat sich gezeigt, dass die Supersymmetrie keine Auswirkung auf den bosonischen Anteil der Solitonen hat.

Es wäre interessant zu untersuchen ob komplexere statische Solitonen mit mehr Graßmannparametern eine Änderung der Energie bewirken, wobei dies wahrscheinlich nur mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen wie Maple möglich ist, welches leider noch keine Erzeuger-/Vernichter-Algebra mit anti-kommutierenden Parametern unterstützt. Falls man keine Auswirkung der Supersymmetrie auf die Energie findet, wäre ein Beweis dafür, dass es keine Auswirkung geben kann wünschenswert.

Weiterhin ist noch die Frage offen wie die Energiedichte im zeitabhängigen supersymmetrischen Fall aussieht. Des weiteren kann man noch untersuchen, was im supersymmetrischen Fall mit $1 < \mathcal{N} \leq 4$, bei dem wir weitere fermionische Koordinaten η_i^α haben, passiert und welche Auswirkung eine Deformation der Antikommutator-Relationen auf $\{\eta^1, \eta^2\} = \Xi$ hätte. Leider fehlte uns auch hierfür die Energiedichte.

A Anhang

A.1 $U(2)$ -Soliton von Kapitel 6.2.2

Wir berechnen nun das Soliton aus Kapitel 6.2.2 mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \quad \tilde{T} = T + T^\perp \frac{-2i}{1 + z\bar{z} + 2\theta} \left(\underbrace{(t + H(z))}_{=f} + k(z) \underbrace{\nu\eta}_{=\beta} \right) \quad (\text{A.1})$$

Wir berechnen nun den Projektor \tilde{P} . Dafür benötigen wir:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^\dagger \tilde{T} &= 1 + N + (\bar{f} + \bar{k}\bar{\beta}) c_1 \underbrace{(1 + N_1)}_{c_1^{-1}} c_1 (f + k\beta) \\ &= 1 + N + \bar{f}c_1f + \bar{f}c_1k\beta + \bar{k}c_1f\bar{\beta} + \bar{k}c_1k\beta\bar{\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Mit

$$X = (1 + N + \bar{f}c_1f)^{-1} \quad (\text{A.3})$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} &= X - X\bar{f}c_1kX\beta - X\bar{k}c_1fX\bar{\beta} \\ &\quad + X(-\bar{k}c_1k + \bar{f}c_1kX\bar{k}c_1f + \bar{k}c_1fX\bar{f}c_1k)X\beta\bar{\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Hilfreich ist die Abkürzung Y mit:

$$Y = (1 - c_1fX\bar{f}) \quad (\text{A.5})$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} &= X - X\bar{f}c_1kX\beta - X\bar{k}c_1fX\bar{\beta} \\ &\quad + X(-\bar{k}Yc_1k + \bar{f}c_1kX\bar{k}c_1f)X\beta\bar{\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Weiterhin benötigen wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} (\bar{f} + \bar{k}\bar{\beta}) &= X\bar{f} - X\bar{f}c_1kX\bar{f}\beta + X\bar{k}Y\bar{\beta} \\ &\quad - X\bar{f}c_1kX\bar{k}Y\beta\bar{\beta} - X\bar{k}Yc_1kX\bar{f}\beta\bar{\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} (f + k\beta) \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} (\bar{f} + \bar{k}\bar{\beta}) &= fX\bar{f} + \bar{Y}kX\bar{f}\beta + fX\bar{k}Y\bar{\beta} \\ &\quad + \bar{Y}kX\bar{k}Y\beta\bar{\beta} + fX\bar{k}Yc_1kX\bar{f}\beta\bar{\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Führen wir die Abkürzungen

$$A = \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} \quad B = \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} (\bar{f} + \bar{k}\bar{\beta}) c_1 \quad C = c_1 (f + k\beta) \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} (\bar{f} + \bar{k}\bar{\beta}) c_1 \quad (\text{A.9})$$

ein so berechnen wir für das Soliton $\Phi = (1 - 2P)(1 - 2\tilde{P}) = 1 - 2(P + \tilde{P} - 2\tilde{P}P)$:

$$\begin{aligned}
P + \tilde{P} - 2\tilde{P}P &= T \frac{1}{T^\dagger T} T^\dagger + \left\{ (T + T^\perp c_1(f + k\beta)) A (T^\dagger + (\bar{f} + \bar{k}\bar{\beta}) c_1 T^{\perp\dagger}) \right\} \\
&\quad - 2 \left\{ (T + T^\perp c_1(f + k\beta)) A T^\dagger \right\} \\
&= T \frac{1}{T^\dagger T} T^\dagger + (T + T^\perp c_1(f + k\beta)) A (\bar{f} + \bar{k}\bar{\beta}) c_1 T^{\perp\dagger} \\
&\quad - (T + T^\perp c_1(f + k\beta)) A T^\dagger \\
&= T \left\{ \frac{1}{T^\dagger T} - A \right\} T^\dagger + T B T^{\perp\dagger} + T^\perp C T^{\perp\dagger} - T^\perp B^\dagger T^\dagger \\
&= T \left\{ \frac{1}{T^\dagger T} - \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} \right\} T^\dagger + T \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} (\bar{f} + \bar{k}\bar{\beta}) c_1 T^{\perp\dagger} \\
&\quad + T^\perp c_1(f + k\beta) \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} (\bar{f} + \bar{k}\bar{\beta}) c_1 T^{\perp\dagger} - T^\perp c_1(f + \beta K) \frac{1}{\tilde{T}^\dagger \tilde{T}} T^\dagger
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Literatur

- [Popov] Popov, Alexander D. und Saemann Christian; „On Supertwistors, the Penrose-Ward Transform and $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills Theory“; Adv.Theor.Math.Phys. 9 (2005) 931-998; hep-th/0405123
- [LeChi] Lechtenfeld, Olaf und Popov, Alexander D.; „Noncommutative Solitons in a Supersymmetric Chiral Model in 2+1 Dimensions“; JHEP 0706 (2007) 065 ; arXiv:0704.0530
- [LeNon] Lechtenfeld, Olaf und Popov, Alexander D.; „Noncommutative Multi-Solitons in 2+1 Dimension“; JHEP 0111 (2001) 040; hep-th/0106213
- [LeSca] Lechtenfeld, Olaf und Popov, Alexander D.; „Scattering of noncommutative solitons in 2+1 dimensions“; Phys. Lett. B 523 (2001) 178-184; hep-th/0108118

Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld für die Möglichkeit bedanken, unter seiner Betreuung diese Arbeit anfertigen zu können und auch für die zahlreichen hilfreichen Diskussionen.

Bei Herrn Prof. Dr. Norbert Dragon möchte ich mich dafür bedanken, dass er sich als Korreferent zur Verfügung gestellt hat.

Des weiteren möchte ich mich bei meinen Eltern Adolf und Hannelore Gutschwager sowie bei meinem Bruder Tobias Gutschwager dafür bedanken, dass sie mir mein Studium der Mathematik und Physik ermöglicht haben und mich immer unterstützten.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Christian Gutschwager - Hannover den 20.08.2007