# Stichworte und Ergänzungen zu Mathematische Methoden der Physik

Norbert Dragon

Für Hinweise auf Unverständliches oder Falsches, insbesondere auch auf Tippfehler, bin ich dankbar.

Dieser Text wurde mit $\LaTeX\,2_\epsilon$ und der KOMA-Script-Klasse scrbook, am 26. September 2016 gesetzt.

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# 1 Vektorräume

Vektorräume $\mathcal{V}$ sind Mengen, deren Elemente, die Vektoren, man sinnvoll addieren und vervielfältigen kann.

Die Formulierung: „Ein Vektor ist eine Größe, die Richtung und Betrag hat." beschreibt Vektoren wie zu Beispiel Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Stromdichten, Kraft, Impuls und Beschleunigungen scheinbar anschaulicher. Aber sie lenkt die Aufmerksamkeit auf Eigenschaften, die nicht allen Vektoren zukommen – der Nullvektor hat keine Richtung –, die sich bei Addition unübersichtlich verhalten, und die Größen besitzen können, ohne Vektoren zu sein. So haben Drehungen $D_{\alpha n}$ eine Richtung $n$, die Drehachse, und den Betrag des Drehwinkels $\alpha$. Aber da man Drehungen nicht sinnvoll addieren und vervielfältigen kann, $D_{2\pi n} = D_0$, sind sie keine Vektoren.

Viele Größen werden auf dieselbe Art addiert und vervielfältigt wie Ortsvektoren, beispielsweise Einkaufszettel oder Warenpreise. Man kann sie genauso als Vektoren begreifen wie Parallelogramme und Stromdichten, die Parallelogramme durchströmen.

Der Begriff Vektor ist nicht daran gebunden, daß wir Vektoren in einer zweidimensionalen Ebene oder in einem dreidimensionalen Raum anschauen können. So ist bei Ereignissen oder bei Verabredungen nicht nur wichtig, wo sie stattfinden, sondern auch wann. Sie werden also durch vier Angaben, drei Ortsangaben und die zugehörige Zeit bezeichnet. Diese vierdimensionale Menge von Ereignissen, die Raumzeit, kann in Abwesenheit von Gravitation als Vektorraum begriffen werden. Verschiebungen in dieser Raumzeit, Vierergeschwindigkeiten, Viererbeschleunigungen und Viererimpulse bilden zugehörige vierdimensionale Vektorräume, mit denen es sich genauso rechnen und denken läßt wie mit dreidimensionalen Vektoren.

Daß dabei dem einen oder anderen die geometrische Anschauung abhanden kommt, sollte man nicht überschätzen. Viele geometrische Sachverhalte in höherdimensionalen Räumen werden schon in zweidimensionalen Grundrissen, Längs- und Querschnitten oder Minkowskidiagrammen sichtbar und verständlich.

Die reellen oder komplexen Funktionen eines Bereichs bilden unendlichdimensionale Vektorräume. Auch sie kann man geometrisch begreifen. Wenn man eine Funktion durch einen einfacheren Ausdruck nähern will, bewertet man die Güte der Näherung mit der Summe der Quadrate der Fehler und verwendet im Raum der Funktionen den gleichen Abstand, $c^2 = a^2 + b^2$, wie ihn Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke formulierte. Im unendlichdimensionalen Raum der Funktionen kann man wie in Kapitel 17 sinnvoll davon reden, daß zwei Funktionen weit voneinander entfernt sind oder daß sie zueinander senkrecht sind.

Keine Vektoren sind zum Beispiel die Verschiebungen auf einem Zylinder oder einer Kugeloberfläche, die Steigungen von Straßen oder die Temperaturen von Flammen. Eine Kugeloberfläche ist keine Ebene, 100 Prozent Steigung und 100 Prozent Steigung ergibt nicht 200 Prozent Steigung, und wer mit einer Kerze eine zweite anzündet, verdoppelt nicht die Temperatur.

## Mathematische Struktur von Vektorräumen

Die mathematischen Strukturen von Vektorräumen sind kinderleicht. Jedes Kind kann aus zwei Einkaufszetteln einen zusammenschreiben oder das doppelte von dem besorgen, was aufgeschrieben worden ist. Dabei hat es die grundlegenden Rechenoperationen in Vektorräumen angewendet, die Addition und Vervielfältigung. Sie genügen für alle Vektoren $u, v$ und $w$ und alle Zahlen $\lambda$ und $\kappa$ (in der Physik reell oder komplex) den Regeln [1]

| | | |
|---|---|---|
| $u + v = v + u$ | Kommutativität (Parallelogramm) | (1.1) |
| $(u + v) + w = u + (v + w)$ | Assoziativität, | (1.2) |
| $u + 0 = u$ | Existenz eines Nullvektors $0$, | (1.3) |
| $u + (-u) = 0$ | Existenz des entgegengesetzten Vektors, | (1.4) |
| $\lambda\,(\kappa\, u) = (\lambda\,\kappa)\, u\ ,\ 1u = u$ | Einfaches und Vielfaches von $u$, $\neq$ Torus | (1.5) |
| $(\lambda + \kappa)\, u = \lambda\, u + \kappa\, u$ | Distributivgesetz, | (1.6) |
| $\lambda\,(u + v) = \lambda\, u + \lambda\, v$ | Strahlensatz. | (1.7) |

Nicht zu den mathematischen Operationen in Vektorräumen gehört die Division, auch wenn in einigen Fällen Verhältnisse von Vektorkomponenten (6.25, 9.18) physikalische Bedeutung haben.

## Basis, Komponenten

Inhalte von Einkaufswagen oder Einkaufslisten

$$w = 2 \text{ kg Mehl } + 5 \text{ kg Zucker } + 1{,}2 \text{ Pfd Kartoffeln } + \dots$$

oder Preise für Waren in €

$$u = 0{,}36 \text{ pro kg Mehl } + 1{,}48 \text{ pro kg Zucker } + 0{,}85 \text{ pro Pfund Kartoffeln } + \dots$$

sind alltäglich auftretende Vektoren in hochdimensionalen Vektorräumen.

Der Vektor $w = e_1\, w^1 + e_2\, w^2 + \dots$ ist eine Linearkombination (also eine Summe von Vielfachen) von Basisvektoren $e_1$, $e_2 \dots$ mit Komponenten $w^1$, $w^2 \dots$ Dabei ist $e_1 = 1$ kg Mehl, $e_2 = 1$ kg Zucker, … die Basis und $(w^1, w^2, \dots) = (2, 5, \dots)$ die Komponenten. Die hochgestellten Zahlen (gelesen „w eins, w zwei,…“) bezeichnen in dieser Notation nicht Exponenten, sondern numerieren Komponenten, untenstehende Zahlen numerieren Basisvektoren. Die Notation ist nützlich, solange Exponenten nicht auftreten oder aus dem Zusammenhang klar ist, ob die zweite Komponente des Vektors $w$ oder sein Längenquadrat gemeint ist.

Es ist ungewöhnlich, aber für die Matrixrechnung sehr praktisch, die Komponenten $w^1, w^2 \dots$ rechts von den Basisvektoren $e_1, e_2 \dots$ zu notieren. Wegen des Druckbildes schreiben wir die Komponenten von Vektoren im laufenden Text als Zeilen, auch wenn wir sie bei Matrixmultiplikation in Spalten anordnen.

[1] $\lambda$ und $\kappa$ sind die griechischen Buchstaben lambda und kappa.

Bei der Addition und skalaren Multiplikation von Vektoren addieren und vervielfältigen sich die Komponenten,

$$
\begin{aligned}
u + w &= (e_1\, u^1 + e_2\, u^2 + \ldots) + (e_1\, w^1 + e_2\, w^2 + \ldots)\\
&\overset{(1.2)}{=} (e_1\, u^1 + e_1\, w^1) + (e_2\, u^2 + e_2\, w^2) + \ldots\\
&\overset{(1.6)}{=} e_1\,(u^1 + w^1) + e_2\,(u^2 + w^2) + \ldots\ ,\\
(u+w)^1 &= u^1 + w^1\ , \quad (u+w)^2 = u^2 + w^2\ , \quad \ldots
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda\, u = \lambda\,(e_1\, u^1 + e_2\, u^2 + \ldots) &\overset{(1.7)}{=} e_1\,\lambda\, u^1 + e_2\,\lambda\, u^2 + \ldots\\
(\lambda\, u)^1 = \lambda\, u^1\ , \quad (\lambda\, u)^2 &= \lambda\, u^2\ , \quad \ldots
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Statt die Komponenten einzeln anzugeben, verwenden wir einen Index $i$, der die Werte annehmen kann, mit denen wir die Basisvektoren abzählen und notieren die Gleichung als

$$(u+w)^i = u^i + w^i\ , \quad (\lambda\, u)^i = \lambda\, u^i\ , \quad i = 1, 2 \ldots\ . \tag{1.10}$$

Eine Gleichung in Indexnotation ist genau dann richtig, wenn sie für jeden Wert, den der Index $i$ annehmen kann, erfüllt ist. Beispielsweise ist die Vektorgleichung $u = \lambda\, w$ genau dann richtig, wenn jede Komponente $u^i = \lambda\, w^i$ erfüllt. Dieselbe Gleichung können wir auch als $u^j = \lambda\, w^j$ schreiben, wobei $j$ ein Index ist, der jeden der Werte annehmen kann, mit denen wir die Basisvektoren abzählen. Was eine Gleichung mit einem Index besagt, ändert sich nicht, wenn wir ihn in allen Termen gleich umbenennen.

Der Vektor $w = \sum_i e_i\, w^i = e_1\, w^1 + e_2\, w^2 + \ldots$ ist eine Summe von Vielfachen der Basisvektoren. In ihr tritt der Summationsindex $i$ doppelt auf, einmal oben und einmal unten, und durchläuft den Laufbereich der möglichen Werte. Die Summe hängt nicht vom Namen $i$ des Summationsindexes ab, $\sum_i e_i\, w^i = \sum_j e_j\, w^j$ . Wir verwenden als Kurzschreibweise die Einsteinsche Summationskonvention: Ein Indexpaar bezeichnet auch ohne Summenzeichen die Anweisung, über den Laufbereich des Indexes zu summieren,

$$e_i\, w^i := e_1\, w^1 + e_2\, w^2 + e_3\, w^3 + \ldots \tag{1.11}$$

Für einen doppelt vorkommenden Index kann kein Wert eingesetzt werden, denn das Indexpaar steht für die Summationsanweisung, über seinen Laufbereich zu summieren.

In Indexnotation kommt in einer Gleichung jeder Index, der nicht paarweise auftritt, in jedem Term in gleicher Höhe vor: Die Gleichung $u^i = a$ , also $u^1 = a$, $u^2 = a \ldots$, ist meist nicht gemeint, sondern zeigt normalerweise einen Fehler an.

## Dimension und lineare Abhängigkeit

Vektoren $e_1, e_2 \ldots e_n$ heißen linear unabhängig, wenn jede Linearkombination $e_i\, \lambda^i$ (Achtung Summe!) nur dann verschwindet, wenn alle Koeffizienten $\lambda^i$, $i = 1, 2 \ldots$ Null sind.

Ein Vektorraum $\mathcal{V}$ ist $n$-dimensional, $\dim \mathcal{V} = n$, wenn er $n$, nicht aber $n+1$, linear unabhängige Vektoren $e_1, e_2 \ldots e_n$ enthält. Jedes geordnete $n$-Tupel von linear unabhängigen Vektoren $e_1, e_2 \ldots e_n$ heißt eine Basis.

Jedes Element $w$ des $n$-dimensionalen Raumes $\mathcal{V}$ kann als Linearkombination einer Basis $e_1, e_2 \ldots e_n$ geschrieben werden, $w = e_i\, w^i$. Dabei sind die Komponenten $w^i$ eindeutig. Denn $w, e_1, e_2 \ldots e_n \in \mathcal{V}$ sind linear abhängig, $w\,\lambda + e_i\,\lambda^i = 0$, wobei $\lambda \neq 0$, sonst wären schon $e_1, e_2, \ldots e_n$ linear abhängig. Also gilt $w = e_i\, w^i$ mit $w^i = -\lambda^i/\lambda$. Ist zudem $w = e_i\, w'^{\,i}$, so gilt $0 = w - w = e_i\, w^i - e_i\, w'^{\,i} = e_i\,(w^i - w'^{\,i})$, also $w^i = w'^{\,i}$ für $i = 1, 2 \ldots n$, da die Basisvektoren $e_1, e_2 \ldots e_n$ linear unabhängig sind.

Bei gewählter Basis $e_1, e_2 \ldots e_n$ kann jeder Vektor $w$ durch das $n$-Tupel seiner Komponenten $w^i$ angegeben werden: $\mathcal{V}$ ist isomorph (in den betrachteten Strukturen gleich) zu $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Auch wenn Vektorräume so verschieden sein mögen wie Waren und Preise, was ihre Addition und skalare Multiplikation angeht, sind sie alle einander gleich, wenn ihre Dimensionen übereinstimmen.

## Ort und Geschwindigkeit

Orte können in drei Richtungen verschoben werden. Die hintereinander ausgeführten Translationen $\vec{a}$ bilden einen dreidimensionalen, reellen Vektorraum,

$$\vec{a} = \vec{e}_i a^i\ , \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}\ , \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \tag{1.12}$$

wobei $\vec{e}_1$ die Verschiebung in $x$-Richtung, $\vec{e}_2$ die Verschiebung in $y$-Richtung und $\vec{e}_3$ die Verschiebung in $z$-Richtung um eine Einheitslänge bezeichnet und $+$ für Hintereinanderausführen steht.

Das ist ein mathematisches Modell der Wirklichkeit: der Raum ist dreidimensional, ist kein Torus, hat keine Torsion, keine Krümmung und keine Löcher. Anderes ist denkbar (Allgemeine Relativitätstheorie, string-Theorie) und kann sich als richtig erweisen.

Im Ortsraum gehört zu jedem Paar von Punkten $A$ und $B$ *genau eine* Translation $\overrightarrow{AB}$, die $A$ nach $B$ verschiebt. Wählt man einen Punkt $O$, den Ursprung, dann kann man jeden Punkt $A$ durch die Translation $\overrightarrow{OA}$ bezeichnen, Sie heißt Ortsvektor. Ortsvektoren hängen von der Wahl des Ursprungs ab, Differenzvektoren $\overrightarrow{AB}$ nicht.

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} \\
\overrightarrow{O'B} - \overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Ein Punktteilchen durchläuft mit der Zeit $t$ seine Bahnkurve $\vec{f}$. Sie ist eine Abbildung der Zeit, die von einer Startzeit $\underline{t}$ zur Ankunftszeit $\overline{t}$ zunimmt, $I = \{t : \underline{t} \leq t \leq \overline{t}\}$, in den Ortsraum,

$$\text{Kurve } \vec{f}\colon \begin{cases} I \subset \mathbb{R} & \to \quad \mathcal{V} \\ \quad t & \mapsto \quad \vec{f}(t) = \vec{e}_i\, f^i(t) \end{cases} \ . \tag{1.14}$$

Glatte Bahnen können differenziert werden. Ihre Ableitung nach der Zeit ist die Geschwindigkeit,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{f}}{dt} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\vec{f}(t+\epsilon) - \vec{f}(t)}{\epsilon}\ . \tag{1.15}$$

Falls die Basisvektoren zeitunabhängig sind, sind die Komponenten der Geschwindigkeit die Zeitableitungen der Komponentenfunktionen der Bahn,

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{e}_i\, f^i) = \vec{e}_i \frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}t} \ . \tag{1.16}$$

Sei $\vec{f}_O$ die Bahn eines bewegten Ursprungs $O$ relativ zu einem ruhenden Ursprung $O'$ und gebe $\vec{f}$ den Verschiebungsvektor vom bewegten Ursprung zu einem Teilchen. Es hat bezüglich $O$ die Geschwindigkeit $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{f}/\mathrm{d}t$ und durchläuft bezüglich des ruhenden Ursprungs $O'$ die Bahn $\vec{f}_O + \vec{f}$ mit der Gesamtgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{\text{Gesamt}}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\vec{f}(t+\epsilon) + \vec{f}_O(t+\epsilon) - (\vec{f}(t) + \vec{f}_O(t))}{\epsilon} = \vec{v}(t) + \vec{v}_O(t) \ . \tag{1.17}$$

Also bilden Geschwindigkeiten einen Vektorraum.

Genau genommen ist diese Geschwindigkeitsaddition falsch. Sie unterstellt, daß die Zeit $t$ für den bewegten Ursprung und den ruhenden Ursprung gleich ist. Aber Zeit ist, was Uhren messen, und verschieden bewegte Uhren ordnen, wie wir noch sehen werden, denselben Ereignissen verschiedene Zeiten zu.

## Dualraum $\mathcal{V}^*$

Inhalte von Einkaufswagen bilden einen Vektorraum $\mathcal{V}$. Preise der Waren bilden einen dazugehörigen, aber anderen Vektorraum $\mathcal{V}^*$. Man kann Preise mit Zahlen, etwa der Mehrwertsteuer 0,19, multiplizieren und Kostenanteile, etwa für Transport und Großhandel, addieren.

Preise sind lineare Abbildungen von Waren: Der Preis in €,

$$p = 0{,}36 \ \text{ pro kg Mehl } + 1{,}48 \ \text{ pro kg Zucker } + 0{,}85 \ \text{ pro Pfund Kartoffeln} \ ,$$

angewendet auf den Warenkorb

$$w = 2 \text{ kg Mehl } + 5 \text{ kg Zucker } + 1{,}2 \text{ Pfd Kartoffeln} \ ,$$

ergibt die Zahlung

$$p(w) = 0{,}36 * 2 + 1{,}48 * 5 + 0{,}85 * 1{,}2 = 9{,}14 \ .$$

Die Zahlung $p(w)$ ist linear im Wageninhalt, $w, x \in \mathcal{V}$,

$$p(w + x) = p(w) + p(x) \ , \quad p(\lambda\, w) = \lambda\, p(w) \ . \tag{1.18}$$

Ebenso bewirkt jede (räumlich konstante) Kraft $F$ eine lineare Abbildung von Verschiebungen um $\vec{x} = \vec{e}_i x^i$ auf die dabei verrichtete Arbeit $F : \vec{x} \mapsto F_i\, x^i$, $F(\vec{e}_i) = F_i$.

Der Dualraum $\mathcal{V}^*$ ist die Menge der linearen Abbildungen von $\mathcal{V}$ in die reellen (oder komplexen) Zahlen. Im Dualraum sind Addition und Vervielfachung von $p$ und $q \in \mathcal{V}^*$ durch die Addition und Vervielfachung der Funktionswerte erklärt,

$$(p + q)(w) = p(w) + q(w) \ , \quad (\lambda\, p)(w) = \lambda\, p(w) \ . \tag{1.19}$$

Summen und Vielfache linearer Abbildungen sind lineare Abbildungen.

Jede lineare Abbildung $p$ eines $n$-dimensionalen Vektorraumes $\mathcal{V}$ ist durch ihre Wirkung auf eine Basis $e_1, e_2 \dots e_n$ ,

$$p(e_i) = p_i \tag{1.20}$$

festgelegt. Sei nämlich $w = e_i\, w^i$ ein beliebiger Vektor aus $\mathcal{V}$, dann gilt

$$p(w) = p(e_i\, w^i) = p(e_i)\, w^i = p_i\, w^i = p_1\, w^1 + p_2\, w^2 + \dots \ . \tag{1.21}$$

Betrachte bei gegebener Basis $e_1, e_2 \dots e_n$ die linearen Abbildungen $f^1, f^2 \dots f^n \in \mathcal{V}^*$, die jeden Vektor $w \in \mathcal{V}$ auf seine erste, zweite … $n$-te Komponente abbilden,

$$f^i(w) = w^i \ , \quad f^i(e_j) = \delta^i{}_j \ , \tag{1.22}$$

$$\delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases} \ . \tag{1.23}$$

Das hierbei auftretende Kronecker-Delta $\delta^i{}_j$ hat den Wert Eins oder Null, je nachdem, ob der Wert von $i$ mit dem Wert von $j$ übereinstimmt,

$$\delta^1{}_1 = \delta^2{}_2 = \delta^3{}_3 \dots = 1 \ , \quad \delta^1{}_2 = \delta^2{}_1 = \delta^1{}_3 = \dots = 0 \ . \tag{1.24}$$

Summen mit einem Kronecker-Delta vereinfachen sich. Es hat ja die Summe $\sum_j \delta^i{}_j\, a^j$ nur einen nichtverschwindenden Summanden, weil $\delta^i{}_j$ verschwindet, wenn $j$ die Werte durchläuft, die vom Wert von $i$ verschieden sind. Wenn der Wert von $j$ den Wert von $i$ durchläuft, hat $\delta^i{}_j$ den Wert 1, demnach ist $\sum_j \delta^i{}_j\, a^j = \sum_{j=i} \delta^i{}_j\, a^j = a^i$.

$$\begin{aligned} \delta^1{}_j a^j &= \delta^1{}_1\, a^1 + \delta^1{}_2\, a^2 + \delta^1{}_3\, a^3 + \dots = 1\, a^1 + 0\, a^2 + 0\, a^3 + \dots = a^1 \ , \\ \delta^2{}_j a^j &= \delta^2{}_1\, a^1 + \delta^2{}_2\, a^2 + \delta^2{}_3\, a^3 + \dots = 0\, a^1 + 1\, a^2 + 0\, a^3 + \dots = a^2 \ , \quad \dots \end{aligned} \tag{1.25}$$

$$\delta^i{}_j\, a^j = a^i \ . \tag{1.26}$$

Zum Formelbild: bei einer Summe von Komponenten $a^j$ mit einem Kronecker-Delta $\delta^i{}_j$ verschwinden das Kronecker-Delta und das Summationsindexpaar. An die Stelle des Summationsindexes tritt bei $a$ der andere Index von $\delta$, als wären $\delta$ und das Summationsindexpaar eine Angelschnur, die man von $a$ aus einholt: sie verschwindet auf der Rolle und der Fisch, der an der Schnur hängt, der Index $i$, landet an Bord.

Der Sachverhalt gilt unverändert, wenn statt $a^j$ Größen summiert werden, die mit weiteren Indizes abgezählt werden, beispielsweise gilt $\delta^i{}_j\, \delta^j{}_k = \delta^i{}_k$.

Eine Fallgrube ist die Summe $\delta^i{}_i$! Sie ergibt die Größe des Laufbereiches des Indexes $i$, dessen Werte die Basis abzählen,

$$\delta^i{}_i = \delta^1{}_1 + \delta^2{}_2 + \dots = 1 + 1 + \dots = n = \text{Laufbereich} = \dim \mathcal{V} \ . \tag{1.27}$$

Jede lineare Abbildung $p \in \mathcal{V}^*$ ist eine Linearkombination $p = p_i\, f^i$ der Abbildungen $f^i$,

$$p_i\, f^i(w) = p_i\, w^i = p(w) \ . \tag{1.28}$$

Die Abbildungen $f^1, f^2 \dots f^n$ sind linear unabhängig, denn die Abbildung $p_i\, f^i$ verschwindet genau dann, wenn $p_i\, f^i(w) = p_i\, w^i$ für alle $w \in \mathcal{V}$ verschwindet, also falls alle $p_i = 0$ sind. Demnach bilden die $f^i$ eine Basis des Dualraumes $\mathcal{V}^*$, die Dualbasis zu $e_i$.

Die Komponenten $p_i$ eines Dualvektors $p = p_i f^i$ numerieren wir mit einem unteren Index, die Vektoren $f^i$ der Dualbasis mit einem oberen.

Der Dualraum $(\mathcal{V}^*)^*$ eines endlichdimensionalen Dualraumes $\mathcal{V}^*$ kann mit dem ursprünglichen Vektorraum $\mathcal{V}$ identifiziert werden, denn jedes $w \in \mathcal{V}$ definiert die lineare Abbildung $w : p \mapsto w(p) := p(w)$ von $\mathcal{V}^*$ in die reellen (komplexen) Zahlen. Am Dualraum kann man daher wie in einem Spiegel den ursprünglichen Vektorraum erkennen, so wie man das Spiel eines Tennisspielers am Spiel seines Gegners ablesen kann.

## Länge

Viele Vektorräume haben zusätzliche Struktur, nämlich Länge und damit Richtung. Genügt die Länge dem Satz des Pythagoras, so heißen die Vektorräume euklidisch.

Sei $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, und sei $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ihre Summe, die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann gilt in der Euklidischen Ebene, weil dort Flächen und Längen bei Drehen und Verschieben ungeändert bleiben, für ihre Längen $a, b$ und $c$ der Satz des Pythagoras, $c^2 = a^2 + b^2$.

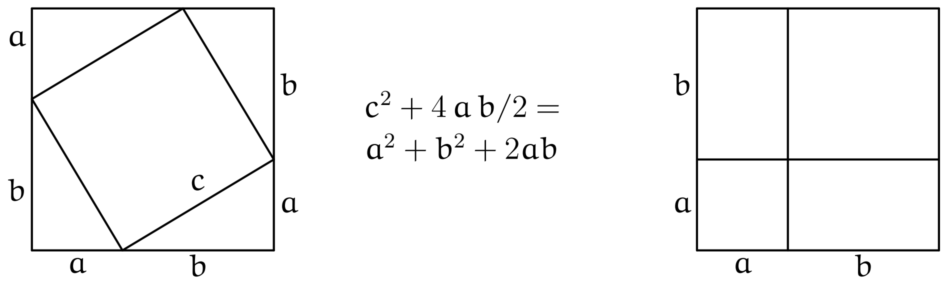



Abbildung 1.1: Satz des Pythagoras

Seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \dots$ eine Orthonormalbasis, das heißt eine Basis aus aufeinander senkrecht stehenden Vektoren mit Einheitslänge, dann hat jeder reelle Vektor $\vec{c} = \vec{e}_i c^i$ das Längenquadrat (dessen Wurzel, die Länge von $\vec{c}$, auch Betrag von $\vec{c}$ heißt)

$$\vec{c}^{\,2} = (c^1)^2 + (c^2)^2 + (c^3)^2 + \dots = c^i c^i \;,\; |\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} \;. \tag{1.29}$$

Aus dem Zusammenhang sollte klar sein, welche hochgestellten Zahlen Komponenten bezeichnen und welche das Quadrat.

Die Funktionen cos und sin sind im rechtwinkligen Dreieck die Kathetenlängen, bezogen auf die Länge der Hypotenuse, als Funktion des Winkels zwischen Ankathete und Hypotenuse,

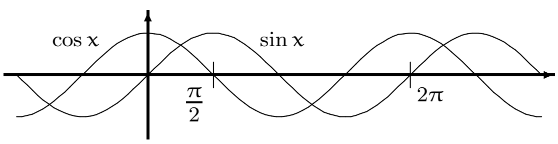



Abbildung 1.2: Sinus und Cosinus

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \;. \tag{1.30}$$

Der Winkel $\alpha$ ist die Länge des Kreisbogens, geteilt durch den Radius. Da ein Kreis mit Radius $r$ einen Umfang $2\pi r$ hat, ist er ein Kreisbogen mit Winkel $2\pi$. Das sind 360 Winkelgrade, demnach ist ein Grad die Zahl

$$360° = 2\pi \ , \quad 1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0174533 \ . \tag{1.31}$$

## Skalarprodukt

Die Länge $c$ der Summe zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel $\delta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ einschließen, (dann liegt $\gamma = \pi - \delta$ der Seite $\vec{a} + \vec{b}$ gegenüber) lesen wir aus Abbildung 1.3 ab.

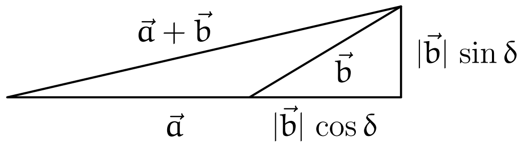



Abbildung 1.3: Länge von $\vec{a} + \vec{b}$

In ihr ist $\vec{a}+\vec{b}$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten der Längen $|\vec{a}| + |\vec{b}|\cos\delta$ und $|\vec{b}|\sin\delta$. Nach dem Satz des Pythagoras und wegen der Summenregel (1.30) gilt der Cosinus-Satz

$$\begin{gathered}(\vec{a} + \vec{b})^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|\cos\delta)^2 + (|\vec{b}|\sin\delta)^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\delta \ , \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b\, \cos\gamma \ .\end{gathered} \tag{1.32}$$

Andererseits ist das Längenquadrat in jeder Orthonormalbasis die Summe der Quadrate der Komponenten (1.29)

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (a^i + b^i)(a^i + b^i) = a^i a^i + b^i b^i + 2a^i b^i = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2a^i b^i \ . \tag{1.33}$$

Also ist die Summe $a^i b^i$ der Produkte der Komponenten $a^i$ und $b^i$ bezüglich einer Orthonormalbasis gleich dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels $\delta$ mal den Beträgen der Vektoren. Diese Summe nennt man das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 + \dots \ , \tag{1.34}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\delta \ , \quad \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \ . \tag{1.35}$$

Den Cosinus des eingeschlossenen Winkels zweier Vektoren kann man mit dem Skalarprodukt (1.34) mit den Grundrechenarten berechnen: Multiplizieren, Addieren und Wurzelziehen beim Berechnen der Beträge.

Das Skalarprodukt zweier von Null verschiedener Vektoren verschwindet genau dann, wenn sie senkrecht zueinander stehen, also einen Winkel von $90° = \pi/2$ einschließen.

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man leicht jeden Vektor $\vec{a}$ in seine Anteile parallel und senkrecht zu einer Richtung $\vec{n}$, $\vec{n}^2 = 1$, zerlegen,

$$\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp \ , \ \vec{a}_\parallel = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{a}) \ , \ \vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{a}) \ . \tag{1.36}$$

Das Skalarprodukt in einem reellen Vektorraum ist reell, symmetrisch und bilinear, das heißt, linear in jedem der beiden Faktoren,

$$\begin{gathered}\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \ , \\ \vec{a} \cdot (\lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}) = \lambda_1 \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda_2 \vec{a} \cdot \vec{c} \ , \ (\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{c}) \cdot \vec{b} = \lambda_1 \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} \cdot \vec{b} \ .\end{gathered} \tag{1.37}$$

Die Bilinearität ist aus (1.34) unmittelbar ersichtlich, während man sie dem Produkt (1.35) der Beträge mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels nicht ansieht.

Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich ist sein Längenquadrat. In einem Euklidischen Vektorraum, nicht aber in der Raumzeit, ist es positiv definit,

$$\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0\ ,\quad \vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0\ . \tag{1.38}$$

Das Skalarprodukt ist eine Differenz von Längenquadraten,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}\big((\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) - (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\big)\ . \tag{1.39}$$

## Metrik

Da $\sqrt{u\cdot u}$ die Länge des Vektors $u$ ergibt, heißt das Skalarprodukt auch Metrik,

$$g : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}\ ,\quad (u,v) \mapsto g(u,v) = u\cdot v\ . \tag{1.40}$$

Sie ist permutationssymmetrisch und bilinear

$$g(u,v) = g(v,u)\ ,\ g(u,v+w) = g(u,v) + g(u,w)\ ,\ g(u,\lambda v) = \lambda\, g(u,v)\ , \tag{1.41}$$

und daher durch ihre Werte für Basisvektoren festgelegt,

$$g(u,v) = g(e_i\, u^i, e_j\, v^j) = g(e_i,e_j)\, u^i v^j = g_{ij}\, u^i v^j\ ,\ g_{ij} = g(e_i,e_j) = g_{ji}\ . \tag{1.42}$$

Die Skalarprodukte der Basisvektoren sind die Komponenten der Metrik $g_{ij} = e_i\cdot e_j$. Hierbei treten zwei Indizes $i$ und $j$ auf, weil wir Paare von Basisvektoren abzählen, die als erstes und als zweites Argument der Metrik auftreten. Die verschiedenen Indizes können unabhängig voneinander Werte annehmen, mit denen wir die Basisvektoren abzählen.

Wenn wir in der Metrik $g(u,v)$ die Summen $u = e_i\, u^i$ und $v = e_i\, v^i$ einsetzen, müssen wir zunächst ein Paar Summationsindizes umbenennen, denn die Summen, aus denen $u$ und $v$ bestehen, sind unabhängig voneinander. Hätten wir fälschlicherweise die Summe $v = e_i\, v^i$ nicht umbenannt, so wäre der undefinierte Ausdruck $g(e_i,e_i)\, u^i v^i$ mit einen vierfach auftretenden Index entstanden, der zum Beispiel den Term $g(e_1,e_2)\, u^1 v^2$ nicht enthält. Ein mehr als zweifach in einem Term auftretender Index zeigt in Indexschreibweise einen Fehler an.

In einem Raum mit Skalarprodukt gehört zu jedem Vektor $u \in \mathcal{V}$ der Dualvektor $\tilde{u} \in \mathcal{V}^*$, die lineare Abbildung, die jedem Vektor $v$ sein Skalarprodukt mit $u$ zuordnet,

$$\tilde{u} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}\ ,\ v \mapsto g(u,v) = g(u, e_j\, v^j) = g(u,e_j)\, v^j \tag{1.43}$$

mit Komponenten $\tilde{u}_j = g(u,e_j) = g_{ij}\, u^i$, $\tilde{u} = g_{ij}\, u^i f^j$. Umgekehrt sind dann die Komponenten von $u$ eine Linearkombination der Komponenten von $\tilde{u}$, $u^i = g^{ik}\tilde{u}_k$. Da $u = e_i\, g^{ik}\tilde{u}_k$ und $\tilde{u}$ eindeutig und invertierbar miteinander zusammenhängen, spart man sich die unterscheidende Notation und läßt das Zeichen ˜ bei den Komponenten weg. Man erkennt an der Indexstellung, ob es sich um die Komponenten des Vektors (oberer Index) oder des dualen Vektors (unterer Index) handelt. Sie hängen durch „Herauf- und Herunterziehen“ des Indexes miteinander zusammen

$$u_j = g_{ji}\, u^i\ ,\ u^i = g^{ik}\, u_k\ . \tag{1.44}$$

Wie man die Koeffizienten $g^{ik}$ der inversen Metrik berechnet, klärt erst (3.73).

## Orthonormalbasis

Ist das Skalarprodukt positiv definit, dann gibt es eine Orthonormalbasis $\vec{e}_i$ (und viele andere mehr). Ihre Vektoren haben Einheitslänge und stehen aufeinander senkrecht,

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \ . \tag{1.45}$$

Das hierbei auftretende Kronecker-Delta $\delta_{ij}$ ist permutationssymmetrisch, $\delta_{ij} = \delta_{j\,i}$, und hat den Wert Eins oder Null, je nachdem, ob der Wert von $i$ mit dem Wert von $j$ übereinstimmt,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases} , \tag{1.46}$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \ldots = 1 \ , \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \ldots = 0 \ .$$

Nur in einer Orthonormalbasis stimmen die Komponenten jedes Vektors $u$ mit denen des zugehörigen Dualvektors überein,

$$u_i = \delta_{ij}\, u^j = u^i \ . \tag{1.47}$$

Sie sind folglich die Skalarprodukte mit den Basisvektoren

$$u_i = u \cdot e_i \ , \ u = e_i\,(e_i \cdot u) \ . \tag{1.48}$$

Die Doppelsumme $g(u,v) = g_{ij}\, u^i\, v^j$, die das Skalarprodukt angibt, vereinfacht sich zur schon bekannten Einfachsumme $g(u,v) = \delta_{ij}\, u^i\, v^j = u^i\, v^i$ (1.29),

$$u \cdot v = u^i\, v^i \ . \tag{1.49}$$

Bisher bestand in unseren Gleichungen jedes Summationsindexpaar aus einem oberen und einem unteren Index. Jeder Index, der nicht zu einem Summationspaar gehörte, trat an jedem Term in gleicher Stellung auf. Bei Komponenten bezüglich einer *Orthonormalbasis* treten auch Summationsindexpaare gleicher Indexstellung auf, wie (1.49) zeigt. Indizes, die nicht paarweise auftreten, können an den verschiedenen Termen wie in $u^i = u_i = \delta_{ij}\, u^j$ oben oder unten vorkommen.

## Dreiecksungleichung

Definiert man durch $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i\, b^i =: \sqrt{a^j\, a^j}\, \sqrt{b^k\, b^k} \cos\delta$ den Winkel $\delta$ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so muß man zeigen, daß der so definierte Cosinus in jedem Fall zwischen $-1$ und $1$ liegt. Dies gilt genau dann, wenn die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \tag{1.50}$$

gilt. Sie ist richtig für $|\vec{b}| = 0$. Für $|\vec{b}| \neq 0$ und $\lambda = -\vec{a} \cdot \vec{b}/|\vec{b}|^2$ betrachtet man

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\vec{a} + \lambda\, \vec{b}|^2 |\vec{b}|^2 = (\vec{a} + \lambda\, \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \lambda\, \vec{b})\, |\vec{b}|^2 = \lambda^2\, |\vec{b}|^4 + 2\lambda\, (\vec{a} \cdot \vec{b})\, |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \\ &= (\lambda\, |\vec{b}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}\,)^2 + |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b}\,)^2 \end{aligned} \tag{1.51}$$

und ist fertig. Wegen $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \leq \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$ folgt die Dreiecksungleichung, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$ . Im Dreieck ist die Verbindung über Eck länger als die gerade Strecke.

## Das Längenquadrat der Raumzeit

In der Raumzeit definieren die Weltlinien von kräftefreien Teilchen und von Lichtpulsen Geraden. Dabei ist die Geschwindigkeit $c$ von Licht im Vakuum unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle. Es gibt nicht schnelleres oder langsameres Licht. Licht überholt nicht Licht! [4]

Die Weltlinien von Lichtpulsen in dieselbe Richtung schneiden sich demnach nicht: sie sind in Raumzeitdiagrammen parallel.

Michelsons und Morleys Messungen zeigen das

**Relativitätsprinzip:** *Im Vakuum läßt sich, wenn man gravitative Effekte vernachlässigt, Ruhe nicht von gleichförmiger Bewegung unterscheiden.*

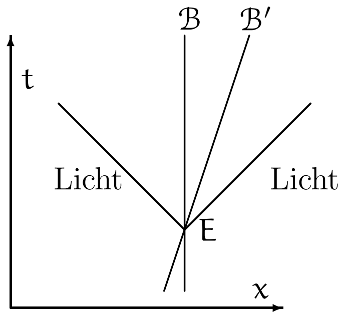



Abbildung 1.4: Beobachter mit auslaufenden Lichtstrahlen

Insbesondere kann man nicht anhand der Geschwindigkeit des Lichts einen gleichförmig bewegten Beobachter von einem ruhenden Beobachter unterscheiden. Es gibt keinen nachweisbaren Äther, dessen Bestandteile ein Ruhsystem definierten, und es gibt keine meßbare Weltzeit, die Ereignissen an sich zukäme.

Gibt man Länge einfach in Laufzeit von Licht an, so ist eine Sekunde die Länge (Tabelle 25.2)

$$1 \text{ Sekunde } = 299\,792\,458 \text{ Meter} \ . \tag{1.52}$$

Geschwindigkeiten sind dann dimensionslos und $c$ hat den natürlichen Wert $c = 1$. Meter pro Sekunde ist ein Zahlenfaktor wie Kilo oder Milli und bedeutet etwa 3,3 Nano

$$\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = \frac{1}{299\,792\,458} \quad , \quad c = 299\,792\,458 \ \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = 1 \ . \tag{1.53}$$

Wir verwenden dieses Maßsystem und vermeiden alle Faktoren $c$. Denn sie erschweren unnötigerweise das Lesen der Gleichungen und lenken vom Wesentlichen ab.

Sendet ein Beobachter $\mathcal{B}$, dem seine mitgeführte Uhr die Zeit $t_-$ anzeigt, einen Lichtpuls zu einem Ereignis $E$ und sieht er den reflektierten Puls zur Zeit $t_+$, so ist $t_+ - t_- = t_{\text{hin}} + t_{\text{her}} = 2\, t_{\text{Laufzeit}}$ die doppelte Lichtlaufzeit von $\mathcal{B}$ zu $E$ und definitionsgemäß die doppelte Entfernung $r$ des Ereignisses $E$ vom Beobachter,

$$r = (t_+ - t_-)/2 \ . \tag{1.54}$$

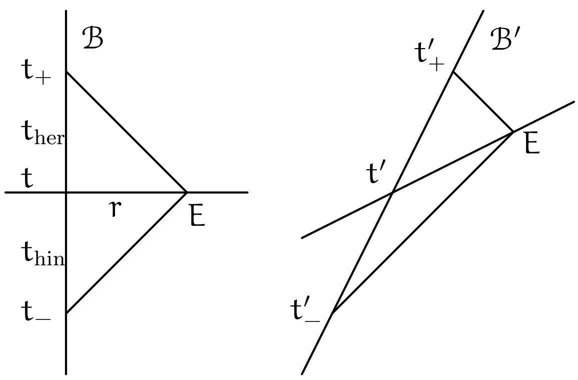



Abbildung 1.5: relativ gleichzeitig

Da es keine anderweitig meßbare Weltzeit gibt, die dem Ereignis $E$ an sich zukäme, verwendet jeder Beobachter als Zeit $t$, zu der ein Ereignis stattgefunden hat, den Mittelwert von Sende- und Empfangszeit, die ihm seine eigene Uhr anzeigt,

$$t = (t_+ + t_-)/2 \ . \tag{1.55}$$

Die Zeit $\mathsf{t}$ liegt um die Lichtlaufzeit nach $\mathsf{t}_-$ und vor $\mathsf{t}_+$. Gleichzeitig zu $\mathsf{E}$ ist das Ereignis $\mathsf{t}$ auf der Weltlinie des Beobachters, das mitten zwischen $\mathsf{t}_-$ und $\mathsf{t}_+$ liegt.

Umgekehrt gilt – und rechtfertigt nachträglich die Notation –

$$\mathsf{t}_+ = \mathsf{t} + \mathsf{r}\ , \quad \mathsf{t}_- = \mathsf{t} - \mathsf{r}\ . \tag{1.56}$$

Geometrisch konstruiert man in einem zweidimensionalen Raumzeitdiagramm bei gegebener Weltlinie des Beobachters $\mathcal{B}$ die zu einem Ereignis $\mathsf{E}$ gleichzeitigen Ereignisse als Diagonale in einem Rechteck von Weltlinien von Lichtpulsen, die wir Lichtstrahlen nennen. Das Rechteck heißt Lichteck [13].

Die bei $\mathsf{E}$ ein- und auslaufenden Lichtstrahlen schneiden die Weltlinie des Beobachters [7, 16] in den Ereignissen $\mathsf{t}_-$ und $\mathsf{t}_+$. Die von $\mathsf{t}_-$ auslaufenden Lichtstrahlen bilden mit den bei $\mathsf{t}_+$ einlaufenden Lichtstrahlen ein Lichteck $\mathsf{t}_-\mathsf{E}\mathsf{t}_+\mathsf{E}'$. Da für die Ereignisse $\mathsf{E}$ und $\mathsf{E}'$ die Zeiten $\mathsf{t}_-$ und $\mathsf{t}_+$ übereinstimmen, finden $\mathsf{E}$ und $\mathsf{E}'$ für diesen Beobachter gleichzeitig, in gleicher Entfernung und in entgegengesetzter Richtung statt. Wie man durch Vergrößern und Verkleinern des Lichtecks bei festgehaltenem Schnittpunkt der Diagonalen bestätigt, sind alle Ereignisse auf der Geraden $\mathsf{E}'\mathsf{E}$ für den Beobachter gleichzeitig.

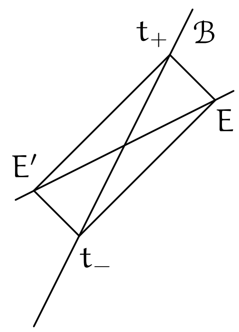



Abbildung 1.6: gleichortig und gleichzeitig im Lichteck

Wie man durch Verschieben des Lichtecks $\mathsf{t}_-\mathsf{E}\mathsf{t}_+\mathsf{E}'$ längs der Weltlinie des Beobachters sieht, finden die Ereignisse, die auf einer Parallelen zu seiner Weltlinie liegen, für ihn in gleicher Entfernung und mit gleicher Richtung der Lichtstrahlen, also am gleichen Ort $\vec{x}$ statt. Ebenso sind für ihn die Ereignisse, die auf einer Parallelen zur Geraden durch $\mathsf{E}'$ und $\mathsf{E}$ liegen, einander gleichzeitig.

Die Weltlinie des Beobachters und die für ihn zu einer Zeit stattfindenden Ereignisse bilden in Raumzeitdiagrammen die Diagonalen eines Lichtecks. Die eine Diagonale besteht aus gleichortigen Ereignissen, die andere aus gleichzeitigen.

Gegeneinander bewegte Beobachter stimmen nicht darin überein, welche nacheinander liegenden Ereignisse am gleichen Ort stattfinden. Denn die Weltlinien gegeneinander bewegter Beobachter sind nicht parallel. Da dann auch die anderen Diagonalen in den Lichtecken beider Beobachter nicht einander parallel sind, stimmen gegeneinander bewegte Beobachter auch nach Berücksichtigung von Laufzeiteffekten nicht darin überein, welche verschiedenen Ereignisse zur gleichen Zeit stattfinden.

In der Raumzeit definiert die Zeit, die auf einer gleichförmig bewegten Uhr zwischen zwei Ereignissen vergeht, die zeitliche Entfernung dieser Ereignisse.

Um diese Zeit zu bestimmen, liest ein Beobachter $\mathcal{B}$ wie in Diagramm 1.7 die Zeit auf einer Uhr $\mathcal{U}$ ab, die sich gleichförmig bewegt, und vergleicht mit der eigenen Uhr [7, 16].

Einfachheitshalber mögen die Uhr und der Beobachter sich im Ereignis $\mathsf{O}$ treffen und dabei ihre Uhren auf Null stellen. Dann zeigen die Uhren in jedem Ereignis die zeitliche Entfernung zum Ursprung $\mathsf{O}$ an. Wenn der Beobachter auf die Uhr $\mathcal{U}$ schaut, die sich gleichmäßig in Sichtlinie von ihm entfernt, und eine Zeit $\mathsf{t}_\mathcal{U}$ abliest, so ist dies die Zeit, die auf $\mathcal{U}$ bis zum Abstrahlen des Lichtes vergangen war, das der Beobachter gerade sieht. Dabei zeige ihm seine eigene Uhr die Empfangszeit $\mathsf{t}_\mathcal{B}$ an. Sie ist der Sendezeit proportional

$$t_{\mathcal{B}} = k(\mathcal{B},\mathcal{U})\, t_{\mathcal{U}} \quad \text{für } t_{\mathcal{U}} > 0 \ , \tag{1.57}$$

mit einem Faktor $k(\mathcal{B},\mathcal{U})$, der nicht von der Sendezeit abhängt [4]. Denn wenn der Beobachter später auf der bewegten Uhr die Zeit $t'_{\mathcal{U}}$ abliest, so ist das Dreieck $O t'_{\mathcal{U}} t'_{\mathcal{B}}$ dem Dreieck $O t_{\mathcal{U}} t_{\mathcal{B}}$ ähnlich und in allen Abmessungen um denselben Faktor vergrößert. Daher sind die Verhältnisse $t_{\mathcal{B}}/t_{\mathcal{U}}$ und $t'_{\mathcal{B}}/t'_{\mathcal{U}}$ gleich.

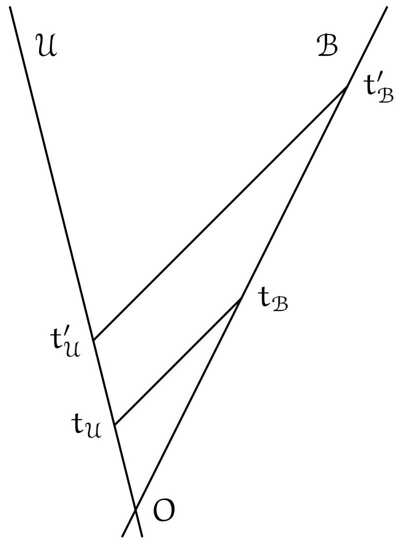



Abbildung 1.7: Strahlensatz

Schwingt in der Zeit $t_{\mathcal{U}}$ ein von der Uhr mitgeführter Quarz $n$-mal mit einer Frequenz[2] $\nu_{\mathcal{U}} = n/t_{\mathcal{U}}$, so sieht der Beobachter diese $n$ Schwingungen, während auf seiner Uhr die Zeit $t_{\mathcal{B}}$ vergeht. Er beobachtet also die Frequenz

$$\nu_{\mathcal{B}} = \frac{1}{k(\mathcal{B},\mathcal{U})}\nu_{\mathcal{U}} \ . \tag{1.58}$$

Die sichtbare Frequenzänderung der Uhr, die sich in Sichtlinie entfernt, ist der longitudinale Dopplereffekt. Er ist dem akustischen Dopplereffekt verwandt, den man als jaulendes Abfallen der Tonhöhe vorbeifahrender Polizeisirenen oder Rennwagen hört.

Da sich gleichförmige Bewegung nicht von Ruhe unterscheiden läßt, hängt $k$ nur von der Relativgeschwindigkeit von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{B}$ ab und nicht wie bei Schall auch von ihrer Geschwindigkeit gegenüber einem Medium. Zudem hängt $k$ davon ab, ob die verwendeten Uhren gleich gehen. Das kann man einfach ablesen, wenn sie ruhen. Bewegen sie sich, so muß man die Laufzeiten berücksichtigen, die das Licht von beiden Uhren bis zu demjenigen braucht, der sie abliest. Solch eine Laufzeitkorrektur erübrigt sich aber für einen Schiedsrichter $\mathcal{S}$, der wie in Abbildung 1.8 stets mitten zwischen den Uhren ist. Lichtpulse, die er zu einer Zeit zu $\mathcal{B}$ und $\mathcal{U}$ aussendet, und die jeweils zurückgestreut werden, treffen beide immer zur gleichen Zeit wieder bei ihm ein. Da er stets gleich weit von beiden Uhren entfernt ist, sind die Lichtlaufzeiten von beiden Uhren zum Schiedsrichter gleich [7, 16]. Beide Uhren gehen gleich, wenn sie dem Schiedsrichter gleiche Zeiten anzeigen:

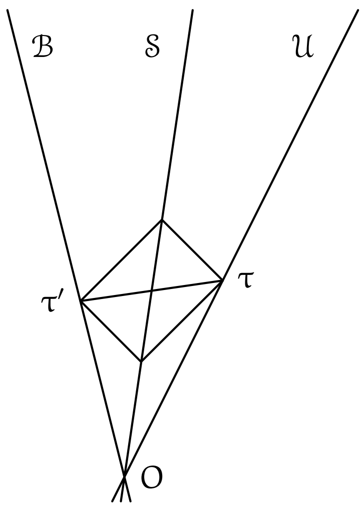



Abbildung 1.8: Uhrenvergleich

$$\tau' = \tau \ . \tag{1.59}$$

Dies definiert geometrisch, welche Längen auf geraden Weltlinien gegeneinander bewegter Beobachter und Uhren gleich sind, und stimmt ausnahmslos in allen Beobachtungen mit dem physikalischen Verhalten gleicher, realer Uhren überein.

[2] $\nu$ und $\tau$ sind die griechischen Buchstaben nü und tau. $\tau$ ist von $r$ und $\nu$ von $v$ zu unterscheiden.

Wir verlängern die Weltlinien des Lichtpulses, der von der Uhr $\mathcal{U}$ empfangen und reflektiert wird, wenn sie die Zeit $\tau$ anzeigt, bis zur Weltlinie des Beobachters $\mathcal{B}$ und bezeichnen in Abbildung 1.9 mit $t_-$ und $t_+$ die Zeiten, die die Uhr von $\mathcal{B}$ anzeigt, wenn er den Lichtpuls zu $\mathcal{U}$ aussendet und wieder empfängt. Wegen (1.57) zeigt die Uhr von $\mathcal{B}$ die Zeit

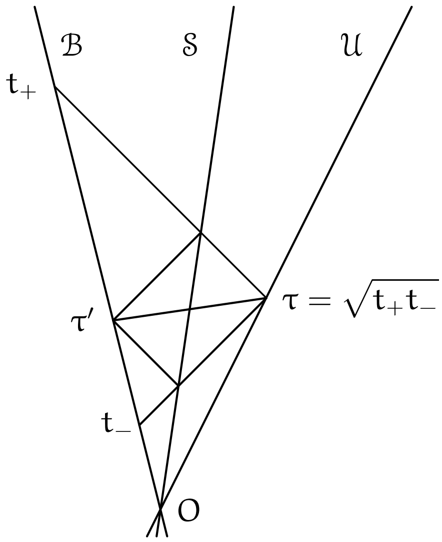



Abbildung 1.9: Satz des Minkowski

$$\tau' = k(\mathcal{B}, \mathcal{S})\, k(\mathcal{S}, \mathcal{B})\, t_- \tag{1.60}$$

an, wenn der Lichtpuls wieder einläuft, der zur Zeit $t_-$ ausgesendet wurde und der von $\mathcal{S}$ reflektiert wurde. Denn $\tau'$ ist ein Vielfaches der Zeit, zu der der Lichtpuls von $\mathcal{S}$ reflektiert wird, und diese Zeit ist ein Vielfaches der Zeit $t_-$, zu der der Lichtpuls von $\mathcal{B}$ ausgesendet wurde. Ebenso folgt

$$t_+ = k(\mathcal{B}, \mathcal{S})\, k(\mathcal{S}, \mathcal{B})\, \tau' \ . \tag{1.61}$$

Also ist $\tau'$ das geometrische Mittel von $t_-$ und $t_+$

$$\frac{\tau'}{t_-} = \frac{t_+}{\tau'} \ , \quad \tau'^{\,2} = t_+\, t_- \ , \tag{1.62}$$

und wegen $\tau' = \tau$ (1.59) gilt der

**Satz des Minkowski:** *Durchlaufen zwei gleichförmig bewegte Beobachter $\mathcal{B}$ und $\mathcal{U}$ ein Ereignis $O$ und stellen sie dabei ihre gleichen Uhren auf Null, so ist die Zeit $\tau$, die auf der Uhr von $\mathcal{U}$ bis zum Durchlaufen eines späteren Ereignisses $E$ vergeht, das geometrische Mittel derjenigen Zeit $t_-$, die die Uhr des Beobachters $\mathcal{B}$ anzeigt, wenn er einen Lichtpuls zu $E$ aussendet, und der Zeit $t_+$, die sie anzeigt, wenn er den Lichtpuls von $E$ empfängt,*

$$\tau^2 = t_+\, t_- = (t + r)\,(t - r) = t^2 - r^2 \ . \tag{1.63}$$

Durchläuft eine gleichförmig bewegte Uhr die Ereignisse $(0, 0, 0, 0)$ und $(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, so definiert die Zeit $\tau$, die dazwischen auf der Uhr vergeht, die raumzeitliche Entfernung beider Ereignisse,

$$\tau^2 = t^2 - r^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \eta_{mn}\, x^m\, x^n \ , \quad m, n \in \{0, 1, 2, 3\} \ , \tag{1.64}$$

$$\eta_{mn} = \begin{cases} \phantom{-}1 & m = n = 0 \\ -1 & m = n \in \{1, 2, 3\} \\ \phantom{-}0 & m \neq n \end{cases} \ . \tag{1.65}$$

Das Längenquadrat in der Raumzeit ist nicht positiv definit, sondern hat $p = 1$ Pluszeichen und $q = 3$ Minuszeichen. Die Differenz $p - q$ heißt Signatur der Metrik. Sie ist basisunabhängig und hat in der Raumzeit den Wert $-2$.

## Longitudinaler Dopplerfaktor und Geschwindigkeit

Nach dem Raumzeitdiagramm 1.9 ist $\tau'/t_- = t_+/\tau'$ und $\tau' = \tau$, also gilt $\tau/t_- = t_+/\tau$. Es ist aber $\tau/t_-$ das Verhältnis von Empfangs- zu Sendezeit (1.57) von Lichtpulsen, die von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{U}$ ausgesendet werden, und $t_+/\tau$ ist das Verhältnis für den Rückweg. Also stimmen beide Verhältnisse überein

$$k(\mathcal{U},\mathcal{B}) = k(\mathcal{B},\mathcal{U}) \ . \tag{1.66}$$

Der Dopplerfaktor, mit dem $\mathcal{B}$ Frequenzen von $\mathcal{U}$ verschoben sieht, stimmt bei Bewegung in Sichtlinie mit dem Dopplerfaktor überein, mit dem $\mathcal{U}$ Frequenzen von $\mathcal{B}$ verschoben wahrnimmt.

Wegen $t_+ = k(\mathcal{B},\mathcal{U})\,\tau$ und $\tau = k(\mathcal{U},\mathcal{B})\,t_-$ gilt

$$t_+ = k^2\, t_- \tag{1.67}$$

für alle Ereignisse $E$, die nach dem Ursprung von der Uhr $\mathcal{U}$ durchlaufen werden, wenn sie sich vom Beobachter $\mathcal{B}$ entfernt. Mit (1.56) heißt dies

$$k^2 = \frac{t_+}{t_-} = \frac{t+r}{t-r} = \frac{1+r/t}{1-r/t} \ . \tag{1.68}$$

Das Verhältnis $r/t$ ist definitionsgemäß die Geschwindigkeit $v$, mit der sich die Uhr $\mathcal{U}$ vom Beobachter $\mathcal{B}$ entfernt, also hängen der Dopplerfaktor $k$ und die Geschwindigkeit $v$ durch

$$k(v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \quad , \quad v = \frac{k^2-1}{k^2+1} \tag{1.69}$$

zusammen.

Bei einer Uhr $\mathcal{U}$, die auf den Beobachter $\mathcal{B}$ zufliegt, sich also mit negativer Geschwindigkeit entfernt, ist der Dopplerfaktor der Kehrwert

$$k(-v) = \frac{t_E}{t_S} = \frac{t_{\mathcal{U}}}{t_{\mathcal{B}}} = \frac{1}{k(v)} \ . \tag{1.70}$$

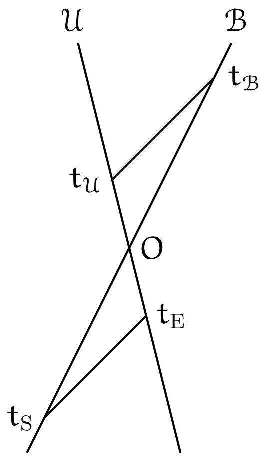



Abbildung 1.10: Aufeinander zu und voneinander weg

Eine Uhr, die sich gleichförmig von einem Beobachter entfernt, erscheint langsamer, er sieht auf ihr die Zeit $t_{\mathcal{U}} = t_{\mathcal{B}}/k$, wenn ihm seine eigene, gleiche Uhr $t_{\mathcal{B}}$ anzeigt. Dabei ist $k(v)$ für $v > 0$ größer als Eins. Wenn sich die Uhr einem Beobachter gleichförmig nähert, erscheint sie ihm schneller, denn der Dopplerfaktor während der Annäherung ist bei Bewegung in Sichtlinie der Kehrwert des Dopplerfaktors beim Wegfliegen.

Mit (1.69) kann man die Geschwindigkeit $v$ bestimmen, indem man, wie alltäglich in der Verkehrsüberwachung, den Dopplerfaktor $k$ mißt. Da er gleich bleibt, wenn man Beobachter und beobachtete Uhr vertauscht (1.66), messen zwei in Sichtlinie gegeneinander bewegte Beobachter dieselbe Relativgeschwindigkeit (in entgegengesetzte Richtung).

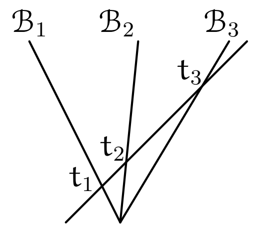



Abbildung 1.11: Addition von Geschwindigkeiten

Wir bestimmen aus (1.69), wie sich Relativgeschwindigkeiten mehrerer Beobachter verhalten. Die Zeiten, zu denen drei in gleiche Richtung bewegte Beobachter $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_3$ einen Lichtpuls registrieren, sind einander proportional

$$t_2 = k_{21}\, t_1 \ , \ \ t_3 = k_{32}\, t_2 \ , \ \ t_3 = k_{31}\, t_1 \ . \tag{1.71}$$

Hieraus liest man unmittelbar ab

$$k_{31} = k_{32}\, k_{21} \ . \tag{1.72}$$

Der Dopplerfaktor $k_{31}$, um den $\mathcal{B}_3$ die eigene Uhr schneller als die von $\mathcal{B}_1$ gehen sieht, ist das Produkt des Dopplerfaktors $k_{32}$, um den $\mathcal{B}_3$ seine Uhr schneller als die Uhr von $\mathcal{B}_2$ gehen sieht, mit dem Dopplerfaktor $k_{21}$, um den $\mathcal{B}_2$ seine Uhr schneller als die Uhr von $\mathcal{B}_1$ gehen sieht.

Durch die Geschwindigkeiten ausgedrückt (1.69) und quadriert heißt dies (im Maßsystem mit $c = 1$)

$$\frac{1+v_{31}}{1-v_{31}} = \frac{1+v_{32}}{1-v_{32}}\,\frac{1+v_{21}}{1-v_{21}} \tag{1.73}$$

und, nach $v_{31}$ aufgelöst,

$$v_{31} = \frac{v_{32}+v_{21}}{1+v_{32}\,v_{21}} \ . \tag{1.74}$$

Die Geschwindigkeit $v_{31}$, mit der $\mathcal{B}_3$ den Beobachter $\mathcal{B}_1$ sich entfernen sieht, ist nicht die Summe $v_{32}+v_{21}$ der Geschwindigkeit $v_{32}$, mit der $\mathcal{B}_3$ den Beobachter $\mathcal{B}_2$ sich entfernen sieht, und der Geschwindigkeit $v_{21}$, mit der $\mathcal{B}_2$ den Beobachter $\mathcal{B}_1$ sich entfernen sieht. Die naive Geschwindigkeitsaddition ist nur ungefähr richtig, solange, wie im täglichen Leben, $v_{32}$ und $v_{21}$ klein gegen die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ sind.

Geschwindigkeiten addieren sich bis auf das Vorzeichen im Nenner wie Steigungen: Ist die Ladefläche eines Lastwagens um einen Winkel $\alpha$ gekippt, so hat sie die Steigung $m_1 = \tan\alpha$. Befährt dieser Lastwagen eine Straße mit Neigungswinkel $\beta$ und Steigung $m_2 = \tan\beta$, so ist die Ladefläche gegenüber der Horizontalen um $\alpha+\beta$ gekippt und hat die Gesamtsteigung

$$m_3 = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{m_1+m_2}{1-m_1\,m_2} \ . \tag{1.75}$$

Definieren wir die Schnelligkeit (Rapidität) als Logarithmus des Dopplerfaktors $k$,

$$\sigma = \ln k = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v} \ , \quad v = \frac{e^{\sigma}-e^{-\sigma}}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}} = \tanh\sigma \ , \tag{1.76}$$

so entspricht der Multiplikation der Dopplerfaktoren $k = e^{\sigma}$ die Addition der zugehörigen Schnelligkeiten. Es sind die Schnelligkeiten $\sigma$, nicht die Geschwindigkeiten $\tanh\sigma$, die sich bei Bewegung in einer Richtung von Beobachter zu Beobachter addieren.

# 2 Inhalte

Eine Gruppe ist eine Menge $G$ mit einem assoziativen Produkt

$$\begin{array}{ll} G \times G & \to G \\ a \quad\; b & \mapsto a\,b \end{array} \;, \quad a\,(b\,c) = (a\,b)\,c \;, \tag{2.1}$$

und einem Einselement $e$, dessen Produkt alle Gruppenelemente $a$ unverändert läßt,

$$e\,a = a\,e = a \tag{2.2}$$

und in der jedes Gruppenelement $a$ ein Links- und Rechtsinverses hat. Es wird mit $a^{-1}$ bezeichnet.

$$a^{-1}\,a = a\,a^{-1} = e \tag{2.3}$$

Die Menge der invertierbaren Selbstabbildungen jeder Menge $\mathcal{M}$, die Transformationen von $\mathcal{M}$, bildet eine Gruppe, die Transformationsgruppe von $\mathcal{M}$. Dabei ist die Gruppenmultiplikation das Hintereinanderausführen und die identische Abbildung das Einselement, $\mathrm{id} = e$.

## Gerade und ungerade Permutationen

Invertierbare Selbstabbildungen $\pi$ der natürlichen Zahlen bis $n$ oder von anderen Mengen mit $n$ Elementen heißen Permutationen,

$$\pi : \{1, 2 \ldots n\} \to \{1, 2 \ldots n\}\;, i \mapsto \pi(i)\;, \text{ invertierbar .} \tag{2.4}$$

Beispielsweise ist $2, 1, 5, 4, 3$ eine Permutation von $1, 2, 3, 4, 5$. Permutationen der natürlichen Zahlen bis $n$ bilden die Permutationsgruppe von $n$ Elementen, die auch *symmetrische* Gruppe heißt und die wir mit $S_n$ bezeichnen.

Jede Permutation kann als Produkt zyklischer Vertauschungen geschrieben werden, bei der beispielsweise 1 auf $\pi(1)$, $\pi(1)$ auf $\pi(\pi(1))$ und so weiter abgebildet wird bis man nach einigen Schritten mit $\pi^k(1)$ wieder 1 erreicht. Dieser Zykel besteht also aus dem Bild von 1 unter wiederholter Anwendung von $\pi$. Er heißt auch Orbit von 1 unter der Wirkung der zyklischen Gruppe

$$\mathbb{Z}_N = \left\{\pi, \pi^2, \ldots, \pi^N = e\right\}\;, \tag{2.5}$$

wobei $N$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen der Zykel ist, aus denen $\pi$ besteht. Jede Zahl $1'$, die nicht im Orbit von 1 vorkommt, definiert einen weiteren Zykel $(1', \pi(1'), \pi^2(1') \ldots \pi^{k'-1}(1'))$ in dem jede Zahl zyklisch auf ihren Zykelnachfolger abgebildet wird. Zahlen, die noch nicht in beiden Zykeln sind, definieren weitere Zykel. Beispielsweise bildet die Permutation $\pi = (1,2)(3,5)(4)$ die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ auf $\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4), \pi(5) = 2, 1, 5, 4, 3$ ab.

Sei $\pi' = (1)(2,5)(3,4)$, dann bildet das Produkt $\pi' \circ \pi = (1)(2,5)(3,4)(1,2)(3,5)(4)$ von rechts nach links gelesen, 1 zunächst auf 2 ab. Diese 2 wird durch die davon links stehenden Zykel auf 5 abgebildet, insgesamt wird also 1 auf 5 abgebildet. 5 wird, wieder von rechts nach links lesend, auf 3 und 3 danach auf 4 abgebildet, also 5 auf 4. So fortfahrend erschließt man das Produkt der hintereinander ausgeführten Permutationen $(1)(2,5)(3,4)(1,2)(3,5)(4) = (1,5,4,3,2)$. Zykel der Länge 1 braucht man nicht notieren, da sie nichts verändern. Die inverse Permutation besteht aus den rückwärts gelesenen Zykeln, $(1,3,4)^{-1} = (4,3,1)$.

Die Permutationsgruppe wird von Nachbarvertauschungen $(l, l{+}1)$ erzeugt. Sie bilden $l \in \{1,2,\dots,n{-}1\}$ auf $l{+}1$ und $l{+}1$ auf $l$ ab und lassen alle anderen Zahlen unverändert. Jede Permutation kann als hintereinander ausführte Nachbarvertauschungen geschrieben werden.

Die Fehlstellung $a(\pi)$ zählt in $\pi(1), \pi(2)\dots\pi(n)$ ab, wie oft von links gelesen ein $\pi(i)$ größer als ein rechts davon stehendes $\pi(j)$ ist. So ist $a(2,1,5,4,3) = 1{+}0{+}2{+}1{+}0$, denn 2 ist größer als 1, 5 ist größer als 4 und 3, und 4 ist größer als 3. Mit der Stufenfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{falls} \quad x \le 0\ , \\ 1\ , & \text{falls} \quad x > 0\ , \end{cases} \tag{2.6}$$

schreibt sich die Fehlstellung als

$$a(\pi) = \sum_{i<j} \Theta(\pi(i) - \pi(j))\ . \tag{2.7}$$

Wenn die Fehlstellung $a(\pi)$ gerade ist, heißt die Permutation $\pi$ gerade, sonst ungerade. Das Signum

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{a(\pi)} \tag{2.8}$$

einer Permutation $\pi$ ist 1, wenn die Permutation $\pi$ gerade ist, sonst $-1$.

Jede Paarvertauschung $(k, l)$, die $k$ auf $l$, $l$ auf $k$ und die übrigen Zahlen auf sich abbildet, verändert die Fehlstellung um eine ungerade Zahl, $\operatorname{sign}\big((k,l)\circ\pi\big) = -\operatorname{sign}(\pi)$. Dies sieht man zunächst für Nachbarvertauschungen $(k, k{+}1)$ ein: sie ändern die Fehlstellung um $\pm 1$, weil sie in genau einem Paar aus $(\pi(1), \pi(2)\dots\pi(n))$ ändern, ob eine linksstehende Zahl größer als eine rechtsstehende ist. Aus $(l, k{+}1) = (k, k{+}1)\circ(l,k)\circ(k,k{+}1)$ folgt dann durch Induktion, daß jede Paarvertauschung die Fehlstellung einer Permutation um eine ungerade Anzahl ändert.

Es läßt sich jede Permutation $\pi$ aus Paarvertauschungen zusammensetzen. Allerdings ist diese Zusammensetzung nicht eindeutig, wie das Beispiel $(1,2)(2,3) = (1,2,3) = (1,3)(2,3)(1,2)(1,3)$ zeigt. Ob aber die Anzahl der Paarvertauschungen gerade oder ungerade ist, das kann man eindeutig an der Fehlstellung $a(\pi)$ ablesen. Ist sie gerade (ungerade), so ist die Zahl der Paarvertauschungen gerade (ungerade). Also gibt $\operatorname{sign}(\pi)$ an, ob die Permutation $\pi$ aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Paarvertauschungen zusammengesetzt ist, und für hintereinander ausgeführte Permutationen $\pi'$ und $\pi$ gilt

$$\operatorname{sign}(\pi' \circ \pi) = \operatorname{sign}(\pi')\ \operatorname{sign}(\pi)\ . \tag{2.9}$$

Zyklische Vertauschungen einer geraden Zahl von Elementen sind ungerade, zyklische Vertauschungen einer ungeraden Zahl von Elementen sind gerade.

## Parallelogramme

Bei Inhalten von Warenkörben übersieht man, daß sie Elementen eines Vektorraumes entsprechen, wenn man nur an positive Anzahlen denkt und Warenrückgabe oder Anlieferung als etwas ganz anderes als Einkaufen ansieht, als ob man das nicht gegenseitig verrechnen könnte.

Ebenso denkt man bei Addition von Flächen gewöhnlich nur an positive Flächen. Es gibt aber auch negative Flächen, zum Beispiel Löcher in der Hose, die man genauso wie Stoffflecken addieren kann. Flickt man mit einem Flecken ein Loch, so hebt sich die Lochfläche und die Fleckenfläche gegenseitig weg und es bleibt ein Rest Flecken oder Loch je nach Größe der beiden. Die Fläche von Löchern ist negative Fläche von Flecken.

Welche der Flächen, Loch oder Flecken, man als positiv betrachtet, kann man frei wählen. Bei einer Lochblende zählt man die Öffnung – das Loch in der Kamera, durch das Licht einfallen kann – gemeinhin als positiv. Ein Flecken auf der Linse vermindert die Öffnung. Er wirkt als Loch in der Lochblende.

Auch bei Funktionsgraphen rechnet man mit Flächen beider Vorzeichen und zählt die Fläche oberhalb der $x$-Achse als positiv, unterhalb negativ und definiert das Integral über ein Intervall als Negatives des Integrals über das rückwärts durchlaufene Intervall (12.7).

Der Einfachheit wegen betrachten wir Parallelogrammflächen. Solch ein Parallelogramm besteht aus den Punkten

$$\{x : \ x = e + \lambda\, a + \chi b \ , \ 0 \leq \lambda \leq 1 \ , \ 0 \leq \chi \leq 1\} \ , \tag{2.10}$$

die man durch Verschiebung um Bruchteile der Kantenvektoren $a$ und $b$ von einem Eckpunkt $e$ aus erreicht. Seine Fläche ist translationsinvariant und hängt nicht von $e$ ab. Wir bezeichnen sie mit

$$a \wedge b \tag{2.11}$$

(gesprochen „a Dach b“ oder „a Keil b“ oder „a mal b“) und vereinbaren, daß dies Produkt positive Fläche bezeichnet, wenn $b$ so wie die $y$-Achse zur $x$-Achse links von $a$ liegt, und daß es sich um Lochfläche handelt, also um negative Fläche, wenn $b$ rechts von $a$ liegt. Da diese Vertauschung von $a$ und $b$ die Punktmenge des Parallelogramms auf sich abbildet, sind die Flächen $a \wedge b$ und $b \wedge a$ einander entgegengesetzt

$$a \wedge b = -b \wedge a \tag{2.12}$$

mit der offensichtlichen richtigen Folge $a \wedge a = 0$, daß die Fläche von entarteten Parallelogrammen verschwindet.

Vervielfältig man eine Kante, so vervielfältigt sich die Fläche,

$$a \wedge (\lambda\, b) = \lambda (a \wedge b) = (\lambda\, a) \wedge b \ . \tag{2.13}$$

Dies gilt bei Flächen und Lochflächen auch für negative Faktoren. Vergrößert man beide Kantenvektoren, wächst die Fläche quadratisch, $(\lambda\, a) \wedge (\lambda\, b) = \lambda^2 (a \wedge b)$ .

Flächengröße unterliegt dem Cavalierischen Prinzip: sie bleibt bei Scherungen ungeändert. Eine Scherung des Parallelogramms $a \wedge b$ fügt dem Kantenvektor $a$ ein beliebiges Vielfaches von $b$ hinzu oder dem Kantenvektor $b$ ein beliebiges Vielfaches von $a$

$$a \wedge b = (a + \lambda b) \wedge b = a \wedge (b + \lambda' a)\ . \tag{2.14}$$

Dabei bleibt die Flächengröße unverändert, denn die Dreiecke, die man bei der Scherung an einer Seite abschneidet und an der Gegenseite anfügt, gehen durch eine Translation um einen Kantenvektor ineinander über und haben daher gleiche Fläche.

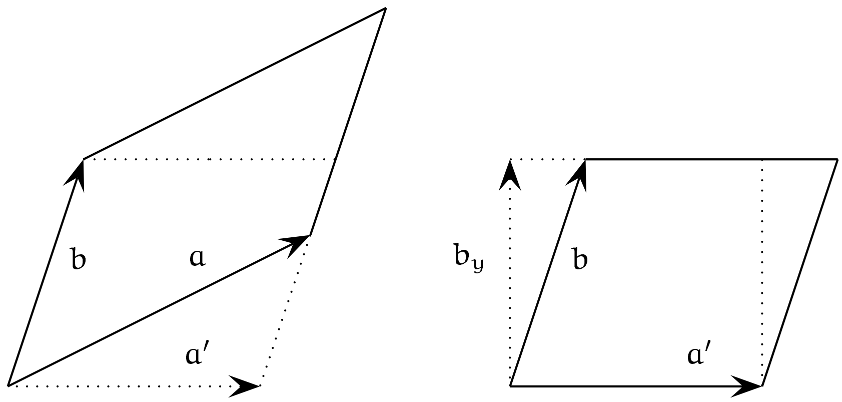



Abbildung 2.1: Cavalierisches Prinzip

Mit dem Cavalierischen Prinzip können wir die Fläche $a \wedge b$ auf die Fläche des Basisparallelogramms $e_1 \wedge e_2$ beziehen, das von zwei Basisvektoren $e_1$ und $e_2$ gebildet wird, die die Ebene aufspannen, in der $a$ und $b$ liegen, $a = a_x + a_y$ , $a_x = e_1 a^1$ , $a_y = e_2 a^2$, entsprechend ist $b = b_x + b_y$ . Das Parallelogramm $a \wedge b$ in Abbildung 2.1 ist ebenso groß wie $a' \wedge b$ , wobei $a' = a + \lambda\, b$ mit $\lambda = -a^2/b^2$ in die $e_1$-Richtung zeigt, $a' = e_1(a^1 - b^1\, a^2/b^2)$. Anschließend scheren wir $b$ in $b' = b + \eta a' = e_2 b^2 = b_y$ in die Richtung von $e_2$ . Folglich hat das Parallelogramm $a \wedge b$ die Größe $a' \wedge b'$ ,

$$a \wedge b = e_1 \left(a^1 - \frac{b^1 a^2}{b^2}\right) \wedge e_2\, b^2 = e_1 \wedge e_2 \left(a^1\, b^2 - a^2\, b^1\right)\ . \tag{2.15}$$

Der Faktor bei $e_1 \wedge e_2$ ist die vorzeichenbehaftete Summe über die beiden Permutationen $\pi$ von 1 und 2 oder, wegen $a^2\, b^1 = b^1\, a^2$, von $a$ und $b$ ,

$$a \wedge b = e_1 \wedge e_2 \sum_{\pi \in S_2} \operatorname{sign}(\pi)\, a^{\pi(1)}\, b^{\pi(2)} = e_1 \wedge e_2 \sum_{\pi \in S_2} \operatorname{sign}(\pi)\, \pi(a)^1\, \pi(b)^2\ . \tag{2.16}$$

Wie man mit (2.15) bestätigt, ist die Flächengröße antisymmetrisch (Mathematiker sagen alternierend oder schiefsymmetrisch) und bilinear (zumindest solange $a, b$ und $c$ in einer Ebene liegen),

$$a \wedge b = -b \wedge a\ ,\ \ (a + b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c\ ,\ \ (\lambda a) \wedge b = \lambda (a \wedge b)\ . \tag{2.17}$$

Dabei folgt die Linearität im zweiten Argument schon aus der Antisymmetrie und der Linearität im ersten Argument.

Insbesondere wechselt die Flächengröße das Vorzeichen, wenn man eine Kante spiegelt,

$$\mathfrak{a} \wedge (-\mathfrak{b}) = -(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = (-\mathfrak{a}) \wedge \mathfrak{b} \tag{2.18}$$

oder die Faktoren vertauscht. Lochfläche ist das Spiegelbild von Fläche. Dies stimmt mit unserer Festlegung überein, daß $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ Fläche bezeichnet, wenn der zweite Kantenvektor links vom ersten liegt, und Lochfläche, also negative Fläche, wenn er rechts vom ersten liegt. Daher ist unerheblich, welchen der Eckpunkte des Parallelogramms man verwendet, um seine Fläche durch das geordnete Paar auslaufender Kantenvektoren zu bezeichnen, wobei der zweite Kantenvektor an allen Ecken links, bei Lochflächen rechts, vom ersten liegt,

$$\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} = (-\mathfrak{b}) \wedge \mathfrak{a} = (-\mathfrak{a}) \wedge (-\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \wedge (-\mathfrak{a}) \ . \tag{2.19}$$

Ohne Rechnung mit rein geometrischen Konstruktionen ist die Flächengröße (2.15) aus der Abbildung 2.2 nur mit Mühe abzulesen. Das durch die zwei Scherungen entstehende Rechteck $\mathfrak{a}' \wedge \mathfrak{b}_y$ ist um einen Streifen kleiner als das Rechteck $\mathfrak{a}_x \wedge \mathfrak{b}_y$. Dieser Streifen hat die Fläche des Rechtecks $\mathfrak{a}_y \wedge \mathfrak{b}_x$, wie die mittlere Abbildung von 2.2 zeigt. Dort sind die gegenüber liegenden Rechtecke gleich groß, weil sie zu gleich großen Dreiecksflächen gehören, deren Unterdreiecke paarweise gleich groß sind. Daher ist die Parallelogrammfläche die Differenz $\mathfrak{a}_x \wedge \mathfrak{b}_y - \mathfrak{b}_x \wedge \mathfrak{a}_y = \mathfrak{a}_x \wedge \mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_y \wedge \mathfrak{b}_x = (\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y) \wedge (\mathfrak{b}_x + \mathfrak{b}_y) = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$. Hierbei haben wir die Additivität (2.17) verwendet, wie sie aus (2.15) für Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ folgt, die in einer Ebene liegen. Zudem verschwindet die Fläche von entarteten Parallelogrammen, $\mathfrak{a}_x \wedge \mathfrak{b}_x = \mathfrak{a}_y \wedge \mathfrak{b}_y = 0$.

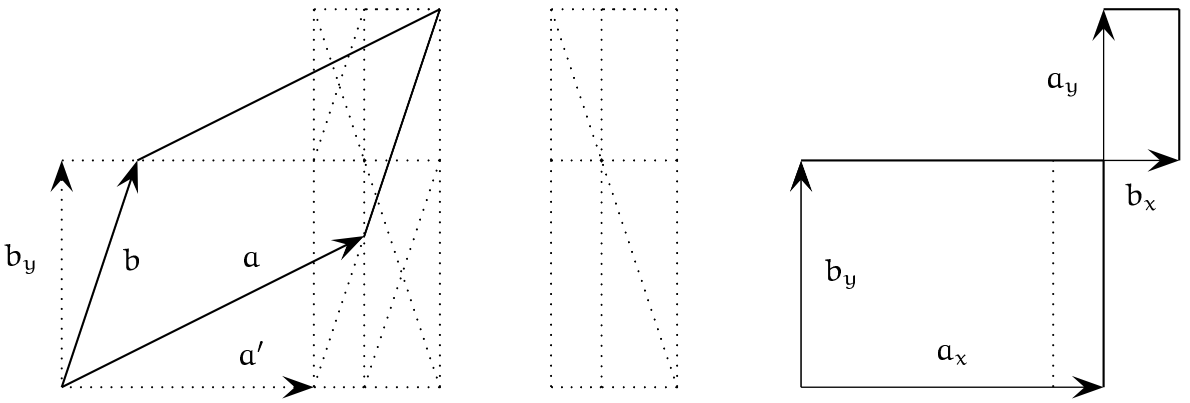



Abbildung 2.2: Parallelogrammfläche

Allein schon aus der Additivität in beiden Argumenten und daraus, daß die Fläche $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}$ von entarteten Parallelogrammen verschwindet, folgt die Antisymmetrie,

$$0 = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \wedge (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b} = 0 + \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a} + 0 \ . \tag{2.20}$$

Abbildung 2.3 zeigt die Additivität (2.17) der Flächen von Parallelogrammen mit einem gemeinsamen Kantenvektor $\mathfrak{c}$, der gestrichelt dargestellt ist. In der rechten Abbildung wird zu der Fläche $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c}$ die Lochfläche $\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}$ addiert. Das Ergebnis kann, nach

Verrechnung von Restloch mit Restfläche, in $(a+b)\wedge c$ geschert werden, falls $a$, $b$ und $c$ in derselben Ebene liegen.

Falls allerdings $a \wedge c$ und $b \wedge c$ zwei Flächen eines Giebeldachs bezeichnen, so hat, wie jeder Dachdecker weiß, die Dachfläche nicht die gleiche Größe wie die Grundfläche $(a + b) \wedge c$. Die Additivität (2.17) gilt für die Querschnittsfläche, wie sie für Ströme durch Parallelogrammflächen entscheidend ist. Die Regenmenge, die auf ein Dach fällt, hängt nur von der projizierten Grundfläche ab, nicht von der Dachneigung. Ebenso gilt (2.17), wenn wir das Volumen eines Spats bedenken, der von parallelen Parallelogrammen berandet wird. Was ein spatförmiges Haus im Dach an Volumen mehr hat, fehlt im Keller. In beiden Fällen gilt das Cavalierische Prinzip, daß wir die Flächensumme $a\wedge c+b\wedge c$ in Richtung von $(a + b) \wedge c$ scheren können, ohne den Fluß durch die Fläche oder das Volumen des Spats zu ändern.

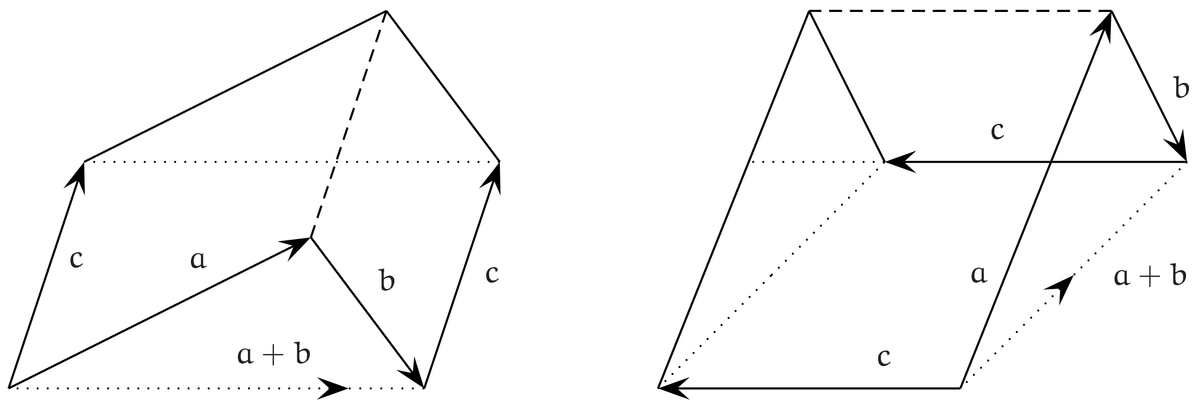



Abbildung 2.3: Addition von Parallelogrammflächen

Ohne diese Einschränkung auf Querschnittsflächen, beispielsweise für die Größe der Fläche selbst, gilt (2.17) nur mit einem Fehler, wenn die Flächen nicht in derselben Ebene liegen. Nähert man eine glatte, gewölbte Fläche durch die Summe kleiner Dreiecksflächen (halbe Parallelogramme), deren Ecken auf der gewölbten Fläche liegen (Parallelogramme würden normalerweise nicht mit allen Ecken auf der gewölbten Fläche liegen, sondern wie ein Stuhl auf unebenem Boden kippeln), so wird der Fehler umso kleiner, je feiner man die Zerlegung der gewölbten Fläche wählt und verschwindet bei glatten Flächen im Grenzfall immer feiner gewählten Zerlegungen. Demnach gilt (2.17) auch, wenn man die Größe von glatten, gewölbten Flächen mit feiner und feiner gewählten Zerlegungen in Dreiecksflächen ermittelt. Daher findet man die Linearität des Keilproduktes oft erst bei Differentialformen.

Mit seiner Linearität und seiner Antisymmetrie läßt sich die Parallelogrammfläche $a\wedge b$ leicht als Vielfaches der Fläche $e_1\wedge e_2$ zweier Vektoren $e_1$ und $e_2$ angeben, die die Ebene aufspannen, in der $a$ und $b$ liegen. Denn in der Doppelsumme $(e_i\, a^i) \wedge (e_j\, b^j) = (e_i \wedge e_j)\, a^i\, b^j$ fallen wegen $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ die Terme mit $e_1 \wedge e_1$ und $e_2 \wedge e_2$ weg und wegen $e_2 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2$ erhält man (2.15).

Liegt die Fläche in einem höherdimensionalen Raum nicht in der Richtung der ersten beiden Basisvektoren, so folgen aus der Linearität in jedem Kantenvektor und der Antisymmetrie (2.17), $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$,

$$a\wedge b = (e_i\, a^i) \wedge (e_j\, b^j) = \sum_{i,j} e_i \wedge e_j\, (a^i\, b^j) = \sum_{i<j} e_i \wedge e_j\, (a^i\, b^j - a^j\, b^i)\ . \qquad (2.21)$$

## Spate

So wie es Fläche mit beiden Vorzeichen gibt, so gibt es Volumen mit beiden Vorzeichen: es gibt Raum und Hohlraum, mit Bergen kann man Täler zuschütten. In einer Ebene, in der Kies abgebaut und gelagert wird, gibt es Kieshaufen und Kiesgruben. Ihr Volumen ist entgegengesetzt und hebt sich gegenseitig auf, wenn man Gruben verfüllt.

Wir betrachten der Einfachheit wegen das Volumen eines Spats, eines Körpers, der von parallelen Parallelogrammen berandet wird. Er wird auch Parallelotop oder Parallelflach genannt. Jeder Spat wird von einen Eckpunkt $\mathfrak{e}$ ausgehend von Kantenvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ aufgespannt und und besteht aus einer Punktmenge

$$\{x : \; x = \mathfrak{e} + \lambda\,\mathfrak{a} + \chi\,\mathfrak{b} + \eta\,\mathfrak{c}\,,\; 0 \le \lambda \le 1\,,\; 0 \le \chi \le 1\,,\; 0 \le \eta \le 1\}\,. \tag{2.22}$$

Wir vereinbaren, daß wir mit $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}$ positives Volumen meinen, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ in dieser Reihenfolge rechtshändig sind, das heißt, nach Translation und Drehung wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand liegen. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ linkshändig, so bezeichne $\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c}$ Hohlraum, negatives Volumen. Das Volumen $\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c}$ wechselt sein Vorzeichen, wenn man das Vorzeichen von $\mathfrak{c}$ wechselt, also an der $\mathfrak{a}$-$\mathfrak{b}$-Ebene spiegelt, oder wenn man ein Paar Kanten vertauscht. Hohlraum ist das Spiegelbild von Raum.

Für das Volumen $\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c}$ von Spaten mit Kantenvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gilt das Cavalierische Prinzip, daß man jeden Kantenvektor in der Ebene der beiden anderen scheren kann, ohne das Volumen zu verändern. Denn bei einer Scherung eines Kantenvektors in Richtung eines anderen wird das Volumen, das an einer Seite abgeschnitten wird, an der Gegenseite, um einen Kantenvektor verschoben, angesetzt.

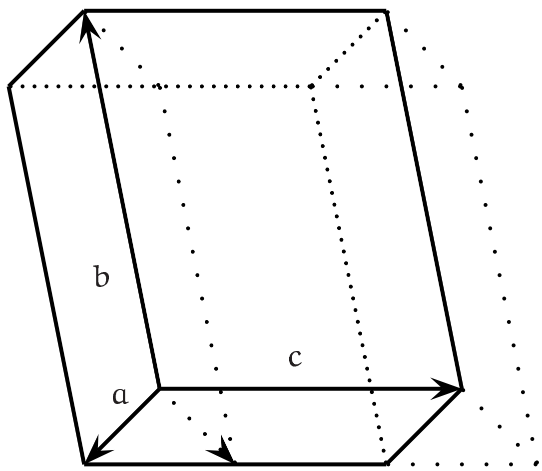


Abbildung 2.4: Cavalierisches Prinzip

Ebenso bleibt der Strom $J(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ unverändert, der ein Parallelogramm mit Kanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ quert, wenn man einen Kantenvektor in Richtung der Stromdichte (in der nebenstehenden Abbildung der Vektor $\mathfrak{c}$) schert, denn diese Scherung verändert nicht die Querschnittsfläche, und ebenso wenn man die Stromdichte in Richtung der Kantenvektoren des Parallelogramms schert, denn eine zusätzliche Stromdichte in der Ebene des Parallelogramms bewirkt keinen zusätzlichen Strom durch das Parallelogramm.

Wir benutzen das Cavalierische Prinzip, um das Volumen des Spats mit Kantenvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ als Vielfaches desjenigen Spats zu schreiben, dessen Kantenvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$ eine Basis für den (Unter-)Raum bilden, in dem $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ liegen. Unterstellt, daß die Komponente $\mathfrak{c}^3$ nicht verschwindet, scheren wir $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}$ volumentreu in $\mathfrak{a}' \wedge \mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{c}'$, so daß $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \lambda\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} + \eta\,\mathfrak{c}$ in der $\mathfrak{e}_1$-$\mathfrak{e}_2$-Ebene liegen. Das ist für $\lambda = -\frac{\mathfrak{a}^3}{\mathfrak{c}^3}$ und $\eta = -\frac{\mathfrak{b}^3}{\mathfrak{c}^3}$ der Fall. Anschließend scheren wir $\mathfrak{c}$ in der $\mathfrak{e}_1$-$\mathfrak{e}_2$ Ebene, so daß

$c' = e_3\, c^3$ in $e_3$ Richtung zeigt. Dann gilt $a \wedge b \wedge c = a' \wedge b' \wedge c'$ mit

$$a' = e_1 \left(a^1 - \frac{a^3}{c^3} c^1\right) + e_2 \left(a^2 - \frac{a^3}{c^3} c^2\right) \;,\; b' = e_1 \left(b^1 - \frac{b^3}{c^3} c^1\right) + e_2 \left(b^2 - \frac{b^3}{c^3} c^2\right) \;,\; c' = e_3\, c^3 \tag{2.23}$$

Nach (2.15) ist $a' \wedge b' = e_1 \wedge e_2\, (a'^1\, b'^2 - a'^2\, b'^1)$. Damit erhalten wir

$$a \wedge b \wedge c = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\, c^3 \Big(\left(a^1 - \frac{a^3}{c^3} c^1\right)\left(b^2 - \frac{b^3}{c^3} c^2\right) - \left(a^2 - \frac{a^3}{c^3} c^2\right)\left(b^1 - \frac{b^3}{c^3} c^1\right)\Big) \;. \tag{2.24}$$

Ausmultipliziert heben sich die zwei Produkte weg, die $c^1\, c^2$ enthalten, und mit alphabetisch oder nach Komponenten geordneten Faktoren ergibt sich

$$\begin{aligned} a \wedge b \wedge c &= \mathfrak{e} \left(a^1\, b^2\, c^3 + a^2\, b^3\, c^1 + a^3\, b^1\, c^2 - a^1\, b^3\, c^2 - a^2\, b^1\, c^3 - a^3\, b^2\, c^1\right) \\ &= \mathfrak{e} \left(a^1\, b^2\, c^3 + c^1\, a^2\, b^3 + b^1\, c^2\, a^3 - a^1\, c^2\, b^3 - b^1\, a^2\, c^3 - c^1\, b^2\, a^3\right) \;, \end{aligned} \tag{2.25}$$

wobei $\mathfrak{e}$ das Volumen des Basisspats bezeichnet,

$$\mathfrak{e} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \;. \tag{2.26}$$

Die Summe erstreckt sich über alle sechs Permutationen $\pi$ von $1, 2, 3$ oder von $a, b, c$, gewichtet mit dem Vorzeichen von $\pi$ (2.8)

$$a \wedge b \wedge c = \mathfrak{e} \sum_{\pi \in S_3} \operatorname{sign}(\pi) a^{\pi(1)}\, b^{\pi(2)}\, c^{\pi(3)} = \mathfrak{e} \sum_{\pi \in S_3} \operatorname{sign}(\pi) \pi(a)^1\, \pi(b)^2\, \pi(c)^3 \;. \tag{2.27}$$

Das Volumen des Spats ist linear in jedem Kantenvektor. Es wechselt sein Vorzeichen, wenn man $a$ in $-a$ spiegelt oder $a$ mit $b$ vertauscht oder $b$ mit $c$ und ist demnach total antisymmetrisch. Spatvolumen ist eine alternierende Multilinearform der Kantenvektoren.

Weil das Volumen eines Spats in drei Dimensionen in den drei Kantenvektoren linear ist, ist es eine *Drei*fachsumme über Produkte der Komponenten der drei Vektoren multipliziert mit dem Volumen des Basisspats, und mit Koeffizienten, die wir mit dem $\epsilon$-Symbol zusammenfassen,

$$a \wedge b \wedge c = \mathfrak{e}\, \epsilon_{ijk}\, a^i\, b^j\, c^k \;. \tag{2.28}$$

Von den $3^3 = 27$ Termen der Dreifachsumme mit einem jeweiligen Laufbereich über drei Werte tragen in (2.25) oder (2.27) nur die Terme bei, bei denen $i$, $j$ und $k$ verschiedene Werte annehmen, also eine Permutation von 1, 2 und 3 sind. Dann sind die Koeffizienten 1 oder $-1$, je nachdem, ob diese Permutation gerade oder ungerade ist. Sie definieren das $\epsilon$-Symbol,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \;, & \text{falls } ijk \text{ eine gerade Permutation von } 1,2,3 \text{ ist,} \\ -1 \;, & \text{falls } ijk \text{ eine ungerade Permutation von } 1,2,3 \text{ ist,} \\ 0 \;, & \text{falls } ijk \text{ keine Permutation von } 1,2,3 \text{ ist.} \end{cases} \tag{2.29}$$

## Stromdichte

Jede Flächenstromdichte $J$ ordnet einem Parallelogramm mit Kantenvektoren $a$ und $b$ den Strom $J(a, b)$ zu, der es durchfließt. Ist die Stromdichte konstant, so ist der Strom linear in den Kantenvektoren,

$$J(\lambda\, a + b, c) = \lambda\, J(a, c) + J(b, c)\ ,\ J(a, \lambda\, b + c) = \lambda\, J(a, b) + J(a, c)\ . \tag{2.30}$$

Der Strom durch entartete Parallelogramme verschwindet, $J(a, a) = 0$, und wechselt daher sein Vorzeichen, wenn man $a$ und $b$ vertauscht (2.20),

$$0 = J(a+b, a+b) = J(a, a)+J(a, b)+J(b, a)+J(b, b) = 0+J(a, b)+J(b, a)+0\ . \tag{2.31}$$

Da der Strom sein Vorzeichen wechselt, wenn man $a$ in $-a$ spiegelt oder wenn man $a$ und $b$ vertauscht, rechnen wir mit Strom durch Flächen und Lochflächen, die man mit entgegengesetztem Vorzeichen miteinander verrechnen kann. Beispielsweise wirkt sich eine Abdeckung in der Querschnittsfläche negativ auf den Strom aus.

Schreiben wir $a$ und $b$ als Linearkombinationen der Basisvektoren $e_1, e_2, \ldots$, so erweist sich der Strom, weil er bilinear ist, als eine Doppelsumme

$$J(a, b) = J(e_i a^i, e_j b^j) = J(e_i, e_j)\, a^i\, b^j = J_{ij}\, a^i\, b^j\ ,\quad J_{ij} = J(e_i, e_j) = -J_{ji}\ . \tag{2.32}$$

In ihr verschwinden wegen der Antisymmetrie $J_{11} = -J_{11} = 0\,,\ J_{22} = -J_{22} = 0, \ldots$ und wegen $J_{12} = -J_{21}, J_{13} = -J_{31}, \ldots$ sind die Komponenten $J_{ij} = J(e_i, e_j)$, das sind die Ströme durch Parallelogramme mit Basiskanten, nur für $i < j$ unabhängig $J_{ij} = -J_{ji}$. Der Strom durch $(a, b)$ ist daher expliziter

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \sum_{i<j} J_{ij}\,(a^i\, b^j - a^j\, b^i) \\ &= J_{12}\,(a^1\, b^2 - a^2\, b^1) + J_{13}\,(a^1\, b^3 - a^3\, b^1) + J_{23}\,(a^2\, b^3 - a^3\, b^2) + \ldots\ . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Wie alle linearen Abbildungen kann man Stromdichten sinnvoll addieren und vervielfältigen, dabei addieren und vervielfältigen sich ihre Komponenten, $(J + J')_{ij} = J_{ij} + J'_{ij}$ $(\lambda\, J)_{ij} = \lambda\, J_{ij}$. Stromdichten bilden einen $n(n-1)/2$-dimensionalen Vektorraum. Er ist dual zum Vektorraum $\Lambda^2(\mathcal{V})$ der Parallelogrammflächen.

In $n = 3$ Dimensionen wechseln wir die Bezeichnungen. Mit dem Volumen des Basisspats $\mathfrak{e} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ (2.26) als Proportionalitätsfaktor definieren wir die Komponenten $(j^1, j^2, j^3)$ der Stromdichte $j = e_1\, j^1 + e_2\, j^2 + e_3\, j^3$ durch

$$J_{12} = \mathfrak{e}\, j^3\ ,\ J_{13} = -\mathfrak{e}\, j^2\ ,\ J_{23} = \mathfrak{e}\, j^1\ ,\ J_{ij} = \mathfrak{e}\epsilon_{ijk}\, j^k\ . \tag{2.34}$$

So notiert bewirkt die Stromdichte den Strom

$$J(a, b) = j \wedge a \wedge b = \mathfrak{e}\big(j^1\,(a^2\, b^3 - a^3\, b^2) + j^2\,(a^3\, b^1 - a^1\, b^3) + j^3\,(a^1\, b^2 - a^2\, b^1)\big)\ . \tag{2.35}$$

Er ist das Volumen (2.25) des Spats, der von $j$, $a$ und $b$ aufgespannt wird.

Der Faktor $\mathfrak{e}$ in (2.34) ist erforderlich, damit $J(a,b) = j \wedge a \wedge b$, wie die Notation behauptet, eine Funktion der drei Vektoren ist und nicht davon abhängt, in welcher Basis man die Vektoren angibt.

In 3 Dimensionen ist jede Funktion, die wie $a \wedge b \wedge c$ linear von 3 Vektoren abhängt, beispielsweise die Ladung $Q(a,b,c)$ im Spat mit Kantenvektoren $a$, $b$ und $c$, und die total antisymmetrisch unter Paarvertauschungen ist, durch ihren Wert auf dem Basisspat festgelegt. Sie sind ja durch ihre Werte auf Basisvektoren $e_i, e_j, e_k$ bestimmt, von Null verschieden aber nur, wenn die Argumente $e_i, e_j, e_k$ eine Permutation $\pi$ von $e_1, e_2, e_3$ sind und haben dann den Wert, Signum dieser Permutation mal dem Wert für $e_1, e_2, e_3$: $Q(e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, e_{\pi(3)}) = \text{sign}(\pi)\, Q(e_1, e_2, e_3)$. Das Verhältnis von $Q(e_1, e_2, e_3)$ zum Basisvolumen $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ ist die Ladungsdichte $\rho$, $Q(a,b,c) = \rho\, a \wedge b \wedge c$.

Teilchen in einem homogenen Teilchenstrom, die mit Geschwindigkeit $v$ das Parallelogramm $a \wedge b$ in einer Zeit $t$ queren, füllen das Volumen $tv \wedge a \wedge b$. Ihre Anzahl $N(t\,v, a, b) = \rho\, t\, v \wedge a \wedge b)$ ist dieses Volumen, multipliziert mit der Teilchendichte $\rho$. Der Teilchenstrom ist diese Anzahl pro Zeit, $J(a,b) = \rho\, v \wedge a \wedge b$. Also ist die Teilchenstromdichte (wir schreiben der Deutlichkeit wegen Vektorpfeile) Teilchendichte mal Teilchengeschwindigkeit,

$$\vec{j} = \rho\, \vec{v}\ . \tag{2.36}$$

Dies ist richtig für *eine* Teilchensorte. Beim elektrischen Strom mehrerer Teilchensorten mit unterschiedlicher Geschwindigkeit müssen die einzelnen Ströme addiert werden. Diese Summe ist nicht die Gesamtladungsdichte mal einer mittleren Geschwindigkeit. So ist beispielsweise Kupfer ungeladen, $\rho_{\text{Ionen}} + \rho_{\text{Elektronen}} = 0$. Dennoch fließt im Kupferdraht wegen der unterschiedlichen Beweglichkeit von Ionen und Elektronen bei angelegter Spannung Strom.

## Kreuzprodukt

Im dreidimensionalen Euklidischen Raum kann man (2.35) auch so lesen, daß das orientierte Parallelogramm $a \wedge b$ einen Vektor $a \times b = -(b \times a)$ definiert, das Kreuzprodukt von $a$ mit $b$ (Mathematiker kennen es als das Hodge-Duale der Zweiform $a \wedge b$), dessen Skalarprodukt mit der Stromdichte den Strom durch das Parallelogramm ergibt,

$$c \cdot (a \times b) = c \wedge a \wedge b\ , \tag{2.37}$$

$$a \times b = \mathfrak{e}\, e_l\, g^{li}\, \epsilon_{ijk}\, a^j\, b^k\ . \tag{2.38}$$

Dabei sind $g^{li}$ Koeffizienten, die mit $g_{ml} = e_m \cdot e_l$ summiert $\delta_m{}^i = g_{ml} g^{li}$ ergeben (man berechnet sie mit (3.73)).

$$c^m\, (e_m \cdot e_l)\, \mathfrak{e}\, g^{li} \epsilon_{ijk}\, a^j\, b^k = \mathfrak{e}\, c^m\, g_{ml} g^{li} \epsilon_{ijk}\, a^j\, b^k = \mathfrak{e}\, c^m\, \delta_m{}^i \epsilon_{ijk}\, a^j\, b^k = \mathfrak{e}\, \epsilon_{ijk}\, c^i\, a^j\, b^k$$

Der Ausdruck für das Kreuzprodukt ist komplizierter als in vielen Lehrbüchern, damit er, wie die Notation behauptet, nur von den Vektoren $a$ und $b$ abhängt und nicht davon, in welcher Basis man $a$ und $b$ angibt. In jeder *Orthonormal*basis ist $g_{ij} = \delta_{ij} = g^{ij}$ und $\mathfrak{e} = 1$. Dann vereinfachen sich die Komponenten des Kreuzprodukts zu

$$\begin{pmatrix} (a \times b)^1 \\ (a \times b)^2 \\ (a \times b)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\, b^3 - a^3\, b^2 \\ a^3\, b^1 - a^1\, b^3 \\ a^1\, b^2 - a^2\, b^1 \end{pmatrix}\ . \tag{2.39}$$

Wegen $c \cdot (a \times b) = c \wedge a \wedge b$ steht das Kreuzprodukt senkrecht auf jedem seiner Faktoren,

$$0 = a \cdot (a \times b)\ ,\ 0 = b \cdot (a \times b)\ . \tag{2.40}$$

Sein Betrag ist, wie wir gleich bestätigen werden (2.52), das Produkt der Beträge von $a$ und $b$ mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels

$$|a \times b| = |a|\,|b|\,\sin(\sphericalangle(a, b))\ ,\ a, b, a \times b \text{ rechtshändig}\ . \tag{2.41}$$

Das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $a$ und $b$ ist also derjenige Vektor, der sie, falls sie linear unabhängig sind, zu einer rechtshändigen Basis $a, b, a \times b$ ergänzt, und dessen Betrag der Betrag der Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms ist.

Das Kreuzprodukt charakterisiert nicht nur orientierte Parallelogramme. Es tritt beispielsweise bei jeder Drehung $D_{\alpha\vec{n}}$ um eine Achse $\vec{n}$, $\vec{n}^2 = 1$, um einen Winkel $\alpha$ auf.

Drehungen sind linear. Zerlegt man einen Vektor $\vec{u}$ in seinen zur Drehachse $\vec{n}$ parallelen und senkrechten Anteil (1.36),

$$\vec{u} = \vec{u}_{\|} + \vec{u}_{\perp}\ ,\ \vec{u}_{\|} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u})\ ,\ \vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u})\ , \tag{2.42}$$

so bleibt $\vec{u}_{\|}$ unverändert und $\vec{u}_{\perp}$ wird in der zu $\vec{n}$ senkrechten Ebene, die von $\vec{u}_{\perp}$ und $\vec{n} \times \vec{u} = \vec{n} \times \vec{u}_{\perp}$ aufgespannt wird, auf $(\cos\alpha)\,\vec{u}_{\perp} + (\sin\alpha)\,\vec{n} \times \vec{u}$ gedreht,

$$D_{\alpha\vec{n}} : \vec{u} \mapsto \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u}) + (\cos\alpha)(\vec{u} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u})) + (\sin\alpha)\,\vec{n} \times \vec{u}\ . \tag{2.43}$$

Ebenso tritt das Kreuzprodukt in der Lorentzkraft $\vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v}) = q\,(\vec{E}(t, \vec{x}) + \vec{v} \times \vec{B}(t, \vec{x}))$ auf, die das elektrische Feld $\vec{E}(t, \vec{x})$ und das magnetische Feld $\vec{B}(t, \vec{x})$ auf ein Teilchen mit Ladung $q$ ausüben, das zur Zeit $t$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ den Ort $\vec{x}$ durchläuft.

Der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ eines Teilchens ist das Kreuzprodukt seines Orts mit seinem Impuls. Die Änderung des Drehimpulses wird vom Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ bewirkt.

Falls das Drehmoment jederzeit verschwindet, ist der Drehimpuls erhalten, das heißt, er stimmt zu jeder Zeit $t$ mit seinem Startwert überein, $\vec{L}(t) = \vec{L}(0)$. Dann ist die Bahn $t \mapsto \vec{r}(t)$ eben. Denn das Kreuzprodukt steht senkrecht auf jedem seiner Faktoren, also ist $\vec{r}(t) \cdot \vec{L}(t) = 0$. Wegen $\vec{L}(t) = \vec{L}(0)$ ist $\vec{r}(t)$ jederzeit senkrecht zu $\vec{L}(0)$, also aus der Ebene durch den Ursprung mit Normalenvektor $\vec{L}(0)$.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren dreht sich so wie ein Vektor, genauer: das Kreuzprodukt gedrehter Vektoren ist das gedrehte Kreuzprodukt der Vektoren. Dabei sind Drehungen Transformationen $D$, die Längenquadrate, und daher Skalarprodukte, und Volumen invariant lassen.

Denn weil sich das Volumen von irgend drei Vektoren $c \wedge a \wedge b = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ und das Skalarprodukt zweier Vektoren $c \cdot d$ nicht bei einer Drehung $D$ ändern,

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (D\vec{c}) \cdot (D\vec{a}) \times (D\vec{b})\ ,\ \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (D\vec{c}) \cdot D(\vec{a} \times \vec{b})\ , \tag{2.44}$$

verschwindet $(D\vec{c}) \cdot \big((D\vec{a}) \times (D\vec{b}) - D(\vec{a} \times \vec{b})\big)$ für alle Vektoren $\vec{c}' = D\vec{c}$. Daher verschwindet $(D\vec{a}) \times (D\vec{b}) - D(\vec{a} \times \vec{b})$ und es ist das Kreuzprodukt von gedrehten Vektoren dem gedrehten Kreuzprodukt der Vektoren gleich,

$$(D\vec{a}) \times (D\vec{b}) = D(\vec{a} \times \vec{b})\ . \tag{2.45}$$

Unter der Spiegelung am Ursprung, $\Pi : \vec{a} \mapsto -\vec{a}$, die Vektoren auf ihr negatives abbildet, ändern sich ihre Kreuzprodukte nicht.

$$(-\vec{a}) \times (-\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b} \tag{2.46}$$

Sie verhalten sich also unter der Paritätstransformation $\Pi$ anders als Vektoren und heißen deshalb zur Unterscheidung Axialvektoren, während Vektoren, die bei Spiegelung ihr Vorzeichen ändern, zur Betonung dieser Eigenschaft auch polare Vektoren heißen. Daß Axialvektoren mit ihren unterschiedlichen Eigenschaften Elemente anderer Vektorräume sind, wird oft schon an ihren Maßeinheiten deutlich, die verbieten, sie zu polaren Vektoren zu addieren.

Drehwinkel und Drehachse bleiben bei Spiegelung unverändert, $\Pi\, D_{\alpha\vec{n}} \Pi^{-1} = D_{\alpha\vec{n}}$ .

Zur Berechnung von $(\vec{a} \times \vec{b})^2$ und anderer Größen mit mehreren Kreuzprodukten benötigen wir eine Formel für das Produkt zweier $\epsilon$-Symbole. Bezeichne $\pi$ je eine der 6 Permutationen von $l, m, n$ oder $i, j, k$, so gilt

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} &= \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi)\, \delta_{i\,\pi(l)}\, \delta_{j\,\pi(m)}\, \delta_{k\,\pi(n)} = \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi)\, \delta_{\pi(i)\,l}\, \delta_{\pi(j)\,m}\, \delta_{\pi(k)\,n} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}\end{aligned} \tag{2.47}$$

Das sind, da jeder der sechs Indizes drei Werte annehmen kann, $3^6 = 729$ Gleichungen. Man zeigt sie entweder durch stumpfsinniges Ausschreiben aller Gleichungen oder durch das Argument, daß beide Seiten total antisymmetrisch in $ijk$ und in $lmn$ sind und demnach durch ihre Werte für $i = 1$, $j = 2$ und $k = 3$ sowie $l = 1$, $m = 2$ und $k = 3$ festgelegt sind. Für diese Werte stimmen beide Seiten überein.

Die Antisymmetrie der rechten Seite bei Vertauschen von $i$ und $j$ etwa, zeigt sich, wenn wir sie mit umgekehrtem Vorzeichen und $i$ mit $j$ vertauscht aufschreiben und mit der ursprünglichen Summe vergleichen.

$$\begin{aligned}&-\underbrace{\delta_{jl}\delta_{im}\delta_{kn}}_{1} - \underbrace{\delta_{jm}\delta_{in}\delta_{kl}}_{2} - \underbrace{\delta_{jn}\delta_{il}\delta_{km}}_{3} + \underbrace{\delta_{jl}\delta_{in}\delta_{km}}_{4} + \underbrace{\delta_{jn}\delta_{im}\delta_{kl}}_{5} + \underbrace{\delta_{jm}\delta_{il}\delta_{kn}}_{6} \\ &= \underbrace{\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}}_{6} + \underbrace{\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}}_{5} + \underbrace{\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}}_{4} - \underbrace{\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}}_{3} - \underbrace{\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}}_{2} - \underbrace{\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}}_{1}\end{aligned} \tag{2.48}$$

Die auf beiden Seiten gleich gekennzeichneten Terme sind gleich, weil sie sich nur durch die Reihenfolge von Zahlenfaktoren (jedes $\delta$ hat den Wert 0 oder 1) in einem Produkt unterscheiden.

Summiert man die Gleichung (2.47), so folgt mit (1.26) und, Achtung, $\delta_{nn} = 3$ (1.27),

$$\epsilon_{ijn}\ \epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\ , \tag{2.49}$$

$$\epsilon_{imn}\epsilon_{lmn} = 2\delta_{il}\ , \tag{2.50}$$

$$\epsilon_{lmn}\epsilon_{lmn} = 6\ . \tag{2.51}$$

Damit ergibt sich die Länge des Kreuzproduktes, das wir einfachheitshalber in einer Orthonormalbasis auswerten,

$$\begin{gathered}\epsilon_{nij}a^i b^j \epsilon_{nlm} a^l b^m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a^i b^j a^l b^m = a^i a^i b^j b^j - a^i b^i a^j b^j \\ (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\, |\vec{b}|^2\, \sin^2(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))\end{gathered} \tag{2.52}$$

Ebenso ergibt sich das wiederholte Kreuzprodukt. Es ist nicht assoziativ.

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,))^i &= \epsilon_{ijn}a^j\epsilon_{nkl}b^kc^l = (\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})a^jb^kc^l = b^i\,a^jc^j - c^i\,a^jb^j \\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,) &= \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned} \tag{2.53}$$

## Dichten

In $n$-dimensionalen Vektorräumen $\mathcal{V}$ sind $p$-Spate ($p \leq n$), auch Parallelflach oder Parallelepiped genannt, Punktmengen, die von einem Eckpunkt $e$ ausgehend von $p$ Kantenvektoren $u_1, u_2, \ldots u_p$, aufgespannt werden,

$$\{x : x = e + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i \quad \text{mit} \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1\}\,. \tag{2.54}$$

Das $p$-Volumen $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p$ des $p$-Spats definieren wir analog zum zwei- und dreidimensionalen Spat als linear in jedem der Kantenvektoren $u_i = e_j u^j{}_i$, $i = 1, 2, \ldots p$. Es wechselt sein Vorzeichen, wenn wir eine Kante, etwa $u_1$ in $-u_1$, spiegeln oder wenn wir zwei Kantenvektoren vertauschen. Wir betrachten also Volumen und Hohlvolumen, die man miteinander verrechnen kann.

Wegen der Multilinearität ist das $p$-Volumen $p$-Spats eine $p$-fache Summe[1] der Volumina von Basis-$p$-Spaten $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_p}$ mit $i_1 < i_2 \ldots < i_p$. Die Spate mit permutierten Kanten sind nicht linear unabhängig, sondern unterscheiden sich nur um das Vorzeichen der Permutation,

$$\begin{aligned}u_1 \wedge u_2 \ldots \wedge u_p &= e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_p}\, u^{i_1}{}_1\, u^{i_2}{}_2 \ldots u^{i_p}{}_p \\ &= \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_p} \sum_{\pi\in S_p} \operatorname{sign}(\pi)\, u^{i_{\pi(1)}}{}_1\, u^{i_{\pi(2)}}{}_2 \ldots u^{i_{\pi(p)}}{}_p\,.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Jede vorzeichenbehaftete Summe über alle Permutationen $\pi \in S_p$

$$X_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_{\pi\in S_p} \operatorname{sign}(\pi)\, Y_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \ldots i_{\pi(p)}} \tag{2.56}$$

stimmt für jedes $\pi' \in S_p$ bis auf das Vorzeichen $\operatorname{sign}(\pi')$ mit der Summe über alle Permutationen $\pi \circ \pi'$ überein, denn mit $\pi$ durchläuft auch $\pi \circ \pi'$ alle Elemente von $S_p$. Zudem gilt $\operatorname{sign}(\pi \circ \pi') = \operatorname{sign}(\pi)\operatorname{sign}(\pi')$ (2.9). Daher ist die vorzeichenbehaftete Summe total antisymmetrisch unter Vertauschung irgend eines Indexpaares

$$X_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \operatorname{sign}(\pi') \sum_{\pi\in S_p} \operatorname{sign}(\pi)\, Y_{i_{\pi(\pi'(1))} i_{\pi(\pi'(2))} \ldots i_{\pi(\pi'(p))}} = \operatorname{sign}(\pi') X_{i_{\pi'(1)} i_{\pi'(2)} \ldots i_{\pi'(p)}}\,. \tag{2.57}$$

[1] Zur Notation der $p$-fachen Summe braucht man $p$ verschiedene Indizes. Statt verschiedener Buchstaben schreiben wir verschieden indizierte Buchstaben, $i_1, i_2 \ldots i_p$.

Die Produkte $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_p}$ mit $i_1 < i_2 \ldots < i_p$ sind linear unabhängig und bilden demnach eine Basis des $n!/((n-p)!\,p!)$-dimensionalen Vektorraumes $\Lambda^p(\mathcal{V})$, der von den Volumina von $p$-Spaten aufgespannt wird.

$p$-Dichten $F$ sind dual zu $p$-Spaten und ordnen ihnen ihren $F$-Inhalt zu. Der $F$-Inhalt ist linear in jeder Kante des $p$-Spats

$$\begin{aligned} F(u_1 \wedge u_2 \ldots \wedge u_p) &= F(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_p})\, u^{i_1}{}_1\, u^{i_2}{}_2 \ldots u^{i_p}{}_p \\ &= \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} F_{i_1\, i_2 \ldots i_p} \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sign}(\pi)\, u^{i_{\pi(1)}}{}_1\, u^{i_{\pi(2)}}{}_2 \ldots u^{i_{\pi(p)}}{}_p \ . \end{aligned} \tag{2.58}$$

Er ist linear in den Komponenten

$$F_{i_1 i_2 \ldots i_p} = F(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_p}) = \operatorname{sign}(\pi)\, F_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \ldots i_{\pi(p)}} \tag{2.59}$$

der $p$-Dichte, die total antisymmetrisch unter Permutationen $\pi \in S_p$ sind, und linear in den Komponenten jedes Kantenvektors.

Das Volumen eines $n$-Spats $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n$ im $n$-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{V}$ ist linear in jedem der $n$ Kantenvektoren und total antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Vektoren. Daher verschwinden in der $n$-fachen Summe

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} u^{i_1}{}_1 u^{i_2}{}_2 \ldots u^{i_n}{}_n \tag{2.60}$$

alle Terme, in denen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ keine Permutation von $1, 2, \ldots n$ sind. Im übrigen stimmt $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ bis auf das Vorzeichen dieser Permutation mit

$$\mathfrak{e} = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \tag{2.61}$$

überein. Der Vorzeichenfaktor definiert das $\epsilon$-Symbol in $n$ Dimensionen,

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}\, e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \ . \tag{2.62}$$

$$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{cases} 1\ , & \text{falls } i_1 i_2 \ldots i_n \text{ gerade Permutation von } 1, 2 \ldots n \text{ ist,} \\ -1\ , & \text{falls } i_1 i_2 \ldots i_n \text{ ungerade Permutation von } 1, 2 \ldots n \text{ ist,} \\ 0\ , & \text{falls } i_1 i_2 \ldots i_n \text{ keine Permutation von } 1, 2 \ldots n \text{ ist.} \end{cases} \tag{2.63}$$

Damit schreibt sich das Volumen des $n$-Spats als

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n = \mathfrak{e}\, \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} u^{i_1}{}_1\, u^{i_2}{}_2 \ldots u^{i_n}{}_n = \mathfrak{e} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, u^{\pi(1)}{}_1 u^{\pi(2)}{}_2 \ldots u^{\pi(n)}{}_n \ . \tag{2.64}$$

Jede im Spat enthaltene Ladung $Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ist bei konstanter Ladungsdichte $\rho$ proportional zum Volumen,

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \rho\, u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n \ . \tag{2.65}$$

# 3 Lineare Abbildungen

Lineare Selbstabbildungen $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eines Vektorraums $\mathcal{V}$ beispielsweise Drehungen, Streckungen, Scherungen, Lorentztransformationen, bilden gerade Linien auf gerade Linien ab. Daher stammt ihre Name „linear“.

Die Bilder dreier sich schneidender Geraden sind (in mindestens zwei Dimensionen) drei sich schneidende Geraden. Also werden Dreiecke auf Dreiecke abgebildet und die Bilder ihrer Kantenvektoren $a$, $b$ und $a + b$, das sind Differenzvektoren, erfüllen

$$L(a + b) = L(a) + L(b) \ , \quad L(\lambda\, a) = \lambda\, L(a) \ . \tag{3.1}$$

Wegen dieser Linearitätseigenschaft ist die Abbildung $L$ dadurch festgelegt, wie $L$ auf eine Basis $e_1, e_2 \dots e_n$ wirkt, $L(a) = L(e_j a^j) = L(e_j)a^j$. Dabei ist $L(e_j)$, das Bild des $j$-ten Basisvektors, eine Linearkombination der Basis,

$$\begin{gathered} L(e_j) = e_i\, L^i{}_j \ , \\ L(a) = L(e_j\, a^j) = L(e_j)\, a^j = e_i\, L^i{}_j\, a^j \ . \end{gathered} \tag{3.2}$$

Also ist $L$ in dieser Basis vollständig durch die Koeffizienten $L^i{}_j$ gegeben. Man ordnet sie als Matrix in Zeilen und Spalten an,

$$L = \begin{pmatrix} L^1{}_1 & L^1{}_2 & \cdots & L^1{}_n \\ L^2{}_1 & L^2{}_2 & \cdots & L^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^n{}_1 & L^n{}_2 & \cdots & L^n{}_n \end{pmatrix} \ . \tag{3.3}$$

Dabei steht das Matrixelement $L^i{}_j$ in der Matrix $L$ in der Zeile Nummer $i$ und der Spalte Nummer $j$. Der von links erste Index numeriert die Zeile, der zweite die Spalte. Die Matrixelemente so mit ihrer Zeilen- und Spaltenzahl zu bezeichnen, stammt von Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646 -1716) [18], dem Namenspatron der Universität Hannover.

Die $j$-te Spalte der Matrix $L$ enthält die Komponenten des Bildes des $j$-ten Basisvektors, $L(e_j) = e_i\, L^i{}_j$ . Zum Formelbild dieser Gleichung: wenn man das Symbol $L$ von links durch den Basisvektor $e_j$ zieht, dann schiebt es wie ein Schneeräumer den Index $j$ vor sich her und ein nebeneinander stehendes Summationsindexpaar $i$ verbindet wie ein Abschleppseil die Basisvektoren mit den Matrixelementen.

Notiert man die Komponenten des Vektors $L(a)$ als eine Spaltenmatrix, so hat sie in der Zeile $i$ die Komponente $a'^i = L(a)^i = L^i{}_j\, a^j$, also das Produkt der $i$-ten Zeile der Matrix $L$ mal der Spalte der Komponenten von $a$.

$$\begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ \vdots \\ a'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^1{}_1\, a^1 + L^1{}_2\, a^2 + \ldots + L^1{}_n\, a^n \\ L^2{}_1\, a^1 + L^2{}_2\, a^2 + \ldots + L^2{}_n\, a^n \\ \vdots \\ L^n{}_1\, a^1 + L^n{}_2\, a^2 + \ldots + L^n{}_n\, a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^1{}_1 & L^1{}_2 & \cdots & L^1{}_n \\ L^2{}_1 & L^2{}_2 & \cdots & L^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^n{}_1 & L^n{}_2 & \cdots & L^n{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Bei gegebener Basis gehört zu jeder linearen Abbildung genau eine Matrix und zu jeder Matrix genau eine lineare Abbildung. Daher verwendet man die Begriffe lineare Abbildung und Matrix oft austauschbar. Aber ihre Entsprechung hängt von der Basis ab.

Da Summe und Vielfache von linearen Abbildungen wieder lineare Abbildungen sind, können sie sinnvoll addiert und vervielfältigt werden, sie bilden Vektorräume,

$$\begin{aligned} (L+M)(a) &= L(a)+M(a)\ , & (\lambda L)(a) &= \lambda L(a)\ ,\\ (L+M)^i{}_j &= L^i{}_j + M^i{}_j\ , & (\lambda L)^i{}_j &= \lambda L^i{}_j\ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Matrizen werden wie Vektoren komponentenweise addiert und mit Zahlen multipliziert. Hintereinanderausführen von linearen Abbildungen definiert das Produkt der Matrizen,[1]

$$L(M(e_j)) = L(e_k M^k{}_j) = L(e_k)\, M^k{}_j = e_i\, L^i{}_k\, M^k{}_j = e_i (L\,M)^i{}_j\ . \tag{3.6}$$

Die Matrix $L\,M$, die zu den hintereinander ausgeführten Abbildungen $M$ gefolgt von $L$ gehört, hat die Matrixelemente

$$(L\,M)^i{}_j = L^i{}_k\, M^k{}_j = L^i{}_1\, M^1{}_j + L^i{}_2\, M^2{}_j + \dots\ . \tag{3.7}$$

Bei der Produktmatrix $LM$ steht in der Zeile Nummer $i$ und der Spalte Nummer $j$ das Produkt der $i$-ten Zeile von $L$ mit der $j$-ten Spalte von $M$.

Beim Matrixprodukt wird Zeile mit Spalte multipliziert.

Im Formelbild $(L\,M)^i{}_j = L^i{}_k\, M^k{}_j$ ist $i$ auf beiden Seiten der erste und obere und $j$ der letzte und untere Index. Rechts in der Mitte ist das Indexpaar unmittelbar benachbart und bezeichnet eine Summation.

Beispiele: $n = 2$, Spiegelung an der $x$-Achse,

$$\begin{gathered} L(e_1) = e_1\ ,\quad L(e_2) = -e_2\ ,\\ L(e_1\, a^1 + e_2\, a^2) = e_1\, a^1 + e_2\,(-a^2)\ ,\\ a'^1 = a^1\ ,\quad a'^2 = -a^2\ ,\\ \begin{pmatrix} a'^1\\ a'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1\\ a^2 \end{pmatrix}\ . \end{gathered} \tag{3.8}$$

Spiegelung an der Diagonalen,

$$\begin{gathered} M(e_1) = e_2\ ,\quad M(e_2) = e_1\ ,\\ M(e_1\, a^1 + e_2\, a^2) = e_2\, a^1 + e_1\, a^2\ ,\\ a'^1 = a^2\ ,\quad a'^2 = a^1\ ,\\ \begin{pmatrix} a'^1\\ a'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1\\ a^2 \end{pmatrix}\ . \end{gathered} \tag{3.9}$$

Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ. $M\,L$, hier die Drehung um 90°,

$$M\,L = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

[1] Bei rechts notierten Vektorkomponenten bleiben die Summationsindexpaare unmittelbar benachbart. Notiert man die Komponenten links von den Basisvektoren, wird das Formelbild unübersichtlicher.

ist nicht $L\,M$, hier die Drehung um $-90°$

$$L\,M = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\ . \tag{3.11}$$

Die Differenz

$$[A, B] = AB - BA \tag{3.12}$$

ist der Kommutator von $A$ mit $B$. $A$ vertauscht oder kommutiert mit $B$, falls $AB = BA$ gilt, also falls der Kommutator $[A, B] = 0$ verschwindet.

Matrixmultiplikation ist assoziativ, $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$, und distributiv

$$(A\,(B\,C))^i{}_j = A^i{}_k\,(B\,C)^k{}_j = A^i{}_k\,B^k{}_l\,C^l{}_j = (A\,B)^i{}_l\,C^l{}_j = ((A\,B)\,C)^i{}_j \tag{3.13}$$

$$A\,(B + C) = A\,B + A\,C\ ,\quad A\,(\lambda\,B) = \lambda\,A\,B\ . \tag{3.14}$$

Zur identischen Abbildung, $\mathbf{1} : a \mapsto a$, gehört die $\mathbf{1}$-Matrix. Wegen $\mathbf{1}(e_j) = e_j = e_i\,\delta^i{}_j$ (1.26) sind ihre Matrixelemente

$$\mathbf{1}^i{}_j = \delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j\\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j\end{cases}\ ,\quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathbf{1}A = A\mathbf{1} = A\ . \tag{3.15}$$

Jede Abbildung $A$ vertauscht mit jedem Vielfachen der $\mathbf{1}$, $\lambda A = A\lambda$.

Zur Nullabbildung, $0 : a \mapsto 0$, gehört die 0-Matrix

$$0 = \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\ ,\quad 0A = A0 = 0\ . \tag{3.16}$$

Permutiert eine lineare Abbildung $D_\pi$ die Basisvektoren, $D_\pi(e_j) = e_{\pi(j)}$, $\pi \in S_n$, so sind ihre Matrixelemente

$$D_\pi{}^i{}_j = \delta^i{}_{\pi(j)} = \delta^{\pi^{-1}(i)}{}_j\ . \tag{3.17}$$

Es ist ja $\pi(j) = i$ genau dann, wenn $j = \pi^{-1}(\pi(j)) = \pi^{-1}(i)$ ist. Eine Permutationsmatrix hat in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 und sonst Nullen. Das Produkt zweier Permutationsmatrizen $D_\pi$ und $D_{\pi'}$, $\pi, \pi' \in S_n$, ist die Permutationsmatrix $D_{\pi''}$, die zu den hintereinander ausgeführten Permutationen, $\pi'' = \pi \circ \pi'$, gehört,

$$D_\pi D_{\pi'} = D_{\pi\circ\pi'}\ ,\quad (D_\pi D_{\pi'})^i{}_j = \delta^{\pi^{-1}(i)}{}_k\,\delta^k{}_{\pi'(j)} = \delta^{\pi^{-1}(i)}{}_{\pi'(j)} = \delta^i{}_{\pi(\pi'(j))}\ . \tag{3.18}$$

Permutationsmatrizen sind eine Darstellung der Permutationen.

Drehungen $D$ in $n = 2$ Dimensionen um einen Drehwinkel $\varphi$, $D(a) = a'$, sind gegeben durch

$$\begin{aligned} e'_1 &= \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2\ ,\\ e'_2 &= -\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2\ , \end{aligned} \qquad D = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\ ,$$

$$\begin{pmatrix}a'^1\\ a'^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^1\\ a^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\, a^1 - \sin\varphi\, a^2\\ \sin\varphi\, a^1 + \cos\varphi\, a^2\end{pmatrix}\ . \tag{3.19}$$

Das Längenquadrat ist invariant unter Drehungen, ($c := \cos\varphi$ , $s := \sin\varphi$),

$$(c\,a^1 - s\,a^2)^2 + (s\,a^1 + c\,a^2)^2 = (a^1)^2(c^2+s^2) + (a^2)^2(c^2+s^2) = (a^1)^2 + (a^2)^2 \ . \quad (3.20)$$

Demnach sind auch alle Skalarprodukte invariant, denn sie sind Differenzen invarianter Längenquadrate (1.39). Längen und Winkel werden durch Drehungen nicht geändert.

## Inverse Matrix

Zu manchen linearen Abbildungen $L$ existiert das Inverse $L^{-1}$, $L^{-1}L = \mathbf{1}$,

$$L^{-1\,i}{}_k\, L^k{}_j = \delta^i{}_j \ , \quad (3.21)$$

zum Beispiel bei Drehstreckungen $M$ die inverse Streckung und Rückdrehung $M^{-1}$

$$M = r\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \ , \quad M^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \ . \quad (3.22)$$

Aber eine inverse Matrix existiert nicht immer, wie

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & c\end{pmatrix} \quad (3.23)$$

zeigt. Egal, wie man hier die Matrixelemente $a, b, c, d$ wählt, erhält man als Produkt nicht die $\mathbf{1}$-Matrix.

Wenn die Bilder einer Basis $L(e_1) = e_1{}' \ldots L(e_n) = e_n{}'$ eine Basis bilden – dazu reicht in endlich dimensionalen Räumen, daß die $e_i{}'$ linear unabhängig sind – dann existiert die inverse Abbildung $L^{-1}$. Denn man kann jeden Basisvektor $e_k$ als Linearkombination der neuen Basis $e_i{}'$ schreiben, $e_i = e_j' N^j{}_i$ und durch $N(e_i') = e_j' N^j{}_i$ eine Abbildung $N$ definieren, die $e_1', e_2', \ldots$ auf $e_1, e_2, \ldots$ abbildet. Aber dann läßt $NL$ die Basis $e_1, e_2, \ldots$ und daher alle Vektoren invariant, $NLe_i = Ne_i' = e_i$ . Ebenso läßt $LN$ die Basis $e_1', e_2', \ldots$ und daher alle Vektoren invariant. Es ist also $NL = 1 = LN$ und $N = L^{-1}$.

Einen unendlich dimensionalen Vektorraum $\mathcal{V}$ kann $L$ auf einen Unterraum abbilden und linksinvertierbar sein, ohne daß ein Rechtsinverses existiert, zum Beispiel im Vektorraum aller Polynome $\sum a_n x^n$ einer Variablen $x$ mit Zahlenkoeffizienten $a_n$ die Abbildung $L(\sum a_n x^n) = \sum a_n x^{n+1}$, die jedes Polynom mit $x$ multipliziert. Ein Linksinverses ist die Abbildung $L^{-1}(\sum b_n x^n) = \sum b_{n+1} x^n$ . Ein Rechtsinverses kann nicht existieren, da $L(R(a_0))$ nicht das $x$-unabhängige Polynom $a_0$ sein kann, egal auf welches Polynom $R$ die Zahl $a_0$ abbildet.

Sind die Bilder der Basisvektoren $e_1$, $e_2 \ldots$ linear abhängig, sind also in $0 = L(e_i)\,\lambda^i$ nicht alle $\lambda^i$ Null, dann wird wegen $L(e_i)\,\lambda^i = L(e_i\,\lambda^i)$ der Vektor $\lambda = e_i\,\lambda^i \neq 0$ ebenso wie 0 auf 0 abgebildet, und $L$ kann nicht invertierbar sein, weil 0 mehrere Urbilder hat.

Sind $L$ und $M$ invertierbar, dann auch $L\,M$ ,

$$M^{-1}L^{-1} = (L\,M)^{-1} \ , \quad (3.24)$$

denn $(M^{-1}L^{-1})(L\,M) = M^{-1}(L^{-1}L)\,M = M^{-1}\,M = \mathbf{1}$.

## Determinante

Ob in einem $n$-dimensionalen Raum $n$ Vektoren linear unabhängig sind, zeigt sich an dem Volumen, das sie aufspannen. Es verschwindet genau dann, wenn die Vektoren linear abhängig sind.

Die Determinante einer linearen Abbildung $L$ ist der Faktor, um den sie das Volumen vergrößert,

$$L(e_1) \wedge L(e_2) \wedge \ldots \wedge L(e_n) = \det L \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \ , \tag{3.25}$$

zum Beispiel $\det \mathbf{1} = 1$. Der Wert der Determinante von $L$ *bestimmt*, ob $L$ invertierbar ist. Es existiert $L^{-1}$ (in Zeichen $\exists L^{-1}$) genau dann, wenn die Determinante nicht verschwindet,

$$\exists L^{-1} \Leftrightarrow \det L \neq 0 \ . \tag{3.26}$$

Deshalb heißt die Determinante *Determinante*. Sie ist durch (2.64) gegeben.

$$\det L = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} L^{i_1}{}_1 L^{i_2}{}_2 \ldots L^{i_n}{}_n = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) L^{\pi(1)}{}_1 L^{\pi(2)}{}_2 \ldots L^{\pi(n)}{}_n \tag{3.27}$$

Zum Beispiel ist die Determinante einer $2 \times 2$-Matrix $L$ (2.15)

$$\det L_{2\times 2} = L^1{}_1 L^2{}_2 - L^2{}_1 L^1{}_2 \tag{3.28}$$

und, dies ist die Flaschenregel[2] von Sarrus, die Determinante einer $3 \times 3$-Matrix $L$ (2.25)

$$\det L_{3\times 3} = L^1{}_1 L^2{}_2 L^3{}_3 + L^2{}_1 L^3{}_2 L^1{}_3 + L^3{}_1 L^1{}_2 L^2{}_3 - L^2{}_1 L^1{}_2 L^3{}_3 - L^1{}_1 L^3{}_2 L^2{}_3 - L^3{}_1 L^2{}_2 L^1{}_3 \ . \tag{3.29}$$

Die Determinante einer $n \times n$-Matrix besteht aus $n!$ Summanden. Für Dreiecksmatrizen $\Delta$, die unterhalb der Diagonalen verschwinden, ($\Delta^i{}_j = 0$ für $i > j$), vereinfacht sie sich zu einem Term $\det \Delta = \Delta^1{}_1 \Delta^2{}_2 \cdots \Delta^n{}_n$.

Das Volumen ist antisymmetrisch in jedem Paar von Faktoren, $a \wedge b = -b \wedge a$ (2.17). Also verändert jede Permutation $\pi$ der Faktoren $L(e_1) \wedge \ldots \wedge L(e_n)$ den Wert des Volumens um das Vorzeichen der Permutation,

$$L(e_{\pi(1)}) \wedge L(e_{\pi(2)}) \wedge \ldots \wedge L(e_{\pi(n)}) = \operatorname{sign}(\pi) L(e_1) \wedge L(e_2) \wedge \ldots \wedge L(e_n) \ . \tag{3.30}$$

Da in der Spalte $j$ der Matrix $L$ die Komponenten des Vektors $L(e_j)$ stehen, zeigt dies, daß das Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen der Determinante wechselt. Ist $j_1, j_2, \ldots j_n$ keine Permutation von $1, 2, \ldots n$, so stimmen mindestens zwei Werte überein und das Volumen verschwindet. Mit dem $\epsilon$-Symbol (2.63) zusammengefaßt, gilt also (2.62)

$$L(e_{j_1}) \wedge L(e_{j_2}) \wedge \ldots \wedge L(e_{j_n}) = \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} L(e_1) \wedge L(e_2) \wedge \ldots \wedge L(e_n) \tag{3.31}$$

und

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} L^{i_1}{}_{j_1} L^{i_2}{}_{j_2} \cdots L^{i_n}{}_{j_n} = \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} \det L \ . \tag{3.32}$$

[2] Schreibt man die $3 \times 3$-Matrix auf ein Etikett, das eine Flasche umhüllt, dann ist ihre Determinante die Summe der Produkte des oberen Matrixelements mit dem rechts darunter stehenden und dem darunter rechts stehenden Matrixelement minus der Summe der Produkte der schräg links untereinander stehenden Matrixelemente.

Damit zeigt man den Determinantenproduktsatz: Bei verketteten linearen Abbildungen vergrößert sich das Volumen um das Produkt der Vergrößerungsfaktoren der einzelnen Abbildungen,

$$\det(\mathsf{LM}) = (\det \mathsf{L})(\det \mathsf{M}) \ . \tag{3.33}$$

Zum Beweis schreibt man die Determinante des Produkts aus, ordnet Faktoren um und verwendet (3.32)

$$\begin{aligned}
\det(\mathsf{LM}) &= \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \mathsf{L}^{i_1}{}_{j_1} \mathsf{M}^{j_1}{}_1 \, \mathsf{L}^{i_2}{}_{j_2} \mathsf{M}^{j_2}{}_2 \ \cdots \mathsf{L}^{i_n}{}_{j_n} \mathsf{M}^{j_n}{}_n = \\
&= \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \mathsf{L}^{i_1}{}_{j_1} \, \mathsf{L}^{i_2}{}_{j_2} \cdots \mathsf{L}^{i_n}{}_{j_n} \mathsf{M}^{j_1}{}_1 \mathsf{M}^{j_2}{}_2 \cdots \mathsf{M}^{j_n}{}_n = \\
&= (\det \mathsf{L}) \, \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \mathsf{M}^{j_1}{}_1 \mathsf{M}^{j_2}{}_2 \cdots \mathsf{M}^{j_n}{}_n = (\det \mathsf{L})(\det \mathsf{M}) \ .
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Aus $\det(\mathsf{L}^{-1}\mathsf{L}) = \det \mathbf{1} = 1$ folgt $1 = (\det \mathsf{L}^{-1})(\det \mathsf{L})$, also

$$\det(\mathsf{L}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathsf{L}} \ . \tag{3.35}$$

Die lineare Abbildung $\mathsf{D}_\pi$ (3.17), die Basisvektoren permutiert, $\mathsf{D}_\pi e_i = e_{\pi(i)}$, $\pi \in \mathrm{S}_n$, ändert das Volumen des Basisspats um das Vorzeichen der Permutation, $\det \mathsf{D}_\pi = \mathrm{sign}(\pi)$. Ihr Produkt $\mathsf{LD}_\pi$ mit einer Matrix $\mathsf{L}$ permutiert die Spalten von $\mathsf{L}$, $(\mathsf{LD}_\pi)^i{}_k = \mathsf{L}^i{}_{\pi(k)}$. In umgedrehter Produktreihenfolge $\mathsf{D}_\pi \mathsf{L}$ werden, wie $\delta^i{}_{\pi(j)} = \delta^{\pi^{-1}(i)}{}_j$ zeigt, die Zeilen der Matrix $\mathsf{L}$ invers permutiert, $(\mathsf{D}_\pi \mathsf{L})^i{}_k = \mathsf{L}^{\pi^{-1}(i)}{}_k$. Nach dem Determinantenproduktsatz wechselt daher die Determinante jeder Matrix beim Vertauschen zweier Zeilen ebenso wie beim Vertauschen zweier Spalten ihr Vorzeichen.

Der Determinantenproduktsatz zeigt, daß die Determinante einer linearen Abbildung $\mathsf{L}$ nicht von der Basis $e_1, e_2 \dots e_n$ abhängt, die die Matrix $\mathsf{L}$ durch $\mathsf{L}(e_i) = e_j \mathsf{L}^j{}_i$ definiert. Sei nämlich

$$e'_i = \mathsf{N}(e_i) \tag{3.36}$$

eine zweite Basis, dann ist die Matrix $\mathsf{N}$ invertierbar. Die Matrixelemente von $\mathsf{L}$ in der zweiten Basis erhält man als Komponenten von

$$\mathsf{L}(e'_i) = \mathsf{LN}(e_i) = \mathsf{N}\big((\mathsf{N}^{-1}\mathsf{LN})e_i\big) = \mathsf{N}\big(e_j(\mathsf{N}^{-1}\mathsf{LN})^j{}_i\big) = e'_j(\mathsf{N}^{-1}\mathsf{LN})^j{}_i \tag{3.37}$$

Es hat also $\mathsf{L}$ in der Basis $\mathsf{N}(e_1), \mathsf{N}(e_2), \dots$ dieselben Matrixelemente wie

$$\mathsf{L}' = \mathsf{N}^{-1} \, \mathsf{L} \, \mathsf{N} \tag{3.38}$$

in der Basis $e_1, e_2, \dots$. Die Determinanten der Matrizen $\mathsf{L}' = \mathsf{N}^{-1} \, \mathsf{L} \, \mathsf{N}$ und $\mathsf{L}$ stimmen nach Determinantenproduktsatz überein,

$$\det(\mathsf{N}^{-1} \, \mathsf{L} \, \mathsf{N}) = (\det \mathsf{N})^{-1} (\det \mathsf{L}) \, (\det \mathsf{N}) = \det \mathsf{L} \ . \tag{3.39}$$

Entsprechend gilt für jeden Vektor

$$v = \mathsf{NN}^{-1}v = \mathsf{N}\big(\mathsf{N}^{-1} e_i v^i\big) = \mathsf{N}(e_j) \mathsf{N}^{-1\,j}{}_i v^i = e'_j v'^j \ , \tag{3.40}$$

daß er in der Basis $\mathsf{N}(e_1), \mathsf{N}(e_2), \dots$ dieselben Komponenten hat wie $\mathsf{N}^{-1}v$ in der Basis $e_1, e_2, \dots$,

$$v'^j = \mathsf{N}^{-1\,j}{}_i \, v^i \ . \tag{3.41}$$

## Körperfeste Transformationen

Die Lage eines festen Körpers kann man angeben durch den Ort eines herausgegriffenen Punktes, etwa des Schwerpunktes, den man als körperfesten Ursprung verwendet, und durch drei mit dem Körper verbundene orthonormale Basisvektoren. Sie definieren körperfeste Achsen $e'_1$, $e'_2$ und $e'_3$. Sie gehen aus einer gewählten Ausgangslage $e_1, e_2$ und $e_3$ durch eine Drehung $N$ hervor, die die Lage des Körpers charakterisiert,

$$e'_i = N(e_i) \ . \tag{3.42}$$

Als körperfest bezeichnet man diejenige Drehung $\hat{D} = N\,D\,N^{-1}$, die auf die körperfesten Achsen $e'_l$ genauso wirkt wie $D$ (genannt die raumfeste Drehung) auf $e_k$, mit anderen Worten, in der $e'$-Basis hat $\hat{D}$ dieselben Matrixelemente wie $D$ in der $e$-Basis,

$$\hat{D}(e'_l) = N\,D\,N^{-1}N(e_l) = N\,D(e_l) = N(e_k)D^k{}_l = e'_k D^k{}_l \ . \tag{3.43}$$

Die körperfeste Drehung $\hat{D} = N\,D\,N^{-1}$ wirkt daher auf $N$, die Lage des Körpers, durch Multiplikation mit $D$ von rechts,

$$\hat{D}N = N\,D \ . \tag{3.44}$$

Folgt einer ersten körperfeste Drehung $\hat{D}_1$ eine zweite, $\hat{D}_2 = N_1 D_2 N_1^{-1}$ mit $N_1 = ND_1$, so geht die Lage $N_1$ in $ND_1D_2$ über. Dabei ändern sich die körperfesten Komponenten eines Vektors $v$, der nicht gedreht wird, weil er beispielsweise zu einem Fixstern zeigt, in $v'^{\,i} = (D_2^{-1}D_1^{-1})^i{}_j(N^{-1}v)^j$ .

## Die Spur einer linearen Abbildung

Ebenso wie die Determinante hängt bei einer Matrix die Summe über die Hauptdiagonalelemente, die Spur,

$$\operatorname{Sp} L = L^i{}_i \ , \tag{3.45}$$

nicht von der gewählten Basis ab. Denn wegen $A^i{}_k B^k{}_i = B^k{}_i A^i{}_k$ gilt

$$\operatorname{Sp}(A\,B) = \operatorname{Sp}(B\,A) \ , \tag{3.46}$$

und die Spur ist folglich zyklisch,

$$\operatorname{Sp}(A\,B\,C) = \operatorname{Sp}(A(B\,C)) = \operatorname{Sp}((B\,C)A) = \operatorname{Sp}(B\,C\,A) \ . \tag{3.47}$$

Aber demnach hat in einer anderen Basis $\operatorname{Sp} L' = \operatorname{Sp}(N^{-1}LN) = \operatorname{Sp}(NN^{-1}L) = \operatorname{Sp} L$ die Spur denselben Wert. Da sie, anders als die Matrixelemente $L^i{}_j$ , nicht von der Basis abhängt, ist sie eine Funktion der linearen Abbildung $L$.

## Rechteckmatrizen, Transponieren

Lineare Abbildungen $L$ eines $n$-dimensionalen Vektorraumes $\mathcal{V}$ in einen $m$-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{W}$ sind durch ihre Wirkung $L(e_i)$ auf die Basisvektoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ von $\mathcal{V}$ festgelegt,

$$L : \begin{cases} \mathcal{V} & \rightarrow \quad \mathcal{W} \\ a & \mapsto \quad L(a) = L(e_i\,a^i) = L(e_i)\,a^i = \tilde{e}_r\,L^r{}_i\,a^i \end{cases} \ . \tag{3.48}$$

Die Bilder der Basisvektoren sind Linearkombinationen der Basisvektoren $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots \tilde{e}_m$ von $\mathcal{W}$, die Komponenten von $L(e_i)$ bilden die $i$-te Spalte der Rechteckmatrix, die $L$ in diesen Basen von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ darstellt,

$$\begin{pmatrix} L^1{}_1 & \cdots & L^1{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L^m{}_1 & \cdots & L^m{}_n \end{pmatrix} \quad m = \dim \mathcal{W}, n = \dim \mathcal{V} \ . \tag{3.49}$$

Die Zeilenzahl $m$ der $m \times n$-Matrix ist die Dimension des Zielraumes $\mathcal{W}$, die Spaltenzahl $n$ die Dimension des Urbildraumes $n$. Rechteckmatrizen können multipliziert werden, wenn die zugehörigen linearen Abbildungen hintereinander ausgeführt werden können, wenn also der Zielraum der einen Abbildung der Urbildraum der nächsten Abbildung ist. Dann stimmt im Matrixprodukt die Zeilenzahl der rechten Matrix mit der Spaltenzahl der linken Matrix überein.

Der Dualraum $\mathcal{V}^*$ eines Vektorraumes $\mathcal{V}$ besteht aus den linearen Abbildungen $u : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ des Vektorraumes $\mathcal{V}$ in die reellen (oder komplexen) Zahlen,

$$u : v \mapsto u(v) = u(e_i \, v^i) = u(e_i) \, v^i = u_i \, v^i \ . \tag{3.50}$$

Zu jedem Dualvektor $u$ gehört demnach eine einzeilige $1 \times n$-Matrix mit Komponenten $u(e_i) = u_i$, also ein Zeilenvektor, der durch Matrixmultiplikation, Zeile mal Spalte, auf den Spaltenvektor der Komponenten von $v \in \mathcal{V}$ angewendet wird, $u(v) = u_i \, v^i$.

Auch jeder Spaltenvektor $v$ kann als Matrix einer linearen Abbildung $v$ begriffen werden. Sie bildet $\mathbb{R}$ nach $\mathcal{V}$ ab, insbesondere $\lambda \in \mathbb{R}$ auf $\lambda v$.

Wendet man $u \in \mathcal{V}^*$ auf linear transformierte Vektoren $Lv$ an, so ist $u(Lv) = u'(v)$ eine lineare Abbildung $u' = u \circ L$ von Vektoren $v$ in die Zahlen, wobei $u'$ linear von $u$ abhängt. Die Abbildung $u \mapsto u'$ ist die zu $L$ transponierte Abbildung $L^T$

$$L^T u = u \circ L \ . \tag{3.51}$$

Transponieren wälzt die Abbildung $L$ von $\mathcal{V}$ auf $\mathcal{V}^*$ ab, $(L^T u)(v) = u(L(v))$ .

Die zugehörige Matrix wird bei Transponieren an der Hauptdiagonalen gespiegelt, denn

$$u(Lv) = u_i \, L^i{}_j \, v^j = (L^T u)_j \, v^j = L^T{}_j{}^i \, u_i \, v^j \ , \tag{3.52}$$

und da dies für alle $u$ und $v$ gilt, enthält die transponierte Matrix $L^T$ in Zeile $j$ und Spalte $i$ dasjenige Element, das in $L$ in Zeile $i$ und Spalte $j$ steht,

$$L^T{}_j{}^i = L^i{}_j \ . \tag{3.53}$$

Das Transponierte eines Produktes ist das in der Reihenfolge gespiegelte Produkt der transponierten Faktoren, ((3.51) oder (3.53), Übungsaufgabe)

$$(L\,M)^T = M^T \, L^T \ . \tag{3.54}$$

Aus $1^T = 1$ und $1 = LL^{-1}$ folgt $(L^{-1})^T L^T = 1$. Das Transponierte des Inversen ist das Inverse des Transponierten,

$$(L^{-1})^T = (L^T)^{-1} \ . \tag{3.55}$$

Die Determinanten von $\mathsf{L}$ und $\mathsf{L}^{\mathrm{T}}$ stimmen überein,

$$\det \mathsf{L} = \det \mathsf{L}^{\mathrm{T}} \ . \tag{3.56}$$

Stellt man nämlich mit (3.32) $\det \mathsf{L}$ durch $n!$ gleiche Summanden dar,

$$\det \mathsf{L} = \frac{1}{n!} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \mathsf{L}^{i_1}{}_{j_1} \mathsf{L}^{i_2}{}_{j_2} \cdots \mathsf{L}^{i_n}{}_{j_n} \ , \tag{3.57}$$

so ist dies wegen $\mathsf{L}^i{}_j = \mathsf{L}^{\mathrm{T}}{}_j{}^i$ auch die Determinante der transponierten Matrix.

Offensichtlich ändert Transponieren nicht die Spur, $\mathrm{Sp}\, \mathsf{L} = \mathrm{Sp}\, \mathsf{L}^{\mathrm{T}}$.

## Metrische Größe von Volumen

Stehen in einem Euklidischen Vektorraum $\mathcal{V}$ die Kanten $u_1, u_2, \dots u_p$ eines $p$-Spats senkrecht aufeinander und haben sie die Längen $l_1 = \sqrt{u_1 \cdot u_1}, \dots, l_p = \sqrt{u_p \cdot u_p}$, dann ist sein Volumen das Produkt dieser Längen, $|u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p| = l_1\, l_2 \dots l_p$. Es ist die Wurzel der Determinante der Skalarproduktmatrix $g_u$, deren Matrixelemente die Skalarprodukte der Kantenvektoren sind,

$$|u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p| = \sqrt{|\det g_u|} \ , \ (g_u)_{ij} = u_i \cdot u_j \ . \tag{3.58}$$

Dies bleibt richtig, auch wenn die Kantenvektoren schiefwinklig sind, denn dann sind sie die Bilder $u_i = \mathsf{L}(e_i) = e_k \mathsf{L}^k{}_i$ von senkrecht aufeinander stehenden Vektoren $e_i$, die um den Faktor $\det \mathsf{L}$ weniger $p$-Volumen aufspannen.

Die Skalarproduktmatrix $g_u$ hängt wegen $u_i \cdot u_j = (e_k \cdot e_l) \mathsf{L}^k{}_i \mathsf{L}^l{}_j = \mathsf{L}^{\mathrm{T}}{}_i{}^k (e_k \cdot e_l) \mathsf{L}^l{}_j$ durch $g_u = \mathsf{L}^{\mathrm{T}} g_e \mathsf{L}$ mit $g_e$ zusammen und nach dem Determinantenproduktsatz gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{|\det g_u|} &= \sqrt{|\det(\mathsf{L}^{\mathrm{T}} g_e \mathsf{L})|} = |\det \mathsf{L}| \sqrt{|\det(g_e)|} = |\det \mathsf{L}| |e_1 \wedge \dots \wedge e_p| \\ &= |\det \mathsf{L}\, e_1 \wedge \dots \wedge e_p| = |\mathsf{L}(e_1) \wedge \dots \wedge \mathsf{L}(e_p))| = |u_1 \wedge \dots \wedge u_p| \ . \end{aligned} \tag{3.59}$$

Im Raum $\Lambda^p(\mathcal{V})$, der von $p$-Spaten aufgespannt wird, ist durch

$$(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p) = \sum_{\pi \in S_p} \mathrm{sign}(\pi)\, (u_1 \cdot v_{\pi(1)})(u_2 \cdot v_{\pi(2)}) \dots (u_p \cdot v_{\pi(p)}) \tag{3.60}$$

ein Skalarprodukt definiert, das ihn zu einem Euklidischen Raum macht.

## Drehungen

Lineare Selbstabbildungen eines euklidischen, reellen Vektorraum, die alle Längen – und demnach Skalarprodukte und Winkel – invariant lassen, heißen orthogonale Transformationen oder Drehspiegelungen. Wenn sie zudem das Vorzeichen des Volumens nicht ändern, handelt es sich um Drehungen.

In einer Orthonormalbasis gilt für jede Drehspiegelung $\mathsf{D}$

$$\mathsf{D}(e_i) = e'_i = e_k\, \mathsf{D}^k{}_i \ , \quad e'_i \cdot e'_j = e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \ , \tag{3.61}$$

$$\delta_{ij} = (e_k\, \mathsf{D}^k{}_i) \cdot (e_l\, \mathsf{D}^l{}_j) = e_k \cdot e_l\, \mathsf{D}^k{}_i\, \mathsf{D}^l{}_j = \delta_{kl}\, \mathsf{D}^k{}_i\, \mathsf{D}^l{}_j = \mathsf{D}^k{}_i\, \mathsf{D}^k{}_j = \mathsf{D}^{\mathrm{T}}{}_i{}^k\, \mathsf{D}^k{}_j \tag{3.62}$$

$$\mathbf{1} = \mathsf{D}^{\mathrm{T}}\, \mathsf{D} \ , \quad \mathsf{D}^{\mathrm{T}} = \mathsf{D}^{-1} \ . \tag{3.63}$$

Die Bedingungen ${D^k}_i\,{D^k}_j = \delta_{ij}$ oder $D^T D = \mathbf{1}$, daß die Spaltenvektoren von $D$ normiert sind und zueinander senkrecht stehen, heißen Orthogonalitätsrelationen.

Drehspiegelungen lassen alle Skalarprodukte, nicht nur diejenigen der Basis invariant,

$$(D(a))\cdot(D(b)) = (D(e_i a^i))\cdot(D(e_j b^j)) = e'_i\cdot e'_j\,a^i\,b^j = \delta_{ij}\,a^i\,b^j = a\cdot b\ . \tag{3.64}$$

Mit dem Determinantenproduktsatz (3.34) und wegen $\det D^T = \det D$ (3.56) folgt

$$1 = \det\mathbf{1} = \det(D^T D) = (\det D^T)(\det D) = (\det D)^2\ , \tag{3.65}$$

daß die Determinante einer Drehspiegelung 1 oder −1 sein muß,

$$\det D = \pm 1\ . \tag{3.66}$$

Falls $\det D = 1$ ist, heißt die orthogonale Transformation $D$ eine Drehung.

Die Gruppe der Drehungen in $n$ Dimensionen heißt $SO(n)$, die Gruppe der speziellen, orthogonalen Transformationen. Denn ihre Determinanten haben den speziellen Wert 1.

Da die Determinante eine stetige Funktion der Matrixelemente ist, gibt es keine stetig von einem Parameter $\lambda$ abhängende Schar von Drehspiegelungen $D_\lambda$ mit $\det D_{\lambda=0} = 1$ und $\det D_{\lambda=1} = -1$: Drehungen hängen nicht stetig mit Spiegelungen zusammen.

Ist die Dimension des Vektorraumes $\mathcal{V}$ ungerade, so existiert, wie wir weiter unten zeigen, für jede Drehspiegelung stets eine Richtung $n$, $n^2 = 1$, die Drehachse, die punktweise invariant gelassen oder gespiegelt wird. Auf einen beliebigen Vektor $k$ in *drei* Dimensionen angewendet, läßt eine Drehspiegelung $D_{\alpha n}$ den Anteil $k_\parallel$ in Richtung der Drehachse $n$, $n^2 = 1$, ungeändert oder spiegelt ihn. Der zu $n$ senkrechte Teil $k_\perp$, wird in drei Dimensionen in der zu $n$ senkrechten Ebene um den Drehwinkel $\alpha$ gedreht,

$$\begin{gathered} k = k_\parallel + k_\perp\ ,\quad k_\parallel = n\,(n\cdot k)\ ,\quad k_\perp = k - n\,(n\cdot k)\ ,\\ D_{\alpha n}k = (\det D_{\alpha n})\,k_\parallel + (\cos\alpha)\,k_\perp + (\sin\alpha)\,n\times k_\perp\ . \end{gathered} \tag{3.67}$$

Unabhängig von der Drehachse geht jede Drehung gegen die identische Abbildung, wenn der Drehwinkel gegen Null oder $2\pi$ geht.

Wegen $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ stimmt zudem die Drehung um die Achse $n$ um den Winkel $\alpha$ mit der Drehung um $-n$ um den Winkel $2\pi - \alpha$ überein. Deuten wir $n$ als Richtung und $\alpha/2$ als Entfernung, in der man vom Nordpol auf einer dreidimensionalen Kugelfläche $S^3 = \{p \in \mathbb{R}^4 : (p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2+(p^4)^2 = 1\}$ längs eines Großkreises zum Punkt $p$ gelangt,[3] so erreicht man mit $\alpha = 2\pi$ den von $n$ unabhängigen Südpol, die Drehung $D_{2\pi n} = 1$. Es entspricht so jeder Drehung in drei Dimensionen ein antipodales Punktepaar $\pm p$ auf $S^3$. Diese Punktpaare bilden die Mannigfaltigkeit $S^3/\mathbb{Z}_2$, der die Gruppe $SO(3)$ bijektiv entspricht (zu $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ siehe (2.5)).

## Numerische Berechnung der Determinante

Wegen der Antisymmetrie und der spaltenweisen Linearität der Determinante ändert sie nicht ihren Wert, wenn man zu einer Spalte der Matrix ein Vielfaches einer anderen Spalte addiert. Dieses Cavalierische Prinzip benutzt man bei der numerischen Berechnung der Determinante der $n\times n$-Matrix $L$ und berechnet sie in weniger als $n!$ Schritten als Determinante einer Dreiecksmatrix.

[3] Wir bezeichnen die $n$-dimensionale *S*phäre oder Kugeloberfläche mit $S^n$.

Zunächst bringt man der numerischen Stabilität der Berechnung wegen das Matrixelement mit dem größten Betrag in die rechte, untere Ecke. Dazu vertauscht man, falls erforderlich, die $n$-te Zeile mit derjenigen des größten Matrixelements und dann seine Spalte mit der $n$-ten Spalte. Dabei ändert jede erforderliche Spalten- oder Zeilenvertauschung das Vorzeichen der Determinante. Dann schert man wie bei der Berechnung der Parallelogrammfläche (2.15) und des Spatvolumens (2.25) jeden der ersten $n-1$ Spaltenvektoren längs des $n$-ten Spaltenvektors, so daß die $n$-te Komponente der gescherten Vektoren verschwindet, ${L'^i}_j = {L^i}_j - {L^i}_n c_j$ mit $c_j = {L^n}_j / c$ und $c = {L^n}_n \neq 0$, für $1 \leq j < n$. In der Matrix $L'$ verschwinden alle Elemente in der Zeile links von ${L^n}_n$ und $L'$ hat bis auf das Vorzeichen dieselbe Determinante wie $L$.

In der resultierenden $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix der ersten $(n-1)$-Zeilen und $(n-1)$-Spalten verfährt man entsprechend. Man erhält so schließlich eine Matrix, die unterhalb der Diagonalen verschwindet. Ihre Determinante stimmt mit der ursprünglichen Determinante bis auf die Minuszeichen von den erforderlichen Zeilen- und Spaltenvertauschungen überein.

Die Determinante solch einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente. Sie verschwindet genau dann, wenn ein Diagonalelement verschwindet. Dann gibt es, wie dieses Verfahren zeigt, eine nichtverschwindende Linearkombination der Spalten der ursprünglichen Matrix, die sich zu einer Nullspalte kombiniert. Die Determinante von $L$ verschwindet genau dann, wenn die Bilder $L(e_i)$ einer Basis linear abhängig sind.

## Berechnung der inversen Matrix

Die Determinante (3.27)

$$\det L = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} {L^{i_1}}_1 {L^{i_2}}_2 \cdots {L^{i_n}}_n = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) {L^{\pi(1)}}_1 {L^{\pi(2)}}_2 \cdots {L^{\pi(n)}}_n \tag{3.68}$$

ist ein Polynom der Matrixelemente. Vom Matrixelement in der $k$-ten Zeile und der $l$-ten Spalte, $x = {L^k}_l$, hängt sie linear inhomogen ab, $\det L = ax + b$, denn sie ist linear in jeder Spalte. Der Koeffizient $a$ hängt natürlich von $k$ und $l$ und anderen Matrixelementen ab,

$$ {a^l}_k = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{l-1} k\, i_{l+1} \dots i_n} {L^{i_1}}_1 {L^{i_2}}_2 \cdots {L^{i_{l-1}}}_{l-1} \underbrace{\qquad}_{{L^k}_l \text{ fehlt}} {L^{i_{l+1}}}_{l+1} \cdots {L^{i_n}}_n \,. \tag{3.69}$$

Für den Fall $k = n$ und $l = n$ ist der Vorfaktor $a$ die Determinante der Untermatrix von $L$, die man durch Weglassen der $n$-ten Zeile und der $n$-ten Spalte erhält.

$$\det L = \sum_{\pi(n)=n} \bigl(\operatorname{sign}(\pi) {L^{\pi(1)}}_1 {L^{\pi(2)}}_2 \cdots\bigr) {L^{\pi(n)}}_n + \sum_{\pi(n)\neq n} \operatorname{sign}(\pi) {L^{\pi(1)}}_1 {L^{\pi(2)}}_2 \cdots {L^{\pi(n)}}_n$$

$$a = \sum_{\pi \in S_{n-1}} \operatorname{sign}(\pi) {L^{\pi(1)}}_1 {L^{\pi(2)}}_2 \cdots {L^{\pi(n-1)}}_{n-1} \tag{3.70}$$

Falls $k$ oder $l$ nicht $n$ sind, bringen wir ${L^k}_l$ durch zyklisches Vertauschen von $n-k$ Zeilen und $n-l$ Spalten in die rechte untere Ecke der Matrix $L$. Dabei ändert die Determinante ihr Vorzeichen um $(-1)^{(k+l)}$. Der Koeffizient $a$ in $\det L = ax + b$ ist demnach $(-1)^{(k+l)}$ mal der Determinante der Untermatrix, die man durch Streichen der Zeile $k$ und der Spalte $l$ aus $L$ erhält. Diese Determinante heißt Minor der Zeile $k$ und der Spalte $l$.

Multipliziert man die Koeffizienten $a^l{}_k$ mit $L^k{}_j$ und summiert über $k$, so erhält man

$$a^l{}_k L^k{}_j = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}\, k\, i_{l+1} \dots i_n} L^{i_1}{}_1 L^{i_2}{}_2 \cdots L^{i_{l-1}}{}_{l-1} \underbrace{L^k{}_j}_{\text{eingefügt}} L^{i_{l+1}}{}_{l+1} \cdots L^{i_n}{}_n \ . \tag{3.71}$$

Das ist Null, wenn $j$ nicht mit $l$ übereinstimmt, denn dann stimmt $j$ mit einem der Werte $1, 2 \dots l-1, l+1 \dots$ überein und $a^l{}_k L^k{}_j$ ist die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Spalten Falls $j = l$ ist, ergibt sich die Determinante,

$$a^l{}_k L^k{}_j = \delta^l{}_j \det L \ . \tag{3.72}$$

Dies ist der Determinantenentwicklungssatz. Die Determinante ist die Summe über $k$ der Produkte der Matrixelemente $L^k{}_j$ der Spalte $j$ mit ihren Minoren und dem schachbrettartigen Vorzeichen $(-1)^{(j+k)}$.

Für uns ist entscheidend, daß (für $\det L \neq 0$) $a^l{}_k / \det L$ die Matrixelemente $L^{-1\,l}{}_k$ der inversen Matrix $L^{-1}$ sind,

$$a^l{}_k = L^{-1\,l}{}_k \det L \ . \tag{3.73}$$

Die Matrixelemente von $L^{-1}$ sind rationale Funktionen der Matrixelemente von $L$. Die Matrix $L^{-1}$ enthält in der Zeile $l$ und der Spalte $k$ den Minor der Zeile $k$ und der Spalte $l$, mal $(-1)^{(k+l)}$, geteilt durch die Determinante von $L$.

## Komplexe Zahlen

Die Matrizen

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \ , \quad x, y \in \mathbb{R} \ , \tag{3.74}$$

die wir kürzer als

$$z = x + i\,y \quad , \ 1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \ , \ i = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \ , \tag{3.75}$$

schreiben, bilden einen reell zweidimensionalen Vektorraum,

$$(x + i\,y) + (u + i\,v) = (x + u) + i\,(y + v) \ . \tag{3.76}$$

In Polarkoordinaten, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan y/x$, erweisen sie sich für $z \neq 0$ als invertierbare Streckung um $r$ und Drehung um $\varphi$

$$z = r\,\bigl(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\bigr) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3.77}$$

mit dem Inversen

$$z^{-1} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2} \ . \tag{3.78}$$

Da ihr Produkt

$$(x + i\,y)\,(u + i\,v) = (x\,u - y\,v) + i\,(x\,v + y\,u) \tag{3.79}$$

assoziativ, distributiv und kommutativ ist, erfüllen sie die Rechenregeln von Zahlen. Die Nullabbildung und die Drehstreckungen in zwei Dimensionen sind ein Modell der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{x + i\,y \ , \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

Die komplexe Zahl i ist eine Wurzel aus $-1$, $i^2 = -1$. Sie ist reell linear unabhängig von allen reellen Zahlen, da jede reelle Linearkombination $x + i\,y$ nur dann verschwindet, wenn auch $0 = (x + i\,y)\,(x - i\,y) = x^2 + y^2$ gilt, wenn also sowohl $x$ als auch $y$ verschwinden.

## Komplexe Konjugation, Betragsquadrat

Die komplexe Konjugation komplexer Zahlen ist die Spiegelung an der reellen Achse (an der $x$-Achse)

$$^* : \ x + \mathrm{i}\,y \mapsto (x + \mathrm{i}\,y)^* = x - \mathrm{i}\,y \ . \tag{3.80}$$

Auf Polynome und Potenzreihen wirkt Konjugation additiv, $(f + g)^* = f^* + g^*$, bei Produkten wird jeder Faktor konjugiert, $(f\,g)^* = f^* g^*$.

Die komplexen Zahlen bilden einen reell zweidimensionalen Euklidischen Vektorraum, die komplexe Ebene, mit positiv definitem Betragsquadrat und der Orthonormalbasis $e_1 = 1$ und $e_2 = \mathrm{i}$,

$$|z|^2 = z^*\,z = |(x + \mathrm{i}\,y)|^2 = (x - \mathrm{i}\,y)\,(x + \mathrm{i}\,y) = x^2 + y^2 \geq 0 \ , \quad |z|^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \ . \tag{3.81}$$

Statt durch $z$ zu teilen, multipliziert man oft einfacher mit $z^*/|z|^2$ (3.78).

In $z = x + \mathrm{i}\,y$ ist $x = \Re(z) = (z + z^*)/2$ der Realteil von $z$ und $y = \Im(z) = (z - z^*)/(2\mathrm{i})$ der Imaginärteil von $z$, $z = \Re(z) + \mathrm{i}\,\Im(z)$.

Reelle Zahlen $r$ sind komplexe Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil, $\Im(r) = 0$.

## Additionstheoreme der Winkelfunktionen

Auf die Punkte $z = x + \mathrm{i}y$ angewendet bewirkt die Addition einer komplexen Zahl $w$ eine Translation und die Multiplikation mit $w$ eine Drehstreckung. Insbesondere gehen die Zahlen $\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ auf dem Einheitskreis durch eine Drehung um einen Winkel $\beta$, also durch Multiplikation mit der komplexen Zahl $w = \cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta$, in die Zahlen $\cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha + \beta)$ über,

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ ,\\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \ .\end{aligned} \tag{3.82}$$

Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen merkt man sich durch Ausmultiplizieren komplexer Zahlen der Form $\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$.

Das Additionstheorem für $\sin(\alpha + \beta)$ kann man aus der Gleichheit der Fläche des Parallelogramms, $a\,b\sin(\alpha+\beta)$, und des Rechtecks, $a\,b\sin\alpha\,\cos\beta + a\,b\sin\beta\,\cos\alpha$, der folgenden Zeichnung entnehmen [19]. Mit $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$ folgt daraus $\cos(\alpha + \beta)$.

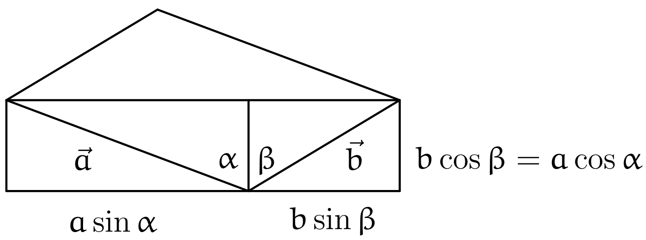



Abbildung 3.1: Additionstheorem $\sin(\alpha + \beta)$

## Fundamentalsatz der Algebra

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra, von Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) [18] bewiesen, von uns nur verwendet, hat jedes Polynom $P_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ vom Grad $n$ in einer komplexen Variablen $z$ und mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ $n$ komplexe Nullstellen $z_1$, $z_2 \ldots z_n$, wobei mehrfache Nullstellen mehrfach zählen,[4]

$$z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) . \tag{3.83}$$

Für $n = 2$ berechnet man die Nullstellen, indem man $z^2 + pz$ zum Quadrat von $z + p/2$ ergänzt und die Differenz von Quadraten faktorisiert, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,

$$\begin{aligned} z^2 + p\,z + q &= (z + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q = (z + \frac{p}{2})^2 - \Big(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\Big)^2 \\ &= \Big(z + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\Big)\Big(z + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\Big) = (z - z_1)(z - z_2) , \\ z_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} , \quad z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} . \end{aligned} \tag{3.84}$$

Dabei merkt man sich leichter das Stichwort „quadratische Ergänzung“ und führt sie aus als die Formel für beide Nullstellen.

Bei Polynomen höherer Ordnung, $n > 4$, kann man die Nullstellen $z_1, z_2 \ldots$ nicht als algebraischen Ausdruck in den Koeffizienten $a_0, a_1 \ldots$ schreiben. Man kann aber die Nullstellen bei gegebenem Polynom numerisch mit jeder gewünschten Genauigkeit bestimmen, nicht anders als die Wurzeln bei der Lösung quadratischer Gleichungen.

Daß sich das Polynom $P_n(z)$ als Produkt von Faktoren $z - z_1, z - z_2 \ldots$ schreiben läßt, liegt daran, daß man jedes Polynom $P(z)$ bis auf einen Rest $R$ als Produkt eines Faktors $(z - z_1)$ mit einem Polynom kleineren Grades $\hat{P}(z)$ schreiben kann, wobei der Grad des Restes kleiner als der von $(z - z_1)$ ist. Der Rest ist also eine Konstante, $P(z) = (z - z_1)\hat{P}(z) + R$. Ist nun $z_1$ eine Nullstelle von $P(z)$, $0 = P(z_1) = (z_1 - z_1)\hat{P}(z_1) + R$, so verschwindet diese Konstante und $P(z) = (z - z_1)\hat{P}(z)$ läßt sich restlos durch $(z - z_1)$ teilen. Ebenso enthält $\hat{P}(z)$ einen Faktor $(z - z_2)$ und so weiter.

## Eigenwertgleichung

Die Eigenwertgleichung bestimmt bei gegebener linearer Abbildung $M$ die speziellen Richtungen $v \neq 0$, die Eigenvektoren $v$ von $M$, die von $M$ lediglich um einem Faktor $\lambda$, den zu $v$ gehörigen Eigenwert von $M$, gestreckt werden,

$$Mv = \lambda v \;\Leftrightarrow\; (M - \lambda\mathbf{1})v = 0 \;\Rightarrow\; \det(M - \lambda\mathbf{1}) = 0 . \tag{3.85}$$

Damit $(M - \lambda\mathbf{1})v = 0$ gilt und $v$ nicht verschwindet, darf $(M - \lambda\mathbf{1})$ nicht invertierbar sein, sonst folgte $0 = (M - \lambda\mathbf{1})^{-1}(M - \lambda\mathbf{1})v = v$. Also muß die Determinante von $(M - \lambda\mathbf{1})$

[4] In diesem Zusammenhang bezeichnen hochgestellte Zahlen natürlich Potenzen, nicht Komponenten.

verschwinden. Verschwindet sie, so hat $(M - \lambda \mathbf{1})$ einen Nullvektor $v \neq 0$, also $M$ einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$.

Da die Eigenvektorgleichung linear homogen in $v$ ist, ist jedes nichtverschwindende Vielfache eines Eigenvektors $v$ auch Eigenvektor zu demselben Eigenwert. Die Eigenwertgleichung legt *nicht* die Normierung und das Vorzeichen des Eigenvektors fest.

Die Determinante $\det(M - \lambda \mathbf{1}) = (-1)^n(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k)$ ist ein Polynom vom Grad $n = \dim \mathcal{V}$ in $\lambda$. Sie heißt charakteristisches Polynom von $M$. Die Eigenwertgleichung $\det(M - \lambda \mathbf{1}) = 0$ hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra (3.83) $n$ komplexe Lösungen,

$$\det(M - \lambda \mathbf{1}) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)\ . \tag{3.86}$$

Da $\det M$ der Wert dieses Polynoms für $\lambda = 0$ ist, erweist sich die Determinante als Produkt der Eigenwerte,

$$\det M = \lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_n\ . \tag{3.87}$$

Wie der Vergleich des Koeffizienten von $\lambda^{n-1}$ auf beiden Seiten von (3.86) zeigt, ist die Spur jeder Matrix $M$ die Summe ihrer Eigenwerte, $\operatorname{Sp} M = \sum_i \lambda_i$ .

Eigenvektoren $e_1, e_2 \ldots e_k$ von $M$ zu *verschiedenen* Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k$ sind linear unabhängig. Das ist richtig für $k = 1$ . Wären $k \geq 2$ Eigenvektoren, aber nicht schon $k-1$ Eigenvektoren, zu verschiedenen Eigenwerten linear abhängig, so gälte

$$e_k = e_1 a_1 + e_2 a_2 + \ldots + e_{k-1} a_{k-1} \tag{3.88}$$

mit linear unabhängigen $e_1, e_2 \ldots e_{k-1}$ und Koeffizienten $a_i$, die nicht alle verschwinden. Wenn wir $M - \lambda_k \mathbf{1}$ anwenden, widerspricht aber die Eigenwertgleichung

$$0 = e_1\, a_1\, (\lambda_1 - \lambda_k) + e_2\, a_2\, (\lambda_2 - \lambda_k) + \ldots + e_{k-1}\, a_{k-1}\, (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \tag{3.89}$$

der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren $e_1, e_2 \ldots e_{k-1}$ .

Das heißt nicht, daß es bei jeder $n \times n$-Matrix $n$ linear unabhängige Eigenvektoren gibt, denn es können Nullstellen des charakteristischen Polynoms zusammenfallen, das heißt mehrfach, etwa $p$-fach, auftreten. Solch einen Eigenwert nennt man $p$-fach entartet. Zu einem $p$-fach entarteten Eigenwert gibt es nicht unbedingt $p$ linear unabhängige Eigenvektoren, wie ein Gegenbeispiel zeigt,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{3.90}$$

Bei nicht entarteten Eigenwerten gibt es (zumindest im Raum der komplexen Linearkombinationen der Vektoren) $n$ Eigenvektoren $v_i$, $i = 1, 2 \ldots n$. Sie sind linear unabhängig, also eine Basis. In dieser Eigenbasis gehört zu $M$ wegen $M\, v_i = \lambda_i\, v_i$ (keine Summe über $i$) die Diagonalmatrix

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\ . \tag{3.91}$$

Eine lineare Abbildung $A$ heißt diagonalisierbar, falls eine Basis $e_1, e_2, \ldots$ von Eigenvektoren existiert, $Ae_i = a_i e_i$ (keine Summe über $i$). Beispielsweise sind reelle, symmetrische Matrizen diagonalisierbar. Verschwindet der Kommutator (3.12) zweier diagonalisierbarer linearer Abbildungen, $[A, B] = 0$, so bildet $B$ jeden Eigenraum $\mathcal{V}_\lambda$ von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ auf sich ab, denn $(A-\lambda)e = 0$ hat $0 = B\,(A-\lambda)\,e = (A-\lambda)\,(B\,e)$ zur Folge, und $B$ kann in $\mathcal{V}_\lambda$ diagonalisiert werden. Dann existiert eine Basis von gemeinsamen Eigenvektoren, $Ae_i = a_i e_i$, $Be_i = b_i e_i$ .

Falls ein Eigenwert $\lambda = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ einer reellen Matrix $M = M^*$ nicht reell ist, $r\sin\alpha \neq 0$, dann ist der Eigenvektor $w = u + iv$ eine komplexe Linearkombination reeller Vektoren $u$ und $v$, die linear unabhängig sind. Wäre nämlich $v = c\,u$ mit einer Zahl $c$, so wäre $(1 + ic)u \neq 0$ und demnach auch $u$ Eigenvektor der reellen Matrix $M$ zum komplexen Eigenwert $\lambda$. Dann aber würde aus dem Imaginärteil von $(M-\lambda)u = 0$ folgen, daß $\lambda$ im Gegensatz zur Voraussetzung reell ist.

Verwenden wir $v = e_1$ und $u = e_2$ als Basisvektoren, so besagt die Eigenwertgleichung,

$$M\,(e_2 + ie_1) = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)(e_2 + ie_1)\ , \tag{3.92}$$

nach Real- und Imaginärteil getrennt,

$$M\,e_1 = r(\cos\alpha)\,e_1 + r(\sin\alpha)\,e_2\ ,\ M\,e_2 = -r(\sin\alpha)\,e_1 + r(\cos\alpha)\,e_2\ . \tag{3.93}$$

Also wirkt $M$ in der von $e_1$ und $e_2$ aufgespannten, reell zweidimensionalen Ebene als Drehstreckung

$$M = r\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{3.94}$$

und bildet Kreise um den Ursprung auf Kreise um den Ursprung ab.

## Eigenräume von Drehungen

Reelle Eigenwerte $\lambda$ einer Drehspiegelung $D$, $D^T D = \mathbf{1}$, können nur 1 oder $-1$ sein, denn die Skalarprodukte der reellen Eigenvektoren $n$ bleiben unverändert,

$$n \cdot n = (Dn)\cdot(Dn) = \lambda^2\, n\cdot n\ , \tag{3.95}$$

demnach ist $(\lambda^2 - 1)n\cdot n = 0$ und weil das Längenquadrat eines nichtverschwindenden Vektors im Euklidischen Raum nicht verschwindet, gilt $\lambda^2 = 1$ und $\lambda = \pm 1$. Reelle Eigenvektoren sind invariant oder werden gespiegelt.

Wir betrachten den Unterraum $U_\perp$ der Vektoren, die auf den reellen Eigenvektoren senkrecht stehen. Er wird durch $D$ auf sich abgebildet,

$$u\cdot n = 0 \Rightarrow 0 = (Du)\cdot(Dn) = \pm(Du)\cdot n\ . \tag{3.96}$$

Eingeschränkt auf diesem Unterraum $U_\perp$ ist $D$ eine orthogonale Transformation, die nur komplexe Eigenvektoren $w = u + iv$ und komplexe Eigenwerte $\lambda \neq \lambda^*$ hat.

Wegen der Orthogonalitätsrelationen $D^i{}_k D^i{}_l = \delta_{kl}$ (3.63) und der Eigenwertgleichung gilt für komplexe Eigenvektoren $w = u + iv$ und $w^* = u - iv$

$$(Dw^*)\cdot(Dw) - w^*\cdot w = 0 = (\lambda^*\lambda - 1)w^*\cdot w = (|\lambda|^2 - 1)(u^2 + v^2)\ . \tag{3.97}$$

Weil $u^2 + v^2$ nicht Null ist, hat der komplexe Eigenwert den Betrag 1 und ist von der Form $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Der Vektor $w^* = u - iv$ ist Eigenvektor der reellen Matrix $D$ zum Eigenwert $\lambda^*$. Wir können daher im Eigenwertpaar $\lambda$ und $\lambda^*$ die Bezeichnung so wählen, daß $\lambda$ einen positiven Imaginärteil hat und $\alpha$ aus dem Bereich $0 < \alpha < \pi$ ist.

Aus der Orthogonalitätsrelation folgt

$$(Dw)\cdot(Dw) - w\cdot w = 0 = (\lambda^2 - 1)w\cdot w = (\lambda^2 - 1)\,(u^2 - v^2 + 2iu\cdot v)\ , \tag{3.98}$$

und wegen $\lambda^2 \neq 1$ sind die reellen Vektoren $u$ und $v$ gleich lang und zueinander senkrecht.

Wählen wir sie normiert als Basisvektoren einer Orthonomalbasis, $e_1 = v$, $e_2 = u$, so wirkt $D$ in diesem Unterraum als Drehung (3.94)

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\ . \tag{3.99}$$

Der auf $w = u + iv$ senkrechte Unterraum $\hat{U}_\perp$ wird auf sich selbst abgebildet.

$$x\cdot w = 0 \Rightarrow 0 = (Dx)\cdot(Dw) = \lambda(Dx)\cdot w\ . \tag{3.100}$$

Eingeschränkt auf diesen Unterraum ist $D$ eine orthogonale Transformation, die keine reellen Eigenwerte hat, sondern wiederum eine reell zweidimensionale Ebene, die von orthonormalen Vektoren aufgespannt wird, durch eine Drehung $D_\beta$ transformiert.

Es gibt daher für jede Drehung $D$ eine Orthonormalbasis, in der die zugehörige Matrix blockdiagonal von der Form

$$D = \begin{pmatrix} D_\alpha & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & D_\beta & & \\ & & & \mathbf{1} & \\ & & & & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

ist, wobei $\mathbf{1}$ für einen Block von Eigenwerten 1 und $-\mathbf{1}$ für einen anderen Block von Eigenwerten $-1$ steht. Wenn die Dimension des Vektorraumes ungerade ist, muß ein reeller Eigenwert 1 oder $-1$ auftreten, es gibt eine Drehachse oder eine Spiegelachse.

Bei Spiegelungen ist die Anzahl der Eigenwerte $-1$ ungerade, bei Drehungen gerade. Jedes Paar von Eigenwerten $-1$ gehört zu einer Drehung $D_\pi$ um 180°.

Da jede Drehung $D_\alpha$ aus der identischen Abbildung durch stetiges Vergrößern des Drehwinkels von 0 auf $\alpha$ hervorgeht, gibt es genau dann, wenn die Eigenwerte $-1$ paarig auftreten, wenn also $\det D = 1$ ist, eine Schar $D_\lambda$ von Drehungen, die stetig von $\lambda$ abhängen und $1 = D_{\lambda=0}$ mit $D = D_{\lambda=1}$ verbinden. Die Gruppe der Drehspiegelungen hat zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich erstens die Gruppe $SO(n)$ der Drehungen in $n$

Dimensionen. Die Determinante jeder Drehung hat den speziellen Wert $\det \mathsf{D} = 1$, woher der Name *spezielle* orthogonale Transformation rührt. Die andere Zusammenhangskomponente $\Pi \circ \mathrm{SO}(n)$ ergibt sich aus $\mathrm{SO}(n)$ durch die Paritätstransformation $\Pi$, das ist eine Spiegelung

$$\Pi = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.102}$$

einer ungeraden Anzahl orthogonaler Basisvektoren. Die Determinante der Transformationen $\Pi \circ \mathrm{SO}(n)$ hat den Wert $-1$. Zusammen mit $\mathrm{SO}(n)$ bildet $\Pi \circ \mathrm{SO}(d)$ die Gruppe $\mathrm{O}(n)$ der orthogonalen Transformationen oder Drehspiegelungen in $n$ Dimensionen.

Für sich genommen ist $\Pi \circ \mathrm{SO}(n)$ keine Gruppe, sie enthält insbesondere nicht die $\mathbf{1}$.

## Adjungierte und kontragrediente Transformation

Invertierbare Selbstabbildungen einer Mannigfaltigkeit $M$ nennt man Transformationen. Sie bilden eine Gruppe, wobei das Produkt im Hintereinanderausführen besteht. Das Einselement ist die identische Abbildung, die jeden Punkt auf sich abbildet.

Eine Gruppe $G$ wirkt als Transformationsgruppe auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, wenn zu jedem Gruppenelement $g \in G$ eine Transformation $M_g$ von $\mathcal{M}$ gehört,

$$M_g : \begin{cases} \mathcal{M} & \rightarrow & \mathcal{M} \\ x & \mapsto & M_g x \end{cases} , \tag{3.103}$$

und hintereinander ausgeführte Transformationen diejenige Transformation ergeben, die zum Gruppenprodukt gehören,

$$M_g M_{g'} = M_{gg'} \ . \tag{3.104}$$

Dann spricht man von einer Realisierung der Gruppe $G$ als Transformationsgruppe auf $\mathcal{M}$. Beispielsweise transformieren Lorentztransformationen die Richtungen von Lichtstrahlen und wirken so als Transformationsgruppe der zweidimensionalen Kugelschale $S^2$.

Trivialerweise realisiert die Identität $M_g = \mathrm{id}\ \forall g \in G$ jede Gruppe $G$.

Ist die Gruppe $G$ spezieller durch *lineare* Transformationen eines Vektorraumes $\mathcal{V}$ realisiert, so heißt die Abbildung von $G$ in den Raum der linearen Transformationen von $\mathcal{V}$ Darstellung von $G$ und $M_g$ stellt $g$ dar.

Ist $G$ auf zwei Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ durch Transformationen $M_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ und $N_g : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ realisiert, so wirkt $g \in G$ auf natürliche Art auch auf die Menge der Punktepaare $(x, y)$ mit $x \in \mathcal{M}$ und $y \in \mathcal{N}$, also auf das kartesische Produkt $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, und bildet sie auf die Paare der transformierten Punkte ab,

$$M_g \times N_g : \begin{cases} \mathcal{M} \times \mathcal{N} & \rightarrow & \mathcal{M} \times \mathcal{N} \\ (x, y) & \mapsto & (M_g x, N_g y) \end{cases} . \tag{3.105}$$

Die Transformation $M_g \times N_g$ bewirkt die zu $g$ adjungierte (zugehörige) Transformation von Abbildungen $f$ von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$.

Jede Abbildung $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ist ja definitionsgemäß eine Untermenge von $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, die für jedes $x \in \mathcal{M}$ genau ein Paar $(x, y) = (x, f(x))$ enthält.

Da Transformationen invertierbar sind, ist $f \subset M \times \mathcal{N}$ für jedes $g \in G$ auch die Menge aller Paare $\big(M_{g^{-1}}x, f(M_{g^{-1}}x)\big)$. Sie wird durch $M_g \times N_g$ auf die Funktion $(\mathrm{Ad}_g\, f)$ transformiert,

$$M_g \times N_g : \big(M_{g^{-1}}x, f(M_{g^{-1}}x)\big) \mapsto \big(x, N_g f(M_{g^{-1}}x)\big) = \big(x, (\mathrm{Ad}_g\, f)(x)\big) \ ,$$
$$\mathrm{Ad}_g : f \mapsto (\mathrm{Ad}_g\, f) = N_g \circ f \circ M_{g^{-1}} \ . \tag{3.106}$$

Wirkt beispielsweise eine Darstellung $D_g$ einer Gruppe auf einen Vektorraum $\mathcal{V}$, so transformieren Operatoren $A$, das sind Selbstabbildungen von $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{V}$, unter der adjungierten Darstellung

$$(\mathrm{Ad}_g\, A) = D_g A {D_g}^{-1} \ . \tag{3.107}$$

Die Transformationen $\mathrm{Ad}_g$ realisieren die Gruppe $G$ auf dem Raum $\mathcal{F}_{\mathcal{M}\to\mathcal{N}}$ der Abbildungen von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$,

$$\mathrm{Ad}_{g_2}\, \mathrm{Ad}_{g_1}\, f = N_{g_2}\, N_{g_1}\, f\, M_{g_1^{-1}}\, M_{g_2^{-1}} = N_{g_2 g_1}\, f\, M_{(g_2 g_1)^{-1}} = \mathrm{Ad}_{g_2\, g_1}\, f \ . \tag{3.108}$$

Ist $\mathcal{N}$ ein Vektorraum und sind die Transformationen $N_g$ linear, so ist $\mathrm{Ad}_g$ linear, also eine Darstellung des Gruppenelements $g$.

Insbesondere sind Dualvektoren $u \in \mathcal{V}^*$ Abbildungen eines Vektorraumes $\mathcal{V}$ in die reellen Zahlen. Wirkt auf $\mathcal{V}$ eine Darstellung $M_g$ einer Gruppe und ist die Gruppe auf dem Zielraum $\mathbb{R}$ trivial durch $N_g = 1\ \forall g \in G$ dargestellt, so ist die dazu adjungierte Transformation von Dualvektoren die Abbildung, die $u$ auf

$$\mathrm{Ad}_g\, u = u \circ (M_g)^{-1} = (M_g)^{-1\,\mathsf{T}} u \tag{3.109}$$

abbildet. Dualvektoren transformieren mit $M^{-1\,\mathsf{T}}$, wenn Vektoren mit $M$ transformieren. Beide Transformationen sind einander kontragredient (entgegengesetzt): der transformierte Dualvektor $u' = M^{-1\,\mathsf{T}}u$, angewendet auf den transformierten Vektor $v' = Mv$, ergibt dasselbe wie vor der Transformation

$$u'(v') = (M^{-1\,\mathsf{T}}u)(Mv) = u(M^{-1}Mv) = u(v) \ . \tag{3.110}$$

Nur unter Drehspiegelungen stimmt die kontragrediente Transformation mit der ursprünglichen Transformation überein, denn $D^{-1\,\mathsf{T}} = D$ ist die Orthogonalitätsbedingung (3.63) $D^{-1} = D^{\mathsf{T}}$ oder $D^{\mathsf{T}}D = \mathbf{1}$.

## Das Schursche Lemma

Eine Menge von linearen Abbildungen $K$, die einen Vektorraum $\mathcal{V}$ auf sich abbilden und dabei einen echten Unterraum $\mathcal{U}$, $\{0\} \neq \mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, auf sich abbilden, heißt reduzibel. Wählt man die Basis für $\mathcal{V}$ so, daß die ersten Basisvektoren $\mathcal{U}$ aufspannen, so haben die zu den reduziblen Abbildungen gehörigen Matrizen einen gemeinsamen Block verschwindender Matrixelemente und sind von der Form

$$K = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \ . \tag{3.111}$$

Eine Menge von linearen Abbildungen $\mathsf{K}$ heißt irreduzibel, wenn keine anderen Unterräume als $\{0\}$ und $\mathcal{V}$ von allen Abbildungen $\mathsf{K}$ auf sich abgebildet werden.

Ist bekannt, daß eine Menge linearer Abbildungen $\mathsf{K}$ nur mit Vielfachen der $\mathbf{1}$ vertauscht, dann ist sie irreduzibel. Denn jeder Projektor auf einen invarianten Unterraum vertauscht mit jedem $\mathsf{K}$ und kann, weil er ein Vielfaches der $\mathbf{1}$ und ein Projektor ist, nur $\mathbf{1}$ oder 0 sein. Folglich ist der invariante Unterraum $\mathcal{V}$ oder $\{0\}$.

Wenn eine Abbildung $W$ mit einer Abbildung $\mathsf{K}$ vertauscht, wenn also $W\mathsf{K} = \mathsf{K}W$ gilt, so bildet $\mathsf{K}$ für jede Zahl $\sigma$ den Nullraum von $W - \sigma\mathbf{1}$,

$$\mathcal{N}_\sigma = \{v \in \mathcal{V} : (W - \sigma\mathbf{1})v = 0\} \; , \tag{3.112}$$

auf sich ab. Denn aus $(W - \sigma\mathbf{1})v = 0$ folgt $0 = \mathsf{K}(W - \sigma\mathbf{1})v = (W - \sigma\mathbf{1})(\mathsf{K}v)$.

Ist die Menge von linearen Abbildungen $\mathsf{K}$, die mit $W$ vertauschen, irreduzibel und hat $W$ einen Eigenvektor zu einem Eigenwert $\lambda$, dann ist der zugehörige Nullraum $\mathcal{N}_\lambda$ ein invarianter Unterraum und mindestens eindimensional, und folglich ist $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{V}$, das heißt $W = \lambda\mathbf{1}$. Demnach gilt das (Issai Schur, 1875-1941, [18])

**Schursche Lemma:** *Wenn eine lineare Selbstabbildung $W$ eines Vektorraumes einen Eigenvektor hat und mit einer irreduziblen Menge von linearen Selbstabbildungen $\mathsf{K}$ vertauscht, dann ist $W = \lambda\mathbf{1}$ ein Vielfaches der Eins.*

Die Bedingung, einen Eigenvektor zu haben, ist für jede lineare Selbstabbildung eines komplexen, endlichdimensionalen Vektorraumes erfüllt, ebenso für alle symmetrischen, reellen Matrizen.

Sei eine Menge von linearen Selbstabbildungen $\mathsf{K}$ eines Vektorraum $\mathcal{V}$ irreduzibel und gebe es eine lineare Abbildung $W$ von $\mathcal{V}$ in einen Vektorraum $\mathcal{W}$. Wenn jedes $\mathsf{K}$ durch $W$ mit einer linearen Selbstabbildung $\mathsf{K}'$ von $\mathcal{W}$ verflochten ist,

$$\mathsf{K}'W = W\mathsf{K} \; , \tag{3.113}$$

und die Menge dieser $\mathsf{K}'$ ebenfalls irreduzibel ist, dann ist $W$ entweder invertierbar und $\mathsf{K}$ und $\mathsf{K}'$ sind einander äquivalent, $\mathsf{K}' = W\mathsf{K}W^{-1}$ , oder $W = 0$ verschwindet.

Denn das Bild $W\mathcal{V}$ ist ein invarianter Unterraum der Abbildungen $\mathsf{K}'$ und der Nullraum von $W$ ist ein invarianter Unterraum der Abbildungen $\mathsf{K}$. Falls nun $W$ nicht verschwindet, so ist, weil die Menge der $\mathsf{K}'$ irreduzibel ist, $W\mathcal{V} = \mathcal{W}$, und der Nullraum von $W$ ist nicht $\mathcal{V}$, sondern $\{0\}$, da die Menge der $\mathsf{K}$ irreduzibel ist. Also ist $W$ invertierbar, oder $W$ verschwindet.

Das Schursche Lemma erklärt, warum man zwar nicht die Größe von Vektoren verschiedener Maßeinheit (und damit verschiedener Vektorräume), wohl aber ihre Richtung, vergleichen kann. In den Vektorräumen wirken äquivalente, irreduzible Darstellungen der Drehgruppe. Man kann daher in den Räumen jeweils eine Basis finden, so daß die Darstellungsmatrizen gleich sind. Diese Basen liegen bis auf die Wahl der Einheit fest. Daher ist das Skalarprodukt und das Vektorprodukt auch von Vektoren definiert, die aus unterschiedlichen Räumen stammen.

# 4 Die Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ bei $x \in U \subset \mathbb{R}$ ist die Steigung der dortigen linearen Näherung.

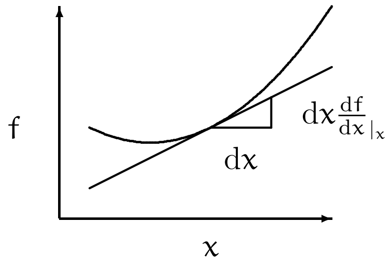



Abbildung 4.1: Lineare Näherung

Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bei $x \in U$ differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $\mathrm{d}f_{|x}$ gibt, die Änderung oder der Gradient von $f$,

$$\mathrm{d}f_{|x} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{d}x & \mapsto & \mathrm{d}f_{|x} = \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}_{|x} \end{cases} , \tag{4.1}$$

die die Funktionsdifferenzen $f(x + \mathrm{d}x) - f(x)$ mit einem Fehler $o\big(\mathrm{d}x\big)$ nähert,

$$f(x + \mathrm{d}x) = f(x) + \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}_{|x} + o\big(\mathrm{d}x\big) , \tag{4.2}$$

der schneller als das Argument verschwindet, $\lim_{\epsilon \to 0} |o(\epsilon)|/\epsilon = 0$. Das Symbol $o(\mathrm{d}x)$ heißt auch Landauscher Papierkorb.

Entsprechend ist die Ableitung von vektorwertigen Funktionen $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ und insbesondere von komplexen Funktionen $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) = u(x) + i\,v(x)$, definiert, deren Werte addiert und vervielfältigt werden können, also von Abbildungen in Vektorräume mit einer Norm, mit der man den Fehler $f(x+\mathrm{d}x) - f(x) - \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}_{|x}$ mißt.

Ist $f$ in allen Punkten einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt $f$ in $U$ differenzierbar und die Funktion $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : x \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}_{|x}$ ist die Ableitung von $f$. Umgekehrt heißt die Funktion $f$, von der die Ableitung stammt, Stammfunktion der Funktion $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Newtons Notation $f'$ für die Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ oder $\dot{x}$ für $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ist weniger sinnfällig als die von Leibniz stammende Schreibweise.

Wir schreiben die Ableitung auch als $\partial f$, [1] denn die Ableitung hängt nicht davon ab, wie man das Argument der Funktion $f$ nennt. Ist die Funktion $\partial f$ differenzierbar,

[1] Die Zeichen $\partial f$ werden „de ef“ gesprochen. Die Aussprache „del ef“ ist unkundig: das Zeichen $\partial$ ist ein Schriftschnitt von d.

so bezeichnet $(\partial)^2 f$ ihre Ableitung. Die $k$-fache Ableitung $(\partial)^k f$ wird traditionell und ziemlich sinnwidrig als $\mathrm{d}^k f/\mathrm{d}x^k$ notiert.

Abgeleitet wird die Funktion $f$, nicht der Funktionswert $f(x)$. Allerdings versagt bei der $n$-ten Potenz $x \mapsto x^n$ die Konvention, zur Bezeichnung der Funktion einfach beim Funktionswert $f(x)$ den Bezeichner des Arguments wegzulassen. Dann bliebe zur Bezeichnung der $n$-ten Potenz nur ein nach- und hochgestelltes $n$, was man als Verweis auf eine Fußnote liest. Wir bezeichnen die $n$-te Potenz daher auch ausführlich mit

$$P_n : x \mapsto P_n(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ Faktoren}} \ . \tag{4.3}$$

Als $P_0$ definieren wir $P_0 : x \mapsto 1$. Mit dieser Schreibweise gelten für das Produkt und die Verkettung von Potenzen

$$P_n\, P_m = P_{n+m} \ , \ P_n \circ P_m = P_{n\,m} \ . \tag{4.4}$$

Die Ableitung einer Konstanten verschwindet, $\partial P_0 = 0$, die Ableitung der identischen Abbildung ist $1$, $\partial P_1 = P_0$,

$$\begin{aligned} (x+\mathrm{d}x)^0 - (x)^0 &= 1 - 1 = \mathrm{d}x\, 0 \ , & \frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}x} &= 0 \ , \quad \partial P_0 = 0 \ , \\ (x+\mathrm{d}x)^1 - (x)^1 &= x + \mathrm{d}x - x = \mathrm{d}x\, 1 \ , & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} &= 1 \ , \quad \partial P_1 = 1 \ . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Es gilt also $\partial P_n = n P_{n-1}$ für $n = 0$ und $n = 1$.

Da dort, wo eine Funktion maximal ist, ihr Wert nicht durch eine kleine Änderung des Arguments vergrößert werden kann, verschwindet dort, falls es sich nicht um einen Randpunkt handelt, ihre Ableitung. Man findet lokale Minima und Maxima der Funktion $f$ an den Nullstellen der Funktion $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Daß die Ableitung verschwindet ist notwendig, nicht aber hinreichend für ein lokales Maximum oder Minimum an dieser Stelle, wie etwa der Sattelpunkt von $f(x) = x^3$ bei $x = 0$ zeigt. Stellen, an denen die Ableitung von $f$ verschwindet, nennt man stationäre Punkte von $f$,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}_{|\underline{x}} = 0 \Leftrightarrow \underline{x} \text{ stationärer Punkt von } f \ . \tag{4.6}$$

Das Partizip Perfekt von ableiten ist abgeleitet, nicht abgelitten, egal wie schmerzhaft das Ableiten erscheint.

Im Folgenden schreiben wir oft kürzer die Terme $o\big(\mathrm{d}x\big)$ nicht aus und rechnen in erster Ordnung in $\mathrm{d}x$, so als wäre $o\big(\mathrm{d}x\big) = 0$.

## Linearität, Produktregel, Kettenregel

Ableiten bildet Funktionen linear auf Funktionen ab, $\partial(a\, f + b\, g) = a\, \partial f + b\, \partial g$,

$$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{R} : \quad a\, f(x+\mathrm{d}x) + b\, g(x+\mathrm{d}x) &= a\, f(x) + b\, g(x) + \mathrm{d}x(a \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}) \ , \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(a\, f + b\, g\big) &= a \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \ , \\ \partial\big(a\, f + b\, g\big) &= a\, \partial f + b\, \partial g \end{aligned} \tag{4.7}$$

und genügt der Leibnizregel $\partial(f\,g) = (\partial f)\,g + f\,(\partial g)$ für Produkte

$$\begin{aligned} f(x+\mathrm{d}x)\,g(x+\mathrm{d}x) &= \big(f(x) + \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big)\big(g(x) + \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\big) \\ &= f(x)\,g(x) + \mathrm{d}x\big(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,g(x) + f(x)\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\big) \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f\,g\big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,g + f\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\ ,\ \ \partial\big(f\,g\big) = (\partial f)\,g + f\,(\partial g)\ . \tag{4.9}$$

Ist bei vektorwertigen Funktionen ein Produkt (eine reell bilineare Form) erklärt, etwa das Skalarprodukt oder das Vektorprodukt, so gilt die Leibnizregel entsprechend.

Die verkettete Funktion $h = f\circ g$ einer Funktion $f$ mit einer Funktion $g$ ändert sich bei $x$, weil sich mit Änderung $\mathrm{d}x$ des Arguments der Funktionswert von $g$ um $\mathrm{d}g = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}_{|x}\,\mathrm{d}x$ ändert und eine Änderung von $g$ den Wert von $f\circ g$ bei $g(x)$ um $\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}_{|g(x)}\,\mathrm{d}g$ ändert. Dies ist die Kettenregel

$$\begin{aligned} f\big(g(x+\mathrm{d}x)\big) - f\big(g(x)\big) &= f\big(g(x) + \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}_{|x}\big) - f\big(g(x)\big) = \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}_{|x}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}_{|g(x)}\ , \\ \frac{\mathrm{d}(f\circ g)}{\mathrm{d}x}_{|x} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}_{|g(x)}\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}_{|x}\ ,\quad \partial(f\circ g) = \big((\partial f)\circ g\big)\cdot(\partial g)\ . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Die Ableitung $\partial(f\circ g)$ der verketteten Funktion ist das Produkt von $\partial f\circ g$, der Ableitung der äußeren Funktion *am Bild der inneren Funktion*, mit der Ableitung $\partial g$ der inneren Funktion. Dies skizziert das nachstehende Diagramm.

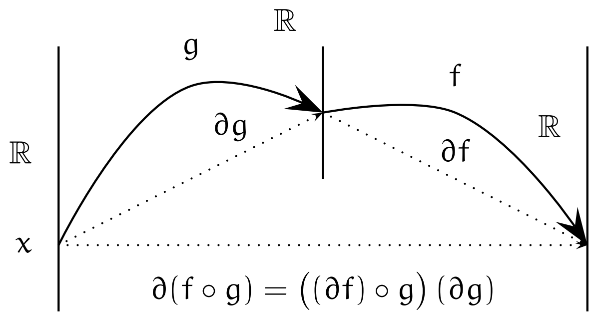



Abbildung 4.2: Ableitung der Verkettung = Produkt der Ableitungen

## Ableitung der Umkehrfunktion

Ist die reelle Funktion $f$ differenzierbar und ist bei $\underline{x}$ die Ableitung $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ nicht Null, so existiert in einer Umgebung von $\underline{y} = f(\underline{x})$ die Umkehrfunktion $F(y)$. Sie ist differenzierbar. Ableiten von $x = F(f(x))$ nach $x$ zeigt

$$1 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}_{|y=f(x)}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}_{|x}\ ,\quad \text{also}\quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}_{|y=f(x)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}_{|x}}\ ,\quad \big(\partial F\big)\circ f = \frac{1}{\partial f}\ , \tag{4.11}$$

oder, mit der suggestiven Schreibweise $F(y) = x(y)$ für die Umkehrfunktion

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}_{|y(x)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}_{|x}}\ . \tag{4.12}$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion am Bildpunkt $y(x)$ ist der Kehrwert der Ableitung der Funktion am Urbildpunkt $x$.

Man erhält den Funktionsgraphen der Umkehrfunktion einfach durch Spiegelung des Funktionsgraphen von $y = f(x)$ an der Diagonalen $y = x$ wie beispielsweise in Abbildung 4.4 auf Seite 56. Denn in einer genügend kleinen Umgebung $U_x$ von $x$ wird jeder Funktionswert $f(y)$ nur an einem Punkt $y$ angenommen und $F \subset f(U_x)\times U_x = \{(f(y), y)\}$ ist die Umkehrfunktion zu $f \subset U_x \times f(U_x) = \{(y, f(y)\}$.

## Zwischenwertsatz, Taylorsche Formel

Die Funktionsdifferenzen lassen sich bei stetig differenzierbaren Funktionen $f$ als Differenz der Argumente mal der Ableitung an einer Zwischenstelle schreiben. Denn zu jeder Sekante durch zwei Punkte $(u, f(u))$ und $(v, f(v))$ des Funktionsgraphen gibt es eine Tangente gleicher Steigung durch einen Zwischenpunkt $(\xi, f(\xi))$,

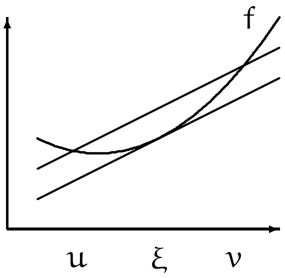



Abbildung 4.3: Satz von Rolle

$$\frac{df}{dx}_{|\xi} = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \; , \; f(x + dx) = f(x) + dx \frac{df}{dx}_{|\xi} \; . \quad (4.13)$$

Mit dem Mittelwertsatz zeigt man den Satz von Taylor [9, Kapitel 3.4.4], den wir später auf andere Art beweisen (12.24). Für jede $n + 1$-fach stetig differenzierbare Funktion $f$ gibt es zwischen $x$ und $x + h$ eine Stelle $\xi$ mit

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} f_{|x} + \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f_{|\xi} \; . \quad (4.14)$$

Jede Funktion, deren $n + 1$-te Ableitung verschwindet, ist ein Polynom $n$-ter Ordnung.

## Ableitung ganzzahliger und rationaler Potenzen

Für die Ableitung der $n$-ten Potenz gilt für $n = 0$ und $n = 1$ (4.5)

$$\frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1} \; , \quad \partial P_n = n P_{n-1} \; . \quad (4.15)$$

Vollständige Induktion und (4.9) zeigt diese Gleichung für alle natürlichen Zahlen,

$$\partial P_{n+1} = \partial(P_n\, P_1) = \partial(P_n)\, P_1 + P_n\, \partial(P_1) = n\, P_{n-1}\, P_1 + P_n\, P_0 = (n + 1)\, P_n \; . \quad (4.16)$$

Die Funktion $P_{-n} : x \mapsto 1/x^n$ ist für $x \neq 0$ der Kehrwert von $P_n$. Differenzieren wir das Produkt $1 = P_{-n}\, P_n$ mit der Produktregel und lösen wir auf, so erhalten wir

$$0 = \partial(P_{-n}\, P_n) = \partial(P_{-n})\, P_n + P_{-n}\, n\, P_{n-1} \; , \; \partial P_{-n} = -n P_{-n-1} \; . \quad (4.17)$$

Also gilt (4.15) für $x \neq 0$ für alle ganzzahligen $n$.

Für natürliche Zahlen $n$ ist $P_{\frac{1}{n}} : y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ die Umkehrfunktion zu $P_n : x \mapsto x^n$ im Bereich $x > 0$. Sie hat die Ableitung

$$\partial P_{\frac{1}{n}}(y) = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}_{|y=x^n} = \frac{1}{\frac{dx^n}{dx}_{|x}} = \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} P_{\frac{1}{n}-1}(y) \; . \quad (4.18)$$

Nimmt man für natürliche Zahlen $p$ und $q$ von der Funktion $P_{\frac{1}{q}} : x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ die $p$-te Potenz, so ergibt die Kettenregel (4.10) für die Ableitung von $P_{\frac{p}{q}} = P_p \circ P_{\frac{1}{q}}$

$$\partial P_{\frac{p}{q}} = \left(p\, P_{p-1} \circ P_{\frac{1}{q}}\right) \frac{1}{q} P_{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\, P_{\frac{p-1}{q}}\, P_{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\, P_{\frac{p}{q}-1}\ . \tag{4.19}$$

Es gilt demnach für positive $x$ für jede positive, rationale Potenz $P_r : x \mapsto x^r$

$$\frac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}x} = r\, x^{r-1}\ , \quad \partial P_r = r P_{r-1}\ . \tag{4.20}$$

Ableiten des Produkts $1 = P_{-r}\, P_r$ ergibt $0 = \partial(P_{-r})\, P_r + P_{-r}\, r\, P_{r-1}$. Dann zeigt Auflösen nach $\partial P_{-r}$, daß (4.20) auch für negatives, rationales $r$ gilt.

## Potenzreihen

Eine Funktion $f$ heißt analytisch in einem Intervall um 0, wenn sie dort eine absolut konvergente Potenzreihe ist. Ihre Ableitung ist analytisch und gleich der Potenzreihe der Ableitungen, [2]

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n\, x^n\ ,\ \partial f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_{n+1}\, x^n\ . \tag{4.21}$$

Ableiten verschiebt also die Koeffizienten der Potenzreihe. Mehrfaches Ableiten verschiebt mehrfach. Die Koeffizienten $f_l$ sind folglich die $l$-fachen Ableitungen der Funktion am Entwicklungspunkt, $f_l = (\partial)^l f(0)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\Big)_{|0}\, x^n\ ,\ f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\Big)_{|x}\, h^n\ . \tag{4.22}$$

Diese Potenzreihe ist die Taylorreihe der analytischen Funktion $f$.

Die Exponentialfunktion, die Eulersche Funktion $\mathrm{e}^x$, Leonhard Euler (1707-1783) [18],

$$\exp x = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\ , \quad \mathrm{e} = \mathrm{e}^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2{,}71\dots \tag{4.23}$$

ergibt abgeleitet wieder die e-Funktion,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\ , \quad \partial \exp = \exp\ . \tag{4.24}$$

Das Produkt von e-Funktionen von Zahlen $x$ und $y$ ist die e-Funktion der Summe

$$\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}\ . \tag{4.25}$$

[2] Das Symbol $n!$, gesprochen $n$-Fakultät, bezeichnet das Produkt aller natürlichen Zahlen bis einschließlich $n$, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Dabei ist $0! = 1$.

Es ist nämlich

$$\sum_n \frac{1}{n!} x^n \sum_m \frac{1}{m!} y^m = \sum_n \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_n \frac{1}{n!} \Big( \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} x^m y^{n-m} \Big)$$
$$= \sum_n \frac{1}{n!} (x+y)^n = e^{x+y} \qquad (4.26)$$

Wegen $e^x e^y = e^{x+y}$ gilt für ganzzahlige $p$ und $q \neq 0$, $(e^x)^p = e^{px}$, $e^{x/q} = (e^x)^{1/q}$ mit der Folge $(e^x)^r = e^{rx}$ für alle rationalen $r = p/q$. Reelle Potenzen von $e^x$ sind durch stetige Ergänzung dieser Relation definiert, $\alpha \in \mathbb{R}$, $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$.

## Der Logarithmus

Wegen $e^x e^{-x} = e^0 = 1$ wird die e-Funktion nicht Null, sondern ist für reelle $x$ positiv.

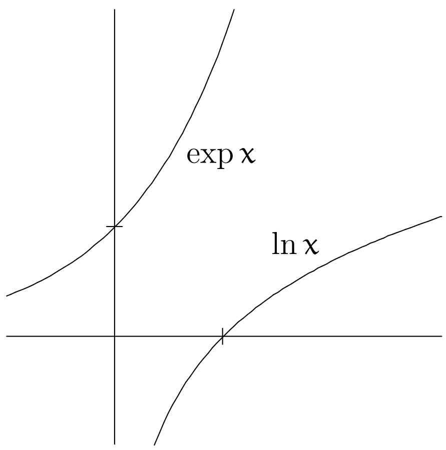



Abbildung 4.4: Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Umkehrfunktion, $\ln y$, ist durch

$$x = \ln(e^x) \qquad (4.27)$$

für $y > 0$ definiert und erfüllt dort $e^{\ln y} = y$.

Denn invertiert $f^{-1}$ die Funktion $f$ auf dem Bild $f(U)$ eines Gebietes $U$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U$, so gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(U)}$. Ist nämlich $y \in f(U)$, so ist es das Bild $y = f(x)$ eines Punktes $x \in U$ und $f \circ f^{-1}(y)$ ist $f \circ f^{-1} \circ f(x)$, was wegen $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U$ mit $y = f(x)$ übereinstimmt.

Wegen $(\ln e^u) + (\ln e^v) = u + v = \ln(e^{u+v}) = \ln(e^u e^v)$ gilt für positive Faktoren $a$ und $b$

$$\ln(a\,b) = \ln a + \ln b\ , \quad \ln 1 = 0\ . \qquad (4.28)$$

Mit der Kettenregel ergibt sich $P_{-1}$ als die Ableitung der Umkehrfunktion der e-Funktion

$$\frac{d \ln y}{dy}_{|y = \exp x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}\ , \quad \partial \ln = P_{-1}\ . \qquad (4.29)$$

Für negative $y$ ist $|y| = -y$ und die Ableitung von $\ln |y|$ nach der Kettenregel

$$\frac{d \ln |y|}{dy} = \frac{1}{|y|} \frac{d|y|}{dy} = -\frac{1}{|y|} = \frac{1}{y}\ . \qquad (4.30)$$

Demnach ist $\ln |x|$ eine Stammfunktion von $1/x$, $(x \neq 0)$

$$\frac{d \ln |x|}{dx} = \frac{1}{x}\ . \qquad (4.31)$$

Für positive $x$ gilt $x = e^{\ln x}$. Reelle Potenzen von $x$ sind durch $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ definiert. Als Ableitung ergibt sich nach der Kettenregel

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{d\, e^{\alpha \ln x}}{dx} = e^{\alpha \ln x}\, \alpha \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}\ , \qquad (4.32)$$

also gilt (4.20) für positive $x$ und reelle $\alpha$.

## Matrixreihen

Das Argument $A$ einer Potenzreihe muß nicht unbedingt eine reelle Variable $x$ sein. Es ist außer Konvergenz der Reihe, deren Untersuchung wir Mathematikern überlassen, nur erforderlich, daß man $A$ wiederholt mit sich multiplizieren kann und daß Linearkombinationen der Potenzen von $A$ erklärt sind. Ist $A$ beispielsweise eine Matrix, so definiert

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \ , \quad \text{wobei } A^0 = \mathbf{1} \ , \tag{4.33}$$

die Exponentialfunktion der Matrix $A$. Der Beweis von $e^x e^y$ macht von $xy = yx$ Gebrauch. Unverändert gilt $e^A e^B = e^{A+B}$ für Matrizen $A$ und $B$, die miteinander kommutieren, das heißt, für die $AB = BA$ gilt. Aber nicht alle Matrizen kommutieren miteinander, und $e^A e^B$ ist nicht für alle Matrizen $e^{A+B}$. Da komplexe Zahlen miteinander kommutieren, gilt $e^z e^w = e^{z+w}$ für alle komplexen Zahlen $z$ und $w$.

Da Vielfache einer Matrix $A$ miteinander kommutieren, gilt $e^{aA} e^{bA} = e^{(a+b)A}$ für alle Zahlen $a$ und $b$ und insbesondere $e^A e^{-A} = e^0 = \mathbf{1}$. Also sind alle Matrizen von der Form $e^A$ invertierbar. Die Matrix $A$ heißt Erzeugende der linearen Transformationen $e^{aA}$ oder auch die zu $e^{aA}$ gehörige infinitesimale Transformation, $A = \frac{d}{da} e^{aA}{}_{|a=0}$.

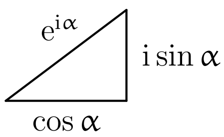
## Eulerformel, Ableitung der Winkelfunktionen

Weil die Koeffizienten $1/n!$ der Exponentialreihe reell sind, gilt für komplexe Zahlen $z$

$$(e^z)^* = e^{(z^*)} \ . \tag{4.34}$$

Also hat $e^{i\alpha}$ für reelle $\alpha$ den Betrag $|e^{i\alpha}|^2 = e^{-i\alpha} e^{i\alpha} = e^0 = 1$. Der Real- und Imaginärteil von $e^{i\alpha}$ sind daher Cosinus und Sinus des Winkels, den $e^{i\alpha}$ mit der $x$-Achse einschließt. Trennt man die Reihenentwicklung in gerade und ungerade Potenzen, so zerlegt dies $e^{i\alpha}$ wegen $i^{2n} = (-1)^n$ in seinen Realteil $\cos\alpha$ und i mal seinen Imaginärteil $\sin\alpha$

$$e^{i\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} \alpha^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \alpha^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} \ ,$$




$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \ . \tag{4.35}$$

Dies ist die Eulerformel. Man erhält cos und sin als Potenzreihen

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \ , \ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \dots \tag{4.36}$$

mit den Ableitungen

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \ , \quad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x \ , \quad \partial\cos = -\sin \ , \quad \partial\sin = \cos \ . \tag{4.37}$$

Mit der Trennung der Reihe $e^{i\alpha}$ in ihren Real- und Imaginärteil haben wir allerdings noch nicht bewiesen, daß das Argument $\alpha$ der Winkel des Dreiecks mit Katheten $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ ist. Um diese Beweislücke zu schließen, bestimmen wir cos und sin als Potenzreihe der Bogenlänge.

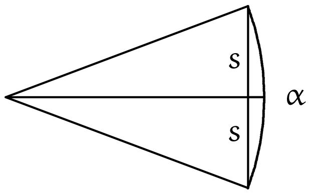



Abbildung 4.5: Bogen mit Sehne

Der Bogen $\alpha$ eines Einheitskreises ist länger als die Sehne,

$$2\sin\alpha/2 < \alpha \ . \tag{4.38}$$

Wir zerlegen den Winkel in $n$ Teile, $\alpha = n\,(\alpha/n)$ und verwenden die Ungleichung $2\sin\alpha/(2n) < \alpha/n$ für jeden Teilwinkel

$$2n\,\sin\frac{\alpha}{2n} < \alpha \ . \tag{4.39}$$

Bis auf Terme, die schneller als $\alpha/2n$ gegen Null gehen, ist $\sin\epsilon$ gleich $\epsilon$ mal der Ableitung von $\sin x$ bei $x = 0$,

$$2n\,\frac{\alpha}{2n}\,\Big(\frac{d\sin x}{dx}\Big)_{|x=0} + 2n\,o\Big(\frac{\alpha}{2n}\Big) < \alpha \ . \tag{4.40}$$

Es definiert aber die Gesamtlänge der feiner und feiner zerlegenden Sehnen die Bogenlänge, demnach ist der Grenzwert der linken Seite für $n \to \infty$ die Bogenlänge $\alpha$ und die Ableitung von $\sin x$ bei $x = 0$ hat den Wert

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \ , \quad \frac{d\sin x}{dx}_{|x=0} = 1 \ . \tag{4.41}$$

Die Ableitung des Cosinus verschwindet bei $x = 0$, weil er dort seinen maximalen Wert 1 annimmt. Aus den Additionstheoremen (3.82) folgt daher bis auf $o(\epsilon)$-Terme

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\epsilon) &= \cos\alpha\cos\epsilon - \sin\alpha\sin\epsilon = \cos\alpha - \epsilon\sin\alpha \ ,\\
\sin(\alpha+\epsilon) &= \sin\alpha\cos\epsilon + \cos\alpha\sin\epsilon = \sin\alpha + \epsilon\cos\alpha \ ,\\
\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \ , \quad \frac{d\sin x}{dx} &= \cos x \ , \quad \partial\cos = -\sin \ , \quad \partial\sin = \cos \ .
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Damit können wir $\cos x = \sum_n \frac{c_n}{n!}\,x^n$ und $\sin x = \sum_n \frac{s_n}{n!}\,x^n$ als Potenzreihen des Bogenmaßes darstellen. Die Koeffizienten $c_n$ und $s_n$ sind die Werte der $n$-ten Ableitungen bei $x = 0$ (4.22). Aus $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ und (4.42) folgen

$$c_{2n} = (-1)^n \ , \ c_{2n+1} = 0 \ , \ s_{2n} = 0 \ , \ s_{2n+1} = (-1)^n \ . \tag{4.43}$$

Also stimmen die Potenzreihen des Bogenmaßes, die cos und sin darstellen, mit den Reihen (4.36) überein. Das Argument $\alpha$ in $e^{i\,\alpha}$ ist der Winkel $\alpha$ im Dreieck $\cos\alpha + i\sin\alpha$.

## Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Die Ableitungen der Umkehrfunktion Arcus Cosinus, die $\cos\varphi$ für $0 \le \varphi \le \pi$ invertiert, und der Umkehrfunktion Arcus Sinus, die $\sin\varphi$ im Bereich $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$ invertiert,

$$\arccos(\cos\varphi) = \varphi \quad \text{für} \quad 0 \le \varphi \le \pi \ , \ \arcsin(\sin\varphi) = \varphi \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \ , \tag{4.44}$$

sind die Kehrwerte der Ableitungen der Winkelfunktionen (4.12) und ergeben

$$\frac{\mathrm{d}\arccos x}{\mathrm{d}x}_{|x=\cos\varphi} = \frac{1}{-\sin\varphi} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad \frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x}_{|x=\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}\ . \quad (4.45)$$

Hierbei haben wir im Bereich $0 \le \varphi \le \pi$ die Gleichung $\sin\varphi = \sqrt{(1-\cos^2\varphi)}$ verwendet, im Bereich $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$ gilt $\cos\varphi = \sqrt{(1-\sin^2\varphi)}$.

Die Ableitung des Tangens, $\tan = \sin/\cos$, ergibt sich mit der Produkt- und der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}(-\sin x) = \frac{1}{\cos^2 x}\ . \quad (4.46)$$

Die Ableitung seiner Umkehrfunktion arctan, die im Bereich $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ den Tangens invertiert, $\arctan(\tan\varphi) = \varphi$, ist der Kehrwert

$$\frac{\mathrm{d}\arctan x}{\mathrm{d}x}_{|x=\tan\varphi} = \cos^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1}{1+\tan^2\varphi} = \frac{1}{1+x^2}\ . \quad (4.47)$$

Von der Eulerformel macht man auch umgekehrt Gebrauch und stellt die trigonometrischen Funktionen durch e-Funktionen dar, mit denen sich oft leichter rechnen läßt,

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\ , \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\ . \quad (4.48)$$

Die Hyperbelfunktionen, Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus, sind analog definiert

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\ , \qquad \sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\ . \quad (4.49)$$

Sie erfüllen $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, das heißt $\cosh x = \sqrt{1+(\sinh x)^2}$, und die Additionstheoreme,

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= (\cosh x)(\cosh y) + (\sinh x)(\sinh y)\ , \\ \sinh(x+y) &= (\cosh x)(\sinh y) + (\sinh x)(\cosh y)\ , \end{aligned} \quad (4.50)$$

und haben die Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}\cosh x}{\mathrm{d}x} = \sinh x\ , \quad \frac{\mathrm{d}\sinh x}{\mathrm{d}x} = \cosh x\ , \quad \partial\cosh = \sinh\ , \quad \partial\sinh = \cosh\ . \quad (4.51)$$

## Komplexer Logarithmus

Da $x + i\,y \neq 0$ in Polarkoordinaten als $r\cos\alpha + i\,r\sin\alpha$ geschrieben werden kann, kann man jede nichtverschwindende komplexe Zahl als $z = r\,e^{i\alpha}$ schreiben. Dabei ist $r = |z|$ der Betrag und $\alpha$ der Winkel zur reellen Achse. Er ist, genauer betrachtet, keine stetige Funktion der komplexen Ebene, selbst wenn man $z = 0$ ausnimmt. Denn wenn man von einem Ausgangspunkt gegen den Uhrzeigersinn den Ursprung umläuft, so nimmt der Winkel $\alpha$ bis zur Rückkehr um $2\pi$ zu. Wohldefiniert und stetig ist der Winkel $\alpha(z)$, wenn man die komplexe Ebene aufschneidet, die Punkte auf einem Strahl vom Ursprung mit einem festen Wert $\alpha = \underline{\alpha}$ ausnimmt und für die restlichen Punkte den Winkel aus dem Bereich zwischen $\underline{\alpha}$ und $\underline{\alpha}+2\pi$ wählt. Wegen $z = e^{\ln r + i\,\alpha} = e^{\ln z}$ ist der Logarithmus komplexer Zahlen,

$$\ln z = \ln |z| + i\,\alpha(z)\ , \tag{4.52}$$

ebenso wie der Winkel $\alpha$ in einer aufgeschnittenen, nicht aber in der ganzen Ebene stetig und wohldefiniert. Weil der Winkel $\alpha$ bei der Definition des komplexen Logarithmus in einem Bereich der Größe $2\pi$ gewählt werden muß, ist $\ln(z\,w)$ für komplexe Argumente $z$ und $w$ nicht unbedingt $\ln z + \ln w$ und $\ln(z^n)$ nicht immer $n \ln z$.

## Exponentialfunktion einer erzeugenden Transformation

Mit derselben Rechnung, mit der man die Eulerformel zeigt, leitet man her, daß die Drehung $D_{\alpha\vec{n}}$ (3.67) um den Winkel $\alpha$ um eine Achse $\vec{n}$, $\vec{n}^{\,2} = 1$, als Exponentialreihe einer linearen Abbildung $\alpha\,\delta$ geschrieben werden kann,

$$\begin{aligned}
\vec{k} &= \vec{k}_{\|} + \vec{k}_{\perp}\ , \quad \vec{k}_{\|} = \vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{k})\ , \quad \vec{k}_{\perp} = \vec{k} - \vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{k})\ ,\\
D_{\alpha\vec{n}}\vec{k} &= \vec{k}_{\|} + (\cos\alpha)\,\vec{k}_{\perp} + (\sin\alpha)\,\vec{n}\times\vec{k}_{\perp}\ ,\\
D_{\alpha\vec{n}} &= e^{\alpha\,\delta}\ , \quad \text{wobei} \quad \delta : \vec{k} \to \vec{n}\times\vec{k}\ .
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Da $\delta\vec{k}_{\|}$ verschwindet, besteht die Reihe $e^{\alpha\,\delta}\vec{k}_{\|}$ nur aus dem ersten Term $(\alpha\,\delta)^0\vec{k}_{\|} = \mathbf{1}\vec{k}_{\|}$. Auf $\vec{k}_{\perp}$ wiederholt angewendet, ergibt $\delta$ wegen (2.53)

$$\delta\vec{k}_{\perp} = \vec{n}\times\vec{k}_{\perp}\ , \quad \delta^2\vec{k}_{\perp} = \vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{k}_{\perp}) = -\vec{k}_{\perp}\ , \quad \delta^{2n}\vec{k}_{\perp} = (-1)^n\vec{k}_{\perp}\ . \tag{4.54}$$

Teilt man die e-Reihe $e^{\alpha\,\delta}\vec{k}_{\perp}$ wie beim Beweis der Eulerformel (4.35) in gerade und ungerade Potenzen von $\alpha\,\delta$ und bedenkt man $\delta^{2n+1} = \delta\delta^{2n}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
e^{\alpha\,\delta}\vec{k}_{\perp} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n\alpha^{2n}\,\vec{k}_{\perp} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n\alpha^{2n+1}\,\vec{n}\times\vec{k}_{\perp}\\
&= (\cos\alpha)\,\vec{k}_{\perp} + (\sin\alpha)\,\vec{n}\times\vec{k}_{\perp}\ .
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Da die Abbildungen $e^{\alpha\,\delta}$ und $D_{\alpha\vec{n}}$ auf alle Vektoren $\vec{k}$ gleich wirken, sind sie gleich.

Die Abbildung $\alpha\,\delta$ heißt Erzeugende der Abbildung $e^{\alpha\,\delta}$, $\alpha$ ist der Transformationsparameter. Die Ableitung der Transformation nach dem Transformationsparameter an dem Wert, der zur identischen Transformation gehört, $\delta = \frac{d}{d\alpha}e^{\alpha\,\delta}{}_{|\alpha=0}$, heißt infinitesimale Transformation.

# 5 Funktionen mehrerer Variablen

Glatte Kurven oder Wege in $n$ Dimensionen sind differenzierbare Abbildungen $f$ eines reellen Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ von Parameterwerten in ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, das die Kurve durchläuft,

$$f : \begin{cases} I \subset \mathbb{R} & \to & G \subset \mathbb{R}^n \\ s & \mapsto & f(s) = \left(f^1(s), f^2(s), \dots f^n(s)\right) \end{cases} . \tag{5.1}$$

Auf diesen Kurven lassen sich Funktionen von $n$ Variablen $x = (x^1, x^2, \dots x^n) \in G \subset \mathbb{R}^n$, zum Beispiel für $n = 2$ die Höhe einer Gebirgsfläche über der Ebene,

$$h : \begin{cases} G \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x) \end{cases} \tag{5.2}$$

als zusammengesetzte Funktion $h \circ f : I \to \mathbb{R}$ einer reellen Variablen untersuchen.

$$h \circ f : \begin{cases} I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & h(f^1(s), f^2(s) \dots f^n(s)) \end{cases} \tag{5.3}$$

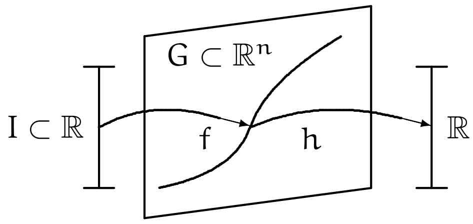



Abbildung 5.1: $h \circ f : I \to \mathbb{R}$

Um die Eigenschaften von Funktionen $h$ mehrerer Variablen zu klären, untersuchen wir die zusammengesetzten Funktionen $h \circ f$ auf allen möglichen Wegen $f$, insbesondere auf den Koordinatenlinien $f_{i,x}$ , die mit zunehmender $i$-ten Koordinate und festem Wert der anderen Koordinaten für $s = 0$ den Punkt $x$ durchlaufen,

$$f_{i,x} : s \mapsto (x^1 \dots x^{i-1}, x^i + s, x^{i+1} \dots x^n) . \tag{5.4}$$

Vom Bahnparameter $s$ hängt die zusammengesetzte Funktion $h \circ f_{i,x}$ nur deshalb ab, weil $h$ von $x^i$ abhängt und $x^i$ sich mit $s$ ändert. Die Steigung auf der $i$-ten Koordinatenlinie

$$\partial_i h_{|x} = \frac{d}{ds}_{|s=0} h \circ f_{i,x} \tag{5.5}$$

nennt man die partielle Ableitung von $h$ nach der $i$-ten Variablen bei $x$. Sie berechnet sich so, als wären die übrigen Variable $x^1, \dots x^{i-1}$ und $x^{i+1}, \dots x^n$ konstant und $x^i$ die eine Variable, nach der man ableitet, zum Beispiel (mit der Notation $(x^1, x^2) = (y, z)$)

$$h(y,z) = \frac{1}{2}(a\,(y)^2 + 2b\,yz + c\,(z)^2)\ ,\ \partial_1 h(y,z) = a\,y + b\,z\ ,\ \partial_2 h(y,z) = b\,y + cz\ . \quad (5.6)$$

Auf der Koordinatenlinie $f_{i,x}$ sind die Koordinatenfunktionen[1]

$$h^j : x \mapsto x^j \quad (5.7)$$

mit $j \neq i$ konstant und werden von der Ableitung $\partial_i$ übersehen,

$$\partial_i h^j = \delta_i{}^j\ . \quad (5.8)$$

Die Funktion $h$ heißt bei $x \in G$ differenzierbar, wenn für alle $dx = (dx^1, dx^2, \ldots dx^n)$ der Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0}(h(x+\epsilon dx) - h(x))/\epsilon = dh_{|_x}$ existiert. Dann kann der Funktionswert $h(x + dx)$ durch $h(x)$ und die Änderung von $h$ bei $x$, $dh_{|_x}$, mit einem Fehler $o(dx)$ genähert werden kann, der schneller als $dx$ gegen Null geht.

$$h(x+dx) = h(x) + dh_{|_x} + o(dx)\ ,\ dh_{|_x} = dx^1\,c_1(x) + dx^2 c_2(x) + \ldots\ ,\ \lim_{\epsilon\to 0}\frac{o(\epsilon dx)}{\epsilon} = 0 \quad (5.9)$$

Die Änderung $dh_{|_x}$ ist eine Funktion von $x$ und eine lineare Funktion von $dx$. Der Koeffizient bei der Argumentänderung $dx^i$ ist, wie die Auswertung auf den Koordinatenlinien zeigt, die partielle Ableitung nach der $i$-ten Koordinate

$$dh(x) = dx^1\,\partial_1 h(x) + dx^2\,\partial_2 h(x) + \ldots = dx^i\,\partial_i h(x)\ . \quad (5.10)$$

Bei mehrfachen partiellen Ableitungen zeigt sich: Falls $\partial_i h$, $\partial_j h$ und $\partial_i\partial_j h$ in der Umgebung eines Punktes stetig sind, so existiert dort auch $\partial_j\partial_i h$ und stimmt mit $\partial_i\partial_j h$ überein,

$$\partial_i\partial_j h = \partial_j\partial_i h\ . \quad (5.11)$$

## Ableitung längs einer Kurve

Ist $h$ differenzierbar, so ändert sich der Wert der mit einer differenzierbaren Kurve $f$ verketteten Funktion $h \circ f$ bei kleinen Änderungen $ds$ des Bahnparameters $s$ ein wenig

$$h \circ f(s+ds) = h\big(f^1(s) + ds\,\frac{df^1}{ds}, f^2(s) + ds\,\frac{df^2}{ds}, \ldots\big) = \quad (5.12)$$
$$h \circ f(s) + ds\,\big(\frac{df^1}{ds}\,\partial_1 h_{|_{f(s)}} + \frac{df^2}{ds}\,\partial_2 h_{|_{f(s)}} + \ldots\big) = h \circ f(s) + ds\,\frac{df^i}{ds}\,\partial_i h_{|_{f(s)}}\ .$$

Demnach ist die Ableitung der verketteten Funktion[2] die Summe der Produkte der Ableitungen der äußeren Funktion $h$ am Punkt $f(s)$ mal den Ableitungen $\frac{df}{ds}$ der inneren

$$\frac{d(h\circ f)}{ds}_{|_s} = \partial_1 h_{|_{f(s)}}\,\frac{df^1}{ds}_{|_s} + \partial_2 h_{|_{f(s)}}\,\frac{df^2}{ds}_{|_s} + \ldots = \partial_i h_{|_{f(s)}}\,\frac{df^i}{ds}_{|_s} = \frac{df^i}{ds}_{|_s}\,\partial_i h_{|_{f(s)}}\ . \quad (5.13)$$

[1] Die traditionelle Bezeichnung der Koordinatenfunktion, $x^j$, unterscheidet sie nicht vom Funktionswert.

[2] Die zusammengesetzte Funktion $h\circ f$ wird oft einfach als $h$ geschrieben, wenn die Kurve $f$ sich aus dem Zusammenhang ergibt. Dabei soll die Notation $dh/ds$ statt einer partiellen Ableitung $\partial h$ anzeigen, daß $h \circ f$ als Funktion *einer* Variablen, des Kurvenparameters $s$, zu differenzieren ist.

Die Schreibweise $\partial_i h\, \dot{f}^i$ betont, daß die Ableitungen in der Reihenfolge der Verkettung von $h \circ f$ multipliziert werden, und zwar an den Argumenten, die sich aus der Verkettung ergeben. Die Schreibweise $\dot{f}^i \partial_i h$ verdeutlicht, daß zur Kurve $f$ ein Ableitungsoperator am Ort $f(s)$ gehört, die Richtungsableitung $\dot{f}^i \partial_i$.

Die Änderung der Funktion $h$ längs der Kurve $f$, die $x$ durchläuft, ist linear in den partiellen Ableitungen der Funktion $h$ und linear in den Ableitungen der Komponenten der Kurve $f$. Die Änderung ergibt sich also wie in (1.21) durch Anwenden eines Vektors, der der Kurve $f$ zukommt, auf einen dualen Vektor, der zur Funktion $h$ gehört.

Bedenken wir genauer, um welche Vektorräume es sich handelt: Die in einer Umgebung von $x$ differenzierbaren Funktionen bilden einen Vektorraum. Was ihre Ableitung auf Kurven durch $x$ betrifft, so sind alle Funktionen $h$ einander äquivalent, deren partielle Ableitungen bei $x$ übereinstimmen. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse aller Funktionen, deren Ableitung bei $x$ mit der Ableitung von $h$ übereinstimmt mit $\mathrm{d}h_{|x}$. Insbesondere definieren die Koordinatenfunktionen (5.7) Äquivalenzklassen $\mathrm{d}h^j$, die man einfacher $\mathrm{d}x^j$ nennt. Sie bilden an jedem Punkt $x$ eine Basis des Vektorraumes der dort äquivalenten Funktionen $h$,

$$\mathrm{d}h_{|x} = \mathrm{d}x^j\, \partial_j h_{|x} \ . \tag{5.14}$$

Es haben ja bei $x$ die Funktionen $h$ und $x^j c_j$ mit konstanten $c_j$, die durch die Werte der partiellen Ableitungen von $h$ bei $x$ gegeben sind, $c_j = \partial_j h_{|x}$, gleiche Ableitungen.

Die Äquivalenzklassen $\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \dots$ sind an jedem Punkt $x$ eine Basis des Raumes der dort äquivalenten Funktionen. Insbesondere sind sie an jedem Punkt linear unabhängig. Es ist ja die Linearkombination $x^j c_j$ nur dann äquivalent zu 0, wenn alle partiellen Ableitungen und damit alle Komponenten $c_j$ verschwinden.

Die Abbildung

$$\mathrm{d} : h \mapsto \mathrm{d}h = \mathrm{d}x^i\, \partial_i h \tag{5.15}$$

die Funktionen $h$ an jedem Punkt auf ihre Äquivalenzklassen $\mathrm{d}h$ abbildet, ist linear und genügt der Produktregel

$$\mathrm{d}(h + g) = \mathrm{d}h + \mathrm{d}g \ , \ \mathrm{d}(a\, h) = a\, \mathrm{d}h \ , \ \mathrm{d}(g\, h) = (\mathrm{d}g)\, h + g\, (\mathrm{d}h) \ . \tag{5.16}$$

Die Abbildung d heißt äußere Ableitung, denn sie tritt in der Ableitung der verketteten Funktion $h \circ f$ als Ableitung der äußeren Funktion auf.

Kurven $f$ durch $x = f(0)$ bilden den Vektorraum der bei $x$ äquivalenten Funktionen linear auf Zahlen ab, nämlich auf ihre Ableitung längs der Kurve (5.13) bei $s = 0$. Was diese lineare Abbildung betrifft, so sind alle Kurven durch $x$ einander äquivalent, deren Ableitungen nach dem Kurvenparameter dort übereinstimmen. Als Tangentialvektor $v = \dot{f}$ am Punkt $x$ definieren wir die Äquivalenzklasse von Kurven, die $x$ mit gleicher Ableitung wie die Kurve $f$ durchlaufen. Tangentialvektoren bilden Funktionen $h$ und $g$ an jedem Punkt linear und nach der Produktregel auf reelle Zahlen ab,

$$v(h + g) = v(h) + v(g) \ , \ v(ah) = a\, v(h) \ , \ v(g\, h) = v(g)\, h + g\, v(h) \ . \tag{5.17}$$

Insbesondere sind die Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien $f_{i,x}$ (5.4) die partiellen Ableitungen $\partial_{i\,|x}$ (5.5). Sie bilden eine Basis des Tangentialraumes am Punkt $x$, denn jeder Tangentialvektor $v$ am Punkt $x$ ist eine Linearkombination von ihnen,

$$v_{|_x} = v^i(x)\,\partial_{i_{|_x}} \ . \tag{5.18}$$

Die Basis $e_i = \partial_{i\,|_x}$ von $\mathcal{T}_x$, dem Tangentialraum am Ort $x$, ist dual zur Basis $\mathrm{d}x^j$ des dualen Raumes $\mathcal{T}^*_x$ der Äquivalenzklassen der bei $x$ differenzierbaren Funktionen (5.8),

$$\partial_i\, x^j = \delta_i{}^j \ . \tag{5.19}$$

In Räumen mit einem Skalarprodukt und Basisvektoren $e_1, e_2, \ldots$ kann man die Summe $\partial_i h \frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s}$ als Skalarprodukt des Tangentialvektors $\dot{f} = e_i \frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s}$ mit einem anderen Vektor, dem Gradienten von $h$ [3]

$$\nabla h = \mathrm{grad}\, h = e_j\, g^{jk}\, \partial_k h \tag{5.20}$$

deuten, wobei $g^{jk}$ die Matrixelemente derjenigen Matrix sind, die invers ist zur Matrix der Skalarprodukte der Basisvektoren, $g_{ij} = e_i \cdot e_j$, $g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i{}^k$,

$$\dot{f} \cdot \nabla h = \frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s}\,(e_i \cdot e_j)\, g^{jk}\, \partial_k h = \frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s}\, g_{ij}\, g^{jk}\, \partial_k h = \frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s}\, \delta_i{}^k\, \partial_k h = \frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s}\, \partial_i h \ . \tag{5.21}$$

Der Vektor $\nabla h(x)$ ist aus dem Tagentialraum am Punkt $x$, nicht aus dem Dualraum und kann daher der Richtung nach mit anderen Tangentialvektoren verglichen werden. Daß auf höhengleichen Wegen die Steigung $\mathrm{d}(h \circ f)/\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}f^1}{\mathrm{d}s}\, \partial_1 h + \frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}s}\, \partial_2 h = \dot{f} \cdot \nabla h$ verschwindet, besagt, daß sie überall senkrecht zum Gradienten $\nabla h$ verlaufen. In Richtung des Gradienten $\nabla h$ ist bei gleich langen Tangentialvektoren die Höhenänderung am größten. Er gibt die Größe und Richtung der Steigung an. Bei Bewegung im Potential ist die Kraft $\vec{F} = -\,\mathrm{grad}\, V$ dem Gradienten des Potentials $V$ entgegengesetzt.

In jedem Orthonormalsystem $g_{ij} = \delta_{ij}$ stimmen die Komponenten $\partial_1 h, \partial_2 h \ldots$ des Gradienten mit denen der äußeren Ableitung $\mathrm{d}h$ überein.

## Mannigfaltigkeiten, Koordinatentransformationen

Genauer bedacht ist bislang nicht definiert, wie man Funktionen differenziert, die beispielsweise auf einer Kugelfläche definiert sind, denn die Kugelfläche ist, anders als wir es bei der Definition der Ableitung brauchen, kein Vektorraum, in dem Addition und Vervielfältigung sinnvoll sind, sondern nur eine Mannigfaltigkeit.

Die mathematischen Strukturen von Mannigfaltigkeiten besprechen wir am Beispiel der Kugeloberfläche $S^2$, das sind die Punkte $p = (x, y, z)$ in $\mathbb{R}^3$ auf der Einheitskugel, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. In Ausschnitten sieht $S^2$ so aus wie Bereiche der zweidimensionalen Ebene $\mathbb{R}^2$. Beispielsweise ergibt die Projektion der Punkte $p$ auf die Grundfläche invertierbare Koordinaten für die Punkte oberhalb (oder unterhalb) der $z$-Ebene. Die stereographischen Projektionen

$$\phi_{\text{Süd}} : \ p \mapsto (u^1, u^2) = \Big(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\Big) \ , \ \phi_{\text{Nord}} : \ p \mapsto (v^1, v^2) = \Big(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\Big) \tag{5.22}$$

[3] gesprochen „Nabla h“ oder „grad h“ oder „Gradient von h“. Gradient stammt vom lateinischen gradior schreiten, steigen. Ein Grad ist ein Schritt auf einer markierten Teilung.

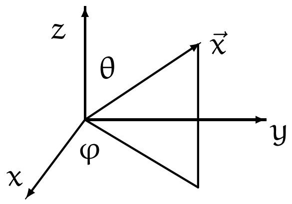
sind für alle Punkte außer dem Nord- und Südpol, $p_{\text{Nord}} = (0,0,1)$, $p_{\text{Süd}} = (0,0,-1)$, Karten, also invertierbare Abbildungen eines Bereichs von $S^2$ auf $\mathbb{R}^2$, (wegen $x^2+y^2 = 1-z^2$ ist $(u^1)^2+(u^2)^2 = |u|^2 = (1+z)/(1-z)$ und kann leicht nach $z$ aufgelöst werden)

$$\begin{aligned}\phi^{-1}_{\text{Süd}} : (u^1,u^2) &\mapsto \Big(\frac{2u^1}{1+|u|^2}\ ,\ \frac{2u^2}{1+|u|^2}\ ,\ \frac{-1+|u|^2}{1+|u|^2}\Big)\ ,\\ \phi^{-1}_{\text{Nord}} : (v^1,v^2) &\mapsto \Big(\frac{2v^1}{1+|v|^2}\ ,\ \frac{2v^2}{1+|v|^2}\ ,\ \frac{1-|v|^2}{1+|v|^2}\Big)\ .\end{aligned} \tag{5.23}$$

Allerdings überdeckt keine einzelne Karte, sondern nur beide zusammen, $S^2$ vollständig und invertierbar. Sie können im gemeinsamen Gültigkeitsbereich $z \neq \pm 1$ durch Inversion am Einheitskreis ineinander umgerechnet werden,

$$(v^1,v^2) = \Big(\frac{u^1}{|u|^2}, \frac{u^2}{|u|^2}\Big)\ ,\ (u^1,u^2) = \Big(\frac{v^1}{|v|^2}, \frac{v^2}{|v|^2}\Big)\ . \tag{5.24}$$

Auch die Kugelkoordinaten $(r,\theta,\varphi)$ mit Wertebereichen $0 \le r$, $0 \le \theta \le \pi$ und $0 \le \varphi < 2\pi$ hängen außerhalb der $z$-Achse invertierbar mit den kartesischen Koordinaten $(x,y,z)$ der Punkte des $\mathbb{R}^3$ zusammen, (allerdings ist $\varphi$ nicht wohldefiniert und stetig)




$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\ ,\quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta &= \arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z)\\ \varphi &= \arctan(y/x)\end{aligned}\ . \tag{5.25}$$

So wie in diesem Beispiel besteht jede reelle, $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ aus der Vereinigung von Umgebungen $U_\alpha$, wobei $\alpha$ aus irgendeiner bezeichnenden Indexmenge sei,

$$\mathcal{M} = \cup_\alpha U_\alpha\ , \tag{5.26}$$

die durch Karten $\phi_\alpha$ (auch Koordinatensysteme genannt) bijektiv und stetig auf Umgebungen $V_\alpha$ von $\mathbb{R}^n$ abgebildet werden,

$$\phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathcal{M} \to V_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n\ . \tag{5.27}$$

Die Bilder $\phi_\alpha(p) = x(p) \in \mathbb{R}^n$ sind die Koordinaten der Punkte $p$ im Koordinatensystem $\phi_\alpha$.

Im gemeinsamen Gültigkeitsbereich $U_\alpha \cap U_\beta$ zweier Karten kann man die Koordinaten wie in den Beispielen (5.24, 5.25) durch die differenzierbare Koordinatentransformation ineinander umrechnen,

$$\phi_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} :\ x \mapsto x'(x)\ , \tag{5.28}$$

die $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ invertierbar auf $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ abbildet, $\phi^{-1}_{\beta\alpha} = \phi_{\alpha\beta}$. Die Koordinatentransformation heißt auch Übergangsfunktion.

Zur jeder reellen Funktion der Mannigfaltigkeit, $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, gehört im Koordinatensystem $\phi_\alpha$ die Funktion $h_\alpha$ des Koordinatenbereichs $V_\alpha$,

$$h_\alpha = h \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to \mathbb{R} \ . \tag{5.29}$$

Sie hängt mit $h_\beta$ im gemeinsamen Definitionsbereich durch die Übergangsfunktion zusammen,

$$h_\beta = h_\alpha \circ \phi_{\alpha\,\beta} = h \circ \phi_\beta^{-1} \ , \ h_\beta(x') = h_\alpha(x(x')) \ . \tag{5.30}$$

In diesem Sinn sind die Funktionen $h_{\text{kartesisch}} : (x, y, z) \mapsto y/x$ und $h_{\text{Kugelkoordinaten}} : (r, \theta, \varphi) \mapsto \tan\varphi$ verschiedene Koordinatendarstellungen derselben Funktion $h$. Die Funktion $h$ heißt differenzierbar, wenn alle $h_\alpha$ differenzierbar sind.

Zu jeder Kurve $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ gehört im Koordinatensystem $\phi_\alpha$ die Kurve

$$f_\alpha = \phi_\alpha \circ f \tag{5.31}$$

im Koordinatenbereich $V_\alpha$. Die Kurve $f_\alpha$ ist die Koordinatendarstellung der Kurve $f$. Im gemeinsamen Gültigkeitsbereich hängt sie mit der Koordinatendarstellung $f_\beta$ durch die Transformation $\phi_{\beta\,\alpha}$ zusammen,

$$f_\beta = \phi_{\beta\,\alpha} \circ f_\alpha \ . \tag{5.32}$$

Die zusammengesetzte Funktion $h$ auf der Kurve $f$ ist unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem. In jeder Karte gilt

$$h \circ f = h_\alpha \circ f_\alpha \ . \tag{5.33}$$

Da die zusammengesetzte Funktion unabhängig vom Koordinatensystem sind, ist ihre Ableitung, der Tangentialvektor $\dot{f} = \dot{f}^i \partial_i$ angewendet auf $h$, unabhängig vom Koordinatensystem. Wir fassen dabei die partiellen Ableitungen $\partial_{x^i} h_{|_p}$ von Funktionen der Mannigfaltigkeit nach den Koordinaten $x(p) = \phi_\alpha(p)$ als Ableitung längs des Urbildes der $i$-ten $x$-Koordinatenlinie auf und rechnen die Ableitung auf dieser Koordinatenlinie als Ableitung von $h_\alpha$ aus,

$$\partial_{x^i} h_{|_p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}_{|_{s=0}} h_\alpha(x^1, x^2, \dots, x^i + s, \dots, x^n) \ , \ x = \phi_\alpha(p) \ . \tag{5.34}$$

Am Punkt $p \in \mathcal{M}$ ist die partielle Ableitung der Funktion $h$ gleich der partiellen Ableitung der Funktion $h_\alpha$ bei $\phi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial_{x^i} h_{|_p} = \partial_{x^i} h_{\alpha|_{\phi_\alpha(p)}} \ . \tag{5.35}$$

Ebenso definiert die Ableitung längs der $x'$-Koordinatenlinien eines weiteren Koordinatensystems $\phi_\beta$ durch

$$\partial_{x'^j} h_{|_p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}_{|_{s=0}} h_\beta(x'^1, x'^1, \dots, x'^j + s, \dots, x'^n) \ , \ x' = \phi_\beta(p) \tag{5.36}$$

die partiellen Ableitungen von $h$ nach den $x'$-Koordinaten.

Es ist $h_\beta = h_\alpha \circ \phi_{\alpha\beta}$ (5.30) oder $h_\beta(x') = h_\alpha((x(x'))$. Auf der $j$-ten $x'$-Koordinatenlinie durchläuft $x$ einen Weg $x(x'(s))$, auf dem sich $h_\alpha(x(x'(s))$ gemäß (5.13) um

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} h_\beta(x'(s)) = \frac{d}{ds}_{|s=0} h_\alpha(x(x'(s)) = \frac{dx^i(x'(s))}{ds}_{|s=0} \partial_{x^i} h_\alpha{}_{|x(x'((0))} \tag{5.37}$$

ändert. Da die Ableitung $\frac{dx^i(x'(s))}{ds}_{|s=0}$ auf der $j$-ten $x'$-Koordinatenlinie definitionsgemäß die partielle Ableitung nach $x'^j$ ist, zeigt dies die Kettenregel für partielle Ableitungen

$$\partial_{x'^j} h = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \partial_{x^i} h \tag{5.38}$$

oder kürzer

$$\partial'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \partial_i \ . \tag{5.39}$$

Aus den gleichen Gründen wie (5.39) gilt

$$\partial_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \partial'_k \ , \tag{5.40}$$

denn welche Koordinaten wir $x$ und welche wir $x'$ nennen, ist unerheblich. In (5.39) eingesetzt ergibt sich, weil die partiellen Ableitungen linear unabhängig sind,

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}_{|x'(x)} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}_{|x} = \delta_j{}^k \ . \tag{5.41}$$

Wie bei (4.12) ist die Ableitung der inversen Transformation das Inverse der Ableitung der Transformation.

Die Matrix der partiellen Ableitungen der Funktionen $x'(x)$

$$J^j{}_i(x) = \partial_i x'^j{}_{|x} \tag{5.42}$$

heißt Jacobimatrix [18] der Koordinatentransformation $x'(x)$. Dabei stehen in der $i$-ten Spalte die partiellen Ableitungen nach $x^i$ und in der $j$-te Zeile die Ableitungen der Koordinaten $x'^j$. Insbesondere ist bei linearen Transformationen $x'^j = M^j{}_i x^i$ die Jacobimatrix $J$ gleich der Matrix $M$.

Bei kartesischen und bei Kugelkoordinaten (5.25) ist sie

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z\,x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{z\,y}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{5.43}$$

Für die Jacobimatrix der Umkehrfunktionen mit Matrixelementen $N^j{}_k(x') = \partial'_k x^j{}_{|x'}$ erhalten wir in diesem Beispiel

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{5.44}$$

Drückt man in (5.43) die kartesischen Koordinaten durch die Kugelkoordinaten aus, so bestätigt Matrixmultiplikation in diesem Beispiel $\mathsf{N}\mathsf{J} = \mathbf{1}$ (5.41).

Wegen (5.40) hängen die Komponenten von Tangentialvektoren $v$ bei $p$ in verschiedenen Koordinatensystemen durch

$$v'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} v^i \tag{5.45}$$

miteinander zusammen, denn $v = v^i \partial_i = v^i (\partial_{x^i} x'^j) \partial_{x'^j} = v'^j \partial'_j$. Für die entsprechende Koordinatendarstellungen heißt dies

$$v'^j(x'(x)) = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}_{|x} v^i(x) \ . \tag{5.46}$$

Zum Formelbild: Der Index $j$ tritt auf beiden Seiten in gleicher Stellung auf, nämlich oben, und betrifft in beiden Ausdrücken Komponenten und Koordinaten des gleichen, des gestrichenen Koordinatensystems. Der Summationsindex $i$ tritt auf der rechten Seite unten und oben auf und betrifft ungestrichene Koordinaten und Komponenten. Das Argument $x'$ ist das Transformierte von $x$.

In Matrixschreibweise ergibt sich der Spaltenvektor der Komponenten $v'$ als Produkt der Matrix $\mathsf{J}$ mit dem Spaltenvektor der Komponenten $v$, $v' = \mathsf{J}\, v$.

Die Äquivalenzklasse $dh_{|p}$ von Funktionen, deren Ableitungen bei $p$ mit denen von $h$ übereinstimmen, hängt nicht vom Koordinatensystem ab. Denn verwenden wir als Basis für $dh_{|p}$ die Äquivalenzklassen der Koordinatenfunktionen $x(p) = \phi_\alpha(p)$ oder $x'(p) = \phi_\beta(p)$, so sind die einen Koordinaten Funktionen der anderen, $x(x') = \phi_{\alpha\,\beta}(x')$ und wegen (5.14) gilt für jede Koordinatenfunktion

$$dx^i = dx'^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \ . \tag{5.47}$$

Zusammen mit (5.39) heißt dies, daß zwar die Komponenten der äußeren Ableitung und des Gradienten, nicht aber die Änderung $dh$ selbst, vom Koordinatensystem abhängen,

$$dh_{|p} = dx^i \partial_{x^i} h_{|p} = dx'^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \partial_{x^i} h_{|p} = dx'^j \partial_{x'^j} h_{|p} \ . \tag{5.48}$$

Für die Komponenten von Dualvektoren $F = dx^i F_i$ in verschiedenen Koordinatensystemen besagt dies

$$F'_j(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}_{|x'} F_i(x(x')) \ . \tag{5.49}$$

Zum Formelbild: Der Index $j$ tritt auf beiden Seiten in gleicher Stellung auf, nämlich unten, und betrifft in beiden Ausdrücken Komponenten und Koordinaten des gleichen, des gestrichenen Koordinatensystems. Der Summationsindex $i$ tritt auf der rechten Seite unten und oben auf und betrifft ungestrichene Koordinaten und Komponenten. Die Argumente $x$ und $x'$ hängen miteinander zusammen, da sie die Koordinaten desselben Punktes $p$ in verschiedenen Systemen sind.

In Matrixschreibweise ergibt sich der Spaltenvektor der Komponenten $F'$ durch Multiplikation von $\mathsf{J}^{\mathsf{T}-1}$ mit dem Spaltenvektor der Komponenten $F$, $F' = \mathsf{J}^{\mathsf{T}-1} F$: bei Wechsel des Koordinatensystems transformieren die Komponenten von Dualvektoren kontragredient (3.109) zu den Komponenten von Tangentialvektoren $v$. Nur wenn $\mathsf{J}^{\mathsf{T}-1}$ mit $\mathsf{J}$ übereinstimmt, wenn also $\mathsf{J}$ eine orthogonale Matrix ist (3.63), transformieren die Komponenten von Tangentialvektoren und äußerer Ableitung gleich.

## Vektor- und Dualvektorfelder

Gehört zu jedem Punkt $p$ einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ genau ein Vektor $u \in \mathcal{T}_p$ , beispielsweise das Strömungsfeld, das tangential an die Bahnkurven von strömenden Teilchen ist, so nennt man diese Menge aller Paare $\{(p, u(p)) \ , p \in \mathcal{M}\}$ ein Vektorfeld $u$. Streng genommen handelt es sich dabei nicht unbedingt um eine vektorwertige Funktion der Mannigfaltigkeit, das wäre ein Schnitt im kartesischen Produkt der Urbildmenge $\mathcal{M}$ mit der Bildmenge, einem Vektorraum $\mathcal{V}$ (vergleiche Seite 49). Aber beim Vektorfeld hängt die Bildmenge $\mathcal{T}_p$, der Tangentialraum des Punktes $p$, vom Urbildpunkt $p$ ab und ist beispielsweise bei der Mannigfaltigkeit $S^2$ sichtbar verschieden vom Tangentialraum $\mathcal{T}_{p'}$ eines anderen Punktes. Die Tangentialräume verschiedener Punkte sind nicht gleich, sondern einander nur ähnlich (isomorph).

Man nennt die Menge aller Paare $(p, v)$ von Punkten $p$ und Tangentialvektoren $v \in \mathcal{T}_p$ das Tangentialbündel $\mathcal{T}_\mathcal{M}$. Das Vektorfeld $u$ ordnet jedem Punkt $p$ einen Tangentialvektor zu, schneidet also jede Faser $\{p\} \times \mathcal{T}_p$ in genau einem Punkt $(p, u(p))$ . Es ist ein Schnitt im Tangentialbündel, eine Abbildung von $\mathcal{M}$ in das Tangentialbündel $\mathcal{T}_\mathcal{M}$. Als Kurzschrift für $p \mapsto (p, u(p))$ notiert man oft nur den Hauptteil $p \mapsto u(p)$.

Zwar sieht ein Schnitt durch ein Bündel in genügend kleinen Umgebungen wie eine Funktion aus, wie ein Schnitt durch ein Produktbündel, denn in jeder Koordinatenumgebung $U$ und in Koordinaten $x$ ist ein Vektorfeld $u$ durch seine Komponentenfunktionen $x \mapsto (u^1(x), u^2(x), \dots u^n(x))$ gegeben. Aber wenn man die Mannigfaltigkeit nicht mit einer Karte überdecken kann, muß man mit (5.46) in die angrenzenden, überlappenden Umgebungen umrechnen und kann dadurch Einschränkungen unterworfen werden.

So hängen Vektorfelder der Kugeloberfläche $S^2$ in stereographischen Nord- und Südkoordinaten (5.22) außerhalb der Pole durch die Jacobimatrix der Inversion am Einheitskreis (5.24) zusammen,

$$J^j{}_i(u) = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} = \frac{|u|^2 \delta^{ij} - 2u^i u^j}{u^4} \ . \tag{5.50}$$

Schreiben wir $(u^1, u^2)$ durch Betrag und Winkel, $(u^1, u^2) = |u| \, (\cos\varphi, \sin\varphi)$, so ist dies

$$J = \frac{1}{|u|^2} \begin{pmatrix} 1 - 2c^2 & -2c\,s \\ -2c\,s & 1 - 2s^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{|u|^2} \begin{pmatrix} C & S \\ S & -C \end{pmatrix} \text{ mit } C = \cos(2\varphi) \ , \ S = \sin(2\varphi) \ . \tag{5.51}$$

Insbesondere ist ein stetiges Vektorfeld, das in Südkoordinaten am Südpol nicht verschwindet und die Richtung $(1, 0)$ hat, in Nordkoordinaten ein Vektorfeld, dessen Richtung auf einem Kreis im Limes $|v| \to \infty$ durch $(C, S)$ gegeben ist. Beim Durchlaufen des Kreises dreht es sich um $2 \cdot 2\pi$ und windet sich zweimal um den Ursprung. Da die Richtung eines nichtverschwindenden Vektorfeldes stetig vom Vektorfeld abhängt und ein Vektorfeld auf einer Kurve sich stetig mit der Kurve ändert, kann sich die diskrete Windungszahl 2 nicht ändern, wenn wir den Kreis um den Südpol stetig zum Nordpol zusammenziehen. Dort wäre das Vektorfeld mit Windungszahl 2 unstetig. Also verschwindet es dort oder zwischendurch an mindestens einem Punkt. Anders als die Funktion $h : S^2 \to \mathbb{R}^2, \ p \mapsto (1, 0)$ muß jedes reelle Vektorfeld auf $S^2$ in mindestens einem Punkt verschwinden. Man kann einen Igel nicht ohne Wirbel kämmen.

Jedes Dualvektorfeld $F = dx^i F_i$ ist ein Schnitt im dualen Tangentialbündel $\mathcal{T}^*_{\mathcal{M}}$, das in jeder Koordinatenumgebung $U$ und in $x$-Koordinaten durch seine Komponentenfunktionen $(F_1(x), F_2(x), \dots F_n(x))$ gegeben ist und durch (5.49) mit den Komponentenfunktionen in $x'$-Koordinaten zusammenhängt.

Beispielsweise ist die Änderung eines Potentials $V$ ein Dualvektorfeld,

$$dV(x) = dx^i\, \partial_i V(x)\ . \tag{5.52}$$

Aber nicht jedes Dualvektorfeld

$$F : x \mapsto F(x) = dx^i F_i(x) \tag{5.53}$$

ist das Negative der äußeren Ableitung eines Potentials $V$. Dazu müssen die antisymmetrisierten Ableitungen der Komponentenfunktionen verschwinden,

$$F = -dV \ \Rightarrow\ \partial_i F_j - \partial_j F_i = 0\ . \tag{5.54}$$

Denn die Reihenfolge partieller Ableitungen kann vertauscht werden, $\partial_i\partial_j V = \partial_j\partial_i V$ (5.11). Das Verschwinden der antisymmetrisierten Ableitungen (5.54) ist nicht nur notwendig, sondern, wie wir später zeigen (15.40), in sternförmigen Gebieten auch hinreichend für die Existenz eines Potentials.

In $n = 3$ Dimensionen definieren durch

$$\mathfrak{e}\,(\mathrm{rot}\,F)^1 = \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2\ ,\quad \mathfrak{e}\,(\mathrm{rot}\,F)^2 = \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3\ ,\quad \mathfrak{e}\,(\mathrm{rot}\,F)^3 = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1\ ,$$
$$\mathfrak{e}\,(\mathrm{rot}\,F)^i = \epsilon_{ijk}\partial_j F_k\ . \tag{5.55}$$

die antisymmetrisierten Ableitungen eines Dualvektorfeldes $F$ ein Vektorfeld, die Rotation von $F$. Das Volumen des Einheitsspats $\mathfrak{e}$ (2.26), das hier als Faktor auftreten muß, damit $\mathrm{rot}\,F$ in beliebiger Basis ein Vektorfeld ist, vereinfacht sich zu 1, wenn man in einer Orthonormalbasis rechnet.

Ein Dualvektorfeld ist in sternförmigen Gebieten genau dann eine äußere Ableitung, wenn seine Rotation verschwindet.

## Minimieren unter Nebenbedingungen

Eine Funktion $h$ hat im Inneren eines Gebietes $G \subset \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $\underline{x}$ ein Minimum, wenn auf allen Kurven $f$, die $\underline{x}$ durchlaufen, die verkettete Funktion $h \circ f$ minimal wird. Dort muß die Ableitung $d(h \circ f)/ds$ (5.13) verschwinden,

$$\frac{df^i}{ds}_{|s=0} \partial_i h_{|\underline{x}} = 0\ . \tag{5.56}$$

Da dies für alle Kurven verschwinden muß, muß $\dot f^i \partial_i h_{|\underline{x}}$ für alle Tangentialvektoren $\dot f$ verschwinden und folglich jede Komponente der Änderung $dh_{|\underline{x}}$

$$\partial_i h_{|\underline{x}} = 0\ . \tag{5.57}$$

Verwickelter ist die Frage, in welchem Punkt $\underline{x}$ einer $n-p$-dimensionalen Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$, die als Lösungsmenge von $p$ Nebenbedingungen $\phi^1 = 0, \phi^2 = 0, \dots \phi^p = 0$ vorliege, der Wert einer Funktion $h$ kleiner als in allen benachbarten Flächenpunkten ist. Wie findet man beispielsweise rechnerisch den niedrigsten Punkt der Kugelfläche $S^2$, also das Minimum der Funktion $h(x, y, z) = z$ unter der Nebenbedingung $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ?

Die Nebenbedingungen seien unabhängig, das heißt, ihre Änderungen $d\phi^1, d\phi^2 \dots$ seien in einer Umgebung von $\underline{x}$ linear unabhängig.

In einem Extremalpunkt auf der Hyperfläche muß $v(h) = v^i\, \partial_i h_{|\underline{x}}$ nicht für alle Tangentialvektoren $v$ verschwinden, sondern nur für Tangentialvektoren an Kurven, die in der Hyperfläche $\phi^a(x) = 0, a = 1, 2, \dots p$ verlaufen, deren Tangentialvektoren folglich $v(\phi^a) = v^i\, \partial_i \phi^a = 0$ erfüllen.

Da die Dualvektoren $f^1 = d\phi^1, f^2 = d\phi^2 \dots$ linear unabhängig sind, können wir sie durch $f^{p+1}, f^{p+2}, \dots, f^n$ zu einer Basis des Dualraumes ergänzen. Sei $e_1, e_2, \dots e_n$ die dazu duale Basis des Tangentialraumes. Die Tangentialvektoren $v$ der Hyperfläche, angewendet auf $f^1, f^2, \dots f^p$, verschwinden. Sie sind folglich Linearkombinationen der Basisvektoren $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots e_n$. $v(h)$ verschwindet genau dann für alle diese Tangentialvektoren, wenn $dh$ eine Linearkombination von $f^1, f^{,} \dots f^p$ ist, wenn es also Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ gibt, so daß am Punkt $\underline{x}$ gilt

$$\partial_i h_{|\underline{x}} + \lambda_a\, \partial_i \phi^a{}_{|\underline{x}} = 0 \ , \ \phi^a{}_{|\underline{x}} = 0 \ . \tag{5.58}$$

Das heißt aber, daß bei $\underline{x}$ alle partiellen Ableitungen der Funktion

$$H : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+p} & \to \mathbb{R} \\ (x^1, x^2 \dots x^n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p) & \mapsto h(x^1, x^2 \dots x^n) + \lambda_a\, \phi^a(x^1, x^2 \dots x^n) \end{cases} \tag{5.59}$$

verschwinden. Die Variablen $\lambda_a$, die die Nebenbedingungen $\phi^a$ multiplizieren, heißen Lagrangesche Multiplikatoren [18].

Daher findet man den niedrigsten Punkt einer Einheitskugel um den Ursprung als einen derjenigen Punkte, an denen $H(x, y, z, \lambda) = z + \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ als Funktion von $x, y, z, \lambda$ stationär ist und die partiellen Ableitungen $2\,\lambda\, x$ , $2\,\lambda\, y$ , $1 + 2\,\lambda\, z$ ,$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ verschwinden. Da $\lambda$ wegen $1 + 2\lambda\, z = 0$ nicht verschwinden kann, gilt $x = y = 0$ und folglich $z = \pm 1$ und $\lambda = \mp 1/2$. Bei $z = 1$ ist $h(x, y, z) = z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ maximal, bei $z = -1$ minimal.

## Konforme Transformationen

Konform heißen Transformationen, die Kugelflächen auf Kugelflächen abbilden. Die Durchmesser kleiner Kugelflächen werden dabei unabhängig von ihrer Richtung gleich gestreckt oder gestaucht – es gehen ja Kugeln in Kugeln über. Daher bleiben die Größenverhältnisse kleiner, benachbarter Objekte ungeändert. Schnittwinkel von Kurven sind das Verhältnis von infinitesimalen Bogenlängen und Radien. Da sie um denselben Faktor geändert werden, sind konforme Transformationen winkeltreu.

Offensichtlich sind Translationen, Drehungen und Streckungen konform. Aber auch die Inversion an der Kugelfläche $K_{R,\vec{A}}$ mit Mittelpunkt $\vec{A}$ und Radius $R > 0$

$$I_{R,\vec{A}} : \vec{x} \mapsto \vec{x}' = R^2\, \frac{\vec{x} - \vec{A}}{(\vec{x} - \vec{A})^2} + \vec{A} \ , \tag{5.60}$$

die Abstände von $\vec{A}$ invertiert, $\frac{(\vec{x}'-\vec{A})^2}{R^2} = \frac{R^2}{(\vec{x}-\vec{A})^2}$, ist konform. Denn die Punkte $\vec{x}$ einer Kugelfläche $K_{r,\vec{m}}$ erfüllen $(\vec{x}-\vec{m})^2 = r^2$, also eine Gleichung der Form

$$a \sum_i (x^i)^2 + b_i\, x^i + c = 0\ ,\ b^2 > 4\, a\, c\ , \tag{5.61}$$

bei der die quadratischen Terme ein Vielfaches des Längenquadrats sind. Durch $(\vec{x}-\vec{A})^2$ geteilt, folgt $a' + b'_i x'^i + c' \sum_j (x'^j)^2 = 0$, also die Gleichung einer Kugelfläche für die Bildpunkte $x'$.

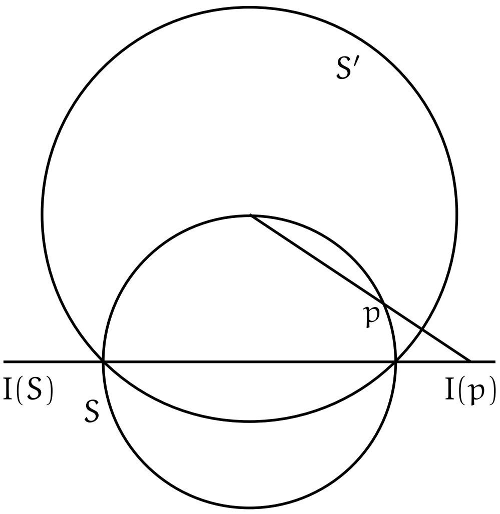



Abbildung 5.2: Stereographische Projektion als Inversion an $S'$

Damit die Inversion $I_{R,\vec{A}}$ eine Transformation einer Mannigfaltigkeit ist, also überall definiert und invertierbar ist, müssen wir $\mathbb{R}^3$ um den Bildpunkt von $\vec{A}$ ergänzen und $I_{R,\vec{A}}$ als Selbstabbildung der Sphäre $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ deuten.

Falls die zu transformierende Kugelfläche das Inversionszentrum $\vec{A}$ enthält, so ist das Bild der Kugelfläche eine Ebene. Um diese Sonderfälle nicht als Ausnahmen formulieren zu müssen, zählen wir praktischerweise die Ebenen zu den Kugelflächen (5.61) mit $a = 0$.

Insbesondere bildet die Inversion $I_{\sqrt{2},\vec{e}_z}$ an der Kugel $S' = K_{\sqrt{2},\vec{e}_z}$ um den Nordpol der Einheitskugel $S = K_{1,\vec{0}}$, die sie im Äquator schneidet, die Einheitskugel $S$ auf die $z$-Ebene ab,

$$I_{\sqrt{2},\vec{e}_z}(x,y,z) =_{|x^2+y^2+z^1=1} \Big(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\Big)\ , \tag{5.62}$$

denn $x^2 + y^2 + (z-1)^2$ ist auf der Einheitskugel $2(1-z)$. Also ist die stereographische Projektion (5.22) die Inversion an der Kugelfläche $S' = K_{\sqrt{2},\vec{e}_z}$ und folglich eine konforme Abbildung. Sie bildet Kreise auf Kreise ab, ist winkeltreu und erhält Größenverhältnisse kleiner, benachbarter Objekte.

Daß die stereographische Projektion Kugelschalen auf $S^{n-1}$ auf Kugelschalen oder Ebenen in $\mathbb{R}^{n-1}$ abbildet, ergibt sich algebraisch, weil Kugelschalen auf $S^{n-1}$ der Schnitt von $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1\}$ mit einer anderen Kugelschale um $b \in S^{n-1}$ sind, $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x^i - b^i)^2 = r^2\}$, $r < 2$. Da diese Schnittpunkte auf $S^n$ liegen, sind sie auch die Schnittpunkte mit der Ebene $\{x \in \mathbb{R}^n : 1 - 2(\sum_{i=1}^n x^i\, b^i) + 1 = r^2\}$. Als Funktion der stereographischen Koordinaten $u$ (5.22)

$$x^i = \frac{2u^i}{1+|u|^2}\ ,\ i = 1,2\ldots n-1,\ x^n = -\frac{1-|u|^2}{1+|u|^2}\ ,\quad \text{wobei } |u|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (u^i)^2 \tag{5.63}$$

gilt also nach Multiplikation der Ebenengleichung mit $1 + |u|^2$

$$(2-r^2)(1+|u|^2) - 4(\sum_{i=1}^{n-1} u^i\, b^i) + 2b^n(1-|u|^2) = 0\ . \tag{5.64}$$

Das ist die Gleichung einer Kugelschale oder, falls $2 - 2b^n - r^2 = 0$, einer Ebene im Raum der stereographischen Koordinaten $u$.

# 6 Bezugssysteme

Die Bahn $\vec{f}$, die ein Punktteilchen im Ortsraum mit der Zeit $t$ durchläuft, ist eine Abbildung eines Parameterintervalls I auf Orte

$$\vec{f}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ , \ t \mapsto \vec{f}(t) = \vec{e}_i\, f^i(t) \ . \tag{6.1}$$

Wir meiden möglichst die weitverbreitete Schreibweise $\vec{x}(t)$ und unterscheiden den Ort $\vec{x}$ von der Bahn $\vec{f}$ und dem Ort $\vec{f}(t)$, der zur Zeit $t$ durchlaufen wird.

Bei zeitunabhängigen Basisvektoren $\vec{e}_i$ sind die Komponenten der Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{f}}{dt}_{|t} = \vec{e}_i \frac{df^i}{dt}_{|t} = \vec{e}_i\, \dot{f}^i(t) \tag{6.2}$$

die Zeitableitungen der Komponenten des Ortsvektors. Die Beschleunigung

$$\vec{b}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}_{|t} = \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}_{|t} = \vec{e}_i \frac{d^2 f^i}{dt^2}_{|t} = \vec{e}_i\, \ddot{f}^i(t) \tag{6.3}$$

eines Teilchens erfordert wegen der Impulserhaltung die Übertragung von Impuls.

Der Impuls $\vec{p}$ eines Teilchens der Masse $m > 0$ ist, wie wir noch herleiten werden, in Maßsystemen mit $c = 1$

$$\vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \ . \tag{6.4}$$

Hierbei schreiben wir für das Betragsquadrat $\vec{v}^2$ kürzer und lesbarer $v^2$.

Der Impuls und damit die Geschwindigkeit bleibt unverändert, wenn nicht von anderen Teilchen oder Feldern Impuls auf das Teilchen übertragen wird. Die Kraft $\vec{F}$ ist der auf das Teilchen pro Zeit übertragene Impuls,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \ . \tag{6.5}$$

Für Geschwindigkeiten, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ sind, gilt näherungsweise bis auf Terme der Ordnung $O(v^2)$,

$$\vec{p} \approx m\,\vec{v} \tag{6.6}$$

und die Newtonsche Bewegungsgleichung, Kraft ist auf physikalischen Bahnen gleich Masse mal Beschleunigung,

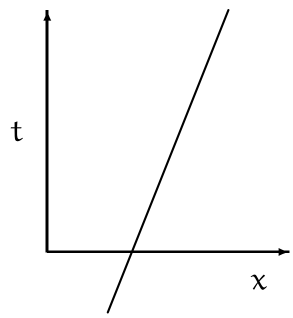
$$m\,\ddot{\vec{x}} \approx \vec{F} \ . \tag{6.7}$$

Die Bewegungsgleichung (6.5) ist mehr als eine Definition der Kraft, da man gleichen Impulsübertrag $\vec{F}\,dt$ durch zum Beispiel gleichen Rückstoß feststellen kann und seine Auswirkung auf verschieden bewegte Teilchen durch (6.5) gegeben ist.

Es gibt keine negativen Massen; die Beschleunigung ist nicht der Kraft entgegen gerichtet.

Allerdings gibt es masselose Teilchen, beispielsweise Photonen. Sie bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit. Ihr Impuls ist nicht durch (6.4) gegeben, sondern hängt mit ihrer Energie $E > 0$ in Maßsystemen mit $c = 1$ durch $\vec{p} = E\,\vec{v}$ , $\vec{v}^2 = 1$, zusammen. Auch Photonen sind träge und ändern ihre Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{p}/E$ nur, wenn Impuls übertragen wird.

Freie Teilchen, $\vec{F} = 0$, bewegen sich gradlinig gleichförmig,




$$\text{Freies Teilchen:} \quad \vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \vec{v}(0)\,t\ . \tag{6.8}$$

Denn wenn die Ableitung von $\vec{v}/\sqrt{1-v^2}$ verschwindet, ist auch $v^2$ konstant und in der Folge auch $\vec{v}$. Also verschwindet die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}$. Nach dem Mittelwertsatz (4.14) ist daher jede Komponente von $\vec{x}(t)$ ein Polynom erster Ordnung in $t$, wobei die Koeffizienten die anfänglichen Ableitungen nullter und erster Ordnung sind. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung $\ddot{\vec{x}} = 0$ hat pro Freiheitsgrad zwei Integrationskonstanten, $\vec{x}(0)$ und $\vec{v}(0)$ , $\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \vec{v}(0)\,t$ .

## Galileitransformation

Transformationen $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, die Weltlinien freier Teilchen auf Weltlinien freier Teilchen, also Geraden auf Geraden, abbilden, müssen linear inhomogen sein, denn Dreiecke mit Differenzvektoren $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ müssen auf Dreiecke, $L(\vec{a} + \vec{b}) = L(\vec{a}) + L(\vec{b})$ , abgebildet werden. Wenn sie Längen und Zeitdifferenzen ungeändert lassen, handelt es sich um Galilei-Transformationen,

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + a_0 \\ D\vec{x} + \vec{u}t + \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{u} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}\ , \ D^T D = 1\ . \tag{6.9}$$

Jede Galilei-Transformation wird durch 3 Parameter der Drehung $D$, 3 Parameter der Geschwindigkeit $\vec{u}$ des Ursprungs, drei Translationsparameter des Ortes $\vec{a}$ und einen der Zeit $a_0$, also insgesamt 10 Parameter festgelegt.

Galilei-Transformationen verknüpfen Newtonsche Inertialsysteme. Das sind Bezugssysteme in denen freie Teilchen gerade Weltlinien durchlaufen, Längenquadrate durch den

Satz des Pythagoras gegeben sind, und in denen eine Weltzeit existiert, die bis auf eine additive Konstante für alle Beobachter gleich ist.

Da Geschwindigkeiten und Beschleunigungen unter Galilei-Transformationen mit

$$\vec{v}\,' = D\vec{v} + \vec{u}\ , \quad \vec{b}\,' = D\vec{b}\ , \tag{6.10}$$

transformieren, ist die Lichtgeschwindigkeit unter Galilei-Transformationen nicht invariant. Sie sind daher nicht wirklich die Transformationen der Koordinaten, die bewegte Beobachter durch Messung den Ereignissen zuordnen. Vielmehr hängen Inertialsysteme durch Poincaré-Transformationen zusammen.

## Lorentztransformation in zwei Dimensionen

Die Koordinaten $(t, x, y, z)$, die ein Beobachter $\mathcal{B}$ einem Ereignis $E$ zuschreibt, hängen wie folgt mit den Koordinaten $(t', x', y', z')$ zusammen, die ein Beobachter $\mathcal{B}\,'$ für dasselbe Ereignis mißt, wenn er sich $\mathcal{B}$ gegenüber mit Geschwindigkeit $v$ bewegt.

Wir untersuchen zunächst den Fall, daß sich die Weltlinien beider Beobachter schneiden und daß sie dabei ihre Uhren auf $t' = t = 0$ stellen. Einfachheitshalber wählen beide Beobachter ihre $x$-Achse in Richtung der Relativbewegung, sodaß sich $\mathcal{B}\,'$ für $\mathcal{B}$ in $x$-Richtung und umgekehrt $\mathcal{B}$ für $\mathcal{B}\,'$ in $-x'$-Richtung bewegt. Der Betrag der Relativgeschwindigkeit ist für beide Beobachter gleich, jeder sieht den anderen mit dem gleichen Dopplerfaktor $k(\mathcal{B}, \mathcal{B}\,') = k(\mathcal{B}\,', \mathcal{B})$ verlangsamt (1.66).

Für Ereignisse $E$ in der Ebene, die von den Weltlinien der Beobachter aufgespannt wird, gilt dann $y = z = 0$ und $y' = z' = 0$. Aus dem Diagramm (6.1) liest man ab, wie die Koordinaten $t'$ und $x'$ mit $t$ und $x$ zusammenhängen.

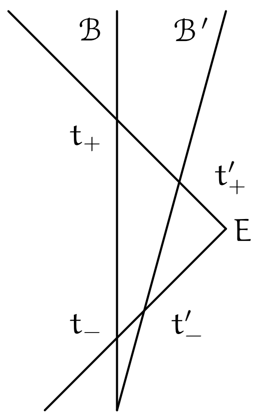



Abbildung 6.1: Lorentztransformation

Wenn die Lichtstrahlen, die das Ereignis $E$ durchlaufen, die Weltlinien der Beobachter schneiden, so zeigen deren mitgeführte Uhren die Zeiten $t_-$ und $t_+$ sowie $t'_-$ und $t'_+$ an. Dabei sind $t'_-$ und $t_-$ sowie $t_+$ und $t'_+$, wenn beide Uhren gleich gehen, einander mit dem Dopplerfaktor

$$k(v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \tag{6.11}$$

proportional (1.69). Also mißt der Beobachter $\mathcal{B}\,'$ für das Ereignis $E$ die Lichtkoordinaten

$$t'_+ = k^{-1}\, t_+\ , \quad t'_- = k\, t_-\ . \tag{6.12}$$

Die Transformation der zwei Lichtkoordinaten zerfällt in zwei Transformationen je einer Koordinate, denn $t'_+$ hängt nur von $t_+$ und $t'_-$ nur von $t_-$ ab. In den Orts- und Zeitkoordinaten $t' = (t'_+ + t'_-)/2$ und $x' = (t'_+ - t'_-)/2$ ausgedrückt (1.54), entkoppeln die Transformationen nicht

$$t' = \frac{1}{2}(k + k^{-1})\, t - \frac{1}{2}(k - k^{-1})\, x\ , \quad x' = -\frac{1}{2}(k - k^{-1})\, t + \frac{1}{2}(k + k^{-1})\, x\ . \tag{6.13}$$

Setzen wir hier $k(v) = (1+v)/\sqrt{1-v^2}$ und $1/k(v) = k(-v)$ (1.70) ein, so heißt dies

$$t' = \frac{t - v\,x}{\sqrt{1-v^2}}\ , \quad x' = \frac{-v\,t + x}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \ . \tag{6.14}$$

Dies ist im Maßsystem $c = 1$ die Lorentztransformation der Koordinaten eines Ereignisses $E$ in der $t$-$x$-Ebene auf die $t'$-$x'$-Koordinaten, die ein in $x$-Richtung mit Geschwindigkeit $v$ bewegter Beobachter demselben Ereignis zuschreibt.

Aus (6.12) sieht man, daß $k^{-1}$ und daher $-v$ zur Umkehrtransformation gehört: für $\mathcal{B}'$ bewegt sich $\mathcal{B}$ mit Geschwindigkeit $-v$ in $x'$-Richtung.

## Lorentztransformation in vier Dimensionen

Auch wenn allgemeiner das Ereignis $E$ nicht in der $t$-$x$-Ebene liegt, muß die Lorentztransformation $L$ der $(t, x, y, z)$-Koordinaten auf $(t', x', y', z')$-Koordinaten linear sein, weil die Weltlinien freier Teilchen für alle Beobachter Geraden sind und Dreiecke auf Dreiecke abgebildet werden müssen.

Die Koordinaten $y'$ und $z'$ sind Linearkombination von $t$, $x$, $y$ und $z$, die für beliebige $t$ und $x$ verschwinden, wenn das Ereignis $E$ in der Ebene $y = z = 0$ liegt. Daher hängen sie nicht von $t$ und $x$ ab

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \ . \tag{6.15}$$

Ebenso sind $t' = (t - vx)/\sqrt{1-v^2} + ey + fz$ und $x' = (-v\,t + x)/\sqrt{1-v^2} + gy + hz$ Linearkombinationen, die für $y = z = 0$ mit (6.14) übereinstimmen.

Die Lorentztransformation muß das Längenquadrat der Raumzeit (1.64) invariant lassen. Denn die Zeit, die auf einer gleichförmig bewegten Uhr zwischen $O$ und $E$ vergeht, hängt nicht davon ab, welcher Beobachter sie abliest. Da sich auch in der Raumzeit das Skalarprodukt von Vierervektoren $u$ und $v$

$$u \cdot v = u^0 v^0 - u^1 v^1 - u^2 v^2 - u^3 v^3 \tag{6.16}$$

als Differenz von Längenquadraten schreiben läßt (1.39),

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\big((u+v)^2 - (u-v)^2\big)\ , \tag{6.17}$$

müssen Lorentztransformationen alle Viererskalarprodukte invariant lassen,

Daher verschwinden die Koeffizienten $e$, $f$, $g$ und $h$. Denn die Skalarprodukte (6.16) zwischen den Vektoren

$$(\sqrt{1-v^2}, 0, 0, 0)\ ,\ (0, \sqrt{1-v^2}, 0, 0)\ ,\ (0, 0, 1, 0)\ ,\ (0, 0, 0, 1)$$

verschwinden. Für $\mathcal{B}'$ haben diese Vektoren die Komponenten

$$(1, -v, 0, 0)\ ,\ (-v, 1, 0, 0)\ ,\ (e, g, a, c)\ ,\ (f, h, b, d)$$

und die Skalarprodukte der ersten beiden mit den letzten beiden müssen verschwinden.

Also gelten (6.14) und (6.15) für beliebige $(t, x, y, z)$, wobei (6.15) noch dadurch eingeschränkt ist, daß alle Längenquadrate invariant sind,

$$(ay + bz)^2 + (cy + dz)^2 = (a^2 + c^2)y^2 + 2(ab + cd)yz + (b^2 + d^2)z^2 = y^2 + z^2\ . \tag{6.18}$$

Dies gilt genau dann für alle $y$ und $z$, wenn $a^2+c^2=1$, $ab+cd=0$ und $b^2+d^2=1$ erfüllt sind. Wegen $ab+cd=0$ ist $(b,d)$ ein Vielfaches von $(-c,a)$, wegen $a^2+c^2=b^2+d^2$ kann nur $(b,d)=\pm(-c,a)$ gelten, und wegen $a^2+c^2=1$ lassen sich $a$ und $c$ als Cosinus und Sinus eines Winkels $\alpha$ schreiben. Daher ist die Lorentztransformation in der zur Bewegungsrichtung senkrechten Ebene eine Drehspiegelung oder eine Drehung

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} . \tag{6.19}$$

Falls $\alpha = 0$ ist, nennt man die Lorentztransformation drehungsfrei oder einen Schub oder einen Boost

$$t' = \frac{t - v\,x}{\sqrt{1-v^2}} \ , \quad x' = \frac{-v\,t + x}{\sqrt{1-v^2}} \ , \quad y' = y \ , \quad z' = z \ . \tag{6.20}$$

Fassen wir die vier Koordinaten zum Spaltenvektor $(t,x,y,z)$ zusammen, den wir kurz mit $x$ bezeichnen, so gilt in Matrixschreibweise $x' = \Lambda_{-v}\,x$ mit

$$\Lambda_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} . \tag{6.21}$$

Umgekehrt gilt $x = \Lambda_v\,x'$, denn $\Lambda_{-v}\Lambda_v = 1$.

Die Lorentztransformation $x' = \Lambda_{-v}x$ ist die passive Transformation, die den Zusammenhang der verschiedenen Koordinaten beschreibt, die verschiedene Beobachter $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ für dieselben Ereignisse $E$ verwenden. Sie verändert nicht die Ereignisse.

Als aktive Transformation gelesen bildet die Lorentztransformation $x' = \Lambda_v x$ die Weltlinie eines ruhenden Teilchens $s \mapsto (s,0,0,0)$ auf die Weltlinie $s \mapsto (1,v,0,0)\,s/\sqrt{1-v^2}$ eines Teilchens ab, das sich mit Geschwindigkeit $v$ in $x$-Richtung bewegt.

Wenn man bei einer Drehung um eine Achse den Drehwinkel $\alpha$ stetig von Null bis zu einem Wert $\overline{\alpha}$ vergrößert und dabei die Auswirkung auf einen Punkt $x$ betrachtet, so durchläuft der Punkt $D_\alpha x = x(\alpha)$ einen Kreisbogen, denn Drehungen lassen den Abstand zur Achse ungeändert. Ebenso durchlaufen im Diagramm (6.2) Punkte in der Raumzeit Hyperbeln, wenn man auf die Punkte Lorentztransformationen $\Lambda_v$ anwendet, deren Geschwindigkeiten Werte von Null bis $\overline{v}$, $|\overline{v}| < 1$, durchlaufen. Denn Lorentztransformationen lassen das Längenquadrat $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant. Insbesondere werden lichtartige Vektoren in der $t$-$x$-Ebene gestreckt oder gestaucht. Der Ursprung ist ein hyperbolischer Fixpunkt. Er wird nicht wie bei Drehungen als Wirbel von Nachbarpunkten umkreist, sondern wie ein Staupunkt umflossen.

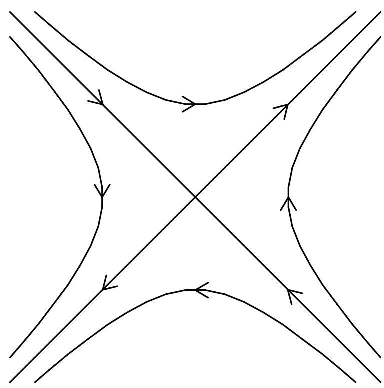


Abbildung 6.2: Lorentzfluß

Allgemeiner kann sich bei einer Lorentztransformation der Beobachter $\mathcal{B}'$ mit Geschwindigkeit $\vec{v} = \mathrm{D}\, v\vec{e}_x$ in eine beliebige Richtung bewegen, und seine räumlichen Bezugsrichtungen können gegenüber $\mathcal{B}$ durch eine Drehung $\mathrm{D}'$ verdreht sein (24.116). Die Matrix solch einer Lorentztransformation ist von der Form $\Lambda = \mathrm{D}'\Lambda_{\vec{v}}$ , $\Lambda_{\vec{v}} = \mathrm{D}\Lambda_v\mathrm{D}^{-1}$ , wobei $\mathrm{D}'$ und $\mathrm{D}$ Drehmatrizen sind.

Darüberhinaus müssen sich die Weltlinien beider Beobachter nicht im Ursprung schneiden, sondern können gegeneinander zeitlich und räumlich um $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ verschoben sein. Dann gehen die $x'$-Koordinaten durch die Poincaré-Transformation

$$x' = \Lambda x + a \tag{6.22}$$

aus den $x$-Koordinaten hervor.

Sei die Weltlinie $\Gamma : \lambda \mapsto x(\lambda)$ eines Teilchens so parametrisiert, daß die Zeit $t$ streng monoton zunehme, $dt/d\lambda > 0$ . Der Tangentialvektor, die Ableitung $dx/d\lambda$, transformiert unter Poincarétransformationen einfach als Viererdifferenzvektor und hängt durch die zugehörige Lorentztransformation mit $dx'/d\lambda$ zusammen,

$$\frac{dx'}{d\lambda} = \Lambda \frac{dx}{d\lambda} \ . \tag{6.23}$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$, die Ableitung der räumlichen Komponenten nach der Zeit $t$ , ist eine rationale Funktion der Ableitungen nach $\lambda$,

$$\frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \frac{d\vec{x}}{dt}\frac{dt}{d\lambda} = \vec{v}\,\frac{dt}{d\lambda} \ . \tag{6.24}$$

Daher ist die Geschwindigkeit $\vec{v}'$, die der bewegte Beobachter mißt, eine rationale Funktion der Komponenten von $\vec{v}$, $(i, j, k \in \{1, 2, 3\})$

$$v'^{\,i} = \frac{\Lambda^i{}_m \dfrac{dx^m}{d\lambda}}{\Lambda^0{}_n \dfrac{dx^n}{d\lambda}} = \frac{\Lambda^i{}_j v^j + \Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0 + \Lambda^0{}_k v^k} \ . \tag{6.25}$$

Poincaré-Transformationen sind nicht die allgemeinsten Transformationen, die die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen. Sie bleibt bei konformen Transformationen ungeändert, die eine größere Gruppe bilden, und zu denen insbesondere die Streckungen aller Koordinaten, die Dilatationen $x' = e^\sigma x$ , gehören. Daher ist die Herleitung von Lorentztransformationen aus dem Verhalten einer Lichtuhr nicht zwingend, denn dabei wird unterstellt statt hergeleitet, daß sich die räumlichen Koordinaten senkrecht zur Bewegungsrichtung nicht ändern.

Wie die Galilei-Gruppe ist die Poincaré-Gruppe 10-dimensional. Jede Transformation ist durch 3 Parameter der Geschwindigkeit, $\vec{v}$ , 3 Parameter der Drehung und 4 Parameter einer Translation in der Raumzeit festgelegt.

# 7 Jetfunktionen

Die Bahn, die Teilchen im Laufe der Zeit $t$ durchlaufen, ist eine Abbildung $f$ eines Zeitintervalls $I \subset \mathbb{R}$ in eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Dabei heißt $n$ auch die Anzahl der Freiheitsgrade. Wir unterstellen, daß $f$ genügend differenzierbar ist. Dann definiert die Kurve ihre Verlängerung der Ordnung $k$, auch Lift oder Prolongation genannt, zu einer Kurve im Jetraum $\mathcal{J}_k$, dessen Punkte in Umgebungen $U_\alpha$ liegen, die durch Karten $\phi_\alpha$ bijektiv auf Umgebungen $V_\alpha \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ldots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1+(k+1)n}$ abgebildet werden,

$$\hat{f} : t \mapsto \hat{f}(t) = \big(t, f(t), \frac{df}{dt}(t), \frac{d^2 f}{dt^2}(t) \ldots \frac{d^k f}{dt^k}(t)\big) \ . \tag{7.1}$$

Die Koordinaten von Punkten des Jetraumes $\mathcal{J}_1$ werden typischerweise mit $(t, x, v)$ bezeichnet, wobei $t$ für die Zeit, $x$ für den Ort und $v$ für die Geschwindigkeit steht. Der Jetraum $\mathcal{J}_2$ besteht aus Punkten $(t, x, v, b)$, wobei $b$ die Beschleunigung ist. In einer systematischen Notation, die die Ableitungsordnung anzeigt, verwenden wir für Punkte in $\mathcal{J}_k$ Koordinatensätze $(t, x, x_{(1)}, x_{(2)} \ldots x_{(k)})$ .

Als Jetfunktionen bezeichnen wir reelle Funktionen, die in einem Bereich eines Jetraumes definiert sind. So sind die Energie $E$ eines freien Teilchens der Masse $m$ ebenso wie die Komponenten des Impulses $\vec{p}$ (in Maßsystemen mit $c = 1$)

$$E(t, \vec{x}, \vec{v}) = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \ , \ \vec{p}(t, \vec{x}, \vec{v}) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \tag{7.2}$$

reelle Funktionen des Bereichs $|\vec{v}| < 1$ des Jetraumes $\mathcal{J}_1$. Daß Energie und Impuls wie angegeben von $(t, \vec{x}, \vec{v})$ abhängen, werden wir später aus dem Relativitätsprinzip ableiten, daß man nicht Ruhe von gleichmäßiger Bewegung unterscheiden kann.

Funktionen $\phi$ von $\mathcal{J}_k$ sind natürlich auch Funktionen von allen $\mathcal{J}_m$ mit $m > k$, denn

$$\pi_{k,m} : \mathcal{J}_m \to \mathcal{J}_k \ , \ (t, x_{(0)}, x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots x_{(k)}, \ldots x_{(m)}) \mapsto (t, x_{(0)}, x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots x_{(k)}) \tag{7.3}$$

projiziert $\mathcal{J}_m$ auf $\mathcal{J}_k$ und vergißt die restlichen $n(m-k)$ Koordinaten. Die verkettete Funktion $\phi \circ \pi_{k,m}$ des Jetraumes $\mathcal{J}_m$ setzt $\phi$ auf den letzten $n(m-k)$-Variablen konstant fort. Sie ist gemeint, wenn wir eine Funktion von $\mathcal{J}_k$ als Funktion von $\mathcal{J}_m$ mit $m > k$ auffassen.

Verkettet man eine Jetfunktion $\phi$, beispielsweise die Energie oder den Impuls, mit der Verlängerung $\hat{f}$ einer Kurve, so erhält man ihren Wert auf der Kurve im Laufe der Zeit $t \mapsto (\phi \circ \hat{f})(t)$ .

Teilchen, die miteinander wechselwirken und diesen oder jenen Kräften ausgesetzt sind, durchlaufen nicht jede denkbare Bahn $f : t \mapsto f(t)$, sondern nur solche Bahnen $f_{\text{phys}}$, die den Bewegungsgleichungen genügen. Bemerkenswerterweise betreffen diese Gleichungen zu jeder Zeit $t$ nur den Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zu dieser Zeit und sind von der Form ($i = 1, 2, \ldots$ Zahl der Freiheitsgrade)

$$G_i \circ \hat{f}_{\text{phys}}(t) = G_i(t, f_{\text{phys}}(t), \frac{d}{dt} f_{\text{phys}}(t), \frac{d^2}{dt^2} f_{\text{phys}}(t)) = 0 \ . \tag{7.4}$$

Dabei sind die $G_i$ Funktionen des Jetraumes $\mathcal{J}_2$ wie beispielsweise

$$G_i(t,x,v,b) = m\,b^i + \partial_i V \tag{7.5}$$

bei der nichtrelativistischen Bewegung eines Teilchens der Masse $m$ im Potential $V$ unter Einfluß der Kraft $F^i = -\partial_i V$. Die Funktionen $G_i$ können geschwindigkeits- oder zeitabhängig sein, etwa beim Teilchen im Magnetfeld oder bei der Schaukel, das ist ein Pendel, dessen Länge durch Heben und Senken des Schwerpunkts zeitlich geändert wird.

Um von ihnen reden zu können, nennen wir die Jetfunktionen $G_i(t,x,v,b)$, mit denen wir die Bewegungsgleichungen (7.4) formulieren, Bewegungsfunktionen. Diese Funktionen sind gemeint, wenn man von der „Form“ der Gleichungen spricht. Wir unterstellen, daß man die Bewegungsfunktionen $G_i$ so wie in diesem Beispielen nach den Beschleunigungen $b_j$ auflösen kann, daß also die Ableitungen $\frac{\partial G_i}{\partial b^j}$ die Elemente einer $n \times n$-Matrix sind, deren Determinante nicht verschwindet. Dies schließt die Feynmansche Weltgleichung $U = 0$ aus, die mit der Unweltlichkeit $U = \sum_i (G_i)^2$ alle Gleichungen zusammenfaßt.

Wir definieren die konvektive Zeitableitung $d_t$ von Funktionen $\phi$ des Jetraumes $\mathcal{J}_k$ als partielle Ableitung nach $t$ und „formal“ bezüglich der übrigen Jetvariablen $x_{(r)}$. Sie differenziert nach $x_{(r)}$ und multipliziert diese Ableitung mit $x_{(r+1)} = d_t x_{(r)}$: am Punkt $(t, x, x_{(1)}, \dots x_{(k+1)}) \in \mathcal{J}_{k+1}$ hat die konvektive Ableitung von $\phi$ den Wert

$$d_t\phi = \Big(\partial_t + x^m_{(1)}\,\partial_{x^m} + x^m_{(2)}\,\partial_{x^m_{(1)}} \dots + x^m_{(k+1)}\,\partial_{x^m_{(k)}}\Big)\phi\ . \tag{7.6}$$

Die Verkettung der konvektiven Zeitableitung $d_t\phi$ mit der Verlängerung $\hat{f}$ einer Kurve ergibt die Zeitableitung der verketteten Jetfunktion

$$(d_t\phi)\circ\hat{f} = \frac{d}{dt}\,(\phi\circ\hat{f})\ . \tag{7.7}$$

Dies ist die Kettenregel der Differentation

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t + \frac{df^m}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x^m} + \frac{d^2f^m}{dt^2}\,\frac{\partial}{\partial x^m_{(1)}} + \dots + \frac{d^{k+1}f^m}{dt^{k+1}}\,\frac{\partial}{\partial x^m_{(k)}}\Big)\phi_{|\left(t,f(t),\frac{df}{dt}(t),\dots\frac{d^kf}{dt^k}(t)\right)} \\ = \frac{d}{dt}\,\phi\big(t, f(t), \frac{df}{dt}(t), \dots \frac{d^kf}{dt^k}(t)\big)\ .\end{aligned} \tag{7.8}$$

Die Bewegungsgleichung freier Teilchen ist der Impulserhaltungssatz. Weil der Impuls erhalten ist und auf freie Teilchen kein Impuls übertragen wird, ändert er sich nicht im Laufe der Zeit auf den Bahnen freier Teilchen,

$$(d_t\vec{p})\circ\hat{f}_{\text{frei}} = 0\ . \tag{7.9}$$

Um Eigenschaften und Zusammenhänge solcher Bewegungsgleichungen zu untersuchen, ist es vorteilhaft, die Bewegungsfunktionen wie

$$d_t\vec{p} = d_t\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = m\left(\frac{\vec{b}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\vec{v}\,(\vec{b}\cdot\vec{v})}{\sqrt{1-\vec{v}^2}^{\,3}}\right) \tag{7.10}$$

auch ohne Verkettung mit physikalischen Bahnen zu betrachten.

# 8 Einfache Beispiele von Bahnkurven

## Fall im homogenen Gravitationsfeld

Die nichtrelativistische Bewegung im homogenen Gravitationsfeld, $\vec{F} = -m\,g\,(0,0,1)$, unterliegt den Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} &m\,\ddot{x}(t) = 0\,, && m\,\ddot{y}(t) = 0\,, && m\,\ddot{z}(t) = -m\,g\,,\\ &x(t) = x_0 + u_x\,t\,, && y(t) = y_0 + u_y\,t\,, && z(t) = z_0 + u_z\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2\,. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Die allgemeine Lösung solch einer linear inhomogenen Gleichung, $Lz = a$, ist, wenn eine spezielle Lösung $Lz_{\text{speziell}} = a$ existiert, wenn also $a$ im Bildbereich von $L$ liegt, die Summe $z = z_{\text{speziell}} + z_{\text{homogen}}$ dieser speziellen Lösung und einer Lösung der homogenen Gleichung, $Lz_{\text{homogen}} = 0$. Denn die Differenz zweier Lösungen $z$ und $\hat{z}$ löst die homogenen Gleichung, $L(z-\hat{z}) = (Lz) - (L\hat{z}) = a - a = 0$. Im vorliegenden Fall ist die allgemeine Fallkurve die Superposition von senkrechtem Fall, bei dem zur Zeit $t = 0$ der Scheitelpunkt $\vec{x} = 0$ durchlaufen wird, mit gleichförmiger Bewegung.

Im homogenen Gravitationsfeld ist die Summe von kinetischer Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\,\vec{v}^2$ und potentieller Energie $E_{\text{pot}} = m\,g\,z$, die Energie

$$E = \frac{1}{2}\,m\,\vec{v}^2 + m\,g\,z\,, \tag{8.2}$$

erhalten. Ihre Zeitableitung

$$d_t E = m\,\vec{b}\,\vec{v} + m\,g\,v_z = \vec{v}\left(m\,\vec{b} + m\,g\,\vec{e}_z\right) \tag{8.3}$$

verschwindet auf physikalischen Bahnen, denn sie erfüllen die Newtonschen Bewegungsgleichungen $\left(m\,\vec{b} + m\,g\,\vec{e}_z\right) \circ \hat{f}_{\text{phys}} = 0$.

## Zwangsbedingungen

Wenn ein Teilchen der Masse $m$ im homogenen Schwerefeld eine Ebene herabgleitet, die um den Winkel $\varphi$ gegenüber der Horizontalen geneigt ist, dann sind die möglichen Orte durch eine Zwangsbedingung $\phi(x) = 0$ eingeschränkt, wobei $\phi$ in diesem Beispiel durch

$$\phi(x^1, x^2, x^3) = -x^2\,\sin\varphi + x^3\,\cos\varphi \tag{8.4}$$

gegeben sei.

Die Ebene übt auf das Teilchen eine Kraft $\vec{F}_{\text{Zwang}}$ aus, die erzwingt, daß das Teilchen nicht eindringt, sondern daß die Bahn jederzeit in der Ebene verläuft.

Differenzieren der Zwangsbedingung $\phi(x(t)) = 0$ zeigt, daß die Geschwindigkeit für

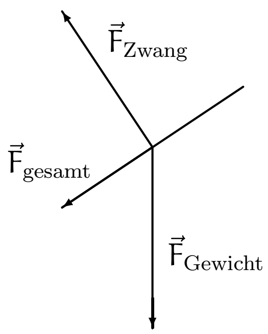



Abbildung 8.1: Schiefe Ebene

alle Bahnen, die in der Ebene verlaufen, senkrecht auf dem Gradienten von $\phi$ steht,

$$\frac{dx^i}{dt}\,\partial_i\phi_{|\phi(x)=0} = 0\ . \tag{8.5}$$

Dies legt nicht vollständig fest, wie die Zwangskraft wirkt. Denkbar wäre, daß die Ebene wie ein Förderband oder ein Mühlrad dem Teilchen Energie hinzufügt oder entzieht und Kräfte in Bewegungsrichtung auf das Teilchen ausübt. Beides widerspricht bei ideal reibungsfreier Bewegung der Erfahrung. Bei reibungsfreier Bewegung ist die Zwangskraft an jedem Ort senkrecht zur Tangentialebene, die von den dort möglichen Geschwindigkeiten aufgespannt wird und zeigt in Richtung des Gradienten der Zwangsbedingung

$$\frac{dx^i}{dt}F_{i\,\text{Zwang}} = 0\ ,\quad F_{i\,\text{Zwang}}(x,v) = \lambda(x,v)\,\partial_i\phi(x)\ . \tag{8.6}$$

Der Faktor $\lambda$ hängt bei einer Zwangsbedingung, die die Bewegung auf eine gekrümmte Fläche einschränkt, nicht nur vom Ort, sondern auch von der Geschwindigkeit ab. Wie groß er auf den Bahnen ist, die physikalisch durchlaufen werden, ergibt sich durch Differenzieren von (8.5) und den Newtonschen Bewegungsgleichungen mit einer Gesamtkraft $F_i + \lambda\,\partial_i\phi$,

$$0 = m\,\frac{d^2x^i}{dt^2}\,\partial_i\phi + m\,\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\,\partial_i\partial_j\phi = (\lambda\,\partial_i\phi + F_i)\,\partial_i\phi + m\,\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\,\partial_i\partial_j\phi\ . \tag{8.7}$$

Es ist also

$$\lambda = -\frac{1}{\partial_k\phi\,\partial_k\phi}\Big(m\,\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\,\partial_i\partial_j\phi + F_i\,\partial_i\phi\Big)\ . \tag{8.8}$$

Auf der schiefen Ebene verschwindet die zweite Ableitung von $\phi$ und die Zwangskraft $\vec{F}_{\text{Zwang}} = \lambda\,(0, -\sin\varphi, \cos\varphi)$ kompensiert das Gewicht $\vec{F}_{\text{Gewicht}} = (0, 0, -m\,g)$ in Normalenrichtung $\vec{n} = (0, -\sin\varphi, \cos\varphi)$ der Ebene. Es verschwindet also das Skalarprodukt $\vec{n}\cdot(\vec{F}_{\text{Zwang}} + \vec{F}_{\text{Gewicht}}) = \lambda - \cos\varphi\,m\,g$ des Normalenvektors mit der Gesamtkraft. Dies bestimmt $\lambda = m\,g\cos\varphi$ und die Gesamtkraft

$$\vec{F}_{\text{gesamt}} = \vec{F}_{\text{Zwang}} + \vec{F}_{\text{Gewicht}} = -m\,g\,\sin\varphi\begin{pmatrix}0\\ \cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\ . \tag{8.9}$$

Auf den Lösungskurven der Newtonschen Bewegungsgleichungen $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{\text{gesamt}}$ und der Zwangsbedingung $-y\sin\varphi + z\cos\varphi = 0$

$$x(t) = x(0) + u_x t\ ,\quad y(t) = y(0) + u_y t - \frac{1}{2}\,g\sin\varphi\cos\varphi\,t^2\ ,\quad z(t) = \tan\varphi\,y(t) \tag{8.10}$$

ändert sich im Laufe der Zeit die Energie $E = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + mgz$ nicht, wie man durch Nachrechnen bestätigt. Die Zwangsbedingung schränkt zwar den Ort und die Geschwindigkeit des Teilchens ein, ändert aber nicht, wie die Energie davon abhängt.

## Harmonische Schwingung

Ebenso ist beim harmonischen Oszillator die Energie erhalten. Bei ihm treibt eine Hookesche Kraft [18], $F = -\kappa x$, zur Ruhelage bei $x = 0$ zurück,

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa\, x\ , \quad \ddot{x} + \omega^2\, x = 0\ , \quad \omega^2 = \frac{\kappa}{m}\ . \tag{8.11}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung liegt fest, wenn man die Anfangslage $x(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0)$ vorgibt. Man findet solch eine zweiparametrige Schar von Lösungen mit dem Ansatz ($\Re$ bezeichnet den Realteil)

$$x(t) = \Re\, A\, e^{i\,\omega\, t} = a\, \cos(\omega\, t + \varphi)\ , \quad A = a\, e^{i\,\varphi}\ . \tag{8.12}$$

Ableiten ergibt $\dot{x} = \Re\, A\, i\, \omega\, e^{i\,\omega\, t}$, $\ddot{x} = \Re A\, (i\,\omega)^2 e^{i\,\omega\, t} = -\omega^2\, x$, also löst der Ansatz die Bewegungsgleichung. Hierbei faßt die komplexe Zahl $A = a\, e^{i\,\varphi}$ die Amplitude $a \geq 0$ und die Phase $\varphi$ zusammen. Zur Zeit $t_0 = -\varphi/\omega$ ist die Auslenkung maximal.

Die Schwingung ist periodisch mit Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$, $x(t+T) = x(t)$. Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ ist das $2\pi$-fache der Frequenz $\nu = 1/T$, der Zahl der Schwingungen pro Zeit.

Aus der Amplitude $a$ und der Phase $\varphi$ ergeben sich die Anfangslage $x(0) = a \cos\varphi$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = -a\,\omega \sin\varphi$, und umgekehrt legen die Anfangsbedingungen die Amplitude $a$ und für $a \neq 0$ die Phase $\varphi$ bis auf Vielfache von $2\pi$ fest,

$$a = \sqrt{x^2(0) + \frac{\dot{x}^2(0)}{\omega^2}}\ , \quad \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x(0)}{a} & \text{falls}\ \ \dot{x}(0) \leq 0 \\ \pi + \arccos(-\frac{x(0)}{a}) & \text{falls}\ \ \dot{x}(0) > 0 \end{cases}\ . \tag{8.13}$$

Die Hookesche Kraft ist der negative Gradient des Potentials

$$V_{\text{harmonisch}}(x) = \frac{1}{2}\,\kappa\, x^2\ . \tag{8.14}$$

Die Zeitunabhängigkeit der Energie des harmonischen Oszillators

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\kappa\, x^2 \tag{8.15}$$

auf Bahnen $x(t) = a\, \cos(\omega\, t + \varphi)$, die den Newtonschen Gleichungen genügen, bestätigt die explizite Rechnung

$$\frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,\kappa\, x^2 = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, a^2 \sin^2(\omega\, t + \varphi) + \frac{1}{2}\,\kappa\, a^2 \cos^2(\omega\, t + \varphi) = \frac{1}{2}\,\kappa\, a^2\ . \tag{8.16}$$

Da Cosinus und Sinus durch eine Phasenverschiebung auseinander hervorgehen, $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$, sind die zeitlichen Mittelwerte von $\cos^2(\omega\, t + \varphi)$ und $\sin^2(\omega\, t + \varphi)$ gleich, im zeitlichen Mittel ist daher die kinetische Energie des harmonischen Oszillators seiner potentiellen Energie gleich.

# 9 Energie und Impuls

Erhaltungsgrößen sind Jetfunktionen $\phi$, die auf physikalischen Bahnen als Funktion der Zeit konstant sind,

$$d_t\phi \circ \hat{f}_{\text{phys}} = \frac{d}{dt}\bigl(\phi \circ \hat{f}_{\text{phys}}\bigr) = 0 \ . \tag{9.1}$$

So sind in der Newtonschen Physik bei einem kräftefreien Teilchen wegen der Bewegungsgleichung (7.9) der Impuls $\vec{p}_{\text{Newton}} = m\vec{v}$ und die Energie $E_{\text{Newton}}$ erhalten

$$\vec{p}_{\text{Newton}} = m\vec{v} \ , \quad E_{\text{Newton}} = E_0 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \ . \tag{9.2}$$

Welchen Wert die Energie für verschwindende Geschwindigkeit hat, ist in Newtonscher Physik belanglos, $E_0$ wird normalerweise einfach Null gesetzt.

Bei der Bewegung eines Teilchens ist seine Masse $m$ eine triviale Erhaltungsgröße, nämlich eine konstante Jetfunktion. Aber Masse ist nicht in allen physikalischen Vorgängen additiv erhalten: bei Teilchenzerfällen ist die anfängliche Masse größer als die Summe der Massen der Zerfallsprodukte.

Trotz ihrer Einfachheit sollte man konstante Jetfunktionen nicht definitionsgemäß aus der Menge der Erhaltungsgrößen ausschließen, denn es ist vorteilhaft, diese Menge als einen Vektorraum verstehen zu können, und Linearkombinationen nichttrivialer Jetfunktionen können konstant sein.

## Transformation additiver Erhaltungsgrößen

Natürlich sind bei einem freien Teilchen alle Funktionen der Geschwindigkeit Erhaltungsgrößen, denn die Geschwindigkeit ist bei kräftefreier Bewegung konstant. Die besondere Bedeutung von Energie und Impuls rührt daher, daß sie additive Erhaltungsgrößen sind, das heißt, die Summe der Impulse und der Energien mehrerer Teilchen sind auch dann noch Erhaltungsgrößen, wenn die Teilchen nicht frei sind und sich die einzelnen Impulse und Energien zum Beispiel durch elastische Stöße ändern.

Stellt ein gleichförmig bewegter Beobachter additive Erhaltungsgrößen $\phi$ fest, so liegen auch für jeden anderen Beobachter, der Poincaré-transformierte Koordinaten $x' = \Lambda\, x + a$ (6.22) verwendet, additive Erhaltungsgrößen $\phi'$ vor, und es gibt eine Transformation, die die Erhaltungsgrößen ineinander umzurechnen gestattet.

Weil die Erhaltungsgrößen additiv sind, müssen ihre Werte linear transformieren

$$(\phi_{(1)} + \phi_{(2)})' = \phi'_{(1)} + \phi'_{(2)} \ , \quad (c\phi)' = c\phi' \ , \tag{9.3}$$

denn für beide Beobachter sind die Erhaltungsgrößen Summen und Vielfache der einzelnen Teile. Die lineare Transformation der Werte der Erhaltungsgrößen ist also von der

Form
$$\phi' = M_{\Lambda,a}\phi \ . \tag{9.4}$$
Die hierbei auftretenden Matrizen $M_{\Lambda,a}$ sind dadurch eingeschränkt, daß eine weitere Transformation $x'' = \Lambda_2 x' + a_2$, die einer ersten Transformation $x' = \Lambda_1 x + a_1$ folgt, auch gleich direkt ausgewertet werden kann
$$x'' = \Lambda_{2\circ 1} x + a_{2\circ 1} \ , \quad \Lambda_{2\circ 1} = \Lambda_2 \Lambda_1 \ , \quad a_{2\circ 1} = a_2 + \Lambda_2 a_1 \ . \tag{9.5}$$
Für beliebige Werte der additiven Erhaltungsgrößen muß daher
$$\phi'' = M_{\Lambda_{2\circ 1},\, a_{2\circ 1}}\phi = M_{\Lambda_2,\, a_2} M_{\Lambda_1,\, a_1}\phi \tag{9.6}$$
gelten. Also müssen die Matrizen $M_{\Lambda,a}$ die Poincarétransformationen darstellen (3.104): Produkte der Matrizen $M_{\Lambda,a}$ müssen die Matrix ergeben, die zur hintereinander ausgeführten Transformation gehört
$$M_{\Lambda_{2\circ 1},\, a_{2\circ 1}} = M_{\Lambda_2,\, a_2} M_{\Lambda_1,\, a_1} \ . \tag{9.7}$$
Poincarétransformationen transformieren auch den Definitionsbereich der Erhaltungsgrößen, den Jetraum, durch Transformationen $J_{\Lambda,a}$, die sich aus (6.22, 6.25) ergeben. Als Jetfunktionen transformieren die Erhaltungsgrößen unter der zugehörigen adjungierten Transformation (3.106)
$$\mathrm{Ad}_{\Lambda,a}\, \phi = M_{\Lambda,a} \circ \phi \circ J^{-1}_{\Lambda,a} \ . \tag{9.8}$$
Ruhende Beobachter lassen sich nur dann nicht von bewegten Beobachtern unterscheiden, falls diese transformierten Funktionen mit den ursprünglichen Funktionen übereinstimmen, falls also $\mathrm{Ad}_{\Lambda,a} = \mathrm{id}$ die triviale Darstellung der Poincaré-Gruppe ist. Dann hat das Teilchen am transformierten Ort mit transformierter Geschwindigkeit den transformierten Wert der Erhaltungsgröße des Teilchens am ursprünglichen Ort mit der ursprünglichen Geschwindigkeit
$$\phi \circ J_{\Lambda,a} = M_{\Lambda,a} \circ \phi \ . \tag{9.9}$$

## Viererimpuls

Im einfachsten Fall sind die Matrizen $M_{\Lambda,a}$ durch $\Lambda$ selbst gegeben und die Erhaltungsgrößen eines Teilchens sind Funktionen von $\mathcal{J}_1$. Dann handelt es sich um vier Komponentenfunktionen $p = (p^0, p^1, p^2, p^3)$, die höchstens von der Zeit $t$ und dem Ort $\vec{x}$, die wir als $x = (t, \vec{x})$ zusammenfassen, sowie von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ abhängen. Im Vorgriff auf das Ergebnis unserer Betrachtung nennen wir die Erhaltungsgröße den Viererimpuls. Wegen (9.9) gilt
$$p(\Lambda x + a, \vec{v}\,') = \Lambda\, p(x, \vec{v}) \ . \tag{9.10}$$
Für $\Lambda = 1$ und $x = 0$ besagt dies $p(a, \vec{v}) = p(0, \vec{v})$: der Viererimpuls hängt nicht vom Ort oder der Zeit, sondern nur von der Geschwindigkeit des Teilchens ab, $p(x, \vec{v}) = p(\vec{v})$.

Wenn sich ein Teilchen langsamer als Licht bewegt, dann gibt es das Bezugssystem eines mitbewegten Beobachters, für den das Teilchen ruht. Da $\vec{v} = 0$ invariant unter

Drehungen $D$ ist, $D0 = 0$, und da der Viererimpuls eine Funktion der Geschwindigkeit ist, ändern Drehungen nicht den Viererimpuls $p$ eines ruhenden Teilchens, $p(D(0)) = D\,p(0) = p(0)$. Es ist 0 der einzige unter allen Drehungen invariante Dreiervektor. Folglich verschwindet im Ruhesystem eines Teilchens der räumliche Anteil $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$ des Viererimpulses, und er hat die Form

$$p_{\text{Ruhe}} = p(\vec{v} = 0) = (m, 0, 0, 0)\ . \tag{9.11}$$

Durch die Lorentztransformation $\Lambda_v$ wird ein ruhendes Teilchen mit $\vec{v} = 0$ auf ein bewegtes Teilchen mit Geschwindigkeit $v^i = \Lambda^i{}_0/\Lambda^0{}_0$ transformiert (6.25). Aus $p(\vec{v}) = \Lambda_v p(0)$ folgt dann mit (6.21) der Viererimpuls eines Teilchens, das sich mit Geschwindigkeit $v$ in $x$-Richtung bewegt,

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{m\,v}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}\ . \tag{9.12}$$

Der Viererimpuls ist einfach das $m$-fache der ersten Spalte des Lorentzschubes $\Lambda_v$.

Drehen wir schließlich die Bewegung in eine beliebige Richtung und fügen wir die Faktoren $c$ ein, die in konventionellen Maßsystemen die Formeln der relativistischen Physik überfrachten, so erhalten wir den Viererimpuls eines Teilchens mit Geschwindigkeit $\vec{v}$

$$p^0(\vec{v}) = \frac{m\,c}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\ , \quad \vec{p}(\vec{v}) = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\ . \tag{9.13}$$

Wir benennen die Komponenten des Viererimpulses so wie diejenigen Größen der Newtonschen Physik, mit denen sie im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten übereinstimmen. Bis auf höhere Potenzen von $v/c$ gilt

$$c\,p^0(\vec{v}) = m\,c^2 + \frac{1}{2}\,m\,\vec{v}^2 + \dots \quad , \quad \vec{p}(\vec{v}) = m\,\vec{v} + \dots \quad . \tag{9.14}$$

Also ist $E = c\,p^0$ die Energie und $(p^1, p^2, p^3)$ sind die Komponenten des Impulses $\vec{p}$,

$$E(\vec{v}) = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ , \ \vec{p}(\vec{v}) = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\ . \tag{9.15}$$

Die durch $c^2$ geteilte Ruheenergie ist die Masse $m$ des Teilchens. Sie ist positiv, und die Energie ist nach unten beschränkt.

Mit ähnlichen Argumenten erschließt man für lichtschnellen Teilchen, daß ihr Viererimpuls ein Vielfaches des Tangentialvektors $k = dx/d\lambda$ an ihre Weltlinie ist,

$$p \propto k\ . \tag{9.16}$$

Bewegt sich das Teilchen mit positiver Energie in beliebige Richtung, so gilt wegen $k^2 = 0$ in Maßsystemen mit $c = 1$

$$E = p^0 = |\vec{p}|\ . \tag{9.17}$$

Allerdings legt die Weltlinie nicht die Energie fest. Die Energie ist positiv und kann im übrigen beliebig sein: es gibt rote und blaue Lichtstrahlen.

Für massive und für lichtschnelle Teilchen ist die Geschwindigkeit $\vec{v}$ das Verhältnis

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{p^0} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}} \ . \tag{9.18}$$

Der Impulserhaltungssatz spricht aus, daß Teilchen träge sind. Denn die Geschwindigkeit ändert sich nur, wenn man den Impuls ändert. Man muß durch Kraft, das ist Impulsübertrag pro Zeit, also ein Impulsstrom, Impuls übertragen, um die Geschwindigkeit eines Teilchens zu ändern.

Auch bei überlichtschnellen Teilchen, bei Tachyonen, muß der Viererimpuls ein Vielfaches des raumartigen Tangentialvektors sein und mit einem Richtungsvektor $\vec{e}$ die Form

$$E = p^0 \ , \quad \vec{p} = \vec{e}\,\sqrt{M^2 + E^2} \tag{9.19}$$

haben. Dabei ist die denkbare Energie $E$ des Tachyons ebenso wie die Energie eines hypothetischen Teilchens mit negativer Masse nicht nach unten beschränkt. Mit einem einzigen solchen Teilchen, dem man unbeschränkt Energie entzieht, könnte man ein Kraftwerk ohne anderen Brennstoff betreiben. Falls es Teilchen mit negativer Masse oder Tachyonen mit negativem Massenquadrat gäbe, wäre erklärungsbedürftig, warum sie nicht die Weltmeere zum Kochen bringen.

Das Vakuum ist für alle Beobachter gleich und hat daher einen Viererimpuls, der unter allen Transformationen $p' = \Lambda\, p$ invariant ist. Es muß daher verschwindende Energie und verschwindenden Impuls haben, $p_{\text{Vakuum}} = (0,0,0,0)$. Das gilt auch für den Beitrag der sogenannten Quantenfluktuationen zur Energie, die manchen Theoretikern Kopfzerbrechen bereiten.

## Masse

Die Masse $m$ verknüpft die Komponenten des Viererimpulses eines freien Teilchens. Unabhängig von der Geschwindigkeit gilt wegen (9.13)

$$p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2 \ , \quad E = p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}} \ . \tag{9.20}$$

Dies ist die Gleichung für eine Schale eines Hyperboloids: die Viererimpulse eines freien Teilchens liegen auf der Massenschale.

Die Beziehung (9.20) von Energie und Impuls gilt auch für lichtschnelle Teilchen, zum Beispiel für Photonen. Sie sind masselos. Ihr Viererimpuls $p$ ist lichtartig

$$p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = 0 \ , \quad p^0 = |\vec{p}| > 0 \ . \tag{9.21}$$

Photonen mit Viererimpuls $p$ gehören als Quanten zu ebenen elektromagnetischen Wellen $e^{-i\,k\,x}$ mit lichtartigem Viererwellenvektor $k = (|\vec{k}|, \vec{k})$. Dabei ist der Impuls $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$ ein Vielfaches des Wellenvektors, die Konstante $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}$Js [10] ist das von Max Planck [18] eingeführte Wirkungsquantum. Die Energie $E = \hbar\,\omega = \hbar\,c\,|\vec{k}|$ der

Photonen ist ein Vielfaches der Frequenz $\nu = \omega/(2\pi)$ der elektromagnetischen Welle. Diese Beziehung liegt Plancks Herleitung der thermischen Strahlungsdichte und Einsteins Deutung des photoelektrischen Effektes zugrunde.

Gemäß (9.15) haben ruhende Teilchen die Energie

$$E_{\text{Ruhe}} = m\,c^2 \ . \tag{9.22}$$

Dies ist wohl die berühmteste Gleichung der Physik. Auf ihr beruht die Erkenntnis, daß bei Umwandlung von Atomkernen durch Spaltung oder Verschmelzung Energien freigesetzt werden können, denn die Gesamtmasse der Kerne ist meßbar verschieden von der Summe der Einzelmassen. Der Massenunterschied beruht auf Bindungsenergie, die militärisch oder friedlich, zerstörerisch oder nutzbringend verwendet werden kann. Gleichung (9.15) sagt auch, daß es unendlich viel Energie kosten würde, ein massives Teilchen auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen. Massive Teilchen sind immer langsamer als Licht.

Die Masse $m$ ist geschwindigkeits*un*abhängig. Sie per Definition $E = mc^2$ als Bezeichnung für die geschwindigkeitsabhängige Energie zu verwenden, würde einen Begriff vergeuden. Heutzutage bezeichnet man mit Masse die Größe, die in veralteten Darstellungen umständlich Ruhemasse heißt.

Die Größe $M(v) = m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ als geschwindigkeitsabhängige Masse zu bezeichnen, verführt dazu, sie in Formeln der Newtonschen Physik, die sich im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten aus relativistischer Physik ergibt, einzusetzen und zu glauben, eine für alle Geschwindigkeiten gültige Gleichung zu erhalten. Auch wenn dies im Einzelfall beim Impuls $\vec{p} = M(v)\,\vec{v}$ zutrifft, so ergibt sich fast immer Unsinn: die kinetische Energie ist nicht $M(v)\,\vec{v}^2/2$ und auch nicht $\vec{p}^{\,2}/(2M(v))$. Und ein Teilchen wird nicht mit zunehmender Geschwindigkeit schwerer: Gewicht hängt von der Beschleunigung im Vergleich zum freien Fall ab.

Ein schnell bewegtes Teilchen bewirkt nicht die Gravitation einer um einen Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ vergrößerten Masse $M(v)$, und es wird nicht durch seine Geschwindigkeit zu einem Schwarzen Loch. Wenn es nur des Faktors $\gamma$ bedürfte, hätte Einstein zehn Minuten statt zehn Jahre gebraucht, in die relativistische Formulierung von Mechanik und Elektrodynamik die Gravitation einzubeziehen.

Kraft ist nicht Masse mal Beschleunigung. Die Bewegungsgleichung relativistischer, geladener Teilchen besagt, daß der Gesamtimpuls der wechselwirkenden Teilchen und Felder erhalten bleibt,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \ . \tag{9.23}$$

Die Kraft $\vec{F}$ ist der Impuls $d\vec{p}$, der pro Zeit $dt$ auf das Teilchen übergeht.

Die Beschleunigung zeigt normalerweise nicht in Richtung der Kraft (7.10),

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial p^i}\frac{dp^i}{dt} \overset{9.18}{=} \frac{\vec{F}}{\sqrt{m^2+\vec{p}^2}} - \frac{(\vec{p}\cdot\vec{F})\,\vec{p}}{\sqrt{m^2+\vec{p}^2}^{\,3}} = \frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{p}^2}}(\vec{F} - (\vec{v}\cdot\vec{F})\,\vec{v}) \ , \tag{9.24}$$

wobei wir einfachheitshalber im Maßsystem $c = 1$ rechnen.

Versuchte man, Kraft als Masse mal Beschleunigung zu definieren, so genügte diese Kraft nicht dem dem Prinzip von Actio und Reaktio, daß sie der Gegenkraft auf das System gleich ist, das die Kraft ausübt. Denn der Impuls, nicht Masse mal Geschwindigkeit, ist erhalten.

Trägheit schneller Teilchen ist richtungsabhängig. Wirkt die Kraft quer zu $\vec{v}$, ist die Beschleunigung $d\vec{v}_\perp/dt = \sqrt{1-v^2}\,\vec{F}_\perp/m$; in Richtung der Geschwindigkeit ist das Teilchen um den Faktor $1/(1-v^2)$ träger. Auch masselose, lichtschnelle Teilchen sind träge, $d\vec{v}_\perp/dt = \vec{F}_\perp/|\vec{p}|$, in Bewegungsrichtung sogar unendlich träge, $d\vec{v}_\parallel/dt = 0$.

Bei der Bewegung mechanischer Anordnungen sind, lange bevor relativistische Auswirkungen meßbar werden, Korrekturen wichtig, die die endliche Schallgeschwindigkeit in den Körpern, die ja nicht ideal starr sind, berücksichtigen. Bei hohen Relativgeschwindigkeiten werden die Kräfte auf ein Teilchen durch Stöße mit anderen Teilchen bewirkt, die durch Energie- und Impulserhaltung eingeschränkt sind, und durch Wechselwirkung mit Feldern, wie dem elektromagnetischen Feld oder dem gravitativen Feld, der Metrik.

## Zerfall in zwei Teilchen

Zerfällt ein ruhendes Teilchen der Masse $M$ in zwei Teilchen mit Massen $m_1$ und $m_2$, so sind die Energien der Zerfallsprodukte durch die beteiligten Massen festgelegt. Wegen der Impulserhaltung ist der Impuls $\vec{p}$ des ersten Zerfallsproduktes dem Impuls des zweiten Teilchens entgegengesetzt gleich. Ihre Energien sind $E_1 = \sqrt{{m_1}^2 + \vec{p}^{\,2}}$ und $E_2 = \sqrt{{m_2}^2 + \vec{p}^{\,2}}$, denn Energie und Impuls liegen auf der Massenschale (9.20). Die Energieerhaltung besagt, daß die Summe dieser Energien mit der Energie $M$ des ruhenden, zerfallenden Teilchens übereinstimmt

$$M = \sqrt{{m_1}^2 + \vec{p}^{\,2}} + \sqrt{{m_2}^2 + \vec{p}^{\,2}} \ > \ m_1 + m_2 \ . \tag{9.25}$$

Insbesondere ist die Masse $M$ des zerfallenden Teilchens größer als die Summe der Massen der Zerfallsprodukte. Dies ist, wie beim Zwillingsparadoxon, der geometrische Sachverhalt, daß die Summe zweier zeitartiger Vierervektoren $p_1 + p_2$ länger als die Summe der Längen der einzelnen Summanden ist.

Wiederholtes Quadrieren und Umformen ergibt

$$\vec{p}^{\,2} = \frac{1}{4M^2}(M^4 + {m_1}^4 + {m_2}^4 - 2M^2{m_1}^2 - 2M^2{m_2}^2 - 2{m_1}^2{m_2}^2) \ , \tag{9.26}$$

$$E_1 = \frac{1}{2M}(M^2 - {m_2}^2 + {m_1}^2) \ . \tag{9.27}$$

## Compton-Streuung

Energie- und Impulserhaltung legen bei elastischer Streuung zweier Teilchen, also bei einem Streuprozeß, bei dem die Zahl der Teilchen und ihre Massen unverändert bleiben, die Energien nach dem Stoß als Funktion des Streuwinkels und der anfänglichen Energien fest.

Betrachten wir beispielsweise ein Photon, das mit Energie $E$ einfällt und elastisch an einem zunächst ruhenden Elektron gestreut wird. Dieser Prozeß heißt Compton-Streuung.

Seien $p_{(1)}$ und $p_{(2)}$ die Viererimpulse von Photon und Elektron vor der Streuung und $p'_{(1)}$ und $p'_{(2)}$ nachher. Viererimpulserhaltung besagt

$$p_{(1)} + p_{(2)} = p'_{(1)} + p'_{(2)} \ , \tag{9.28}$$

oder ausführlicher, wenn man die $x$-Achse in Bewegungsrichtung des Photons vor dem Stoß wählt und die $y$-Achse so, daß sich das um den Winkel $\theta$ gestreute Photon in der $x$-$y$-Ebene bewegt, im Maßsystem $c = 1$,

$$\begin{pmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' \\ E' \cos\theta \\ E' \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m + E - E' \\ E - E' \cos\theta \\ -E' \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \ . \tag{9.29}$$

Hierbei ist schon berücksichtigt, daß auch das gestreute Photon mit Energie $E'$ masselos ist und $p'^2_{(1)} = 0$ erfüllt. Die Bedingung ${p'_{(2)}}^2 = m^2$, daß nach der Streuung der Viererimpuls des Elektrons auf der Massenschale liegt, besagt

$$(m + E - E')^2 - (E - E' \cos\theta)^2 - (E' \sin\theta)^2 = m^2 \tag{9.30}$$

und nach Ausmultiplizieren, einfachem Umformen und Einfügen der konventionellen Faktoren $c$

$$\frac{m\,c^2}{E'} = \frac{m\,c^2}{E} + 1 - \cos\theta \ . \tag{9.31}$$

Die Energie $E'$ des auslaufenden Photons ist also durch den Streuwinkel festgelegt. Sie ist kleiner als die Energie $E$ des einlaufenden Photons. Dies widerspricht der Vorstellung, daß die zum Photon der Energie $E = \hbar\omega$ gehörige, einfallende elektromagnetische Welle das geladene Elektron beschleunigt, das dann seinerseits eine Welle mit den gestreuten Photonen abstrahlt. Bei solch einem Prozeß würde die Frequenz der abgestrahlten Welle mit der ursprünglichen Frequenz übereinstimmen. Gleichung (9.31) hingegen ergibt sich aus der Annahme, daß Elektronen Teilchen sind und daß elektromagnetische Wellen aus Teilchen, nämlich Photonen, bestehen.

Sie ist aber kein Beweis für die Teilcheneigenschaft elektromagnetischer Wellen. Man gelangt ebenfalls zu (9.31), wenn man – was wir nicht getan haben – sowohl das Elektron als auch das Photon als Welle behandelt. Daß je nach betrachtetem physikalischen Prozeß Wellen sich teilchenartig verhalten und Teilchen Welleneigenschaften haben, gehört zu den Grundlagen der Quantenphysik.

# 10 Erhaltungsgrößen und Symmetrien

Eine Erhaltungsgröße, wie zum Beispiel die Energie oder der Impuls, ist eine Jetfunktion $Q$, die auf physikalischen Bahnen ihren anfänglichen Wert behält (9.1)

$$d_t Q \circ \hat{f}_{\text{phys}} = \frac{d}{dt}\big(Q \circ \hat{f}_{\text{phys}}\big) = 0 \ . \tag{10.1}$$

Für die Jetfunktion $d_t Q$ heißt dies, daß sie eine Linearkombination der Bewegungsfunktionen $G_i$ sein muß, die die physikalischen Bahnen charakterisieren: es muß zu $Q$ gehörige Jetfunktionen $\delta x$ geben, mit denen sich $d_t Q$ als Linearkombination der Bewegungsfunktionen schreiben läßt,

$$d_t Q + \delta x^i \, G_i = 0 \ . \tag{10.2}$$

Die Gleichung ist hinreichend, denn $G_i \circ \hat{f}_{\text{phys}}$ verschwindet nach Definition der physikalischen Bahnen (7.4), demnach ist $d_t Q \circ \hat{f}_{phys} = 0$. Für Funktionen $Q$ des Jetraumes $\mathcal{J}_1$ ist die Gleichung auch notwendig, denn in $d_t Q$ können wir alle Variablen $b = x_{(2)}$ durch die Bewegungsfunktionen $G$ ausdrücken. Verbliebe dann ein Rest und wäre $d_t Q + \delta x^i \, G_i = R$ mit einer nichtverschwindende Jetfunktion $R$ von $\mathcal{J}_1$, so könnte man ihr durch Wahl der anfänglichen Orte und Geschwindigkeiten einen nichtverschwindenden Wert geben, und die vermeintliche Erhaltungsgröße $Q$ würde sich schon anfänglich auf physikalischen Bahnen ändern.

Wir formulieren die Eigenschaft einer Erhaltungsgröße, sich auf physikalischen Bahnen nicht mit der Zeit zu ändern, ausführlich als $d_t Q + \delta x^i \, G_i = 0$ und beschränken uns nicht auf physikalische Bahnen, auf denen die Bewegungsfunktionen $G_i$ verschwinden. Denn die zur Erhaltungsgröße $Q$ gehörigen Koeffizientenfunktionen $\delta x^i$ haben geometrische Bedeutung, können aber nur aus $d_t Q$ abgelesen werden, wenn man *nicht* die Bewegungsgleichungen verwendet. Wie wir sehen werden, gehören die Funktionen $\delta x^i$ für jede Erhaltungsgröße zu einer infinitesimalen Symmetrie und zu jeder infinitesimalen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße $Q$.

Dieser Zusammenhang ist deshalb wesentlich, weil die geometrische Eigenschaft, daß eine Symmetrie vorliegt, häufig offensichtlich ist und man daher einfache, zeitunabhängige Größen dem Bewegungsproblem ansehen kann.

Um zu definieren, was wir unter einer infinitesimalen Symmetrien verstehen, legen wir zunächst den Sprachgebrauch fest und erklären, was kontinuierliche Transformationen von Bahnen $f : t \mapsto f(t)$ sind. Kontinuierliche Transformationen $T_\lambda$ hängen stetig differenzierbar von einem reellen Parameter ab und bilden Bahnen $f$ invertierbar auf Bahnen $f_\lambda$ ab,

$$T_\lambda : f \mapsto f_\lambda \ , \quad f_\lambda : t \mapsto f(t, \lambda) \ . \tag{10.3}$$

In den folgenden Beispielen sind die Transformationen der Bahnen die zu Transformationen des Urbilds und des Bildraumes adjungierten Transformationen (3.106).

Die Zeittranslationen um $-\lambda$ bilden jede Bahn $f$ auf die Bahn

$$f_\lambda : \quad t \mapsto f(t+\lambda) \tag{10.4}$$

ab, die die Bahnpunkte von $f$ um $\lambda$ früher durchläuft, etwa den Punkt $f(0)$ zur Zeit $t = -\lambda$.

Für einen mit Geschwindigkeit $-\lambda\,\vec{u}$ bewegten, nichtrelativistischen Beobachter liegen Galilei-transformierte Bahnen vor (6.9),

$$f_\lambda : \quad t \mapsto \vec{f}(t,\lambda) = \vec{x}(t) + \lambda\,\vec{u}\,t\ . \tag{10.5}$$

Räumliche Verschiebungen um $\lambda\,\vec{c}$ bilden Punkte und damit Bahnen ab auf

$$f^i(t,\lambda) = f^i(t) + \lambda\,c^i\ . \tag{10.6}$$

Streckungen vergrößern alle kartesischen Koordinaten um denselben Faktor

$$f^i(t,\lambda) = e^\lambda\,f^i(t)\ . \tag{10.7}$$

Drehungen um eine Achse $\vec{n}$, $\vec{n}^{\,2} = 1$, um einen Winkel $\lambda$ (2.43) bilden die Punkte $\vec{x}$ und damit auch Bahnen $\vec{f}$ auf

$$\vec{x}(\lambda) = \vec{x}_\parallel + (\cos\lambda)\,\vec{x}_\perp + (\sin\lambda)\,\vec{n}\times\vec{x}_\perp \tag{10.8}$$

ab. Hierbei bezeichnen $\vec{x}_\parallel = \vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{x})$ und $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{x})$ den zur Drehachse $\vec{n}$ parallelen und senkrechten Anteil von $\vec{x}$.

Die Parametrisierung der Transformationen ist so gewählt, daß zu verschwindendem Transformationsparameter, $\lambda = 0$, jeweils die identische Abbildung gehört, $T_0 f = f$, und daß sie hintereinander ausgeführt eine einparametrige Gruppe $T_\lambda \circ T_{\lambda'} = T_{\lambda+\lambda'}$ bilden.

Die Bahn, die $f_\lambda$ als Funktion des Transformationsparameters $\lambda$ durchläuft, nennen wir den Orbit durch $f$. Der anfängliche Tangentialvektor an den Orbit

$$t \mapsto \frac{\partial f^i(t,\lambda)}{\partial\lambda}_{|\lambda=0} \tag{10.9}$$

ist die infinitesimale Transformation von $f$. Sie heißt lokal, wenn sie sich für alle Kurven $f$ als Jetfunktion $\delta x^i(t,x,v)$, ausgewertet auf $\hat{f} : t \mapsto (t, f(t), \dot{f}(t), \ldots)$, schreiben läßt,

$$\delta x^i \circ \hat{f} = \frac{\partial f^i(t,\lambda)}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}\ . \tag{10.10}$$

In den obigen Beispielen ist

| | | |
|---|---|---|
| $\delta x^i = v^i$ | eine infinitesimale Zeittranslation, | (10.11) |
| $\delta x^i = u^i\,t$ | ein infinitesimaler Galileischub, | (10.12) |
| $\delta x^i = c^i$ | eine infinitesimale räumliche Translation, | (10.13) |
| $\delta x^i = x^i$ | eine infinitesimale Streckung und | (10.14) |
| $\delta\vec{x} = \vec{n}\times\vec{x}_\perp = \vec{n}\times\vec{x}$ | eine infinitesimale Drehung um die Achse $\vec{n}$. | (10.15) |

Eine nichtlokale Transformation ist beispielsweise die Drehung einer Kurve um ihren Schwerpunkt: denn die infinitesimale Transformation hängt von der ganzen Kurve ab, nicht nur von ihrem Wert und ihren Ableitungen zur jeweiligen Zeit $t$.

Als infinitesimale Symmetrie der Wirkung bezeichnen wir jeden Satz von Jetfunktionen $\delta x^i(t,x,v)$, die sich multipliziert und summiert mit den Bewegungsfunktionen $G_i(t,x,v,b)$, die in den Bewegungsgleichungen $G_i \circ \hat{f}_{\text{phys}} = 0$ auftreten, zur Ableitung $d_t$ einer Jetfunktion $Q$ zusammenfassen lassen,

$$\delta x^i G_i + d_t Q = 0 \ . \tag{10.16}$$

Demnach gehört definitionsgemäß, wie 1918 von Emmy Noether [18] formuliert, zu jeder infinitesimalen Symmetrie der Wirkung eine Erhaltungsgröße $Q$ und umgekehrt zu jeder Erhaltungsgröße eine infinitesimale Symmetrie $\delta x^i$ der Wirkung.

Am Sachverhalt, daß zu einer infinitesimalen Symmetrie der Wirkung eine Erhaltungsgröße $Q$ gehört, ist dann nichts zu beweisen. Man muß nur den Wortgebrauch rechtfertigen, infinitesimale, lokale Transformationen $\delta x^i$ Symmetrien der Wirkung zu nennen, wenn sie (10.16) erfüllen. Das wird erst später mit (13.59) klar.

## Energieerhaltung

Ist das Potential $V$, das im allgemeinen eine Funktion des Ortes und der Zeit sein kann, zeitunabhängig, so ist die Zeittranslation $\delta x^i = v^i$ eine Symmetrie der Wirkung und die Energie

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(\vec{x}) \tag{10.17}$$

ist bei nichtrelativistischer Bewegung eines Teilchens im Potential erhalten. Denn ihre Zeitableitung ist eine Linearkombination der Bewegungsfunktionen (7.5)

$$d_t E = b^i\, m v^i + v^i\, \frac{\partial V}{\partial x^i} = v^i\,(m\, b^i + \partial_i V) = v^i\, G_i \ . \tag{10.18}$$

Bei Bewegung von $n$ Teilchen mit Orten $x^i_a$, $i = 1,2,3$, $a = 1,2\dots n$ im zeitunabhängigen Potential, $\partial_t V = 0$, ist die Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2} \sum_a m_a\, \vec{v}_a^2 + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n) \tag{10.19}$$

erhalten. Die Bewegungsgleichungen sind $G_{i\,a} \circ \hat{f}_{\text{phys}} = 0$ mit $G_{i\,a} = m_a b^i_a + \partial_{x^i_a} V$ (keine Summe über $a$) und $\delta x^i_a = v^i_a$ ist eine Symmetrie der Wirkung

$$\sum_{a=1}^{n} v^i_a G_{i\,a} = \sum_a (m_a v^i_a b^i_a + v^i_a \partial_{x^i_a} V) = d_t(\frac{1}{2} \sum_a m_a v^i_a v^i_a + V) \ . \tag{10.20}$$

Die Energie hängt von der anfänglichen Lage und der anfänglichen Geschwindigkeit ab, behält aber dann auf der physikalischen Bahn ihren anfänglichen Wert.

Die Energie bleibt auch erhalten, wenn Zwangskräfte zeitunabhängiger Zwangsbedingungen $\phi_b = 0$, $b = 1, 2 \ldots$, die Bewegung einschränken, etwa auf eine schiefe Ebene oder eine Achterbahn. Dann gelten für alle Bahnen $f$, die in der Untermannigfaltigkeit verlaufen, $d_t\phi_b = 0$. Sind nun die Zwangsbedingungen zeitunabhängig, $\partial_t\phi_b = 0$, so stehen wegen

$$d_t\phi_b = v^i\,\partial_i\phi_b = 0 \tag{10.21}$$

die Tangentialvektoren $v$ senkrecht auf den Gradienten der Nebenbedingungen und demnach senkrecht auf der Zwangskraft (8.6)

$$F_{i\,\mathrm{Zwang}} = \sum_b \lambda_b\,\partial_i\phi_b\ . \tag{10.22}$$

Da $v^i F_{i\,\mathrm{Zwang}}$ verschwindet, gilt $d_t E = v^i(m\,b^i + \partial_i V - F_{i\,\mathrm{Zwang}})$, auch wenn zu den Newtonschen Gleichungen für Bewegung im zeitunabhängigen Potential noch die Zwangskräfte hinzu kommen. Zwangskräfte zeitunabhängiger Nebenbedingungen verändern nicht die Energiebilanz, sie leisten keine Arbeit. Ebenso ändern Magnetkräfte $\vec{F}_{\mathrm{Lorentz}} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$ zwar den Impuls, nicht aber die Energie, denn sie stehen senkrecht auf $\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{F}_{\mathrm{Lorentz}} = 0$.

## Impulserhaltung

Ist das Potential unter Verschiebungen $\delta x^i = c^i$ invariant, $c^i\,\partial_i V = 0$, so verschwindet die Kraft in dieser Richtung, $c^i F_i = 0$. Die Wirkung ist unter dieser Verschiebung invariant, und der Impuls

$$p^i = m\,v^i \tag{10.23}$$

ist in Richtung $\vec{c}$ erhalten,

$$d_t\big(c^i\,m\,v^i\big) = c^i\,\big(m\,b^i + \partial_i V\big) = c^i\,G_i\ . \tag{10.24}$$

Ein Zweiteilchenpotential $V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$, das nur von der Differenz der Teilchenorte abhängt, ist invariant unter gleicher Verschiebung beider Teilchen, $\delta x_1^i = \delta x_2^i = c^i$. Diese Verschiebung ist eine Symmetrie der Wirkung, zu der der Gesamtimpuls als Erhaltungsgröße gehört. Die Bewegungsgleichungen der beiden Teilchen sind $G_{i\,a}\circ\hat{f}_{\mathrm{phys}} = 0$ für $i = 1, 2, 3$ und $a = 1, 2$ mit

$$G_{i\,1} = m_1 b_1^i + \partial_{x_1^i} V\ ,\quad G_{i\,2} = m_2 b_2^i + \partial_{x_2^i} V\ , \tag{10.25}$$

und wegen der Kettenregel ist

$$\partial_{x_2^i} V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = -\partial_{z^i} V(\vec{z})_{|\vec{z}=\vec{x}_1-\vec{x}_2} = -\partial_{x_1^i} V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\ . \tag{10.26}$$

Es gilt also Actio $=$ −Reactio, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Daher verschwindet die Gesamtkraft $\sum_a \vec{F}_a$ und folglich $\vec{c}\cdot\sum_a \vec{F}_a$, also ist

$$c^i\sum_a G_{i\,a} = c^i\sum_a m_a b_a^i = c^i\,d_t p^i \quad\text{mit}\quad p^i = \sum_a m_a v_a^i = \sum_a p_a^i\ . \tag{10.27}$$

Ebenso ist bei mehreren Teilchen der Gesamtimpuls $\vec{p} = \sum_a m_a \vec{v}_a$ in Richtung $\vec{c}$ erhalten, wenn das Potential $V(\vec{x}_1 + \lambda\vec{c} \ldots \vec{x}_n + \lambda\vec{c}) = V(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_n)$ unter gemeinsamer Verschiebung aller Teilchen in Richtung $\vec{c}$ invariant ist. Denn dann verschwindet in dieser Richtung die Gesamtkraft, $-c^i \sum_a \partial_{x^i_a} V = 0$, wie Ableiten nach $\lambda$ bei $\lambda = 0$ zeigt. Die Summe $c^i \sum_a G_{i\,a}$ vereinfacht sich daher zu $c^i \sum_a m_a b^i_a = c^i\, d_t p^i$, das heißt, der Gesamtimpuls in Richtung $\vec{c}$ ändert sich auf den physikalisch durchlaufenen Bahnen nicht im Laufe der Zeit.

Schränken Zwangskräfte

$$F_{i\,a\,\text{Zwang}} = \sum_b \lambda_b\, \partial_{x^i_a} \phi_b \tag{10.28}$$

die Bewegung auf Untermannigfaltigkeiten ein, die durch translationsinvariante Nebenbedingungen

$$\phi_b(\vec{x}_1 + \lambda\vec{c}, \vec{x}_2 + \lambda\vec{c} \ldots) = \phi_b(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots) \tag{10.29}$$

gegeben sind, dann zeigt Differenzieren nach $\lambda$ bei $\lambda = 0$

$$c^i \sum_a \partial_{x^i_a} \phi_b = 0\ , \tag{10.30}$$

daß $c^i \sum_{a,b} \lambda_b\, \partial_{x^i_a} \phi_b$, die Summe der Zwangskräfte in Richtung $\vec{c}$, verschwindet. Daher ist im translationsinvarianten Potential bei translationsinvarianten Zwangsbedingungen der Gesamtimpuls erhalten, $d_t(\vec{c}\cdot\vec{p}) = \vec{c}\cdot \sum_a m_a \vec{b}_a = \vec{c}\cdot \sum_a (m_a \vec{b}_a - \vec{F}_a - \vec{F}_{a\,\text{Zwang}})$.

## Drehimpulserhaltung

Ist das Potential $V$ eines Teilchens unter Drehung (10.8) um eine Achse $\vec{n}$ invariant,

$$V(\vec{x}_\parallel + (\cos\lambda)\,\vec{x}_\perp + (\sin\lambda)\,\vec{n}\times\vec{x}_\perp) = V(\vec{x})\ , \tag{10.31}$$

dann zeigt Differenzieren nach $\lambda$ bei $\lambda = 0$, daß in Achsenrichtung das Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{x}\times\vec{F} \tag{10.32}$$

verschwindet, $\vec{n}\cdot\vec{M} = 0$,

$$0 = (\vec{n}\times\vec{x})^i\,\partial_i V = \epsilon_{ijk}\, n^j\, x^k\, \partial_i V = -n^j \epsilon_{jki}\, x^k\, F_i = -\vec{n}\cdot\vec{x}\times\vec{F}\ . \tag{10.33}$$

Die infinitesimale Drehung $\delta x^i = \frac{dT_\lambda x^i}{d\lambda}_{|\lambda=0} = \epsilon_{ijk}\, n^j\, x^k$ ist eine Symmetrie der Wirkung und der Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p} \tag{10.34}$$

in Achsenrichtung $\vec{n}$ ist die zugehörige Erhaltungsgröße

$$d_t\big(n^i\,\epsilon_{ijk}\, m\, x^j\, v^k\big) = n^i\,\epsilon_{ijk}\, m\,(v^j\, v^k + x^j\, b^k) = \epsilon_{ijk}\, n^j\, x^k (m\, b^i + \partial_i V)\ . \tag{10.35}$$

Hängt das Potential nur von $r = \sqrt{\vec{x}^2}$ ab wie beispielsweise $V(\vec{x}) = -mMG/r$ bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne, so ist es invariant unter allen Drehungen und alle

Komponenten des Drehimpulses sind Erhaltungsgrößen. Dann ist, wie schon auf Seite 27 gezeigt, jede physikalische Bahn eben, denn das Kreuzprodukt $\vec{L}(t) = \vec{x}(t) \times \vec{p}(t)$ steht senkrecht auf jedem seiner Faktoren, $\vec{x}(t) \cdot \vec{L}(t) = 0 = \vec{x}(t) \cdot \vec{L}(0)$, und $\vec{x}(t)$ liegt jederzeit in der Ebene durch den Ursprung mit dem Normalenvektor $\vec{L}(0)$.

Ist ein $n$-Teilchen-Potential unter gemeinsamer Drehung um eine Achse $\vec{n}$ invariant,

$$V(T_\lambda \vec{x}_1, T_\lambda \vec{x}_2 \dots T_\lambda \vec{x}_n) = V(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n) \tag{10.36}$$

wobei $T_\lambda \vec{x}$ die Drehung (10.8) ist, dann zeigt Differenzieren nach $\lambda$ bei $\lambda = 0$, daß das Gesamtdrehmoment $\vec{M}$ in Achsenrichtung verschwindet

$$\vec{M} = \sum_a \vec{M}_a = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_a \ , \quad \vec{n} \cdot \vec{M} = 0 \ , \tag{10.37}$$

$$0 = \sum_a \delta x^i_a \, \partial_{x^i_a} V = \sum_a \epsilon_{ijk} \, n^j \, x^k_a \, \partial_{x^i_a} V = -n^j \sum_a \epsilon_{jki} \, x^k_a \, F_{i\,a} = -\vec{n} \cdot \sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_a \ . \tag{10.38}$$

Daher ist der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{p}_a$ in Achsenrichtung erhalten, und $\delta x^i_a = \epsilon_{ijk} n^j x^k_a$ ist eine infinitesimale Symmetrie der Wirkung

$$\frac{d}{dt} \sum_a n^i \epsilon_{ijk} \, m_a \, x^j_a \, v^k_a = \sum_a \epsilon_{ijk} \, n^j \, x^k_a (m_a \, b^i_a + \partial_{x^i_a} V) = \sum_a \epsilon_{ijk} \, n^j \, x^k_a \, G_{i\,a} \ . \tag{10.39}$$

An der Erhaltung des Drehimpulses in einer Richtung $\vec{n}$ ändern auch Zwangskräfte

$$F_{i\,a\,\text{Zwang}} = \sum_b \lambda_b \, \partial_{x^i_a} \phi_b \tag{10.40}$$

nichts, wenn die Nebenbedingungen $\phi_b = 0$ invariant unter Drehung um die Achse $\vec{n}$ sind und mit $\delta x^i_a = \epsilon_{ijk} n^j x^k_a$ die Gleichung $\delta x^i_a \partial_{x^i_a} \phi_b = 0$ erfüllen. Denn dann verschwindet das Gesamtdrehmoment, das die Zwangskräfte erzeugen.

## Gewichteter Startort

Jede infinitesimale Galileitransformation $\delta \vec{x}_a = \vec{u}\, t$ mit Geschwindigkeit $\vec{u}$ ist eine Symmetrie der Wirkung, wenn das Potential darunter invariant ist, $u^i \sum_a \partial_{x^i_a} V = 0$, wenn also die Gesamtkraft in Richtung $\vec{u}$ verschwindet,

$$\sum_a \delta x^i_a G_{i\,a} = u^i \sum_a (m_a \, t \, b^i_a) = u^i \, d_t \sum_a m_a \, (t \, v^i_a - x^i_a) \ . \tag{10.41}$$

Wenn die Gesamtkraft in allen Richtungen verschwindet, dann hat auf physikalischen Bahnen die Größe $\sum_a m_a(\vec{x}_a(t) - t\,\vec{v}_a(t)$ den zeitlich unveränderlichen Wert, den sie zu Beginn für $t = 0$ hatte: die Summe der mit der Masse gewichteten Koordinaten des Startortes, das ist der mit der Gesamtmasse multiplizierte anfängliche Schwerpunkt $\vec{R}$

$$\sum_a m_a \, (\vec{x}_a(t) - t\,\vec{v}_a(t)) = \sum_a m_a \, \vec{x}_a(0) = m \, \vec{R}(0) \ , \ \vec{R} = \frac{\sum_a m_a \, \vec{x}_a}{m} \ , \ m = \sum_a m_a \ . \tag{10.42}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich, wenn die Gesamtkraft verschwindet, nach (10.42) gradlinig gleichförmig mit der wegen Impulserhaltung konstanten Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{V} = \sum_a m_a \vec{v}_a / m$, denn (10.42) besagt $\vec{R}(t) - t\,\vec{V} = \vec{R}(0)$, das ist der Schwerpunktsatz

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + t\,\vec{V}(0) \ . \tag{10.43}$$

Die zu Symmetrien der Wirkung gehörigen Erhaltungsgrößen listet die folgende Tabelle.

Tabelle 10.1: Symmetrie und Erhaltungsgröße

| | |
|---|---|
| Zeittranslation | Energie |
| räumliche Verschiebung | Impuls |
| Drehung | Drehimpuls |
| Galileitransformation | gewichteter Startort |

Diese Erhaltungsgrößen setzen sich mit Ausnahme der Energie additiv aus Beiträgen der einzelnen Teilchen zusammen. Wenn sich allerdings die Teilchen im Laufe der Zeit voneinander entfernen und die potentielle Energie mit zunehmendem Abstand der Teilchen verschwindet, dann ist auch die Energie additiv, nämlich die Summe der kinetischen Energien. Wenn nicht, geht das Mehrteilchensystem nicht in ein System einzelner Teilchen über.

## Virialsatz

Eine infinitesimale Streckung $\delta x^i = x^i$ ist keine Symmetrie der Wirkung, selbst wenn das Potential verschwindet und invariant unter Streckung ist. Denn die Linearkombination $x^i G_i = x^i\,(m\,b^i + \partial_i V)$ ist nicht die Ableitung $d_t$ einer Jetfunktion $Q$. Zwar kann man den Term $x^i\,(m\,b^i)$ umschreiben,

$$x^i G_i = d_t\big(m\,x^i\,v^i\big) - m\,v^i\,v^i + x^i\,\partial_i V \ , \tag{10.44}$$

jedoch sind die dann verbleibenden Terme $g(x,v) = -m\,v^i\,v^i + x^i\,\partial_i V$ nicht von der Form $d_t\tilde{Q}$. Denn da $g$ nicht von $b$ abhängt, darf $\tilde{Q}$ nicht von $v$ abhängen. Aber dann ist $d_t\tilde{Q} = \partial_t\tilde{Q} + v^i\,\partial_{x^i}\tilde{Q}$ linear inhomogen in $v$ und demnach verschieden von $g$.

Wenn auch nicht ein Erhaltungssatz, so folgt doch aus (10.44) ein Satz über Mittelwerte von kinetischer und potentieller Energie, falls das Potential homogen von Grade $N$ ist und

$$V(e^\lambda x) = (e^\lambda)^N\,V(x) \ , \quad x^i\,\partial_i V = N\,V \ , \tag{10.45}$$

erfüllt. Der zweite Teil der Gleichung ergibt sich durch Ableiten nach $\lambda$ bei $\lambda = 0$. Der Operator $x^i\,\partial_i$ zählt den Homogenitätsgrad in den Variablen $x$ ab, $x\partial_x x^N = N x^N$. Wie wir noch sehen werden,[1] verschwindet bei beschränkten Bahnen der Mittelwert der

[1] Der Mittelwert einer Größe $Q(t)$, die sich mit der Zeit $t$ ändert, ist das Integral $\int_0^T dt\,Q(t)$, geteilt durch die Dauer $T$, über die gemittelt wird. Ist $Q = dq/dt$ die Zeitableitung einer Funktion $q$, so ist das Integral nach dem Hauptsatz der Integralrechnung $q(T) - q(0)$ und geht, geteilt durch $T$, wenn $q$ beschränkt ist, für große $T$ gegen Null.

Ableitung $d(x^i v^i)/dt$. Demnach ist gemäß (10.44) im Mittel die kinetische Energie bei Bewegung in einem homogenen Potential vom Grad $N$ gleich $N/2$-mal der potentiellen Energie,

$$\langle\frac{1}{2}\, m\vec{v}^2\rangle = \frac{N}{2}\,\langle V\rangle\ . \tag{10.46}$$

Dieser Befund über die Mittelwerte der kinetischen und potentiellen Energie bei Bewegung in einem homogenen Potential vom Grad $N$ heißt Virialsatz. Beim harmonischen Oszillator ist die kinetische Energie im Mittel gleich der potentiellen Energie, bei Bewegung im Keplerpotential $V = -m\,M\,G/r$ gleich der Hälfte des Betrages der potentiellen Energie.

## Eindimensionale Bewegung

Ist bei der Bewegung *eines* Freiheitsgrades die Energie von der Form

$$E = \frac{1}{2}\, m\,(\frac{dx}{dt}_{|t})^2 + V(x(t)) \tag{10.47}$$

erhalten, so lösen wir nach der Geschwindigkeit $v$ auf und lesen

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x(t))} \tag{10.48}$$

als Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $x(t)$, die angibt, wo das Teilchen zur Zeit $t$ ist. Leider ist in dieser Gleichung die rechte Seite eine unbekannte Funktion der Zeit $t$, denn wir kennen nicht die Funktion $x(t)$.

Die Geschwindigkeit kann beide Vorzeichen haben. Wir betrachten einen Bewegungsabschnitt mit positiver Geschwindigkeit.

Die Ableitung der Umkehrfunktion $t(x)$, die angibt, wie spät es ist, wenn das Teilchen den Ort $x$ durchläuft, $t(x(t')) = t'$, ist am Ort $x$ der Kehrwert der Ableitung von $x(t)$ (4.11) zur Zeit $t(x)$,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}\ . \tag{10.49}$$

Das Inverse der Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$ ist eine bekannte Funktion von $x$, wenn das Potential und der Energiewert durch die Anfangsbedingungen gegeben sind.

Beispielsweise gilt für den harmonischen Oszillator, während $x$ mit $t$ zunimmt,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{1}{2}\kappa x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\kappa}{2E}x^2}} \tag{10.50}$$

In der Variablen $u = \sqrt{\kappa/(2E)}\, x$ und mit der Funktion $\phi(u) = \sqrt{\kappa/m}\, t(x(u))$ kann man die Parameter $\kappa, m$ und $E$ absorbieren und erhält

$$\frac{d\phi}{du} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\ . \tag{10.51}$$

Wie (4.45) zeigt, ist $\phi(u) = \alpha + \arcsin u$ mit einer Konstanten $\alpha$, die nicht durch die Differentialgleichung, sondern die Anfangsbedingungen festgelegt wird, Lösung dieser linear inhomogenen Gleichung für $\phi(u)$ . Demnach gilt $\sin(\phi(u)-\alpha) = u$ und, wenn wir dies in den ursprünglichen Variablen schreiben, $\sin(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\, t(x) - \alpha) = \sqrt{\frac{\kappa}{2E}}\, x$, also (8.12)

$$x(t) = a \cos(\omega\, t + \varphi) \tag{10.52}$$

mit Kreisfrequenz $\omega = (\kappa/m)^{1/2}$, Amplitude $a = (2E/\kappa)^{1/2}$, also $E = 1/2\, \kappa\, a^2$ (8.16), und Phase $\varphi = -(\pi/2 + \alpha)$ .

Nach (10.49) ist die Umkehrfunktion $t(x)$ die Stammfunktion von $(\frac{2}{m}(E - V(x))^{-1/2}$, deren Wert am Startort $\hat{x}$ die Startzeit $t(\hat{x})$ ist. Im Vorgriff auf die noch zu besprechenden Integrale (12.10) schreiben wir sie als

$$t(x) = t(\hat{x}) + \int_{\hat{x}}^{x} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))}} \ . \tag{10.53}$$

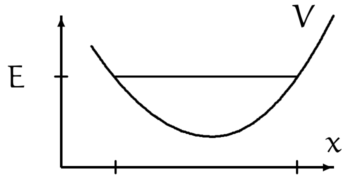



Abbildung 10.1: Bewegung im Potential

Die Funktion $t(x)$ kann also bei eindimensionaler Bewegung als Integral angegeben und hieraus die Bahn $x(t)$ als Umkehrfunktion ermittelt werden. Eindimensionale, energieerhaltende Bewegung ist integrabel.

Ohne das Integral zu berechnen, erlaubt die zeichnerische Darstellung des Potentials $V$ qualitativ die Bewegung zu verstehen. Sie verläuft, wenn $x$ anfänglich zunimmt, bis zum Umkehrpunkt $\overline{x}$, falls er existiert, an dem die potentielle Energie der Gesamtenergie gleich ist, $V(\overline{x}) = E$. Dort kehrt die Bewegung um und verläuft bis zum Umkehrpunkt $\underline{x}$, $V(\underline{x}) = V(\overline{x})$, falls es ihn gibt, und kehrt abermals um. Wenn es die beiden Umkehrpunkte gibt, ist die Bewegung periodisch, $x(t + T) = x(t)$, mit der Schwingungsdauer

$$T = 2 \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))}} \ . \tag{10.54}$$

Bei kleinen Schwingungen um einen Punkt $y$, in dem das Potential minimal wird, wenn also $E$ fast mit dem Minimalwert $V(y) = V_{\min}$ übereinstimmt, hängt die Schwingungsdauer nicht mehr von der Auslenkung ab. Denn dann ist das Potential näherungsweise dasjenige eines harmonischen Oszillators, der um $y$ schwingt,

$$V(x) = V(y) + \frac{1}{2}\, \kappa\, (x - y)^2 + O((x - y)^3) \ . \tag{10.55}$$

Dabei ist, wie Ableiten bestätigt, die Federkonstante $\kappa$ die zweite Ableitung des Potentials am Minimum

$$\kappa = \frac{d^2V}{dx^2}_{|y} \ . \tag{10.56}$$

Die Schwingungsdauer $T$ des harmonisches Oszillators ist $T = 2\pi/\omega$, und bei kleinen Schwingungen gilt

$$\omega^2 = \frac{\frac{d^2V}{dx^2}_{|y}}{m} \ . \tag{10.57}$$

## Keplerbewegung

Am Beispiel der Bewegung der Erde um die Sonne zeigen wir, wie man mit den Erhaltungsgrößen die Bahn bestimmt. Zunächst handelt es sich um ein Bewegungsproblem mit 6 Freiheitsgraden, wenn wir die Auswirkung der anderen Planeten und des Mondes, insbesondere Ebbe und Flut, vernachlässigen und Sonne und Erde als Punkte idealisieren. Bezeichnen wir die Massen von Erde und Sonne mit $m_1$ und $m_2$, so genügen ihre Bahnen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ den Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_1\,\ddot{x}_1^i = -\frac{\partial V}{\partial x_1^i}\ , \quad m_2\,\ddot{x}_2^i = -\frac{\partial V}{\partial x_2^i}\ , \quad \text{mit} \quad V(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = -\frac{m_1\,m_2\,G}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\ . \tag{10.58}$$

Dabei ist $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ [10] die Newtonsche Gravitationskonstante und $V$ das Gravitationspotential, das die Sonne am Ort der Erde und umgekehrt die Erde am Ort der Sonne verursacht.

Weil das Potential nur von der Differenz beider Orte abhängt, ist es invariant unter gemeinsamer Translation $\delta\vec{x}_1 = \delta\vec{x}_2 = \vec{c}$ mit beliebigem $\vec{c}$. Folglich bewegt sich der Schwerpunkt gradlinig gleichförmig (10.43)

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{M}\ , \quad M = m_1 + m_2\ , \quad \vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \vec{V}\,t\ . \tag{10.59}$$

Es liegt daher nahe, $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ als Linearkombination des Schwerpunkts $\vec{R}$ und des Differenzvektors $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = (x,y,z)$ zu schreiben, der im Potential auftritt,

$$\vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\,\vec{x}\ , \quad \vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\,\vec{x}\ . \tag{10.60}$$

Setzen wir in (10.58) ein und nehmen wir die Summe und die Differenz beider Bewegungsgleichungen, entkoppeln sie in die Differentialgleichungen der freien Schwerpunktsbewegung mit Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ und der Lösung (10.59) sowie der Relativbewegung mit reduzierter Masse $m = m_1 m_2/M$ im Potential $V(\vec{x}) = -\alpha/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$M\,\ddot{R}^i = 0\ , \quad m\,\ddot{x}^i = \partial_i\frac{\alpha}{|\vec{x}|} = -\alpha\,\frac{x^i}{|\vec{x}|^3}\ , \quad \alpha = m_1\,m_2\,G\ . \tag{10.61}$$

Da das Potential nur von $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ abhängt, verwenden wir Kugelkoordinaten (5.25) für den Differenzvektor $\vec{x}$. Die Geschwindigkeit $d\vec{x}/dt$, ausgedrückt durch Zeitableitungen von $(r,\theta,\varphi)$, ist nach der Kettenregel

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx'^j}{dt}\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \overset{5.44}{=} \dot{r}\,\vec{e}_r + \dot{\theta}\,r\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \quad \text{mit} \tag{10.62}$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\ , \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\ , \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\ . \tag{10.63}$$

Man bestätigt leicht, daß die Vektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ , die an jedem Ort in Richtung von zunehmenden $r, \theta, \varphi$ zeigen, normiert sind und aufeinander senkrecht stehen. Die kinetische Energie, beispielsweise, ist daher

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\, m\, (\frac{d\vec{x}}{dt})^2 = \frac{1}{2}\, m\, (\dot{r}^2 + r^2\, \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2)\ . \tag{10.64}$$

Zur Bestimmung der Relativbewegung $\vec{x}(t)$ nutzen wir aus, daß das Potential $V$ nicht explizit von der Zeit abhängt. Folglich ist die Energie $E = E_{\mathrm{kin}} + V$ erhalten (10.20). Zudem ist das Potential invariant unter Drehungen. Daher (10.35) ist der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x} \times (m\,\dot{\vec{x}})$ erhalten. Folglich ist die Bahn eben, $\vec{x}\cdot\vec{L} = 0$ (Seite 98), und verläuft, wenn wir die $z$-Achse in Richtung von $\vec{L}$ wählen, in der $z$-Ebene.

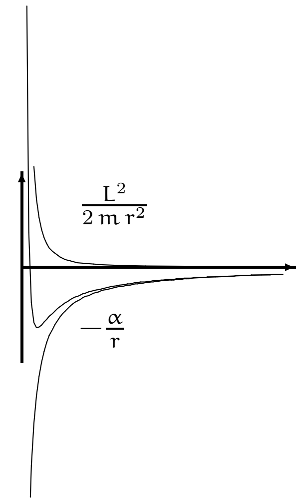



Abbildung 10.2: Keplerpotential, Drehimpulsbarriere und effektives Potential

Dort gilt $\theta(t) = \pi/2$, $\sin\theta = 1$ und $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$, und wegen $\dot{\theta} = 0$ ist der Drehimpuls

$$\vec{L} = m\,r\,\vec{e}_r \times (\dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = m\,r^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\ . \tag{10.65}$$

Es gelten also mit konstanten $L$ und $E$ die Erhaltungsgleichungen

$$L = m r^2\,\dot{\varphi}\ , \quad E = \frac{1}{2}\, m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r}\ . \tag{10.66}$$

Drücken wir $\dot{\varphi} = L/(m\,r^2)$ in der Energie durch $L$ aus

$$E = \frac{1}{2}\, m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} - \frac{\alpha}{r}\ , \tag{10.67}$$

so erhalten wir einen Energieerhaltungssatz (10.47) für die Bewegung *eines* Freiheitsgrades $r(t)$ in einem effektiven Potential

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\,m\,r^2} - \frac{\alpha}{r}\ , \tag{10.68}$$

zu dem das Kepler-Potential $-\alpha/r$ und die Drehimpulsbarriere $L^2/(2\,m\,r^2)$ beitragen, das ist die kinetische Energie, die in der Drehbewegung mit Drehimpuls $L$ steckt. Wenn der Drehimpuls nicht verschwindet, so kann die Bahn nicht $r = 0$ durchlaufen; dies verhindert die Drehimpulsbarriere, die für kleine Abstände überwiegt. Für große Abstände überwiegt das Kepler-Potential $-\alpha/r$. Das effektive Potential verläuft dazwischen.

Für nichtverschwindenden Drehimpuls $L \neq 0$ bestimmen wir die räumlich durchlaufene Bahn $r$ als Funktion des Winkels $\varphi$, indem wir mit der Kettenregel die Zeitableitung von $r$ als Ableitung nach $\varphi$ umschreiben und die Drehimpulserhaltung berücksichtigen,

$$\frac{dr}{dt} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{L}{m}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\varphi}(\frac{1}{r})\ . \tag{10.69}$$

Die Energieerhaltung (10.67) besagt für den inversen Abstand $1/r$ als Funktion von $\varphi$

$$E = \frac{L^2}{2\,m}(\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r})^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{L^2}{2\,m}(\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r})^2 + \frac{L^2}{2\,m}(\frac{1}{r} - \frac{\alpha\,m}{L^2})^2 - \frac{\alpha^2\,m}{2\,L^2}\ . \tag{10.70}$$

Bringen wir den konstanten Term $\alpha^2\, m/(2\, L^2)$ nach links und teilen durch ihn, folgt

$$e^2 = \Big(\frac{du}{d\varphi}\Big)^2 + u^2\ ,\quad e = \sqrt{1+\frac{2\,E\,L^2}{\alpha^2\, m}}\ ,\quad u = \frac{p}{r} - 1\ ,\quad p = \frac{L^2}{\alpha\, m}\ . \tag{10.71}$$

Der inverse Abstand $u$ genügt also als Funktion des Winkels $\varphi$ dem Energieerhaltungssatz eines harmonischen Oszillators, der mit Kreisfrequenz $\omega = 1$ mit Amplitude $e$ schwingt. Wählen wir $\varphi$ so, daß $r$ für $\varphi = 0$ minimal wird, so lautet die Lösung $u(\varphi) = e\cos\varphi$,

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi\ . \tag{10.72}$$

Dies ist für $0 < e < 1$, also für $E < 0$, eine Ellipse mit Exzentrizität $e$, mit großer Halbachse $a$ und kleiner Halbachse $b$

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}\ ,\quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{L}{\sqrt{\alpha\, m}}\sqrt{a}\ . \tag{10.73}$$

Denn schreibt man mit kartesischen Koordinaten $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ die Bahngleichung als $\sqrt{x^2+y^2} = p - ex$ und quadriert, so erhält man nach einfachem Umformen $(x+ea)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Die Brennpunkte der Ellipse sind der Ursprung $(x,y) = (0,0)$ und $(x,y) = (-2ea, 0)$: ihre Abstände $r$ und $\sqrt{(x+2ea)^2+y^2}$ zu den Ellipsenpunkten summieren sich überall zu $2a$, denn $(x+2ea)^2 + y^2 = (2a-r)^2$ gilt wegen $e\cos\varphi + 1 = p/r$.

Für Planetenbahnen im Gravitationspotential $-\alpha/r$ gilt also das Keplersche Gesetz: sie sind Ellipsen, bei denen die Sonne, genauer der Schwerpunkt, in einem der Brennpunkte steht. Zwischen minimalem Abstand, maximalem Abstand und wieder minimalem Abstand zur Sonne durchlaufen die Planeten den Winkel $\Delta\varphi = 2\pi$.

Für $E > 0$, $e > 1$, handelt es sich um eine Hyperbel, auf der das Teilchen im Schwerpunktsystem um den Winkel $\delta = 2\arccos(-1/e) - \pi = 2\arcsin(1/e)$ gestreut wird. Läuft ein Teilchen mit hoher Geschwindigkeit $v$ und einem Minimalabstand $r_{\min}$ an der Sonne vorbei, so wird es also nach Newtonscher Theorie um $\delta \approx 2\,G\,M/(r_{\min}\,v^2)$ abgelenkt. Für Licht wird aber in Übereinstimmung mit der Allgemeinen Relativitätstheorie der doppelte Wert gemessen.

Die Fläche $F$, die der Differenzvektor $\vec{r}(t)$ überstreicht, setzt sich aus Kreissegmenten der Größe $\frac{1}{2}r^2 d\varphi$ zusammen und ändert sich mit $\varphi(t)$ um

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dF}{d\varphi} = \dot\varphi\,\frac{1}{2}\,r^2 = \frac{L}{2\,m}\ . \tag{10.74}$$

Daß der Drehimpuls, also die Flächengeschwindigkeit, konstant ist, ist Keplers zweites Gesetz: In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl zum Schwerpunkt, $m_2\vec{r}/M$ (10.60), gleich große Flächen. Insbesondere überstreicht $\vec{r}$ in der Umlaufzeit $T$ die Fläche der Ellipse $LT/(2\,m) = \pi\, a\, b$. Mit $b = \sqrt{a}\,L/\sqrt{m\alpha}$ und $a' = m_2\, a/M$ folgt daraus das dritte Keplersche Gesetz

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{G\, m_2}}\,\frac{m_1+m_2}{m_2}\, a'^{\frac{3}{2}}\ , \tag{10.75}$$

daß sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben der großen Halbachsen $a'$ der Planetenbahnen verhalten. Damit läßt sich aus der Beobachtung der Planetenbahnen die gravitativ wirkende Masse der Sonne $G\,m_{\text{Sonne}}$ ermitteln. Durch irdische Messung der Newtonschen Gravitationskonstanten $G$ schließlich bestimmt man die Sonnenmasse.

Mit Keplers drittem Gesetz beantwortet man ohne große Rechnung die Scherzfrage, wie lange die Erde in die Sonne fiele, wenn man ihr an Ort und Stelle den Bahndrehimpuls entzöge. Statt einer nahezu kreisförmigen Bahn wäre die Fallkurve eine zur Strecke entartete Ellipse mit einer Halbachse, die halb so groß wie der bisherige Kreisradius ist. Die Falldauer (10.82) ist die halbe Umlaufdauer, die ihrerseits nach Keplers drittem Gesetz $(1/2)^{3/2}$ mal einem Jahr ist. Demnach dauert der Fall ein Jahr, geteilt durch $4\sqrt{2}$, also etwa 65 Tage.

## Senkrechter Fall

Falls der Drehimpuls verschwindet, $L = 0$, und es sich um einen senkrechten Fall mit Maximalabstand $R$ handelt, lautet der Energiesatz

$$\frac{1}{2}\,m\,(\frac{dr}{dt})^2 - \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{R}\ . \tag{10.76}$$

Mit $R/\alpha$ multipliziert besagt diese Gleichung für das dimensionslose Verhältnis $u = r/R$ und für die reskalierte Zeit $\tilde{t} = \sqrt{2\alpha/(mR^3)}\,t$

$$(\frac{du}{d\tilde{t}})^2 - \frac{1}{u} = -1\ ,\quad \text{oder}\quad (\frac{du}{d\tilde{t}})^2 = \frac{1-u}{u}\ . \tag{10.77}$$

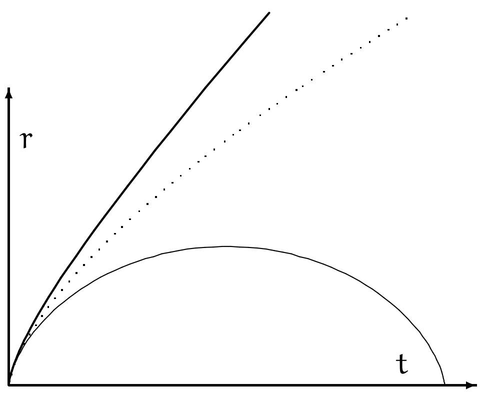



Abbildung 10.3: Senkrechter Fall

Fassen wir $u$ als Funktion

$$u(\varphi) = \frac{1}{2}\,(1-\cos\varphi) = \sin^2\frac{\varphi}{2} \tag{10.78}$$

eines Winkels $\varphi(\tilde{t})$ auf, dann ist $du/d\tilde{t} = s\,c\,d\varphi/d\tilde{t}$ und $(1-u)/u = c^2/s^2$, wobei $c$ und $s$ den Cosinus und Sinus von $\varphi/2$ bezeichnen. (10.77) besagt also $(d\varphi/d\tilde{t})^2 = 1/s^4$, das heißt, die Umkehrfunktion $\tilde{t}(\varphi)$ erfüllt

$$\frac{d\tilde{t}}{d\varphi} = \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\big(1-\cos\varphi\big)\ . \tag{10.79}$$

Wählen wir die Startzeit als $\tilde{t}(0) = 0$, so ist die Stammfunktion

$$\tilde{t}(\varphi) = \frac{1}{2}\big(\varphi - \sin\varphi\big)\ . \tag{10.80}$$

Der Funktionsgraph der Bahn $t \mapsto (t, r(t))$ ist eine Zykloide, die Bahnkurve eines Punktes auf der Lauffläche eines rollendes Rades. Denn die Kurvenpunkte

$$\begin{pmatrix}\tilde{t}(\varphi)\\ u(\varphi)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varphi-\sin\varphi\\ 1-\cos\varphi\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varphi\\ 1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} \tag{10.81}$$

sind die Summe des Ortsvektors $1/2\,(\varphi,1)$ der Achse eines Rades mit Radius $1/2$, die sich in Höhe $1/2$ mit zunehmendem Winkel $\varphi$ um die Kreisbogenlänge $\varphi/2$ nach rechts bewegt, und des Vektors $-1/2\,(\sin\varphi,\cos\varphi)$, der anfangs für $\varphi=0$ von der Radachse zum untersten Punkt des Rades zeigt und mit zunehmendem $\varphi$ im Uhrzeigersinn um den Winkel $\varphi$ gedreht wird. Also ist beim senkrechten Fall im Keplerpotential die Weltlinie mit endlicher Gipfelhöhe $R$, wie nebenstehend dargestellt, eine Zykloide.

Ein Fall aus der Höhe $R_1 = m_2\,R/M$ (10.60) über dem Schwerpunkt dauert

$$t(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{G\,(m_1+m_2)}}\,(\frac{R}{2})^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{G\,m_2}}\,\frac{m_1+m_2}{m_2}\,(\frac{R_1}{2})^{\frac{3}{2}}\ . \tag{10.82}$$

Verschwindet die Energie, so lautet (10.77)

$$\frac{mR^3}{2\alpha}(\frac{du}{dt})^2 - \frac{1}{u} = 0 \tag{10.83}$$

und die reskalierte Zeit $\tilde{t}$ erfüllt bei wachsendem $r = u\,R$ die Differentialgleichung

$$\frac{d\tilde{t}}{du} = \sqrt{u} \quad \text{mit der Lösung} \quad \tilde{t}(u) = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + \tilde{t}(0)\ . \tag{10.84}$$

Ist die Energie positiv, so schreiben wir sie als $\alpha/R$ und erhalten für $\tilde{t}$ statt (10.77)

$$\frac{d\tilde{t}}{du} = \sqrt{\frac{u}{1+u}}\ . \tag{10.85}$$

Parametrisieren wir $u>0$ analog zu (10.78) durch

$$u = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\varphi - 1) = \operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}\ , \quad u+1 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\varphi + 1) = \operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2} \tag{10.86}$$

für $\varphi>0$, so erfüllt $\tilde{t}(\varphi)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d\tilde{t}}{d\varphi} = \frac{\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2}}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}\,\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\varphi - 1)\ , \tag{10.87}$$

und hat die Lösung

$$\tilde{t}(\varphi) = \tilde{t}(0) + \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\varphi - \varphi)\ . \tag{10.88}$$

Bemerkenswerterweise sind diese vertikalen Fallkurven der Newtonschen Gravitation auch die Abstände $r(t)$ zwischen frei fallenden Galaxien im räumlich homogenen und isotropen Universum, das sich nach der Allgemeinen Relativitätstheorie mit verschwindendem Druck und verschwindender Vakuumsenergiedichte ausdehnt. Je nachdem, ob die Massendichte einen kritischen Wert überschreitet, dehnt sich das Universum für immer aus oder stürzt wieder zusammen. Dies wäre, was Majestix in Asterix einzig schreckt, nämlich daß ihm der Himmel auf den Kopf fällt.

# 11 Kleine Schwingungen

Entziehen wir einem System mit $n$ Freiheitsgraden soviel Energie wie möglich, so wird es irgendwo in einem Potentialminimum zur Ruhe kommen. Wir wählen die kartesischen Koordinaten $x = (x^1, x^2 \ldots x^n)$ so, daß dieses Potentialminimum bei $x = 0$ liegt. Entwickeln wir das Potential in der Nähe von $x = 0$, so lautet es bis auf Terme höherer Ordnung (12.33)

$$V(x) = V(0) + c_i\, x^i + \frac{1}{2}\kappa_{ij}\, x^i\, x^j + O(x^3) \tag{11.1}$$

Dabei sind ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\kappa_{ij}$ die Matrixelemente einer symmetrischen Matrix, $\kappa_{ij} = \kappa_{j\,i}$, denn wegen $x^i x^j = x^j x^i$ ist $\kappa_{ij} x^i x^j = \kappa_{ij} x^j x^i = \kappa_{kl} x^l x^k = \kappa_{ji} x^i x^j$, also $\kappa_{ij} x^i x^j = \frac{1}{2}(\kappa_{ij} + \kappa_{ji}) x^i x^j$ .

Die Ableitungen von $V$ betragen

$$\partial_i V = c_i + \kappa_{ij}\, x^j + O(x^2)\ , \quad \partial_i \partial_j V = \kappa_{ij} + O(x)\ , \tag{11.2}$$

es sind also die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung die Ableitungen am Entwicklungspunkt,

$$c_i = (\partial_i V)_{|x=0}\ , \quad \kappa_{ij} = (\partial_i \partial_j V)_{|x=0}\ . \tag{11.3}$$

Da wir um die Ruhelage entwickeln, verschwindet dort die Kraft, $c_i = 0$. Der konstante Beitrag $V(0)$ zum Potential ist, wenn wir dem System ein wenig Energie zuführen und kleine Auslenkungen aus der Ruhelage untersuchen, ohne Belang. Die Terme höherer als quadratischer Ordnung vernachlässigen wir. Sie sind bei genügend kleinen Auslenkungen klein gegenüber den quadratischen. In dieser Näherung ist das Potential eine quadratische Form

$$V(x) = \frac{1}{2}\kappa_{ij}\, x^i\, x^j\ , \tag{11.4}$$

die positiv definit sein muß, wenn die Ruhelage stabil ist und die Kraft zu kleinerer Auslenkung zurück treibt. Anderenfall wäre die Annahme, daß die Auslenkung klein ist, nach kurzer Zeit durch die physikalische Bewegung widerlegt.

Die Bewegungsgleichungen würden einfach $m\,\ddot{x}^i = -\kappa_{ij}\, x^j$ lauten, wenn die Massen aller Freiheitsgrade gleich wären. Treten unterschiedliche Massen $m_i$ auf, müssen wir die bequeme Summationskonvention kurzzeitig außer Kraft setzen und die Bewegungsgleichungen für jedes $i$ als

$$m_i\, \ddot{x}^i + \sum_j \kappa_{ij}\, x^j = 0 \tag{11.5}$$

schreiben. Wir teilen diese Gleichung durch $\sqrt{m_i}$ und führen die Bezeichnungen

$$y^j = \sqrt{m_j}\, x^j\ , \quad \Omega^2_{ij} = \frac{1}{\sqrt{m_i}}\, \kappa_{ij}\, \frac{1}{\sqrt{m_j}}\ , \quad \Omega^2_{ij} = \Omega^2_{j\,i} \tag{11.6}$$

ein, dann lauten die Bewegungsgleichungen, wenn wir uns wieder der Summationskonvention bedienen,

$$\ddot{y}^{\,i} + \Omega^2_{ij}\, y^j = 0 \ . \tag{11.7}$$

Die Matrix $\Omega^2$ ist symmetrisch, $\Omega^{2\,T} = \Omega^2$. Wäre sie diagonal, so lägen die Bewegungsgleichungen von $n$ harmonische Oszillatoren vor. Aber normalerweise ist $\Omega^2$ nicht diagonal, und die Oszillatoren sind gekoppelt.

## Diagonalisierung einer reellen, quadratischen Form

Jede reelle, symmetrische Matrix $\Omega^2$ hat $n$ aufeinander senkrecht stehende, reelle, normierte Eigenvektoren.

Denn das charakteristische Polynom $\det(\Omega^2 - \lambda\mathbf{1}) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra komplexe Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ . Zu jedem Eigenwert $\lambda$ gibt es einen Eigenvektor mit Komponenten $(u^i + i\,v^i)$ ,

$$\Omega^2_{ij}\,(u^j + i\,v^j) = \lambda\,(u^i + i\,v^i) \ . \tag{11.8}$$

Durch Konjugieren erhalten wir hieraus, weil $\Omega^2$ reell und symmetrisch ist,

$$\lambda^*\,(u^i - i\,v^i) = \Omega^2_{ij}\,(u^j - i\,v^j) = \Omega^2_{j\,i}\,(u^j - i\,v^j) = (u^j - i\,v^j)\,\Omega^2_{j\,i} \tag{11.9}$$

und demnach einerseits aus der Eigenwertgleichung von $u + i\,v$ und andererseits aus der Eigenwertgleichung von $u - i\,v$

$$\lambda\,(u^j - i\,v^j)\,(u^j + i\,v^j) = (u^j - i\,v^j)\,\Omega^2_{j\,i}\,(u^i + i\,v^i) = \lambda^*\,(u^i - i\,v^i)\,(u^i + i\,v^i) \ . \tag{11.10}$$

Da $(u^i - i\,v^i)\,(u^i + i\,v^i) = u^i\,u^i + v^i\,v^i$ nicht verschwindet, ist jeder Eigenwert der symmetrischen, reellen Matrix $\Omega^2$ reell, $\lambda = \lambda^* \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, mit zugehörigem reellen Eigenvektor.

Die symmetrische Matrix $\Omega^2$ bildet den zu einem Eigenvektor $e$ senkrechten Unterraum $\mathcal{V}_\perp = \{v : e \cdot v = 0\}$ auf sich ab. Ist nämlich $e^j\,v^j = 0$, so verschwindet auch $e^i\,(\Omega^2_{ij}\,v^j)$, denn $e^i\,\Omega^2_{ij} = \Omega^2_{j\,i}\,e^i = \lambda\,e^j$ gilt wegen der Eigenwertgleichung und weil $\Omega^2$ symmetrisch ist. Folglich ist $e^i\,\Omega^2_{ij}\,v^j = \lambda\,e^j\,v^j = 0$, wenn $e$ senkrecht auf $v$ steht.

Für $n = 1$ hat jede reelle, symmetrische Matrix $\Omega^2$ offensichtlich $n$ aufeinander senkrecht stehende, reelle, normierte Eigenvektoren. Wenn aber dieser Sachverhalt für $n-1$ Dimensionen gilt, dann gilt er auch für $n$ Dimensionen. Denn in $n$ Dimensionen gibt es einen reellen, normierten Eigenvektor $e_1$ . Der zu $e_1$ senkrechte $n-1$-dimensionale Unterraum wird von $\Omega^2$ auf sich abgebildet, und enthält nach Induktionsannahme $n-1$ senkrecht zueinander stehende, normierte Eigenvektoren $e_2 \ldots e_n$ .

Ihre Eigenwerte nennen wir $\omega_1^2, \omega_2^2 \ldots \omega_n^2$ . Sie sind nicht negativ, wenn die quadratische Form $\Omega^2_{ij}\,y^i\,y^j$ positiv definit ist und zu einem rücktreibenden Potential gehört,

$$\Omega^2\,e_1 = \omega_1^2\,e_1 \ , \quad \ldots \quad \Omega^2\,e_n = \omega_n^2\,e_n \ . \tag{11.11}$$

In den Variablen $y$ sind die kinetische Energie und das Potential die quadratischen Formen

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\dot{y}^{\,i}\dot{y}^{\,i} \ , \quad E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\Omega^2_{ij}\,y^i\,y^j \ . \tag{11.12}$$

Da die orthonormalen Eigenvektoren $e_1, e_2 \ldots$ eine Basis bilden, können wir $y^i$ als Linearkombination $y^i(t) = \sum_a e^i_a\, z^a(t)$ schreiben. Wegen $e_a \cdot e_b = \delta_{ab}$ behält die kinetische Energie ihre Form. Die potentielle Energie vereinfacht sich zu einer Summe von Quadraten,

$$\dot y^i\, \dot y^i = e^i_a\, \dot z^a\, e^i_b\, \dot z^b = \dot z^b\, \dot z^b \ , \quad e^i_a\, z^a\, \Omega^2_{ij}\, e^j_b\, z^b = \sum_b \omega^2_b\, (z^b)^2 \ . \tag{11.13}$$

Die passive Transformation, die $y^i = O^i{}_a\, z^a$, $O^i{}_a = e^i_a$, durch die Komponenten $z^a$ darstellt, ist wegen $e_a \cdot e_b = \delta_{ab}$ eine Drehung, $O^T O = \mathbf{1}$. Eine reelle quadratische Form $W(y) = \Omega^2_{ij}\, y^i\, y^j$ läßt sich also durch eine Drehung unter Wahrung der reellen quadratischen Form $\delta_{ij} y^i y^j$ diagonalisieren.

## Überlagerung von Eigenschwingungen

Setzen wir $y^i(t) = \sum_b e^i_b\, z^b(t)$ in die Bewegungsgleichung (11.7) ein, so erhalten wir, weil die $e_b$ Eigenvektoren von $\Omega^2$ sind,

$$0 = \sum_b e^i_b \left(\ddot z^b + \omega^2_b\, z^b\right) \ . \tag{11.14}$$

Es sind aber die Eigenvektoren linear unabhängig. Die Bewegungsgleichung ist folglich genau dann erfüllt, wenn jede Komponente $z^1, z^2 \ldots$ einer Schwingungsgleichung genügt

$$\ddot z^b + \omega^2_b\, z^b = 0 \ , \quad \text{keine Summe über } b \ . \tag{11.15}$$

Mit den Lösungen $z^b(t) = \Re A_b\, e^{i\omega_b t} = a_b \cos(\omega_b\, t + \varphi_b)$ (8.12) schreibt sich jede Lösung $y^i(t)$ der Bewegungsgleichungen als

$$y^i(t) = \Re \sum_b e^i_b\, A_b\, e^{i\omega_b t} = \sum_b e^i_b\, a_b \cos(\omega_b\, t + \varphi_b) \ . \tag{11.16}$$

Sie enthält $2n$ nicht weiter eingeschränkte Parameter, die Amplituden $a_1, a_2 \ldots$ und Phasen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ Sie bestimmen die anfängliche Lage $y^i(0)$ und anfängliche Geschwindigkeit $\dot y^i(0)$. Umgekehrt bestimmen die $2n$ Anfangsbedingungen die Amplituden und Phasen,

$$y^i(0) = \sum_b e^i_b\, a_b \cos\varphi_b \ , \qquad \dot y^i(0) = -\sum_b e^i_b\, \omega_b\, a_b \sin\varphi_b \ , \tag{11.17}$$

$$y(0) \cdot e_c = z^c = a_c \cos\varphi_c \ , \qquad \dot y(0) \cdot e_c = \dot z^c = -\omega_c\, a_c \sin\varphi_c \ , \tag{11.18}$$

$$a_c = \sqrt{(z^c)^2 + (\dot z^c/\omega_c)^2} \ , \qquad \varphi_c = \begin{cases} \arccos(z^c/a_c) & \dot z^c \le 0 \\ \pi + \arccos(-z^c/a_c) & \dot z^c > 0 \end{cases} \ . \tag{11.19}$$

Die Lösung (11.16) ist eine Superposition oder Überlagerung verschiedener Eigenschwingungen, die man auch Normalmoden oder Normalschwingungen nennt,

$$y^i_b(t) = e^i_b\, a_b \cos(\omega_b\, t + \varphi_b) \ , \tag{11.20}$$

von denen jede mit einer festen Frequenz $\omega_b$ in einer Richtung $e_b$ schwingt, in der die Kraft in Gegenrichtung der Auslenkung zeigt.

Nicht nur die Gesamtenergie, sondern die Energie jeder Eigenschwingung ist erhalten,

$$E_b = \frac{1}{2}(\dot{z}^b)^2 + \frac{1}{2}(\omega_b\, z^b)^2 \ , \quad \text{keine Summe über } b\,. \tag{11.21}$$

Zu dieser Erhaltungsgröße gehört die zugegebenermaßen versteckte Symmetrie, die Zeit für diese eine Eigenschwingung $e_b$ zu verschieben,

$$\delta_b y^i = e_b^i\,(e_b \cdot \dot{y}) \qquad \text{keine Summe über } b\,. \tag{11.22}$$

Gekoppelte Schwingungen sind das Standardbeispiel lösbarer, beschränkter Bewegung. Die normierten Variablen $u_b = e_b \cdot \dot{y}/\sqrt{\omega_b}$ und $v_b = \sqrt{\omega_b}\, e_b \cdot y$ durchlaufen den Kreis $S^1$,

$$u_b^2 + v_b^2 = 2\, E_b/\omega_b \ , \tag{11.23}$$

mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega_b$. Die gesamte Bewegung ist aus diesen Kreisbewegungen zusammengesetzt und verläuft im Raum der Orte und Geschwindigkeiten auf einem $n$-Torus, dem Produkt $(S^1)^n$ von $n$ Kreisen. Die Bewegung ist periodisch, wenn alle Frequenzverhältnisse rational sind.

Bei komplizierteren, lösbaren und beschränkten Bewegungen[1] von $n$ Freiheitsgraden hängen die Frequenzen $\omega_b$ von den Amplituden ab. Insofern sind harmonische Schwingungen mit Frequenzen, die sich nicht mit der Amplitude ändern, untypisch. Aber es gibt bei allen lösbaren Bewegungen immer noch Variable, in denen die Bewegung aus $n$ Kreisbewegungen zusammengesetzt ist, also auf einem $n$-Torus verläuft. Dabei sind die $n$ Energien der einzelnen Kreisbewegungen erhalten.

Stören weitere Kopplungen, die man zunächst vernachlässigt hat, die Zeittranslationssymmetrie jeder einzelnen Eigenschwingung, sodaß nur noch die Gesamtenergie erhalten ist, so wird die Bewegung chaotisch. Für genügend gutartige Anfangsbedingungen, bei denen die Störungen nicht im Laufe der Zeit anwachsen, verläuft die Bahn auf einem verformten Torus. Das besagt das Kolmogorov-Arnold-Moser-Theorem. Daß die Menge der gutartigen Anfangsbedingungen wie eine Cantor-Menge[2] vollständig unzusammenhängend ist, aber ein endliches Maß hat, ist ein Beispiel dafür, wie wichtig absurd scheinende mathematische Raffinesse physikalisch sein kann. Die Saturnringe sind annähernd solch eine Cantor-Menge.

[1] Genauer gesagt betreffen diese Bemerkungen die Lösung Hamiltonscher Bewegungsgleichungen.

[2] Die Cantor-Menge ist die Restmenge, die übrig bleibt, wenn man aus dem Intervall $0 \le x \le 1$ das mittlere, offene Drittel entfernt, aus den übrig bleibenden Intervallen das mittlere, offene Drittel entfernt und mit dem jeweiligen Rest so weiter verfährt. Entfernt man statt jeweils dem mittleren Drittel, ein Drittel, dann ein Neuntel, dann ein Siebenundzwanzigstel, und so weiter, hat die verbleibende Restmenge ein endliches Maß.

# 12 Integration

Die Fläche zwischen den Geraden $x = a$ und $x = b$ und zwischen der $x$-Achse und dem Funktionsgraph einer Funktion $f : x \mapsto f(x)$ ist der Grenzwert einer Summe von Rechtecksflächen. Zur Berechnung zerlegt man das Intervall $M = [a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ in nichtüberlappende Teilintervalle

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b \ , \quad [a, b] = \cup_i \, [x_{i-1}, x_i] \ , \tag{12.1}$$

und nennt jede andere Zerlegung $\mathcal{Z}$ in nichtüberlappende Teilintervalle feiner, wenn sie die Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ zerlegt. Zu jeder Zerlegung und jeder Wahl von Zwischenstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gehört die Summe von Rechtecksflächen $(x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i)$, die Riemannsumme.

Wenn es eine Zahl $F(M, f)$ gibt und wenn für jeden vorgegebenen Fehler $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}'$ existiert, so daß für jede feinere Zerlegung $\mathcal{Z}$ und jede Wahl von Zwischenstellen die Riemannsumme um weniger als $\epsilon$ von $F(M, f)$ abweicht, dann heißt $f$ Riemannintegrabel im Bereich $M$, und $F(M, f)$ ist die Fläche, die zwischen $a$ und $b$ von $f$ und der $x$-Achse berandet wird,

$$|F(M, f) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i)| < \epsilon \ . \tag{12.2}$$

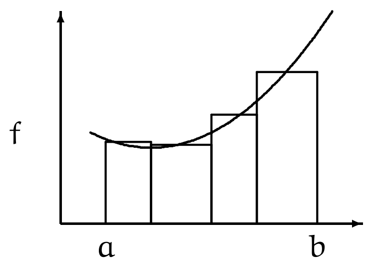



Abbildung 12.1: Riemannsumme

Da die Fläche Grenzwert einer Summe ist, schreibt man sie mit dem Zeichen $\int$, einem langgezogenen S, gibt den Bereich $M = [a, b]$ wie einen Summationsbereich an und deutet die Differenzen $x_i - x_{i-1}$ mit dem Symbol $\mathrm{d}x$ an, die jeweils mit einem Funktionswert $f(x)$ zu multiplizieren sind,

$$F(M, f) = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \ . \tag{12.3}$$

Die Formelzeichen werden als „Integral von $a$ bis $b$ über $f$“ gelesen. Der Name Integral stammt von lateinisch integer, ganz, und dem Hauptsatz der Integralrechnung, daß man mit dem Integral über die Ableitung die Funktion $f$ bis auf eine Konstante ganz wiederherstellen kann.

Ebenso kann man das Integral über Abbildungen $f$ eines Intervalls in einen topologischen Vektorraum definieren. Für die Existenz der Riemannsumme müssen Vielfache und Summen von Funktionswerten erklärt sein und zur Prüfung der Konvergenz braucht man eine Topologie.

Das Integral über eine Konstante $c$ ist $c$ mal der Größe des Integrationsbereichs

$$\int_a^b dx\, c = c\,(b - a)\ . \tag{12.4}$$

Das Integral hängt vom Integrationsbereich $[a, b]$ und von der Funktion $f$ ab und ist mit $\int_{[a,b]} f$ vollständig notiert. Es hängt *nicht* von der Bezeichnung der Integrationsvariablen ab,

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dy\, f(y)\ , \tag{12.5}$$

ebenso wie ein Indexpaar eine Summe bezeichnet, die Summe aber nicht vom Indexpaar abhängt, $u_i\, v^i = u_j\, v^j$ . So wie das Indexpaar verschieden von jedem anderen Index sein muß, der in einem Term auftritt, so muß die Integrationsvariable verschieden von der Bezeichnung der Grenzen sein.

In der Mathematik ist auch die Schreibweise $\int_a^b f(x)\, dx$ verbreitet, bei der das Integralzeichen als eine sich öffnende Klammer gelesen wird, die mit dem Symbol $dx$ geschlossen wird.

Wir unterstellen im weiteren, wenn wir nicht ausdrücklich anderes sagen, daß die Funktionen, von denen wir reden, in den Bereichen, über die wir integrieren, integrabel sind, und verwenden Eigenschaften von Integralen, deren Beweis wir den Mathematikern überlassen.

## Linearität, Zwischenwertsatz, Ableitung nach der oberen Grenze

Das Integral hängt linear vom Integranden ab, für Zahlen $c$ und $d$ gilt

$$\int_a^b dx\,\big(c\, f(x) + d\, g(x)\big) = c\,\Big(\int_a^b dx\, f(x)\Big) + d\,\Big(\int_a^b dx\, g(x)\Big)\ . \tag{12.6}$$

Es setzt sich additiv aus Beiträgen von Teilbereichen zusammen. Für Punkte $c$ zwischen $a$ und $b$ gilt

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^c dx\, f(x) + \int_c^b dx\, f(x)\ . \tag{12.7}$$

Man definiert $\int_a^c dx\, f(x) = -\int_c^a dx\, f(x)$ und $\int_a^a dx\, f(x) = 0$, dann gilt (12.7) für alle $a$, $b$ und $c$, falls zwei der drei Integrale existieren.

Das Integral ist eine orientierte Flächengröße, die auch negativ sein kann. Negative Werte des Integranden tragen negativ bei. Wechselt das Integrationsintervall seine Orientierung und wird es umgekehrt durchlaufen, so ändert die Fläche ihr Vorzeichen.

Für stetige Integranden $g$ gilt der Zwischenwertsatz, daß es einen Punkt $\xi$ zwischen $a$ und $b$ gibt, so daß

$$\int_a^b dx\, g(x) = (b-a)\, g(\xi)\ , \quad a < \xi < b\ . \tag{12.8}$$

Denn das Integral, geteilt durch $(b-a) > 0$, ist nicht größer als der Maximalwert von $g$ im Intervall und nicht kleiner als der Minimalwert, sondern hat einen Wert dazwischen. Diesen Wert nimmt die Funktion $g$, weil sie stetig ist, in einer Zwischenstelle $\xi$ an.

Insbesondere verschwindet das Integral über eine nichtnegative, stetige Funktion nur, wenn sie im Integrationsbereich verschwindet.

Mit dem Zwischenwertsatz zeigt sich, daß das Integral über einen stetigen Integranden $g$ als Funktion der oberen Grenze eine Stammfunktion von $g$ ist. Für Funktionsdifferenzen gilt

$$\int_a^{x+\epsilon} dy\, g(y) - \int_a^x dy\, g(y) = \int_x^{x+\epsilon} dy\, g(y) = \epsilon\, g(\bar{x})\ , \tag{12.9}$$

wobei $\bar{x}$ aus dem Intervall von $x$ bis $x+\epsilon$ ist. Teilen wir durch $\epsilon$, so erhalten wir als Grenzwert für $\epsilon$ gegen Null,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x dy\, g(y) = g(x)\ . \tag{12.10}$$

Als Funktion der oberen Grenze ist das Integral eine Stammfunktion des Integranden.

## Hauptsatz der Integralrechnung

Die Differenz $f(b)-f(a)$ jeder im Intervall von $a$ bis $b$ definierten Funktion läßt sich als Summe über die zu einer Zerlegung (12.1) gehörigen Funktionsdifferenzen schreiben,

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\ , \tag{12.11}$$

denn in $(f(b) - f(x_{n-1})) + (f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})) + \ldots + (f(x_2) - f(x_1)) + (f(x_1) - f(a))$ heben sich paarweise alle Terme bis auf die Randterme weg.

Nach dem Zwischenwertsatz (4.13) existieren bei stetig differenzierbaren Integranden für jede Zerlegung des Intervalls Zwischenstellen $\xi_i$, so daß

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, \frac{df}{dx}_{|\xi_i}\ . \tag{12.12}$$

Da der Grenzwert der rechten Seite das Integral über $df/dx$ ist, zeigt dies den Hauptsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b dx\, \frac{df}{dx} = f(b) - f(a) = f\Big|_a^b\ . \tag{12.13}$$

Das Integral über eine stetige Funktion $g = df/dx$ ist die Differenz der Werte der Stammfunktion $f$ an der oberen und unteren Integrationsgrenze.

Findet man also in Tabellen von Ableitungen [5, 11] die Funktion $g$ als Ableitung einer Stammfunktion $f$, $g = df/dx$, so ist das Integral über $g$ die Differenz der Stammfunktion $f$ an den Randpunkten. Durch Rückwärtslesen von Tabellen von Ableitungen kann man integrieren.

Nicht alle Integranden, die als algebraische Ausdrücke in elementaren Funktionen angegeben werden können, zum Beispiel die Gaußfunktion $e^{-x^2}$, haben Stammfunktionen, die man ebenso als algebraischen Ausdruck in elementaren Funktionen angeben kann. Es gibt keinen Algorithmus, der für jeden Integranden $g$ einen einfacheren Ausdruck als $f(x) = f(c) + \int_c^x dy\, g(y)$ für seine Stammfunktionen liefert.

Alle Integralsätze, die wir noch kennenlernen werden, sind vom Typ des Hauptsatzes der Integralrechnung. Das Integral über einen Bereich $M$ über einen Integranden, der eine geeignete Ableitung $d\omega$ ist, läßt sich als niedriger dimensionales Integral auswerten, über den Rand des Bereichs $\partial M$ (lies Rand von $M$) über den Integranden $\omega$,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \ . \tag{12.14}$$

Beim Hauptsatz der Integralrechnung (12.13) ist der Integrationsbereich das Intervall $[a, b]$ und der Rand besteht aus dem Anfangspunkt $a$ und dem Endpunkt $b$. Sie tragen, mit zunehmender Integrationsvariablen von $a$ nach $b$ durchlaufen, orientiert zum Integral bei: der Endpunkt $b$, an dem es aus $[a, b]$ herausgeht, mit dem Wert $f(b)$ der Stammfunktion, der Anfangspunkt $a$, bei dem es nach $[a, b]$ hineingeht, mit $-f(a)$.

Mit dem Hauptsatz der Integralrechnung integrieren wir beispielsweise Potenzen,

$$\int_0^x dy\, y^n = \frac{1}{n+1}\, y^{n+1}\Big|_0^x = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} \ . \tag{12.15}$$

Die Ableitung einer Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^\infty 1/n!\, f_n\, x^n$ in ihrem Konvergenzradius ist $f'(x) = \sum_{n=0}^\infty 1/n!\, f_{n+1}\, x^n$. Folglich ist $F(x) = \sum_{n=1}^\infty 1/n!\, f_{n-1}\, x^n$ die Stammfunktion, die bei $x = 0$ verschwindet,

$$\int_0^x dy\, \Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\, f_n\, y^n\Big) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}\, f_{n-1}\, x^n \ . \tag{12.16}$$

## Integral über komplexe Funktionen

Das Integral über eine komplexe Funktion $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ einer *rellen* Variablen $x$ ist wie das Integral von reellen Funktionen als Grenzwert von Riemannsummen definiert und einfach die komplexe Linearkombination reeller Integrale

$$\int_a^b dx\, \big(u(x) + i\,v(x)\big) = \Big(\int_a^b dx\, u(x)\Big) + i\,\Big(\int_a^b dx\, v(x)\Big) \ . \tag{12.17}$$

Wegen $\frac{d}{dx}(u(x) + i\,v(x)) = \frac{d}{dx}\,u(x) + i\,\frac{d}{dx}\,v(x)$ gilt der Hauptsatz der Integralrechnung auch für komplexe Funktionen. Beispielsweise folgt daher für $k \neq 0$ aus $\frac{d}{dx}\frac{e^{ikx}}{ik} = e^{ikx}$

$$\int_a^b dx\, e^{ikx} = \frac{1}{ik} e^{ikx}\Big|_a^b = \frac{1}{ik}(e^{ikb} - e^{ika}) \ . \tag{12.18}$$

Polynome von Sinus und Cosinus kann man leicht integrieren, wenn man sie als Linearkombination von komplexen e-Funktionen schreibt (4.48), denn durch Ausmultiplizieren der e-Funktionen im Polynom entsteht eine Linearkombination von Funktionen $e^{ikx}$, beispielsweise

$$\begin{aligned}\int_0^a dx\, \cos^2 x &= \int_0^a dx\, \frac{1}{4}\big(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(\frac{1}{2i} e^{2ix} + 2x + \frac{1}{-2i} e^{-2ix}\big)\Big|_0^a \overset{(4.35)}{=} \frac{1}{4}\sin 2a + \frac{1}{2}\,a \ .\end{aligned} \tag{12.19}$$

## Partielle Integration

Aus dem Hauptsatz und der Produktregel von Ableitungen ergibt sich, daß man unter dem Integral bei einem Produkt einer Funktion $u$ mit einer Funktion $w$, deren Stammfunktion man kennt, $w = dv/dx$, die Ableitung von $v$ auf $u$ abwälzen kann,

$$\int_a^b dx\, u\, \frac{dv}{dx} = \int_a^b dx\, \big(\frac{d}{dx}(u\,v) - \frac{du}{dx}\,v\big) = (u\,v)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, \frac{du}{dx}\,v \ . \tag{12.20}$$

Das Abwälzen der Ableitung heißt partielles Integrieren.

Das Integral über das Produkt beliebig oft differenzierbarer Funktionen $u$ und $v$ kann man als Wert der linearen Abbildung $L_u$ verstehen, die jeden Vektor $v$ aus dem Vektorraum dieser Funktionen auf $L_u[v] = \int_a^b dx\, u(x)\, v(x)$ abbildet. Die Ableitung $\partial = d/dx$ ist eine lineare Abbildung dieses Vektorraumes auf sich. Das Transponierte dieser Abbildung ist durch Abwälzen definiert (3.51). So verstanden ist $-\partial$ im Vektorraum der im Intervall $[a, b]$ unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die mit ihren Ableitungen in $a$ und $b$ verschwinden, das Transponierte der Ableitung, $\partial^T = -\partial$.

Partiell integrieren kann man beispielsweise Polynome von $x$ mal $e^{ix} = \frac{d}{dx}\frac{e^{ix}}{i}$,

$$\int_0^y dx\, x\, e^{ix} = \int_0^y dx\, \big(\frac{d}{dx}(\frac{x\, e^{ix}}{i}) - \frac{1}{i}\, e^{ix}\big) = (-i\,x\, e^{ix} + e^{ix})\Big|_0^y = -i\,y\, e^{iy} + e^{iy} - 1 \ . \tag{12.21}$$

Ebenso zeigt man mit partieller Integration, daß die Gamma-Funktion

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty dt\, t^{s-1}\, e^{-t} \tag{12.22}$$

die Fakultät interpoliert, $\Gamma(n+1) = n!$. Denn es gilt $\Gamma(1) = 1$ und für $s > 0$

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty dt\, t^s\, \frac{d}{dt}(-e^{-t}) = \int_0^\infty dt\, \big(\frac{d}{dt}(-t^s\, e^{-t}) + s\, t^{s-1}\, e^{-t}\big) = s\,\Gamma(s) \ . \tag{12.23}$$

## Taylorreihe

Mit partieller Integration zeigt man, daß Funktionen $f$, die im Intervall $[0, x]$ $n+1$-fach stetig differenzierbar sind, dort durch ihre Taylorreihe und ein Restglied $R_n$ dargestellt werden. Wir schreiben $f^{(k)}{}_{|_y}$ für die $k$-fache Ableitung $(d/dx)^k f$ bei $y$ und behaupten

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}{}_{|_0}\, x^k + R_n(x) \ , \quad R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x dy\, f^{(n+1)}{}_{|_y}\, (x-y)^n \ . \tag{12.24}$$

Für $n = 0$ ist die Behauptung $f(x) = f(0) + R_0$ mit $R_0 = \int_0^x dy \frac{df}{dy}$ der Hauptsatz der Integralrechnung. Zudem gilt der Satz für $n+1$, wenn er für $n$ richtig ist, denn bei partieller Integration erweist sich das Restglied $R_n$ als $1/(n+1)!\, f^{(n+1)}{}_{|_0}\, x^{n+1} + R_{n+1}$,

$$\begin{aligned}
(n+1)!\, R_n &= \int_0^x dy\, f^{(n+1)}{}_{|_y}\, (n+1)\, (x-y)^n \\
&= \int_0^x dy\, \Big(-\frac{d}{dy}\big(f^{(n+1)}{}_{|_y}\, (x-y)^{n+1}\big) + f^{(n+2)}{}_{|_y}\, (x-y)^{n+1}\Big) \\
&= -\big(f^{(n+1)}{}_{|_y}\, (x-y)^{n+1}\big)\Big|_{y=0}^{y=x} + (n+1)!\, R_{n+1} \\
&= f^{(n+1)}{}_{|_0}\, x^{n+1} + (n+1)!\, R_{n+1} \ .
\end{aligned} \tag{12.25}$$

Der Restterm ist ein Integral über einen Integranden $g(y)\, h(y)$, mit $g = f^{(n+1)}$ und $h(y) = (x-y)^n$, wobei $h$ im Integrationsbereich nicht negativ ist. Ersetzen wir in jeder Riemannsumme den Faktor $g(\xi_i)$ durch den Minimalwert $g_{\min}$ oder den Maximalwert $g_{\max}$ von $g$ im Integrationsbereich, so erhalten wir eine untere und eine obere Schranke für solch ein Integral

$$h \geq 0 \ , \ a \leq b \ : \qquad g_{\min} \int_a^b dy\, h(y) \leq \int_a^b dy\, g(y)\, h(y) \leq g_{\max} \int_a^b dy\, h(y) \ . \tag{12.26}$$

Ist $g$ eine stetige Funktion, so gibt es eine Zwischenstelle $\xi$ zwischen $a$ und $b$ mit

$$h \geq 0 : \qquad g(\xi) \int_a^b dy\, h(y) = \int_a^b dy\, g(y)\, h(y) \ . \tag{12.27}$$

Für den Restterm besagt dies, daß es eine Stelle $\xi$ zwischen 0 und $x$ gibt, so daß

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}{}_{|_\xi} \int_0^x dy\, (x-y)^n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}{}_{|_\xi} x^{n+1} \ , \tag{12.28}$$

aber auch wenn die $n+1$-te Ableitung unstetig ist, kann $(n+1)! |R_n| \leq |x|^{n+1} \max |f^{(n+1)}|$ eine hilfreiche Abschätzung des Restterms sein.

Von der Beschränkung der Taylorreihe auf den speziellen Entwicklungspunkt $x = 0$ und auf Funktionen von nur einer Variablen befreit man sich, indem man Funktionen $f$ einer Umgebung des Punktes $y = (y^1, y^2 \dots y^d)$ auf der Verbindungsstrecke

$$\Gamma : \lambda \to z(\lambda) = y + \lambda\, (x-y) \tag{12.29}$$

von $z(0) = y$ zum Punkt $z(1) = x = (x^1, x^2 \dots x^d)$ betrachtet. Die Taylorreihe der zusammengesetzten Funktion $g(\lambda) = f(z(\lambda))$

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, {g^{(k)}}_{|0}\, \lambda^k + R_n(\lambda)\ , \quad g(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, {g^{(k)}}_{|0} + R_n(1) \tag{12.30}$$

hat für $\lambda = 1$ den Wert $g(1) = f(x)$. Die Ableitung der verketteten Funktion $f(z(\lambda))$ ist

$$g^{(1)} = \frac{dg}{d\lambda} = \frac{dz^i}{d\lambda}\, \partial_i f_{|z(\lambda)}\ , \quad \text{mit} \quad \frac{dz^i}{d\lambda} = x^i - y^i\ ,\ i \in \{1, 2 \dots d\}\ . \tag{12.31}$$

Leiten wir wiederholt ab, so folgt, weil $dz^i/d\lambda$ nicht von $\lambda$ abhängt,

$$ {g^{(k)}}_{|0} = \frac{d^k g}{d\lambda^k}_{|\lambda=0} = (x^{i_1} - y^{i_1})\,(x^{i_2} - y^{i_2}) \cdots (x^{i_k} - y^{i_k})\, \partial_{i_1}\partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} f_{|y}\ . \tag{12.32}$$

Setzen wir in (12.30) für $\lambda = 1$ ein, so erhalten wir die Taylorreihe der Funktion $f$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, (x^{i_1} - y^{i_1})\,(x^{i_2} - y^{i_2}) \cdots (x^{i_k} - y^{i_k})\, \partial_{i_1}\partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} f_{|y} + R_n \\ &= f(y) + (x^i - y^i)\, \partial_i f_{|y} + \frac{1}{2}(x^i - y^i)\,(x^j - y^j)\, \partial_i \partial_j f_{|y} + \ldots + R_n \end{aligned} \tag{12.33}$$

wobei der Restterm $R_n$ (12.28) von der Form des nächsten Terms ist mit partiellen Ableitungen an einer Stelle $z$ auf der Verbindungsstrecke zwischen $y$ und $x$,

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\, (x^{i_1} - y^{i_1}) \cdots (x^{i_{n+1}} - y^{i_{n+1}})\, \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{n+1}} f_{|z}\ . \tag{12.34}$$

Wenn $f$ nur von einer Variablen abhängt, $d = 1$, vereinfachen die Vielfachsummen der Taylorreihe zu[1]

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, (x-y)^k\, \frac{d^k f}{dx^k}_{|y} + \frac{1}{(n+1)!}\, (x-y)^{n+1}\, \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}_{|z} \\ &= f(y) + (x-y)\, \frac{df}{dx}_{|y} + \frac{1}{2}(x-y)^2\, \frac{d^2 f}{dx^2}_{|y} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\, (x-y)^{n+1}\, \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}_{|z}\ . \end{aligned} \tag{12.35}$$

Als Näherung der Funktion $f$ wird oft das Restglied $R_n$ vernachlässigt.

Daß dies selbst für $n \to \infty$ bei einer überall beliebig oft differenzierbaren Funktion falsch sein kann, obwohl die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, (x-y)^k\, \frac{d^k f}{dx^k}_{|y} \tag{12.36}$$

konvergiert, zeigt die Entwicklung der Funktion $f(x) = \exp(-1/x^2)$ um $y = 0$. Ihre Ableitungen sind Polynome in $1/x$ mal $\exp(-1/x^2)$ und verschwinden stetig für $x$ gegen Null. Demnach verschwindet, anders als die Funktion $f$, ihre Taylorreihe um $y = 0$, und in jeder Ordnung $n$ ist diese Funktion das Restglied.

[1] Aus dem Zusammenhang sollte klar sein, ob die Indizes Komponenten oder Potenzen bezeichnen.

## Substitution der Integrationsvariablen

Der Kettenregel der Differentation entspricht der Integralsubstitutionssatz.

Sei $y : x \to y(x)$ eine im Intervall $M = \{x : a \leq x \leq b\}$ streng monoton wachsende Funktion, und sei $f : y \to f(y)$ eine reelle Funktion auf dem Intervall von $y(a)$ bis $y(b)$. Dann definiert eine Zerlegung $x_i$ des Intervalls $M$ eine Zerlegung $y_i = y(x_i)$ von $y(M)$. Die Bilder $y(\xi_i) = \eta_i$ von Zwischenstellen $\xi_i$ sind Zwischenstellen von $y(M)$. Nach dem Satz von Rolle können wir in der Riemannsumme

$$\sum_i (x_i - x_{i-1}) \frac{dy}{dx}_{|\xi_i} f(y(\xi_i)) \tag{12.37}$$

die Zwischenstellen $\xi_i$ so wählen, daß

$$(x_i - x_{i-1}) \frac{dy}{dx}_{|\xi_i} = y(x_i) - y(x_{i-1}) = y_i - y_{i-1} \tag{12.38}$$

gilt. Dann ist die Riemannsumme des Integrals $\int_a^b dx \frac{dy}{dx} f(y(x))$

$$\sum_i (x_i - x_{i-1}) \frac{dy}{dx}_{|\xi_i} f(y(\xi_i)) = \sum_i (y_i - y_{i-1}) f(\eta_i) \tag{12.39}$$

eine Riemannsumme von $\int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y)$. Daher ist das Integral über $M$ über die verkettete Funktion $f \circ y$ mal der Ableitung $dy/dx$ gleich dem Integral über den Bildbereich $y(M)$ über die Funktion $f$

$$\int_a^b dx \frac{dy}{dx} f(y(x)) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y)\ . \tag{12.40}$$

Ist $y(x)$ monoton fallend, so bildet $y$ das Intervall $[a, b]$ auf das entgegengesetzt orientierte Intervall $[y(a), y(b)]$ ab und (12.40) gilt unverändert.

Im Formelbild des Integralsubsitutionssatzes kürzt sich $dx$ und das orientierte Integrationsintervall $[a, b]$ ist durch sein orientiertes Bild $[y(a), y(b)]$ ersetzt.

So wie die Funktion $f$ des Bereiches $y(M)$ durch die Funktion $y$ zu einer Funktion $f(y(x))$ des Urbildes $M$ verkettet wird, so wird das Integral über $y(M)$ nach dem Integralsubstitutionssatz zu einem Integral über das Urbild $M$.

Beispielsweise bildet $y : \varphi \to r \sin\varphi$ den Winkelbereich von 0 bis $\pi/2$ monoton wachsend auf das Intervall von 0 bis $r$ ab und hat die Ableitung $dy/d\varphi = r\cos\varphi$. Damit berechnen wir die Kreisfläche als Vierfaches des Kreisviertels

$$4\int_0^r dy\, \sqrt{r^2 - y^2} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \frac{d\,(r \sin\varphi)}{d\varphi} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2\varphi} = 4\, r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \cos^2\varphi \overset{(12.19)}{=} \pi\, r^2\ . \tag{12.41}$$

## Weglänge

Im $d$-dimensionalen Euklidischen Raum wird die Länge von stetig differenzierbaren Kur-

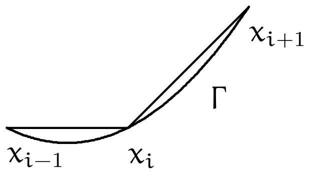



Abbildung 12.2: Weglänge

von $\Gamma : \lambda \to x(\lambda) = (x^1(\lambda), x^2(\lambda) \dots x^d(\lambda))$ zwischen $x(a)$ und $x(b)$ durch die Länge des Streckenzuges von $x_0 = x(a)$ über $x_i = x(\lambda_i)$, $i = 1, 2 \dots n-1$, nach $x_n = x(b)$ genähert, wobei $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist. Sind die Koordinaten $x$ kartesische Koordinaten eines Euklidischen Raums, so ist die Länge der Strecke von $x_{i-1}$ nach $x_i$ nach Pythagoras $\sqrt{\sum_k (x_i^k - x_{i-1}^k)^2}$.

Nach dem Satz von Rolle ist $x_i^k - x_{i-1}^k = (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \frac{dx^k}{d\lambda}_{|\xi_k}$. Der Fehler, $x_i^k - x_{i-1}^k$ in der Summe der Streckenlängen für alle $k$ jeweils durch $(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \frac{dx^k}{d\lambda}_{|\xi}$ an einer gemeinsamen Zwischenstelle zu ersetzen, geht für feiner werdende Zerlegungen gegen Null, weil $\sqrt{\sum_k (dx^k/d\lambda_{|\xi_k})^2}$ in den Argumenten $\xi_k$ gleichmäßig stetig ist. Bis auf diesen kleinen Fehler ist die Länge des Streckenzuges

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \sqrt{\sum_k (\frac{dx^k}{d\lambda}_{|\xi_i})^2} \ . \tag{12.42}$$

Dies ist eine Riemannsumme des Integrals über die Länge des Tangentialvektors

$$l(a, b; \Gamma) = \int_a^b d\lambda \sqrt{\frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}} \ . \tag{12.43}$$

Es definiert für $a < b$ die Weglänge der Kurve $\Gamma$ von $x(a)$ bis $x(b)$.

Die Weglänge ist definitionsgemäß nicht negativ. Die Weglänge eines rückwärts durchlaufenen Weges kompensiert nicht die Länge des Hinweges, so wenig wie die Abnutzung von Schuhsohlen auf dem Rückweg rückgängig gemacht wird.

Beispielsweise ist die Länge des Kreisbogens $\Gamma : \lambda \to r\,(\cos\lambda, \sin\lambda)$, $0 \le \lambda \le \phi$, das Integral über über den Öffnungswinkel $\phi$ über die Länge des Tangentialvektors

$$\int_0^\phi d\lambda \sqrt{(\frac{dx}{d\lambda})^2 + (\frac{dy}{d\lambda})^2} = \int_0^\phi d\lambda \sqrt{r^2 \sin^2\lambda + r^2\cos^2\lambda} = \int_0^\phi d\lambda\, r = r\,\lambda\Big|_0^\phi = r\,\phi \ . \tag{12.44}$$

Auch bei der Berechnung der Länge der Zykloide (10.81) eines Rades mit Einheitsdurchmesser ist nicht die Integration, sondern die Berechnung des Integranden, die Hauptarbeit. Der Tangentialvektor $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ hat das Längenquadrat

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \ , \quad \vec{u}^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi) = \sin^2\frac{\varphi}{2} \ . \tag{12.45}$$

Folglich legt ein Randpunkt dieses rollenden Rades bei einer halben Umdrehung zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ die Länge

$$l = \int_0^\pi d\varphi\, \sin\frac{\varphi}{2} = -2\cos\frac{\varphi}{2}\,\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 2 \tag{12.46}$$

zurück, während die Achse die Weglänge $\pi r = \pi/2$ durchläuft.

Die Weglänge ist unabhängig von der Parametrisierung. Denn ist dieselbe Kurve durch $y(s) = x(\lambda(s))$, $s \in [\underline{s}, \overline{s}]$, $\lambda(s) \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$, parametrisiert, wobei $\lambda$ monoton mit $s$ wächst, $\frac{d\lambda}{ds} > 0$, dann ist ihre Länge wegen $\frac{dy^k}{ds} = \frac{d\lambda}{ds}\frac{dx^k}{d\lambda}$ nach dem Integralsubstitutionssatz (12.40) der Länge der mit $\lambda$ parametrisierten Kurve $x(\lambda)$ gleich,

$$\int_{\underline{s}}^{\overline{s}} ds \sqrt{\frac{dy^k}{ds}\frac{dy^k}{ds}} = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} ds \,\frac{d\lambda}{ds} \sqrt{\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}} = \int_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} d\lambda \sqrt{\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}} \;. \tag{12.47}$$

## Wegintegral

Gemäß der Newtonschen Bewegungsgleichung verändert die Kraft $F$ die kinetische Energie,

$$d_t E_{\text{kin}} = d_t\big(\frac{1}{2}\, m\, v^k v^k\big) = m\, v^k\, b^k = v^k\, F_k(x) \;. \tag{12.48}$$

Setzen wir die Prolongation der durchlaufenen Bahn $x(t) = (x^1(t), x^2(t)\dots)$ ein und integrieren wir über die Zeit, so ergibt sich nach dem Hauptsatz der Integralrechnung

$$E_{\text{kin}}(\overline{t}) - E_{\text{kin}}(\underline{t}) = \int_{\underline{t}}^{\overline{t}} dt\, \frac{dx^k}{dt}\, F_k(x(t)) \;. \tag{12.49}$$

Das Integral auf der rechten Seite nennt man die von der Kraft $F$ am Teilchen längs des Weges verrichtete Arbeit. Die Arbeit hängt nicht von der Parametrisierung des Weges ab, sondern nur von den Bahnpunkten und nicht davon, wie die Bahnpunkte mit der Zeit durchlaufen werden. Denn sei die Kurve durch $y^i(\lambda) = x^i(t(\lambda))$ parametrisiert mit $t(\underline{\lambda}) = \underline{t}$ und $t(\overline{\lambda}) = \overline{t}$, dann ist nach der Kettenregel und dem Integralsubstitutionssatz (12.40)

$$\int_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} d\lambda\, \frac{dy^k}{d\lambda}\, F_k(y(\lambda))) = \int_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} d\lambda\, \frac{dt}{d\lambda}\frac{dx^k}{dt}\, F_k(x(t(\lambda))) = \int_{\underline{t}}^{\overline{t}} dt\, \frac{dx^k}{dt}\, F_k(x(t)) \;. \tag{12.50}$$

Da das Integral nur vom Weg, nicht von seiner Parametrisierung abhängt, heißt es Wegintegral

$$\int_\Gamma dx^k\, F_k(x) := \int_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} d\lambda\, \frac{dx^k}{d\lambda}\, F_k(x(\lambda)) \;. \tag{12.51}$$

Der Integrand $dx^k F_k$ heißt auch Differentialform oder 1-Form.

Auf dem Rückweg wird die negative Arbeit des Hinweges verrichtet.

Falls die Kraft $F$ der negative Gradient eines Potentials $V(x)$ ist, $F_i = -\partial_i V$, ist die Arbeit, die von ihr längs eines Weges verrichtet wird, gleich der Potentialdifferenz von Anfangspunkt $\underline{x} = x(\underline{\lambda})$ und Endpunkt $\overline{x} = x(\overline{\lambda})$ des Weges und hängt nicht davon ab, welcher Weg dazwischen durchlaufen wird,

$$\int_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} d\lambda\, \frac{dx^i}{d\lambda}\, \partial_i V(x(\lambda)) = \int_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} d\lambda\, \frac{dV}{d\lambda} = V(x(\lambda))\big|_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} = V(\overline{x}) - V(\underline{x}) \;. \tag{12.52}$$

Insbesondere verrichten Potentialkräfte längs geschlossener Wege, $\underline{x} = \overline{x}$, keine Arbeit.

## Höherdimensionales Integral, Mehrfachintegration

Wenn sich ein Gebirge um die Höhe $z = h(x, y)$ in einem Bereich $B$ aus der Ebene erhebt, dann bestimmt man sein Volumen als Grenzwert von Summen der Volumina von Quadern, die man erhält, wenn man den Bereich feiner und feiner in Rechtecke zerlegt und die Größe jedes Rechtecks mit der Höhe an einem Zwischenpunkt im Rechteck multipliziert.

Genauer denken wir uns $B$ von einem genügend großen Rechteck

$$\hat{B} = \{(x, y) : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\, , \ \underline{y} \leq y \leq \overline{y}\} \tag{12.53}$$

überdeckt, setzen die Höhe $h(x, y)$ in $\hat{B}$ außerhalb von $B$ durch $h = 0$ fort, zerlegen die $x$- und $y$-Intervalle in $\underline{x} = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = \overline{x}$ und $\underline{y} = y_0 < y_1 < y_2 \ldots < y_m = \overline{y}$ und zerlegen $\hat{B}$ in nicht überlappende Rechtecke

$$B_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\, , \ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}\ . \tag{12.54}$$

Wenn es eine Zahl $V(B, h)$ gibt und wenn für jeden vorgegebenen Fehler $\epsilon > 0$ eine Zerlegung von $\hat{B}$ in Rechtecke $B_{ij}$ existiert, so daß für jede feinere Zerlegung und jede Wahl von Zwischenstellen $\xi_{ij} \in B_{ij}$ die Summe der Volumina der Quader um weniger als $\epsilon$ von $V(B, h)$ abweicht, dann heißt $h$ Riemannintegrabel im Bereich $B$ , und $V(B, h)$ ist das Volumen, das sich über $B$ erhebt

$$|V(B, f) - \sum_{i,j} (x_i - x_{i-1})\, (y_j - y_{j-1})\, h(\xi_{ij})| < \epsilon\ . \tag{12.55}$$

Den Grenzwert der Doppelsumme schreiben wir als

$$\int_B d^2 z\, h(z) \tag{12.56}$$

wobei $z$ als Kurzschrift für $(x, y)$ steht. Wie beim eindimensionalen Integral ist der Name der Integrationsvariablen unwesentlich, das Integral hängt vom Bereich $B$ und dem Integranden $h$ ab, nicht aber von der Integrationsvariablen. Am Symbol $d^2$ lesen wir ab, daß es sich um den Grenzwert einer Doppelsumme handelt über Produkte der zwei Faktoren $(x_i - x_{i-1})$ und $(y_j - y_{j-1})$ mit $h(z)$ .

Wenn wir die Zwischenstellen $\xi_{ij} = (a_i, b_j)$ als Paare von Zwischenstellen der Zerlegung des $x$-Intervalls und der Zerlegung des $y$-Intervalls wählen, dann enthält die Doppelsumme Riemannsummen, die bei genügend feiner Zerlegung kaum von eindimensionalen Integralen abweicht,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} (x_i - x_{i-1})\, (y_j - y_{j-1}) h(a_i, b_j) = \\
&= \sum_i (x_i - x_{i-1}) \Big(\sum_j (y_j - y_{j-1})\, h(a_i, b_j)\Big) \approx \sum_i (x_i - x_{i-1}) \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} dy\, h(a_i, y) \qquad (12.57)\\
&= \sum_j (y_j - y_{j-1}) \Big(\sum_i (x_i - x_{i-1})\, h(a_i, b_j)\Big) \approx \sum_j (y_j - y_{j-1}) \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} dx\, h(x, b_j)\ .
\end{aligned}$$

Auch die jeweils verbleibende Summe ist eine Riemannsumme, denn die $a_i$ sind Zwischenstellen der Zerlegung des $x$-Intervalls. und die $b_j$ sind Zwischenstellen der Zerlegung des $y$-Intervalls. Für die Grenzwerte feiner werdender Zerlegungen gilt daher (falls das Integral über den positiven Teil $h_+$ und den negativen Teil $h_-$ von $h$ existiert), der Satz von Fubini

$$\int_B d^2z\, h(z) = \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} dx \int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} dy\, h(x,y) = \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} dy \int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} dx\, h(x,y)\ . \tag{12.58}$$

Es kann so das mehrdimensionale Integral durch wiederholte eindimensionale Integration ausgewertet werden, wobei die Reihenfolge der eindimensionalen Integrationen unerheblich ist. Dabei bezeichnen $\underline{y}(x)$ und $\overline{y}(x)$ für jedes $x \in [\underline{x}, \overline{x}]$ die unteren und oberen $y$-Grenzen des Integrationsgebietes $B$ (unterstellt, daß es für jedes $x$ nur zwei solche Randpunkte gibt). Entsprechend bezeichnen $\underline{x}(y)$ und $\overline{x}(y)$ für jedes $y \in [\underline{y}, \overline{y}]$ die unteren und oberen $x$-Grenzen des Integrationsgebietes $B$.

Beispielsweise ist das Volumen einer Kugel mit Radius $r$ das Doppelte des Volumens einer Halbkugel

$$\begin{aligned} 2\int_{\text{Kreis}} d^2(x,y)\, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} &= 4\int_0^r dx \int_{-a}^{a} dy\, \sqrt{a^2 - y^2}_{|_{a=\sqrt{r^2-x^2}}} \\ &\overset{(12.41)}{=} 4\int_0^r dx\, \frac{\pi}{2}\,(r^2 - x^2) = 2\,\pi\,(r^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3)\Big|_{x=0}^{x=r} = 2\,\pi\,r^3\,(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\ . \end{aligned} \tag{12.59}$$

Ebenso sind höherdimensionale Integrale definiert und können durch wiederholte, eindimensionale Integration ausgewertet werden. Zum Beispiel ergibt sich die in einem Volumen $V$ enthaltene Masse $M_V$ aus dem dreidimensionalen Integral über die Massendichte $\rho(x^1, x^2, x^3)$ ,

$$M_V = \int_V d^3x\, \rho(x)\ . \tag{12.60}$$

Solch ein Integral ist als Integral über einen einhüllenden Quader $\hat{B}$ definiert,

$$\hat{B} = \{(x^1, x^2, x^3) : \underline{x}^1 \le x^1 \le \overline{x}^1\ ,\ \underline{x}^2 \le x^2 \le \overline{x}^2\ ,\ \underline{x}^3 \le x^3 \le \overline{x}^3\} \tag{12.61}$$

der $V$ enthält, $V \subset \hat{B}$, und in dem $\rho$ außerhalb von $V$ durch Null fortgesetzt ist. Das Integral über $\hat{B}$ ist der Grenzwert von Riemannsummen über feinere Zerlegungen des einhüllenden Quaders in Quader

$$B_{ijk} = \{(x^1, x^2, x^3) : x^1_{i-1} \le x^1 \le x^1_i\ ,\ x^2_{j-1} \le x^2 \le x^2_j\ ,\ x^3_{k-1} \le x^3 \le x^3_k\}\ , \tag{12.62}$$

wobei die $x^a_j$, $a = 1, 2, 3$ , Zerlegungen der Kanten von $\hat{B}$ sind,

$$\underline{x}^a = x^a_0 < x^a_1 < \ldots < x^a_{n(a)} = \overline{x}^a\ . \tag{12.63}$$

$$\int_V d^3x\, \rho(x) = \lim \sum_{ijk} (x^1_i - x^1_{i-1})\,(x^2_j - x^2_{j-1})\,(x^3_k - x^3_{k-1})\,\rho(\xi_{ijk})\ . \tag{12.64}$$

Dabei ist $\xi_{ijk}$ irgend eine Zwischenstelle aus $B_{ijk}$. Wie Mathematiker zeigen, existiert das Integral genau dann, wenn die außerhalb $V$ durch Null fortgesetzte Massendichte $\rho$ nur in einer Menge vom Maß Null[2] unstetig ist.

Offensichtlich erhält man eine untere oder obere Schranke für die Riemannsumme, wenn man jedes nichtverschwindende $\rho(\xi_{ijk})$ durch den Minimalwert oder Maximalwert von $\rho$ im Volumen $V$ ersetzt,

$$\rho_{\min} \int_V \mathrm{d}^3x \leq \int_V \mathrm{d}^3x\, \rho(x) \leq \rho_{\max} \int_V \mathrm{d}^3x \ . \tag{12.65}$$

Die mittlere Massendichte $\int_V \mathrm{d}^3x\, \rho(x) \,/\, \int_V \mathrm{d}^3x$ liegt also selbstverständlich zwischen der minimalen und der maximalen. Ist die Dichte $\rho$ stetig, so nimmt sie an einer Zwischenstelle $\hat{x} \in V$ diesen mittleren Wert an. Diese Bemerkung ist der Zwischenwertsatz der Integralrechnung,

$$\int_V \mathrm{d}^3x\, \rho(x) = \rho(\hat{x}) \int_V \mathrm{d}^3x \ . \tag{12.66}$$

Die Masse in einem kleinen Volumen, innerhalb dessen die Dichte $\rho$ nicht wesentlich schwankt, ist die Dichte an einem Ort $x$ im kleinen Volumen mal der Größe des Volumens, die wir mit $\mathrm{d}^3x$ bezeichnen, $M(x, \mathrm{d}^3x) \approx \rho(x)\, \mathrm{d}^3x$. Für $\epsilon$-Umgebungen von $x$ rückwärts gelesen, ist dies die Definition der Massendichte

$$\rho(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathrm{Masse}(U_{x,\epsilon})}{\mathrm{Volumen}(U_{x,\epsilon})} \ , \quad U_{x,\epsilon} = \{y : |(x-y)| < \epsilon\} \ . \tag{12.67}$$

## Vektorwertige Integrale

Allgemeiner kann man vektorwertige Funktionen $f : B \to \mathcal{V}$ eines Bereiches $B \subset \mathbb{R}^m$ in einen Vektorraum $\mathcal{V}$ mit einer Norm integrieren, denn die Definition des Integrals erfordert nur, daß man in Riemannsummen den Integranden addieren und mit Zahlen multiplizieren kann und mit einer Norm die Konvergenz bewerten kann.

So ist beispielsweise der Schwerpunkt für $n$ Teilchen an Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_n$ durch

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \ , \quad M = \sum_\alpha m_\alpha \tag{12.68}$$

definiert. Bei einer kontinuierlichen Massenverteilung mit Massendichte $\rho$ sind Schwerpunkt und Gesamtmasse

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \mathrm{d}^3x\, \rho(x)\, \vec{x} \ , \quad M = \int \mathrm{d}^3x\, \rho(x) \ . \tag{12.69}$$

Ebenso ist das Gesamtdrehmoment (10.37), das von einer kontinuierlichen Kraftdichte $\vec{f}(x)$ ausgeübt wird, das Integral

$$\vec{M} = \int \mathrm{d}^3x\, \vec{x} \times \vec{f}(x) \ . \tag{12.70}$$

[2]Eine Untermenge $V$ von $\mathbb{R}^n$ hat Maß Null, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Vereinigungsmenge von abzählbar vielen $n$-dimensionalen Quadern mit Gesamtvolumen kleiner $\epsilon$ gibt, die $V$ überdeckt.

Dabei ist die Kraftdichte $\vec{f}$ entsprechend zur Massendichte als Grenzwert der Kraft definiert, die auf ein kleines Volumen ausgeübt wird, geteilt durch die Größe des Volumens.

Wenn am $n$-dimensionalen Integral $\int d^n x\, f(x)$ der Integrationsbereich nicht angegeben ist und aus dem Zusammenhang nichts anderes zu entnehmen ist, so ist der Integrationsbereich $\mathbb{R}^n$ gemeint. Natürlich muß der Integrand genügend gutartig sein, damit der Grenzwert der Integrale über größer werdende, beschränkte Bereiche existiert.

## Integralsubstitutionssatz

Die Kreisscheibe ist in Polarkoordinaten $(r, \varphi)$ der Bereich $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le R$. Sie in kartesischen Koordinaten $(x, y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$ anzugeben, ist schwieriger, weil bei festgehaltenem $x$, $-R \le x \le R$ der $y$-Bereich $-\sqrt{R^2 - x^2} \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$ von $x$ abhängt. Deshalb ist es oft einfacher, über andere als kartesische Koordinaten zu integrieren.

Wechseln wir beim eindimensionalen Integral die Integrationsvariable $y$, indem wir sie als Funktion $y(x)$ auffassen und über $x$ integrieren, so ist im Integranden $dy$ durch die lineare Näherung $dy = dx\,\frac{dy}{dx}$ zu ersetzen. Denn für die Intervallgrößen in Riemannsummen gilt $y_i - y_{i-1} = (x_i - x_{i-1})\frac{dy}{dx}_{|\xi}$ (12.38) mit der Folge (12.40)

$$\int_a^b dx\,\frac{dy}{dx}\,f(y(x)) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y)\ . \tag{12.71}$$

Dies gilt auch, falls $y(x)$ monoton fällt und das Bild $y(a)$ der unteren Grenze größer als das Bild $y(b)$ der oberen Grenze ist. Im Integralsubstitutionssatz steht der Betrag $|\frac{dy}{dx}|$, falls die beteiligten Integrale beide von der kleineren zur größeren Grenze integriert werden.

Für ein $n$-dimensionales Integral über einen $y$-Bereich, der das Bild einer invertierbaren Abbildung $x = (x^1 \dots x^n) \mapsto y(x) = (y^1(x) \dots y^n(x))$ eines Bereiches $U$ ist, lautet der entsprechende Integralsubstitutionssatz

$$\int_U d^n x\, \det \frac{\partial y}{\partial x}_{|x} f(y(x)) = \int_{y(U)} d^n y\, f(y)\ . \tag{12.72}$$

Dabei bezeichnet $\frac{\partial y}{\partial x}$ die Jacobimatrix der partiellen Ableitungen mit Matrixelementen $J^i{}_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$. Ihre Determinante darf im Integrationsgebiet $U$ nicht verschwinden. Der Integrationsbereich $U$ ist so orientiert wie $y(U)$, falls $\det \frac{\partial y}{\partial x} > 0$. Anderenfalls ist $y(U)$ entgegengesetzt orientiert.

Leider ist unter nichtlinearen Transformationen nicht wahr, daß das Bild von Quadern mit Kanten in Koordinatenrichtung, wie wir sie in den Zerlegungen benutzt haben, wieder solche Quader sind.

Um den Substitutionssatz zu beweisen, verwendet man Zerlegungen des Integrationsbereiches in Simplexe. Ein $n$-Spat $Q$ mit einem Eckpunkt $z$ und Kantenvektoren $u_i$ ist die Punktmenge

$$\{x:\ x = z + \sum_{i=1}^n u_i \lambda^i\ ,\quad 0 \le \lambda^i \le 1\}\ . \tag{12.73}$$

Sie ist die Vereinigung der Punktmengen von Simplexen mit einer gemeinsamen Ecke $z$

$$\{x:\ x = z + \sum_{i=1}^{n} u_i\,\lambda^i\ ,\ 0 \le \lambda^{\pi(1)} \le \ldots \le \lambda^{\pi(n)} \le 1\}\ , \tag{12.74}$$

wobei $\pi$ eine Permutation der natürlichen Zahlen bis $n$ ist. Denn für jeden Punkt des Spats existiert eine Permutation $\pi$, die die Komponenten $\lambda^i$ der Größe nach ordnet.

Jeder dieser Simplexe $S$ hat Volumen gleichen Betrages, $|\operatorname{vol}(S)| = \frac{1}{n!}|\operatorname{vol}(Q)|$, denn sie gehen durch volumentreue Abbildungen ineinander über, die die Kanten permutieren, $u_{\pi(1)} \wedge u_{\pi(2)} \wedge \ldots u_{\pi(n)} = \operatorname{sign}(\pi)\, u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n$ .

Mit permutierten Kantenvektoren $v_i = u_{\pi^{-1}(i)}$ läßt sich die Punktmenge jedes solchen Simplexes auch als

$$\{x:\ x = z + \sum_{i=1}^{n} v_i\,\lambda^i\ ,\ 0 \le \lambda^1 \le \ldots \le \lambda^n \le 1\} \tag{12.75}$$

schreiben. Es ist $\lambda^i = \lambda^{i-1} + \alpha^i$ mit nichtnegativen Koeffizienten $\alpha^i$, also $\lambda^i = \sum_{j=1}^{i} \alpha^j$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha^j \le 1$ . Daher besteht das Simplex aus den Punkten

$$\{x:\ x = z + \sum_{i=1}^{n} w_i\,\alpha^i\ ,\ 0 \le \alpha^i\ ,\quad \sum_i \alpha^i \le 1\}\ , \tag{12.76}$$

wobei $w_i = \sum_{j=1}^{i} u_j$ . Schließlich ist $z = \alpha_0\, z + (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j)\, z$ mit $\sum_{j=0}^{n} \alpha^j = 1$ und mit den $n+1$ Ecken $P_0 = z$ und $P_i = z + w_i$ schreibt sich die Punktmenge des Simplexes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ in Standardnotation als

$$\{x:\ x = \sum_{i=0}^{n} P_i\,\alpha^i\ ,\ 0 \le \alpha^i\ ,\ \sum_{i=0}^{n} \alpha^i = 1\}\ . \tag{12.77}$$

Es besteht aus den möglichen Schwerpunkten $x = \sum_i P_i\, m_i/M$, $M = \sum_j m_j$ , von $n$ nichtnegativen Massen $m_i$ an den Eckpunkten $P_i$ .

Zwar gehen unter nichtlinearen Abbildungen $y$ die Punkte von Simplexen nicht in Simplexe über, aber die Ecken von Simplexen gehen in die Ecken von Simplexen über. Daher definiert das nichtlineare Bild einer Zerlegung des Integrationsgebietes in Simplexe $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ mit Kantenvektoren $P_k - P_0$, die von $P_0$ ausgehen, eine Zerlegung des Zielgebietes in Simplexe $(y(P_0), y(P_1), \ldots, y(P_n))$ mit Kantenvektoren $y(P_k) - y(P_0)$

$$y^m(P_k) - y^m(P_0) = (P_k - P_0)^l\, \frac{\partial y^m}{\partial x^l}_{|\xi}\ , \tag{12.78}$$

Die für verschiedene $k$ und $m$ verschiedenen Zwischenstellen $\xi$ können bei stetigem Integranden und genügend feiner Zerlegung bis auf einen vernachlässigbaren Fehler durch eine gemeinsame Zwischenstelle im Simplex $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ ersetzt werden. Bis auf diesen Fehler ist das Volumen des Bildes dieses Simplexes nach dem Determinantenproduktsatz um die Determinante der Jacobimatrix größer als das des Simplexes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ . Für den Grenzwert feiner werdender Zerlegungen folgt so der Integralsubstitutionssatz (12.72).

## Flächenelement in Polarkoordinaten

Die partiellen Ableitungen der kartesischen Koordinaten $(x, y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$ nach den Polarkoordinaten $r$, $\varphi$ sind

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \ , \quad \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r \tag{12.79}$$

Ein Flächenintegral über einen Bereich der kartesischen Koordinaten kann mit dem transformierten Flächenelement $dx\,dy = dr\,d\varphi\,r$ als Integral über Polarkoordinaten ausgewertet werden

$$\int_{(x,y)-\text{Bereich}} dx\,dy\,f(x,y) = \int_{(r,\varphi)-\text{Bereich}} dr\,d\varphi\,r\,f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \ . \tag{12.80}$$

Hiermit und mit dem Trick, zunächst das Quadrat zu berechnen, bestimmt man beispielsweise das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \ , \tag{12.81}$$

für dessen Integranden keine elementare Stammfunktion existiert. $I^2$ ist das Integral über die zweidimensionale Ebene, die einem $(r, \varphi)$ Bereich entspricht, in dem $\varphi$ zwischen Null und $2\pi$ und $r$ zwischen Null und Unendlich variiert,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2(x,y)\, e^{-(x^2+y^2)} \\ &= \int_{(r,\varphi)-\text{Bereich}} dr\,d\varphi\, r\, e^{-r^2} = \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{1}{2} e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=\infty} 2\pi = \pi \ . \end{aligned} \tag{12.82}$$

Ziehen wir die Wurzel, so erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \ . \tag{12.83}$$

Als weiteres Beispiel bestimmen wir den Schwerpunkt eines Kreissektors (Tortenstück) mit Radius $R$, und Öffnungswinkel $\alpha$, das spiegelsymmetrisch zur $x$-Achse liegt. Bei konstanter Massenflächendichte $\rho$ ist die Gesamtmasse

$$M = \int_{\text{Sektor}} d^2(x,y)\,\rho = \rho \int_0^R dr\, r \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\varphi = \rho\, \alpha\, \frac{R^2}{2} \tag{12.84}$$

und der Schwerpunkt

$$\begin{aligned} M\vec{R} &= \int_{\text{Segment}} d^2(x,y)\,\rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho \int_{(r,\varphi)-\text{Bereich}} dr\,d\varphi\ r \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= \rho \int_0^R dr\, r^2 \begin{pmatrix} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\varphi \cos\varphi \\ \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\varphi \sin\varphi \end{pmatrix} = \rho\, \frac{R^3}{3} \begin{pmatrix} 2\sin(\alpha/2) \\ 0 \end{pmatrix} = M\, \frac{4}{3} R \begin{pmatrix} \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{12.85}$$

Für $\alpha$ gegen 0 geht der Schwerpunkt von schmalen Kreissektoren gegen $\vec{R} = 2/3\,R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn $\sin(\alpha/2)/(\alpha/2)$ geht, wie (4.36) zeigt, gegen 1 .

## Volumenelement in Kugelkoordinaten

Die Determinante der Ableitungen der kartesischen Koordinaten $(x, y, z)$ nach den Kugelkoordinaten $(r, \theta, \varphi)$ (5.44)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{12.86}$$

berechnet man leicht, wenn man berücksichtigt, daß ihre Spalten die Komponenten von $\vec{e}_r$, $r\,\vec{e}_\theta$ und $r\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$ sind und daß die Determinante linear in den Spalten ist. Demnach ist sie $r\,r\sin\theta$ mal der Determinante der Matrix $D$, die in den Spalten die Komponenten von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$ enthält. Da diese Vektoren normiert sind und aufeinander senkrecht stehen, ist $D$ eine Drehung und hat Determinante $1$.

Unter einem Integral über $(x, y, z)$, das man in Kugelkoordinaten auswertet, gilt daher

$$d^3x = dr\,d\theta\,d\varphi\ \det\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = dr\,d\theta\,d\varphi\,r^2\sin\theta = -dr\,r^2\,d\cos\theta\,d\varphi\ . \tag{12.87}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $d\theta\ \sin\theta$ zur Integration über $u = \cos\theta$ zusammengezogen. Dies ist bei vielen Integrationen angemessen, deren Integranden Skalarprodukte $\cos\theta$ enthalten. Das negative Vorzeichen vor $d\cos\theta$ verwendet man, um die Integrationsgrenzen von $1 = \cos 0$ bis $-1 = \cos\pi$ umzudrehen. Dann gilt

$$\int d^3x\,h = \int_0^\infty dr\,r^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\,h\ , \tag{12.88}$$

wobei auf der linken Seite $h$ als Funktion der kartesischen Koordinaten $(x, y, z)$ und rechts als Funktion von $r, \cos\theta$ und $\varphi$ aufzufassen ist.

So ergibt sich das Kugelvolumen einfach als

$$\int_{\text{Kugel}} d^3x = \int_0^R dr\,r^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3}\,2\,2\pi = \frac{4\pi}{3}R^3\ . \tag{12.89}$$

## Gravitationspotential einer kugelsymmetrischen Massenverteilung

Das Gravitationspotential $\phi(\vec{x})$ ist die potentielle Energie $V$ eines Probeteilchens der Masse $m$, geteilt durch $m$, $V(\vec{x}) = m\,\phi(\vec{x})$.

Zum Gravitationspotential, das von einer stetigen Massenverteilung $\rho$ erzeugt wird, trägt jeder kleine Bereich $d^3y$ additiv mit dem Keplerpotential $G\,d^3y\,\rho(\vec{y})/|\vec{x}-\vec{y}|$ seiner Masse $d^3y\,\rho(\vec{y})$ bei ($G$ ist die Newtonsche Gravitationskonstante)

$$\phi(\vec{x}) = -G\int d^3y\,\frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ . \tag{12.90}$$

Dabei beträgt der Abstand von der Ursache, der Masse bei $y$, zur Auswirkung, dem Potential bei $x$,

$$|\vec{x}-\vec{y}| = \sqrt{\vec{x}^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\,\cos\theta}\ . \tag{12.91}$$

Hier bezeichnet $r$ den Betrag von $\vec{x}$, $r'$ den Betrag von $\vec{y}$ und $\theta$ den Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$. Zur Integration über $(y^1, y^2, y^3)$ verwenden wir Kugelkoordinaten, wobei wir die $y^3$-Achse in Richtung von $\vec{x}$ wählen. Dann sind $r'$ und $\theta$ zwei der drei Kugelkoordinaten.

Die Massendichte $\rho(\vec{y})$ hängt nur von $r'$ ab und verschwinde für große $r'$ genügend schnell.

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}) &= -G\int_0^\infty dr'\, r'^2\,\rho(r') \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2\,r\,r'\cos\theta}}\\
&= -2\,\pi\,G\int_0^\infty dr'\, r'^2\,\rho(r') \int_{-1}^{+1} du\, \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2\,r\,r'u}}\\
&= -2\,\pi\,G\int_0^\infty dr'\, r'^2\,\rho(r')\, \frac{-1}{r\,r'}\, \sqrt{r^2+r'^2-2\,r\,r'u}\,\Big|_{u=-1}^{u=+1}\\
&= 2\,\pi\,G\int_0^\infty dr'\, \frac{r'}{r}\,\rho(r')\,\big(|r'-r| - |r'+r|\big)\ .
\end{aligned} \tag{12.92}$$

Hierbei haben wir $\sqrt{x^2} = |x|$ beachtet. Je nachdem, ob $r$ größer oder kleiner $r'$ ist, gilt

$$|r'-r| - |r'+r| = \begin{cases} r - r' - r' - r = -2\,r' & \text{falls} \quad r \geq r' \\ r' - r - r' - r = -2\,r & \text{falls} \quad r \leq r' \end{cases}\ . \tag{12.93}$$

Diese Fallunterscheidung berücksichtigen wir, indem wir den Integrationsbereich in die Bereiche mit $r' < r$ und $r' > r$ aufteilen,

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}) &= 2\,\pi\,G\Big[\int_0^r dr'\,\rho(r')\,\frac{r'}{r}\,(-2r') + \int_r^\infty dr'\,\frac{r'}{r}\,\rho(r')\,(-2r)\Big]\\
&= -4\pi\,G\Big[\frac{1}{r}\int_0^r dr'\, r'^2\,\rho(r') + \int_r^\infty dr'\, r'\,\rho(r')\Big]\ .
\end{aligned} \tag{12.94}$$

Das Potential hängt nur von $r$ ab, $\phi(\vec{x}) = f(r)$. Leiten wir nach $r$ ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dr} &= \frac{G}{r^2}\,4\pi\int_0^r dr'\, r'^2\,\rho(r') - \frac{G}{r}\,4\pi\,\big(r'^2\,\rho(r')\big)_{|r'=r} + G\,4\pi\,\big(r'\,\rho(r')\big)_{|r'=r}\\
&= \frac{G}{r^2}\,M(r)\ , \quad \text{mit} \quad M(r) = 4\pi\int_0^r dr'\, r'^2\,\rho(r') = \int_{|\vec{y}|<r} d^3y\,\rho(\vec{y})\ .
\end{aligned} \tag{12.95}$$

Es trägt also zur Kraft $\vec{F}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} V = -m\,\frac{\vec{x}}{r}\frac{df}{dr} = -G\,m\,M(r)\,\frac{\vec{x}}{r^3}$ auf ein Probeteilchen der Masse $m$ am Ort $\vec{x}$ im Abstand $r = |\vec{x}|$ zum Kugelmittelpunkt nur der Teil $M(r)$ der Masse bei, der dem Mittelpunkt näher ist.

Eine kugelsymmetrische Massenschale übt in ihrem Inneren keine Kraft aus.

Außerhalb einer kugelsymmetrischen Massenverteilung trägt zum Potential nur das erste der beiden Integrale in (12.94) bei, da außen $\rho(r')$ für $r' > r$ verschwindet. Die Massenverteilung erzeugt außerhalb dasselbe Gravitationspotential und dieselbe Kraft,

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{G\,M}{r}\ , \quad \vec{F}(\vec{x}) = -m\operatorname{grad}\phi = -\frac{G\,m\,M}{r^2}\,\vec{e}_r\ , \tag{12.96}$$

wie ein Massepunkt im Ursprung, der die Gesamtmasse in sich vereinigt.

Ist der Probekörper ausgedehnt und überlappt er nicht die Zentralmasse, so setzt sich seine gesamte potentielle Energie additiv aus den potentiellen Energien der Massen $d^3y\, \rho'(\vec{y})$ in kleinen Volumenelementen im Außenfeld der Zentralmasse zusammen,

$$V(\vec{x}) = -G\, M \int d^3y\, \frac{\rho'(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}\ . \tag{12.97}$$

Ist $\rho'$ auch kugelsymmetrisch, so hat dieses Integral den Wert $V(\vec{x}) = -GmM/r$, $m = \int d^3y\, \rho'(\vec{y})$, wie die Herleitung von (12.94) zeigt. Erst Abweichungen von der Kugelsymmetrie führen bei gravitativer Wechselwirkung zweier Massen, die nicht überlappen, zu Abweichungen von den Bahnen zweier Punktteilchen.

In einer homogen Kugel mit Radius $R$, Massendichte $\rho_0 = M/(4\pi R^3/3)$ innen und verschwindender Massendichte außen, $\rho(r') = 0$ für $r' > R$, beträgt das Gravitationspotential (12.94)

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= -4\pi\, G\, \rho_0 \left[ \frac{1}{r} \int_0^r dr'\, r'^2 + \int_r^R dr'\, r' \right] \\ &= -4\pi\, G\, \rho_0 \left[ \frac{1}{r}\frac{r^3}{3} + \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] = G\, M \left( \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} \right)\ . \end{aligned} \tag{12.98}$$

Die potentielle Energie eines Testteilchens ist dort die eines kugelsymmetrischen, harmonischen Oszillators. Da das Potential invariant unter Drehungen ist, ist der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ erhalten. Folglich ist jede Bahnkurve eben (Seite 98). Sie verläuft, bei geeignet gewählten Achsen, in der $x$-$y$-Ebene.

Wenn die Bahn ganz im Inneren der homogenen Kugel verläuft, ist sie eine Ellipse mit dem Kraftzentrum im *Mittel*punkt.[3] Dies zeigt sich leicht, wenn wir die $x$-Achse in Richtung der größten Auslenkung wählen, die zur Zeit $t = 0$ durchlaufen werde. Denn $z(t)$ verschwindet, und die Newtonschen Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $y(t)$ sind die von zwei entkoppelten, harmonischen Oszillatoren gleicher Frequenz,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\ ,\quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0\ ,\quad \text{mit}\quad \omega^2 = \frac{G\, M}{R^3}\ . \tag{12.99}$$

Die Anfangsbedingungen $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, legen die Phasen der Schwingungen fest, $x(t) = a\cos(\omega\, t)$, $y(t) = b\sin(\omega\, t)$, also gilt die Ellipsengleichung $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Da die Kraft an der Kugeloberfläche $r = R$ stetig ist, dauern Kreisbahnen, die knapp über oder unter der Oberfläche verlaufen, gleich lang. Im Inneren ist die Dauer einer Schwingung von der Auslenkung unabhängig und dauert ebenfalls solange, wie eine oberflächennahe Umkreisung. Der Fall durch einen fiktiven, luftleeren Tunnel durch die Erde zu den Antipoden und zurück, würde etwa 90 Minuten dauern.

$$\begin{gathered} G = 6{,}67\, 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}\ ,\quad M = 5{,}97\, 10^{24}\ \mathrm{kg}\ ,\quad R = 6{,}378\, 10^6\ \mathrm{m}\ , \\ \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}\ ,\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 5390\ \mathrm{s}\ . \end{gathered} \tag{12.100}$$

Wenn der Fall auf einer sich drehenden Erde nicht aus anfänglicher Ruhe startet, so ist die Fallkurve im Inertialsystem, das sich nicht dreht, eine Ellipse.

[3] Bei der Keplerellipse (10.72) ist das Kraftzentrum in einem *Brenn*punkt. In beiden Fällen ist, weil der Drehimpuls erhalten ist, die Flächengeschwindigkeit konstant (10.74).

## Metrische Größe von Kurven, Flächen und Volumina

Die Arbeit längs eines Wegs $A(\Gamma)$, der Strom durch eine Fläche $J(F)$ oder die Ladung in einem Volumen $Q(V)$ sind durch Wegintegrale, Flächenintegrale oder Volumenintegrale gegeben,

$$\begin{aligned}
&\Gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \ , \quad s \mapsto x(s) \ , \quad A(\Gamma) = \int_I ds\, t^i(s)\, A_i(x(s)) \ , \ t^i = \frac{dx^i}{ds} \ , \\
&F : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^N \ , \quad (s^1, s^2) \mapsto x(s^1, s^2) \ , \\
J(F) &= \int_S d^2s\, (t_1^i(s)\, t_2^j(s) - t_1^j(s)\, t_2^i(s))\, \frac{1}{2}\, j_{ij}(x(s)) \ , \quad t_1^i = \frac{\partial x^i}{\partial s^1} \ , \ t_2^i = \frac{\partial x^i}{\partial s^2} \ , \\
&V : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^N \ , \quad (s^1, s^2, s^3) \mapsto x(s^1, s^2, s^3) \ , \\
Q(V) &= \int_G d^3s\, (t_a^i(s)\, t_b^j(s)\, t_c^k(s))\, \epsilon_{abc}\, \frac{1}{6}\, \rho_{ijk}(x(s)) \ , \quad t_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial s^a} \ ,
\end{aligned} \tag{12.101}$$

die einem Weg $\Gamma$ und einem Kraftfeld $A$, einer Fläche $F$ und einer Stromdichte $j$ sowie einem Volumen $V$ und einer Ladungsdichte $\rho$ einen Zahlenwert zuordnen, der nicht von der Parametrisierung des Weges, der Fläche oder des Volumens abhängt. Da Kraftfelder, Stromdichten und Ladungsdichten Elemente von Vektorräumen sind, die durch Integrale linear in die Zahlen abgebildet werden, gehören zu Wegen, Flächen und Volumina Vektoren der Dualräume.

Den Wegen, Flächen oder Volumina in einem *Euklidischen* Raum $\mathbb{R}^N$ kommt eine Weglänge, Flächengröße und eine Volumengröße zu. Diese metrische Größe hängt, anders als die Integrale über Kraftfelder, Stromdichten oder Ladungsdichten, nur vom Weg, der Fläche oder dem Volumen ab.

Die Länge des Weges $\Gamma$ ist das Integral über die Wurzel aus dem Längenquadrat des Tangentialvektors (12.43)

$$\text{Länge}(\Gamma) = \int_I ds\, \sqrt{t \cdot t} \ . \tag{12.102}$$

Als Flächengröße definieren wir[4]

$$\text{Größe}(F) = \int_S d^2s\, \sqrt{(t_1 \cdot t_1)\,(t_2 \cdot t_2) - (t_1 \cdot t_2)\,(t_2 \cdot t_1)} \ . \tag{12.103}$$

Die Definition ist zunächst in dem Spezialfall $t_1 \cdot t_2 = 0$ gerechtfertigt, in dem die beiden Tangentialvektoren längs der Parameterlinien senkrecht aufeinander stehen: dann ist die Wurzel dem Produkt der Längen der Tangentialvektoren gleich.

Um zu zeigen, daß auch allgemeiner die Wurzel die Flächengröße des von den Tangentialvektoren längs der Parameterlinien aufgespannten Parallelogramms ist, bemerken wir, daß das Argument der Wurzel die Determinante der Matrix $g_{..}$ ist, deren Matrixelemente

$$g_{ab} = t_a \cdot t_b \ , \ t_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial s^a} \ , \tag{12.104}$$

die Skalarprodukte der Tangentialvektoren sind (3.58). Die Tangentialvektoren $t_a$ können wir mit einer linearen, orientierungstreuen Abbildung $M$ als Bild von orthonormalen

[4] In $N = 3$-Dimensionen ist $(\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_1)\,(\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_2) - (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2)\,(\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_1) = (\vec{t}_1 \times \vec{t}_2)^2$ .

Vektoren $e_a$, $e_a \cdot e_b = \delta_{ab}$, schreiben, $t_a = M e_a = e_c M^c{}_a$, denn im Tangentialraum gibt es eine Orthonormalbasis $e_a$, die durch Wahl des Vorzeichens von $e_1$ dieselbe Orientierung wie $t_a$ hat. Das metrische Volumen einer Orthonormalbasis ist 1, es wird durch $M$ um den Faktor $\det M > 0$ vergrößert (3.25). Also spannen die Tangentialvektoren $t_1$ und $t_2$ ein Parallelogramm der Größe $\det M$ auf. Die Matrix $g_{..}$ ist $M^T M$

$$g_{ab} = t_a \cdot t_b = M^c{}_a M^d{}_b \, e_c \cdot e_d = M^c{}_a M^c{}_b = (M^T M)_{ab} \,. \tag{12.105}$$

Nach dem Determinantenproduktsatz ist $\det g_{..} = (\det M)^2$, also ist $\sqrt{\det g_{..}} = \det M$ die metrische Größe des von den Tangentialvektoren aufgespannten Parallelogramms,

$$\text{Größe}(F) = \int_S \mathrm{d}^2 s \, \sqrt{\det g_{..}} \,, \quad g_{ab} = t_a \cdot t_b \,, \; t^i_a = \frac{\partial x^i}{\partial s^a} \,. \tag{12.106}$$

Die Gleichung gilt entsprechend auch für $p$-dimensionale Flächen, wenn man über den zugehörigen $p$-dimensionalen Parameterbereich integriert und $g_{..}$ die $p \times p$-Matrix der Skalarprodukte der Tangentialvektoren an die Parameterlinien ist.

Das Skalarprodukt $u, v \mapsto g(u,v) = u^a v^b g_{ab}$ von Tangentialvektoren $u = t_a u^a$ und $v = t_b v^b$ heißt die auf der Fläche induzierte Metrik.

Die Flächengröße hängt nicht von der Parametrisierung ab, die wir zur Berechnung der Flächengröße brauchen. Sei nämlich $S = s(T)$ als invertierbares, orientierungstreues Bild eines Parameterbereiches $T$ gegeben und die Fläche $F$ durch die verketteten Funktionen $x(s(t))$. Wegen der Kettenregel gilt

$$t'^i_a = \frac{\partial x^i}{\partial t^a} = \frac{\partial s^c}{\partial t^a} \frac{\partial x^i}{\partial s^c} \,, \quad g'_{ab} = t'_a \cdot t'_b = \frac{\partial s^c}{\partial t^a} \frac{\partial s^d}{\partial t^b} \, t_c \cdot t_d = \frac{\partial s^c}{\partial t^a} \frac{\partial s^d}{\partial t^b} \, g_{cd} \,, \tag{12.107}$$

also $g'_{..} = J^T g_{..} J$, $\det g'_{..} = (\det J)^2 \det g_{..}$, wobei $J = \frac{\partial s}{\partial t}$ die Jacobimatrix der partiellen Ableitungen der Parameter $s$ nach $t$ ist.

Daher stimmen die Flächengrößen in beiden Parametrisierungen überein

$$\text{Größe}(F) = \int_T \mathrm{d}^2 t \, \sqrt{\det g'_{..}} = \int_T \mathrm{d}^2 t \, \det \frac{\partial s}{\partial t} \, \sqrt{\det g_{..}} = \int_{S=s(T)} \mathrm{d}^2 s \, \sqrt{\det g_{..}} \,. \tag{12.108}$$

Als Beispiel einer Flächengröße bestimmen wir die Größe der Oberfläche einer Kugel mit Radius $r$

$$F : (\theta, \varphi) \mapsto r \begin{pmatrix} \sin\theta \, \cos\varphi \\ \sin\theta \, \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \,. \tag{12.109}$$

Die Tangentialvektoren längs der Parameterlinien und ihre Skalarprodukte sind

$$\vec{t}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = r \, \vec{e}_\theta = r \begin{pmatrix} \cos\theta \, \cos\varphi \\ \cos\theta \, \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \,, \; \vec{t}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = r \, \sin\theta \, \vec{e}_\varphi = r \, \sin\theta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \,, \tag{12.110}$$

$$\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_1 = r^2 \,, \quad \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_1 = 0 \,, \quad \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_2 = r^2 \sin^2\theta \,, \quad \sqrt{\det g_{..}} = r^2 \sin\theta \,. \tag{12.111}$$

Integrieren wir über den Parameterbereich $0 \le \theta \le \pi$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$, so erhalten wir die Größe der zweidimensionalen Kugelfläche $S^2$ in drei Dimensionen

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, r^2 \sin\theta = 2\pi r^2 \, (-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\pi r^2 \,. \tag{12.112}$$

## Kugelfläche in $n$ Dimensionen

Der Wert des $n$-dimensionalen Integrals

$$\int d^n x \, e^{-\sum_i (x^i)^2} = \int dx^1 \, e^{-(x^1)^2} \int dx^2 \, e^{-(x^2)^2} \dots \int dx^n \, e^{-(x^n)^2} = \left(\sqrt{\pi}\right)^n \tag{12.113}$$

ist einfach die $n$-te Potenz des eindimensionalen Integrals (12.83). In Kugelkoordinaten $r, \theta^1 \dots \theta^{n-1}$, $r = \sqrt{x^i x^i}$, kann man das Integral auswerten, ohne wissen zu müssen, wie die kartesischen Koordinaten $x^i = r\, n^i(\theta^1 \dots \theta^{n-1})$, von den Winkeln $(\theta^1 \dots \theta^{n-1})$ abhängen. Es reicht zu wissen, daß für $n \geq 2$ die Determinante der Jacobimatrix in einen Faktor $r^{n-1}$ und eine Funktion der Winkel zerfällt, denn jede bis auf eine Spalte der Jacobimatrix ist linear in $r$. Da $e^{-\sum_i (x^i)^2} = e^{-r^2}$ als Funktion der Winkel konstant ist, ist ihr $n$-dimensionales Integral durch ein $r$-Integral gegeben mal dem Integral über die Determinante der Jacobimatrix über die Winkel. Dieser Faktor ist aber die Flächengröße der $n-1$-dimensionalen Sphäre $S^{n-1}$ in $n$-Dimensionen.

$$\int d^n x \, e^{-\sum_i (x^i)^2} = \mathrm{vol}(S^{n-1}) \int_0^\infty dr \, r^{n-1} \, e^{-r^2} \tag{12.114}$$

Substituieren wir hier $t(r) = r^2$, $dt = 2r\,dr$, setzen den Wert (12.113) auf der linken Seite ein,

$$\left(\sqrt{\pi}\right)^n = \mathrm{vol}(S^{n-1}) \, \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \, t^{\frac{n}{2}-1} \, e^{-t} \ , \tag{12.115}$$

und vergleichen wir mit der Definition der $\Gamma$-Funktion (12.22), so erhalten wir für die Flächengröße der Einheitskugel in $n \geq 2$ Dimensionen

$$\mathrm{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \ . \tag{12.116}$$

Insbesondere hat der Einheitskreis $S^1$ die Länge $2\pi$ und die Einheitskugel $S^2$ in $n = 3$ Dimensionen die Oberfläche $4\pi$. Das legt mit (12.23) den Wert von $\Gamma(\frac{1}{2})$ fest

$$4\pi = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^3}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^3}{\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})} \ , \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \, . \tag{12.117}$$

# 13 Wirkungsprinzip

## Ideale Uhren

Die Zeit, die auf einer Uhr zwischen zwei Ereignissen $A$ und $B$ vergeht, hängt wie eine Weglänge nicht nur von den beiden Ereignissen, sondern von der Weltlinie

$$f : s \mapsto f(s) = (f^0(s), f^1(s), f^2(s), f^3(s)) \ , \quad f(\underline{s}) = A \ , \quad f(\overline{s}) = B \ , \tag{13.1}$$

ab, die die Uhr dazwischen durchläuft.

Zur Unterscheidung von den Punkten $x = (t, \vec{x})$ der Raumzeit benennen wir Weltlinien mit einem anderen Buchstaben $f$, statt die weitverbreitete Notation $x(s)$ zu verwenden, die ja genau genommen für den Wert der Funktion $x$ beim Argument $s$ steht.

Auf der Weltlinie sei die Koordinatenzeit $f^0$ eine monoton wachsende Funktion des Bahnparameters $s$. Dann werden die Ereignisse auf der Weltlinie als Funktion des Bahnparameters $s$ genau einmal und kausal geordnet durchlaufen.

Zwischen benachbarten Ereignissen mit Differenzvektor $\mathrm{d}f = \mathrm{d}s\,(\frac{\mathrm{d}f^0}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}f^1}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}f^3}{\mathrm{d}s})$ vergeht auf jeder gleichförmig bewegten Uhr die Zeit (1.64)

$$\Delta\tau = \mathrm{d}s \sqrt{\eta_{mn} \frac{\mathrm{d}f^m}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}s}} = \mathrm{d}s \sqrt{\big(\frac{\mathrm{d}f^0}{\mathrm{d}s}\big)^2 - \big(\frac{\mathrm{d}f^1}{\mathrm{d}s}\big)^2 - \big(\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}s}\big)^2 - \big(\frac{\mathrm{d}f^3}{\mathrm{d}s}\big)^2} \ . \tag{13.2}$$

Ist die Weltlinie nicht gerade, sondern beschleunigt, so nähern wir sie wie in Abbildung 12.2 durch einen Streckenzug mit Zwischenstellen, die die Weltlinie feiner und feiner zerlegen. Die Zeit, die auf einer idealen Uhr vergeht, ist der Grenzwert der Zeiten, die auf diesen Streckenzügen vergehen.

**Zeit:** *Auf einer zeitartigen Weltlinie* $f : s \mapsto f(s)$ *zeigt eine ideale Uhr zwischen dem Ereignis* $A = f(\underline{s})$ *und dem späteren Ereignis* $B = f(\overline{s})$ *die Zeit* $\tau[f]$ *an.*

$$\tau[f] = \int_f \Delta\tau = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s \sqrt{\eta_{mn} \frac{\mathrm{d}f^m}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}s}} \tag{13.3}$$

Die Zeit ist ein Funktional $\tau : f \mapsto \tau[f]$, das Weltlinien $f$, also Komponentenfunktionen eines reellen Parameters, in die reellen Zahlen abbildet. Genauer gesagt ist $\tau$ ein *lokales* Funktional $W$ der Weltlinie $f$, das heißt, sie ist ein Integral über den Parameterbereich der Weltlinie, wobei der Integrand eine Jetfunktion $\mathscr{L}$ ist, die auf der Weltlinie $f$ ausgewertet wird,

$$W : f \mapsto W[f] = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s \, \big(\mathscr{L} \circ \hat{f}\big)(s) = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s \, \mathscr{L}(s, f(s), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s), \dots) \ . \tag{13.4}$$

Die Jetfunktion, die zu einem lokalen Funktional gehört, nennt man seine Lagrangefunktion. Die Lagrangefunktion der Eigenzeit bildet Punkte $(s,x,v)$ des Bereiches $(v^0)^2-(v^1)^2-(v^2)^2-(v^3)^2>0$ des Jetraumes $\mathcal{J}_1$ ab auf

$$\mathscr{L}_{\text{Zeit}}(s,x,v)=\sqrt{v^m\,v^n\,\eta_{mn}}=\sqrt{(v^0)^2-(v^1)^2-(v^2)^2-(v^3)^2}\ . \tag{13.5}$$

Zeit ist additiv. Falls $C$ ein Ereignis zwischen $A$ und $B$ auf der Weltlinie $f$ ist und falls $f_1$ und $f_2$ die Teilstücke von und zu $C$ bezeichnen, dann gilt in einer suggestiven Notation

$$\int\limits_{f_1+f_2}\Delta\tau\ =\int\limits_{f_1}\Delta\tau\ +\ \int\limits_{f_2}\Delta\tau\ . \tag{13.6}$$

Auf geraden Weltlinien stimmt $\tau^2$ überein mit dem Längenquadrat (1.64) des Differenzvektors $w_{BA}=f(\overline{s})-f(\underline{s})$ von $A$ nach $B$.

Die Zeit $\tau[f]$ ist unabhängig von der Parametrisierung der Weltlinie. Jede andere Parametrisierung der Weltlinie $f$ mit monoton wachsendem $f^0$ ist durch $f'(s')=f(s(s'))$ mit monoton wachsendem $s(s')$ gegeben, also ist $\frac{ds}{ds'}>0$. Nach der Kettenregel gilt $\frac{df'}{ds'}=\frac{ds}{ds'}\frac{df}{ds}$, und mit dem Integralsubstitutionssatz folgt die Behauptung:

$$\int\limits_{\underline{s'}}^{\overline{s'}}ds'\,\sqrt{\Bigl(\frac{df'}{ds'}\Bigr)^2}=\int\limits_{\underline{s'}}^{\overline{s'}}ds'\,\frac{ds}{ds'}\,\sqrt{\Bigl(\frac{df}{ds}\Bigr)^2}=\int\limits_{\underline{s}}^{\overline{s}}ds\,\sqrt{\Bigl(\frac{df}{ds}\Bigr)^2}\ . \tag{13.7}$$

Parametrisiert man eine zeitartige Weltlinie durch die Zeit $t$, die ein Beobachter den Ereignissen zuschreibt, dann ist die Weltlinie durch $f:t\mapsto(t,f^1(t),f^2(t),f^3(t))$ gegeben und der Vierertangentialvektor hat die Komponenten $(1,\frac{df^1}{dt},\frac{df^2}{dt},\frac{df^3}{dt})$ und das Längenquadrat $(1-\vec{v}^2)\circ\hat{f}$. Auf der Weltlinie $f$ vergeht auf einer mitgeführten Uhr zwischen $f(\underline{t})$ und $f(\overline{t})$ die Zeit

$$\tau[f]=\int_{\underline{t}}^{\overline{t}}dt\,\sqrt{1-\vec{v}^2}\circ\hat{f}\ . \tag{13.8}$$

Wählt man für eine Weltlinie $f$ als Bahnparameter $s$ die Zeit, die eine mitgeführte Uhr bei $f(s)$ anzeigt, so ist diese Zeit der Wert des Funktionals $\tau$, das sich bis zur oberen Integrationsgrenze $s$ erstreckt, also eine Funktion von $s$. Die Ableitung dieser Funktion $\tau(s)=s$ hat den Wert 1, andererseits ist die Ableitung von $\tau$ nach der oberen Integrationsgrenze der Integrand, die Wurzel aus dem Längenquadrat des Tangentialvektors,

$$\sqrt{\Bigl(\frac{df}{ds}\Bigr)^2}=1\ . \tag{13.9}$$

Parametrisiert man also eine Weltlinie mit seiner Eigenzeit, so hat der Tangentialvektor Einheitslänge. Das gilt auch umgekehrt. Hat der Tangentialvektor überall Einheitslänge, $\bigl(\frac{df}{ds}\bigr)^2=1$, dann stimmt der Bahnparameter $s$ bis auf die Wahl des Zeitnullpunktes mit der Zeit $\tau(s)$ überein, die auf einer mitgeführten Uhr bis $f(s)$ vergeht

$$\Bigl(\frac{df}{ds}\Bigr)^2=1\ \Leftrightarrow\ \tau[f]=\overline{s}-\underline{s}\ . \tag{13.10}$$

Die Zeit, $\tau[f]$, die ideale Uhren anzeigen, ist unabhängig von der Beschleunigung in dem Sinne, daß die zugehörige Lagrangefunktion (13.5) eine Funktion von $\mathcal{J}_1$ ist, also höchstens von $(s, x, v)$ und nicht von den Jetvariablen $x_{(r)}$ mit $r \geq 2$ höherer Jeträume $\mathcal{J}_k$ abhängt. Dennoch ist die Zeit $\tau[f]$ ein Funktional der Weltlinie $f$, das, wie das Zwillingsparadoxon zeigt, für gerade und gekrümmte Weltlinien, die $A$ mit $B$ verbinden, unterschiedliche Werte hat.

## Weltlinie längster Dauer

Vergleichen wir verschiedene Weltlinien durch zwei zueinander zeitartige Ereignisse $A$ und $B$, so ist die gerade Weltlinie dadurch ausgezeichnet, daß auf ihr zwischen $A$ und $B$ mehr Zeit vergeht als auf allen anderen zeitartigen Weltlinien $f$ von $A$ nach $B$.

Zum Beweis betrachten wir eine einparametrige Schar von zweimal stetig differenzierbaren Weltlinien $f_\lambda$ durch die Ereignisse $A = f(\underline{s})$ und $B = f(\overline{s})$,

$$f_\lambda : s \mapsto f(s) + \lambda\, \delta f(s)\ , \quad \delta f(\underline{s}) = 0\ , \quad \delta f(\overline{s}) = 0\ . \tag{13.11}$$

Die Funktionen $\delta f$ heißen die Änderung oder Variation von $f$.

Die Zeit $\tau[f_\lambda]$ ist bei festgehaltener Weltlinie $f$ und festgehaltener Änderung $\delta f$ eine Funktion des Scharparameters $\lambda$. Wir betrachten ihre Ableitung bei $\lambda = 0$, die wir kurz $\delta\tau$ nennen,

$$\delta\tau = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} ds \sqrt{\eta_{mn} \Big(\frac{df^m}{ds} + \lambda \frac{d\delta f^m}{ds}\Big)\Big(\frac{df^n}{ds} + \lambda \frac{d\delta f^n}{ds}\Big)}\ . \tag{13.12}$$

Die Ableitung des Integrals nach $\lambda$ ist das Integral über die Ableitung des Integranden. Bei $\lambda = 0$ hat es den Wert

$$\delta\tau = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} ds\, \eta_{mn} \frac{d\delta f^m}{ds} \frac{df^n}{ds} \Big(\sqrt{\eta_{kl} \frac{df^k}{ds} \frac{df^l}{ds}}\Big)^{-1}\ . \tag{13.13}$$

Durch partielles Integrieren können wir die Ableitung von $\delta f^m$ abwälzen, ohne daß Randterme entstehen, denn die Variation verschwindet am Rand, $\delta f^m(\underline{s}) = 0 = \delta f^m(\overline{s})$,

$$\begin{aligned}
\delta\tau &= \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} ds \frac{d}{ds} \Big(\delta f^m \eta_{mn} \frac{df^n}{ds} \sqrt{(\frac{df}{ds})^2}^{\,-1}\Big) - \delta f^m \frac{d}{ds}\Big(\eta_{mn} \frac{df^n}{ds} \sqrt{(\frac{df}{ds})^2}^{\,-1}\Big) \\
&= \delta f^m \eta_{mn} \frac{df^n}{ds} \sqrt{(\frac{df}{ds})^2}^{\,-1} \Big|_{\underline{s}}^{\overline{s}} - \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} ds\, \delta f^m \frac{d}{ds}\Big(\eta_{mn} \frac{df^n}{ds} \sqrt{(\frac{df}{ds})^2}^{\,-1}\Big) \\
&= \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} ds\, \delta f^m \Big(-\frac{d}{ds}\Big(\eta_{mn} \frac{df^n}{ds} \sqrt{(\frac{df}{ds})^2}^{\,-1}\Big)\Big)\ .
\end{aligned} \tag{13.14}$$

Die Änderung $\delta\tau$ des Funktionals $\tau$ ist ein lineares Funktional der Änderung $\delta f$ der Weltlinie, ebenso wie die Änderung $df = dx^i\, \partial_i f$ einer Funktion $f$ eine lineare Funktion der Änderungen $\mathrm{d}x^i$ der Argumente ist, nur daß die Änderung der Eigenzeit $\tau$ nicht mehr eine diskrete Summe, sondern ein Integral über $\delta f$ ist,

$$\delta\tau = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s\, \delta f^m(s)\, \frac{\delta\tau}{\delta f^m(s)}\ . \tag{13.15}$$

So wie man die Koeffizienten $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ in $\mathrm{d}f$ die partiellen Ableitungen der Funktion $f$ nennt, nennen wir die Koeffizientenfunktionen bei $\delta f$ in $\delta\tau$ die Variationsableitung von $\tau$ nach $f$. Wie (13.14) zeigt, ist die Variationsableitung der Eigenzeit eine Funktion von Ableitungen von $f$

$$\frac{\delta\tau}{\delta f^m(s)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\eta_{mn}\,\frac{\mathrm{d}f^n}{\mathrm{d}s}\,\sqrt{(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s})^2}^{\,-1}\Big) = \Big(-\big(\mathrm{d}_s\frac{\eta_{mn}v^n}{\sqrt{v^2}}\big)\circ\hat{f}\Big)(s)\ . \tag{13.16}$$

Hierbei ist $\mathrm{d}_s$ analog zu $\mathrm{d}_t$ (7.6) definiert, der Kurvenparameter heißt ja $s$ statt $t$.

Ist die Variationsableitung eines Funktionals $W$ eine stetige Funktion des Integrationsparameters, so ist sie auch eindeutig. Das ergibt sich aus dem

**Fundamentallemma der Variationsrechnung:** *Falls ein Funktional*

$$M[h] : h \mapsto \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s\, h(s)\, m(s) \tag{13.17}$$

*für alle beliebig oft differenzierbaren Funktionen* $h$ *verschwindet, die bei* $\underline{s}$ *und* $\overline{s}$ *Null sind,*[1] *und falls* $m$ *eine stetige Funktion ist, dann verschwindet* $m$ *im Intervall* $[\underline{s}, \overline{s}]$ .

Wäre nämlich die Funktion $m$ in einem Punkt $\hat{s}$ nicht Null, so wäre sie in einer Umgebung $U = [\hat{s}-\epsilon, \hat{s}+\epsilon]$ nicht Null. Die Funktion $k(s) = g(s-\hat{s}+\epsilon)\, g(-s+\hat{s}+\epsilon)$ mit $g(x) = \Theta(x)\exp(-1/x^2)$, wobei $\Theta$ die Stufenfunktion (2.6) ist, ist beliebig oft differenzierbar, verschwindet außerhalb $U$ und ist im Inneren von $U$ positiv. Dann wäre nach Mittelwertsatz (12.8) das Integral

$$M[k] = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s\, k(s)\, m(s) = \int_{\hat{s}-\epsilon}^{\hat{s}+\epsilon} \mathrm{d}s\, k(s)\, m(s) \tag{13.18}$$

nicht Null im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $M[k]$ verschwindet.

Ebenso verschwinden alle stetigen Funktionen $m_i$ bei einem Funktional

$$M[h^1, h^2 \dots h^n] = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s\, h^i(s)\, m_i(s) \tag{13.19}$$

mehrerer Funktionen $h^i$, wenn das Funktional für alle beliebig differenzierbaren $h^i$ verschwindet, denn dann verschwinden alle Funktionale $M_i[h] = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s\, h(s)\, m_i(s)$ .

Daraus folgt die Eindeutigkeit der Variationsableitung, falls sie eine stetige Funktion ist, denn sei für alle beliebig oft differenzierbaren $\delta f^m(s)$

$$\delta\tau = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s\, \delta f^m(s)\, \tilde{g}_m(s) = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s\, \delta f^m(s)\, g_m(s) \tag{13.20}$$

[1] Die Bedingungen an $h$ schwächen die Voraussetzungen ab, aus denen $m = 0$ folgt.

mit stetigen Funktionen $\tilde{g}_m(s)$ und $g_m(s)$, dann verschwindet das Funktional

$$M[\delta f] = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} ds\, \delta f^m(s)\, (\tilde{g}_m - g_m)(s) \tag{13.21}$$

für alle $\delta f^m$, also verschwinden die stetigen Funktionen $\tilde{g}_m - g_m$.

Ist $f : s \to f(s)$ die Weltlinie von $A$ nach $B$, auf der am meisten Zeit vergeht, so muß für diese Weltlinie die Ableitung von $\tau[f_\lambda]$ nach $\lambda$ bei $\lambda = 0$ für alle Kurvenscharen $f_\lambda$ verschwinden. Das ist genau dann der Fall, wenn die Variationsableitung der Eigenzeit $\tau$ bei $f$ verschwindet,

$$-\frac{d}{ds}\Big(\eta_{mn}\,\frac{df^n}{ds}\,\sqrt{(\frac{df}{ds})^2}^{\,-1}\Big) = 0\ . \tag{13.22}$$

Folglich ist auf dieser Weltlinie die Richtung des Tangentialvektors konstant,

$$\frac{\frac{df^n}{ds}}{\sqrt{(\frac{df}{ds})^2}} = u^n\ . \tag{13.23}$$

Da sich bei Reparametrisierung jeder Weltlinie die Länge des Tangentialvektors, nicht aber die Eigenzeit ändert (13.7), legt die Bedingung, daß die Weltlinie von längster Dauer sei, nicht die Länge des Tangentialvektors fest.

Wählt man die Parametrisierung so, daß der Tangentialvektor konstante Länge 1 hat

$$\Big(\frac{df}{ds}\Big)^2 = 1\ , \tag{13.24}$$

dann stimmt der Bahnparameter $s$ bis auf Wahl des Nullpunktes mit der Uhrzeit $\tau$ auf der Weltlinie überein und Gleichung (13.22) besagt, daß die Beschleunigung $\frac{d^2f}{ds^2}$ längs der Bahn verschwindet,

$$\frac{d^2f}{ds^2} = 0 \tag{13.25}$$

und daß die Weltlinie extremaler Dauer durch

$$f : s \mapsto \frac{s}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\begin{pmatrix}1\\ \vec{v}\end{pmatrix} + f(0) \tag{13.26}$$

gegeben ist. $\vec{v}$ und $f(0)$ werden durch Anfangs- oder Randbedingungen festgelegt.

Bei vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten ist die Gerade in der Raumzeit $\mathbb{R}^4$ eindeutig festgelegt. Auf ihr ist die Zeit nicht nur stationär, sondern maximal.

## Änderung von Jetfunktionen

Betrachten wir, wie sich eine Jetfunktion $\mathscr{L}$, ausgewertet auf der Verlängerung einer Schar von Kurven $\hat{f}_\lambda$ mit dem Scharparameter $\lambda$ ändert.

Eine Kurvenschar $f_\lambda$ ist eine Kurve im Raum der Kurven. Für jeden Wert des Scharparameters $\lambda$, der in einem Intervall um $\lambda = 0$ variieren möge, ist $f_\lambda$ eine Kurve

$$f_\lambda : t \mapsto f(t,\lambda) = (f^1(t,\lambda), f^2(t,\lambda), \dots f^n(t,\lambda))\ . \tag{13.27}$$

Wir unterstellen, daß die Komponentenfunktionen $f^i$ stetig differenzierbar von beiden Variablen $t$ und $\lambda$ abhängen.

Die Ableitung von $f$ nach $\lambda$ bei $\lambda = 0$ nennen wir die Änderung oder Variation $\delta f$ der Kurve,

$$\delta f^i(t) = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0} f^i(t,\lambda) \ . \tag{13.28}$$

Entsprechend nennen wir die Ableitung der Geschwindigkeit $\frac{df_\lambda}{dt}$ nach $\lambda$ bei $\lambda = 0$ die Änderung $\delta\frac{df}{dt}$ der Geschwindigkeit

$$\delta\frac{df^i}{dt}(t) = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}\frac{\partial}{\partial t}f^i(t,\lambda) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0} f^i(t,\lambda) = \frac{d}{dt}\delta f^i(t) \ . \tag{13.29}$$

Hier haben wir verwendet, daß man die Reihenfolge partieller Ableitungen vertauschen kann. Entsprechend gilt für die höheren Ableitungen

$$\delta\big(\frac{d^k f^i}{dt^k}\big)(t) = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}\big(\frac{\partial}{\partial t}\big)^k f^i(t,\lambda) = \big(\frac{\partial}{\partial t}\big)^k\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0} f^i(t,\lambda) = \big(\frac{d}{dt}\big)^k\delta f^i(t) \ . \tag{13.30}$$

Die Kettenregel besagt für die Änderung einer Jetfunktion $\mathscr{L}$ längs der Kurvenschar

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}(\mathscr{L}\circ\hat{f}_\lambda) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}\mathscr{L}\big(t, f(t,\lambda), \frac{\partial}{\partial t}f(t,\lambda),\ldots\big)\\ &= \frac{\partial f^i}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^i}\circ\hat{f}_0 + \big(\frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}\frac{\partial f^i}{\partial t}\big)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\circ\hat{f}_0 + \ldots\\ &= \delta f^i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^i}\circ\hat{f}_0 + \big(\frac{d}{dt}\delta f^i\big)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\circ\hat{f}_0 + \ldots\\ &= \sum_k\big(\frac{d^k}{dt^k}\delta f^i\big)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^i_{(k)}}\circ\hat{f}_0 \ .\end{aligned} \tag{13.31}$$

Die Änderung von $\mathscr{L}$ hängt ab von der Kurve $f_0$, die für $\lambda = 0$ durchlaufen wird, und von ihrer Änderung $\delta f$.

Falls durch jede Kurve $f$ eine Kurvenschar geht und dabei $\delta f$ zu jeder Zeit $t$ von $f$ nur über den Ort $f(t)$, die Geschwindigkeit $\dot{f}(t)$ und eventuell endlich viele höhere Ableitungen zur Zeit $t$ abhängt, dann ist $\delta f$ wie bei lokalen, infinitesimalen Transformationen (10.11 – 10.15) eine Jetfunktion $\delta x$, ausgewertet auf der Verlängerung $\hat{f}$

$$\delta f = \delta x\circ\hat{f} \ . \tag{13.32}$$

Diese Änderung $\delta x$ definiert eine Ableitung $\delta$ von Jetfunktionen

$$\delta\mathscr{L} = \sum_k\big((d_t)^k\delta x^i\big)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^i_{(k)}} = \delta x^i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^i} + \big(d_t\delta x^i\big)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i} + \big((d_t)^2\delta x^i\big)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial b^i} + \ldots \ , \tag{13.33}$$

die auf der Bahn $\hat{f}_{\lambda=0}$ ausgewertet, die Ableitung von $(\mathscr{L}\circ\hat{f}_\lambda)$ nach $\lambda$ bei $\lambda = 0$ ergibt,

$$(\delta\mathscr{L})\circ\hat{f}_0 = \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}(\mathscr{L}\circ\hat{f}_\lambda) \ . \tag{13.34}$$

Wir nennen die Jetfunktion $\delta\mathscr{L}$ die zu $\delta x$ gehörige Änderung von $\mathcal{L}$.

Die Ableitungen $d_t$ und $\delta$ vertauschen, die Änderung der Zeitableitung einer Funktion ist die Zeitableitung der Änderung,

$$[\delta, d_t] = 0 \ . \tag{13.35}$$

Denn die Koeffizientenfunktionen bei den Ableitungen nach $x_{(k)} = (d_t)^k x$ sind die Ableitungen $(d_t)^k \delta x$.

Die Änderung $\delta\mathscr{L}$ können wir bis auf eine vollständige Ableitung, die integriert nur Randterme beiträgt, als Summe von Produkten mit undifferenzierten $\delta x^i$ schreiben. Ist $\mathcal{L}$ eine Funktion von $\mathcal{J}_1$, so gilt

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} = \delta x^i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} + (d_t \delta x^i)\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i} &= \delta x^i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} + d_t\big(\delta x^i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big) - \delta x^i d_t\big(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big)\\ &= \delta x^i\big(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} - d_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big) + d_t\big(\delta x^i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big) \ .\end{aligned} \tag{13.36}$$

Hängt $\mathcal{L}$ auch von höheren Ableitungen $x_{(k)}$ ab, wälzt man ebenso die Ableitungen von $\delta x_{(k)} = (d_t)^k \delta x$ ab. Die Jetfunktion in $\delta\mathscr{L}$, die dann $\delta x^i$ multipliziert,

$$\frac{\hat{\partial} \mathscr{L}}{\hat{\partial} x^i} := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} - d_t \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i} + \ldots = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \, (d_t)^k \, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i_{(k)}} \tag{13.37}$$

heißt Eulerableitung der Lagrangefunktion $\mathscr{L}$ .

## Prinzip der stationären Wirkung

Die fundamentalen Gleichungen der Physik lassen sich zu der Aussage zusammenfassen, daß ein lokales Funktional, die Wirkung, bei physikalischen Abläufen stationär ist. Mit diesem Prinzip der stationären Wirkung lassen sich Bewegungsgleichungen unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem formulieren und der Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungsgrößen verstehen.

Ein lokales Funktional von Bahnen $f : t \mapsto f(t) = (f^1(t), f^2(t) \ldots f^n(t))$, die mit der Zeit $t$ durchlaufen werden, bildet sie in die reellen Zahlen ab und ist von der Form

$$W[f] = \int dt \, \mathscr{L}(t, f(t), \frac{df}{dt}(t)) = \int dt \, \big(\mathscr{L} \circ \hat{f}\,\big)(t) \ . \tag{13.38}$$

Der Wert solch eines lokalen Funktionals summiert sich aus Beiträgen von allen Zeiten und macht zu jedem Zeitpunkt $t$ nur Gebrauch von einer Jetfunktion $\mathscr{L}(t, x, v)$, der Lagrangefunktion, die auf der Verlängerung $(t, f(t), (df/dt)(t))$ der Bahn ausgewertet wird. Beispielsweise ist $\mathscr{L}(t, x, v) = \sqrt{v^2}$ die zur Weglänge (12.43) gehörige Lagrangefunktion. Zur Bewegung eines Teilchens der Masse $m$ an einer Feder mit Federkonstante $\kappa$ gehört, wie wir noch sehen werden, die Lagrangefunktion

$$\mathscr{L}_{\text{Oszillator}}(t, x, v) = \frac{1}{2}\, m\, v^2 - \frac{1}{2}\, \kappa\, x^2 \ . \tag{13.39}$$

Zwar kann die Lagrangefunktion eines lokalen Funktionals von höheren Ableitungen abhängen, also Funktion eines Jetraumes $\mathcal{J}_k$ mit $k > 1$ sein. Aber wir beschränken unsere Betrachtungen auf Lagrangefunktionen der Zeit $t$, des Ortes $x$ und der Geschwindigkeit $v$, also von $1 + 2n$ Variablen. Nur bei solchen Lagrangefunktionen kann die Energie nach unten beschränkt sein.

Um die Variationsableitung $\frac{\delta W}{\delta f^i(t)}$ der Wirkung $W$ (13.38) anzugeben, betrachten wir eine Schar von Bahnen $f_\lambda$ durch $f = f_{\lambda=0}$. Die Änderungen $\delta f = \delta x \circ \hat{f}$ seien einfachheitshalber durch Jet-Funktion $\delta x$ von $\mathcal{J}_{-1}$ gegeben, die von $t$, nicht aber von $x$ oder $v$ abhängen. Dann ist $\delta f$ irgendeine, nicht weiter eingeschränkte Funktion des Bahnparameters $t$.

Die Wirkung der Bahnen $f_\lambda$ ist eine Funktion des Scharparameters $\lambda$. Ihre Ableitung bei $\lambda = 0$ ist

$$\begin{aligned}\delta W[f,\delta f] &= \frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} W[f_\lambda] = \frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0}\int dt\, \mathscr{L}\circ \hat{f}_\lambda = \int dt\, \frac{\partial}{\partial\lambda}_{|\lambda=0}(\mathscr{L}\circ\hat{f}_\lambda)\\ &\overset{(13.34)}{=} \int dt\,(\delta\mathscr{L})\circ\hat{f}\,) \overset{(13.36)}{=} \int dt\left(\delta x^i\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^i} + d_t(\delta x^i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i})\right)\circ\hat{f}\,.\end{aligned} \tag{13.40}$$

Diese Variation der Wirkung hat die Form

$$\delta W[f,\delta f] = \int dt\,\delta f^i(t)\,\frac{\delta W}{\delta x^i(t)} + \text{Randterme}\,, \tag{13.41}$$

denn das Integral über die vollständige Ableitung ergibt Randterme

$$\int_{\underline{t}}^{\overline{t}} dt\,\frac{d}{dt}(\delta f^i\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\circ\hat{f}\,) = \Big|_{\underline{t}}^{\overline{t}}\,\delta f^i\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\circ\hat{f}\,. \tag{13.42}$$

Die Randterme verschwinden für Kurvenscharen, die durch gemeinsame Randpunkte $f(\underline{t})$ und $f(\overline{t})$ gehen,[2] denn für solche Kurvenscharen verschwinden $\delta f^i(\underline{t}) = 0 = \delta f^i(\overline{t})$.

Die Variation der Wirkung ist ein lokales Funktional von $f$ und $\delta f$. Die Funktion $\frac{\delta W}{\delta f^i(t)}$, die $\delta f^i(t)$ multipliziert, ist die Funktionalableitung oder Variationsableitung der Wirkung (13.38) auf der Kurve $f$. Sie ist, da (13.40) für alle differenzierbaren Funktionen $\delta f^i$ gilt, gemäß dem Fundamentallemma (13.17) eindeutig und gemäß (13.40) die Eulerableitung der Lagrangefunktion, ausgewertet auf $\hat{f}$,

$$\frac{\delta W}{\delta f^i}_{|f} = \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^i}\circ\hat{f}\,. \tag{13.43}$$

Physikalisch durchlaufene Bahnkurven $f_{\text{phys}}$ sind bei Abwesenheit von Reibung und nichtholonomen[3] Zwangsbedingungen durch das Prinzip der stationären Wirkung ausgezeichnet, daß die lokale Wirkung (13.38) auf physikalischen Bahnen $f_{\text{phys}}$ unter allen Variationen bis auf Randterme stationär ist.

[2]Die Einschränkung auf infinitesimale Variationen der Bahn, die am Rand verschwinden, läßt sich aber für viele infinitesimale, lokale Transformationen $\delta x$ nicht einhalten.

[3]Zwangsbedingungen an Geschwindigkeiten und Orte, $\psi(t,x,v) = 0$, die sich nicht als Zeitableitung von Zwangsbedingungen an Orte schreiben lassen, $\psi \neq d_t\phi$, heißen nichtholonom. So ist beim Schlittschuhläufer die Bedingung nichtholonom, daß die Geschwindigkeit stets in Richtung der Kufe zeigt.

Auf physikalischen Bahnen verschwindet die Eulerableitung der Lagrangefunktion

$$\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^i} \circ \hat{f}_{\text{phys}} = 0\ . \tag{13.44}$$

Dies sind die Euler-Lagrange-Gleichungen für physikalische Bahnen. Sie sondern die physikalische Bahn $f_{\text{phys}}$ durch $f(\underline{t})$ und $f(\overline{t})$ unter allen denkbaren Bahnen aus, die gleichzeitig diese Punkte durchlaufen.[4]

Beim harmonischen Oszillator (13.39), beispielsweise, ist die Eulerableitung

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x} - d_t \frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big(\frac{1}{2}\, m\, v^2 - \frac{1}{2}\, \kappa\, x^2\Big) = -\kappa\, x - d_t(m\, v) = -\kappa\, x - m\, b \tag{13.45}$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung $-\kappa\, f_{\text{phys}} - m\, \frac{d^2}{dt^2} f_{\text{phys}} = 0$ hat die Lösung

$$f_{\text{phys}}(t) = a\, \cos(\omega\, t + \varphi)\ , \tag{13.46}$$

wobei $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ das $2\pi$-fache der Frequenz ist. Die Amplitude $a$ und die Phase $\varphi$ werden durch den anfänglichen Ort $f(0)$ und die anfängliche Geschwindigkeit $\dot{f}(0)$ festgelegt.

Die Newtonschen Gleichungen für die Bewegung im Potential $V$ sind die Euler-Lagrangegleichungen der Lagrangefunktion

$$\mathscr{L} = \sum_j \frac{1}{2} m_j (v^j)^2 - V(x^1, \dots, x^n)\ . \tag{13.47}$$

Ihre Eulerableitung verschwindet auf physikalischen Bahnen (keine Summe über $i$)

$$\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^i} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^i} - d_t \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i} = -\partial_{x^i} V - d_t(m_i\, v^i) = -\partial_{x^i} V - m_i\, b^i\ . \tag{13.48}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen (13.44) gelten in allen Koordinatensystemen, denn das Prinzip der stationären Wirkung macht nicht Gebrauch von der Wahl von Koordinaten zur Beschreibung der Bahn. Fassen wir die Koordinaten $x$ als Funktionen $x(t, y)$ von anderen Koordinaten $y$ auf, wobei sich diese Abhängigkeit wie bei einem Karussell mit der Zeit ändern darf, und rechnen wir die Geschwindigkeiten $v = d_t x$ mit der Kettenregel in Geschwindigkeiten $w = d_t y$ um,

$$v^i = d_t x^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} + w^j\, \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\ , \tag{13.49}$$

dann definiert eine Lagrangefunktion $\mathscr{L}(t, x, v)$ die Lagrangefunktion

$$\tilde{\mathscr{L}}(t, y, w) = \mathscr{L}(t, x(t, y), \frac{\partial x}{\partial t} + w^j\, \frac{\partial x}{\partial y^j})\ , \tag{13.50}$$

[4] Ob durch festgelegte Randpunkte eine Kurve geht, die die Wirkung stationär macht, bedarf genauerer Untersuchung des Einzelfalls. Beim harmonischen Oszillator existiert keine physikalische Bahn, die zu den Zeiten $t$ und $t + \frac{2\pi}{\omega}$ durch verschiedene Punkte geht. Beim relativistischen Teilchen müssen die Ereignisse zu Beginn und Ende der Weltlinie zeitartig zueinander liegen.

und die Euler-Lagrange-Gleichungen von $\tilde{\mathscr{L}}$ gelten in $y$-Koordinaten genau dann, wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen von $\mathscr{L}$ in $x$-Koordinaten erfüllt sind. Es ist ja nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\partial}\tilde{\mathscr{L}}}{\hat{\partial}y^i} &= \big(\frac{\partial}{\partial y^i} - d_t\frac{\partial}{\partial w^i}\big)\mathscr{L}(t, x(t,y), \frac{\partial x}{\partial t} + w^j\,\frac{\partial x}{\partial y^j}) \\
&= \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} + \big(\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^i \partial t} + w^l\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^i \partial y^l}\big)\,\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^j} - d_t\big(\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^j}\big) \\
&= \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} + \big(\frac{\partial^2 x^j}{\partial t \partial y^i} + w^l\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^l \partial y^i}\big)\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^j} - \big(d_t\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\big)\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^j} - \frac{\partial x^j}{\partial y^i} d_t\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^j} \\
&= \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\big(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} - d_t\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^j}\big) = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^j}\ .
\end{aligned} \tag{13.51}$$

Beispielsweise gehört zur Newtonschen Bewegung eines Teilchens im Keplerpotential in kartesischen Koordinaten die Lagrangefunktion

$$\mathscr{L}(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{2}\,m\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{13.52}$$

und in Kugelkoordinaten die Lagrangefunktion

$$\tilde{\mathscr{L}}(t, r, \theta, \varphi, v_r, v_\theta, v_\varphi) = \frac{1}{2}\,m\,(v_r^2 + r^2\,v_\theta^2 + r^2\,\sin^2\theta\,v_\varphi^2) + \frac{\alpha}{r}\ . \tag{13.53}$$

Mit welcher von beiden Lagrangefunktionen man die Bewegungsgleichungen formuliert, kann man nach Bequemlichkeit wählen.

Eine Funktion $\mathscr{L}$ der Jetvariablen läßt sich genau dann als Zeitableitung (7.6) einer Funktion $K$ der Jetvariablen schreiben, wenn ihre Eulerableitung als Funktion der Jetvariablen verschwindet.

Einerseits verschwindet die Eulerableitung von $d_t K(t,x) = \partial_t K + v^j\,\partial_{x^j} K$,

$$\big(\partial_{x^i} - d_t\partial_{v^i}\big)\big(\partial_t K + v^j\partial_{x^j}K\big) = \partial_{x^i}\big(\partial_t K + v^j\partial_{x^j}K\big) - d_t\partial_{x^i}K = 0\ . \tag{13.54}$$

Um die Umkehrung zu zeigen, schreiben wir die Lagrangefunktion als Integral über ihre Ableitung

$$\mathscr{L}(t, x, v) = \mathscr{L}(t, 0, 0) + \int_0^1 d\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathscr{L}(t, \lambda\,x, \lambda\,v)\ . \tag{13.55}$$

Die Ableitung der Lagrangefunktion nach $\lambda$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\lambda}(t, \lambda\,x, \lambda\,v) &= x^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} + v^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i} = x^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} + \big(d_t x^i\big)\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i} \\
&= x^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} + d_t\big(x^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big) - x^i\big(d_t\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big) = x^i\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^i} + d_t\big(x^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}\big)\ ,
\end{aligned} \tag{13.56}$$

wobei $\mathscr{L}$ bei $(t, \lambda\,x, \lambda v)$ abzuleiten ist. Demnach schreibt sich die Lagrangefunktion als

$$\mathscr{L}(t, x, v) = x^i\int_0^1 d\lambda\,\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^i}_{|(t,\lambda\,x,\lambda\,v)} + d_t\big(x^i\int_0^1 d\lambda\,\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i}_{|(t,\lambda\,x,\lambda\,v)} + \int^t dt'\,\mathscr{L}(t', 0, 0)\big)\ . \tag{13.57}$$

Dies ist die Zeitableitung einer Jetfunktion, falls die Eulerableitung der Lagrangefunktion als Jetfunktion für alle $(t, \lambda\,x, \lambda\,v)$ verschwindet.

## Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Im Kapitel „Erhaltungsgrößen und Symmetrien“ (ab Seite 93) haben wir kontinuierliche Transformationen $T_\lambda$ (mit $T_{\lambda=0} = \mathrm{id}$) von Bahnen $f : t \mapsto f(t)$ untersucht. Die Transformationen heißen lokal, wenn sich die infinitesimale Transformation für *alle* Bahnen $f$ als Jetfunktion $\delta x$, ausgewertet auf der Verlängerung $\hat{f}$, schreiben läßt

$$\partial_{\lambda_{|\lambda=0}} T_\lambda f = \delta x \circ \hat{f} \ . \tag{13.58}$$

Solch eine infinitesimale Transformation ist eine infinitesimale Symmetrie der Wirkung (13.4), wenn sie die Wirkung nur um Randterme ändert, wenn sich also die zugehörige Lagrangefunktion nur um eine Zeitableitung einer Jetfunktion $K$ ändert,

$$\partial_{\lambda_{|\lambda=0}} (\mathscr{L} \circ \hat{f}_\lambda) \overset{13.34}{=} \delta\mathscr{L} \circ \hat{f} = (d_t K) \circ \hat{f} \ . \tag{13.59}$$

Wegen (13.36) ist dies gleichbedeutend mit

$$\delta x^i \, \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial} x^i} + d_t\big(\delta x^i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i} - K\big) = 0 \ . \tag{13.60}$$

Diese Definitionsgleichung dessen, was eine infinitesimale Symmetrie $\delta x$ ist, verknüpft sie mit einer zugehörigen Erhaltungsgröße, der Noetherladung $Q$,

$$Q = \delta x^i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v^i} - K \ . \tag{13.61}$$

Denn die physikalischen Bahnen erfüllen die Bewegungsgleichungen (13.44) und $Q$ ist daher auf den physikalisch durchlaufenen Bahnen $f_{\mathrm{phys}}$ zeitunabhängig,

$$(d_t Q) \circ \hat{f}_{\mathrm{phys}} = \frac{d}{dt}(Q \circ \hat{f}_{\mathrm{phys}}) = 0 \ . \tag{13.62}$$

Zu jeder infinitesimalen Symmetrie der Wirkung gehört eine Erhaltungsgröße $Q$.

Bei jeder Lagrangefunktion kann man für jede gegebene infinitesimale Transformation $\delta x^i(t, x, v)$ nach Ausrechnen von $\delta\mathscr{L}$ leicht entscheiden, ob sie eine infinitesimalen Symmetrie ist. Die Funktion $\delta\mathscr{L}$ der Jetvariablen läßt sich genau dann als Ableitung $d_t K$ schreiben, wenn die Eulerableitung von $\delta\mathscr{L}$ verschwindet (13.57).

Umgekehrt gehört gemäß (10.2) zu jeder Erhaltungsgröße eine infinitesimale Symmetrie der Wirkung! Denn eine Jetfunktion $\overline{Q}(t, x, v)$ ist eine Erhaltungsgröße, wenn ihre Zeitableitung aufgrund der Bewegungsgleichungen verschwindet, also wenn sich ihre Zeitableitung als Vielfaches der Eulerableitungen $\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial} x^i}$ und eventuell von den Ableitungen der Eulerableitungen[5] schreiben läßt

$$d_t \overline{Q} + R^i_0 \, \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial} x^i} + R^i_1 \, d_t \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial} x^i} = 0 \ . \tag{13.63}$$

[5] Falls höhere Ableitungen von $\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial} x^i}$ auftreten, wälzt man auch sie mit der Produktregel ab.

Die Größen $R_0^i$ und $R_1^i$ hängen auf nicht weiter festgelegte Art von den Jetvariablen ab. Fassen wir die Terme mit der Produktregel zusammen, so ist die Definitionsgleichung einer Erhaltungsgröße die Definition einer infinitesimalen Symmetrie (13.60)

$$d_t\big(\overline{Q} + R_1^i \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^i}\big) + \big(R_0^i - d_t R_1^i\big)\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^i} = 0\ . \tag{13.64}$$

Die Wirkung ist also unter der infinitesimalen Transformation

$$\delta x^i = R_0^i - d_t R_1^i \tag{13.65}$$

bis auf Randterme invariant. Die Erhaltungsgröße $Q$ stimmt auf physikalischen Bahnen mit $\overline{Q}$ überein (13.44)

$$Q = \overline{Q} + R_1^i \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^i}\ , \quad Q \circ \hat{f}_{\text{phys}} = \overline{Q} \circ \hat{f}_{\text{phys}}\ . \tag{13.66}$$

Der Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungsgrößen (13.60) ist von Emmy Noether 1918 formuliert worden.

**Noethertheorem:** *Zu jeder infinitesimalen Symmetrie der Wirkung gehört eine Erhaltungsgröße. Umgekehrt gehört zu jeder Erhaltungsgröße eine infinitesimale Symmetrie der Wirkung.*

Am Noethertheorem ist nichts zu beweisen, man muß nur erkennen, daß die Definition (13.60) einer infinitesimalen Symmetrie der Wirkung eine Erhaltungsgröße definiert und daß umgekehrt die Definition einer Erhaltungsgröße eine infinitesimale Symmetrie definiert. Das Theorem ist deshalb wichtig, weil häufig Symmetrien der Wirkung offensichtlich sind und als geometrische Eigenschaft einfach durch Ansehen gefunden werden können.

Anders als bei der Herleitung der Variationsableitung kann man bei infinitesimalen Transformationen nicht unterstellen, daß sie am Rand verschwinden. So eingeschränkt definiert, würde nicht zu jeder Erhaltungsgröße eine infinitesimale Symmetrie gehören.

Erhaltungsgrößen sind ausschlaggebend für die Frage, ob die Bewegungsgleichungen integrabel sind, das heißt, ob sich die Lösungen durch Rechenoperationen wie Integrieren gegebener Funktionen und Auflösen implizit gegebener Funktionen angeben lassen.

Ohne die Herleitung oder auch nur die verwendeten Begriffe zu erklären, sei hier nur raunend angemerkt: Betreffen die Bewegungsgleichungen $N$ Freiheitsgrade, so sind die Gleichungen genau dann integrabel, wenn es ebenso viele unabhängige Erhaltungsgrößen $Q_1, Q_2 \dots Q_N$ gibt, die in Involution sind, das heißt, ihre zugehörigen infinitesimale Transformationen $\delta_i$ müssen hintereinander ausgeführt, wie bei Verschiebungen, zu einem Ergebnis führen, das nicht von der Reihenfolge abhängt, $\delta_i\,\delta_j = \delta_j\,\delta_i$.

Ändert man integrable Bewegungsgleichungen durch Zusatzterme ab, so führen solche Störungen integrabler Bewegung, selbst wenn sie klein sind, zu chaotischen Bahnen, deren Langzeitentwicklung man wegen der nur ungenau bekannten Anfangswerte und wegen der Rundungsfehler numerisch nicht bestimmen kann. Die chaotischen Bahnen haben zwar im Raum aller Bahnen nur ein kleines Maß, das heißt, sie sind vergleichsweise unwahrscheinlich. Aber sie liegen dicht: in jeder Umgebung von stabilen Bahnen gibt es chaotische Bahnen. Die Herleitung und Diskussion dieser angedeuteten Erkenntnisse füllt Bücher [2, 3, 8, 15], auf die hier nur verwiesen sei.

Über die Tatsache hinaus, daß Symmetrien der Wirkung mit Erhaltungsgrößen zusammenhängen, sind Symmetrien wichtig, weil man aus einer Lösung der Bewegungsgleichungen durch Symmetrietransformationen weitere Lösungen gewinnen kann. Zum Beispiel erhält man in der Allgemeinen Relativitätstheorie das Gravitationsfeld einer gleichförmig bewegten Masse aus demjenigen der ruhenden Masse durch eine Lorentztransformation und kann daraus ohne weiteres schließen, daß die zusätzliche, kinetische Energie keinen gravitativen Kollaps verursacht.

Transformationen, die Lösungen von Bewegungsgleichungen auf Lösungen abbilden, sind nicht unbedingt Symmetrien der Wirkung. Zum Beispiel werden die Lösungen $f : t \mapsto f(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t + x_0$ der Bewegungsgleichung $\ddot{x} = -g$ eines senkrecht fallenden Teilchens durch $T_\lambda f : t \mapsto e^{2\lambda}\, f(e^{-\lambda}\,t)$ auf Lösungen abgebildet, aber die infinitesimale Transformation $\delta x = 2x - t\,v$ läßt die Lagrangefunktion $\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\,v^2 - m\,g\,x$ nicht invariant, $\delta\mathscr{L} = d_t(-t\mathscr{L}) + 5\mathscr{L} + 2m\,g\,x \neq d_t K$.

Die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\,\vec{v}^2$ eines nichtrelativistischen Teilchens ist invariant unter Drehungen und Verschiebungen. Sie hängt nicht davon ab, wo das sich bewegende Teilchen ist und nicht davon, in welche Richtung es sich bewegt. Besteht die Lagrangefunktion aus solch einer verschiebungsinvarianten kinetischen Energie und ist die potentielle Energie in einer Richtung $c^k$ konstant $V(x^k) = V(x^k + \lambda c^k)$, so ist die Lagrangefunktion unter dieser Verschiebung invariant, $\delta\mathscr{L} = 0$.

Die zur infinitesimalen Verschiebung $\delta x^k = c^k$ gehörige Erhaltungsgröße (13.61)

$$c^k \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^k} = c^k p^k \ , \quad p^k = m\,v^k \tag{13.67}$$

ist definitionsgemäß der nichtrelativistische Impuls $\vec{p}$ in Richtung des Vektors $\vec{c}$. Verschiebungsinvarianz ist die Ursache von Impulserhaltung.

Eine Variable $x^1$, die in der Lagrangefunktion nur mit ihrer Geschwindigkeit $v^1$ auftritt, heißt zyklische Variable

$$x^1 \text{ zyklisch} \Leftrightarrow \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^1} = 0 \ . \tag{13.68}$$

Ist $x^1$ zyklisch, so ist die Lagrangefunktion invariant unter der infinitesimalen Translation $\delta x^1 = 1$, $\delta x^j = 0$ für $j \neq 1$, $\delta v^i = 0$, und die Noetherladung (13.61) stimmt mit dem zu $x^1$ kanonisch konjugierten Impuls überein, $Q = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^1}$. Er ist wegen der Euler-Lagrange-Gleichungen (13.44) offensichtlich erhalten

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^1} = 0 \quad \text{und} \quad \Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^1} - d_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^1}\Big) \circ \hat{f}_{\text{phys}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^1} \circ \hat{f}_{\text{phys}}\Big) = 0 \ . \tag{13.69}$$

Ist die Wirkung invariant unter Drehungen um eine Achse $\vec{n}$ (10.8), so ist die zugehörige Noether-Ladung definitionsgemäß der Drehimpuls $\vec{n}\cdot\vec{L}$ in Richtung dieser Achse.

Zur Zeitverschiebung (10.4) gehört gemäß (13.58) die infinitesimale Transformation

$$\delta x^k = v^k \ . \tag{13.70}$$

Dies ist eine infinitesimale Symmetrie der Wirkung, falls die Lagrangefunktion $\mathscr{L}(t,x,v)$ nicht von $t$ abhängt, $\partial_t\mathscr{L}=0$, denn dann gilt

$$\delta\mathscr{L}=\delta x^k\,\partial_{x^k}\mathscr{L}+\mathrm{d}_t\delta x^k)\,\partial_{v^k}\mathscr{L}=v^k\,\partial_{x^k}\mathscr{L}+b^k\,\partial_{v^k}\mathscr{L}=\mathrm{d}_t\mathscr{L}-\partial_t\mathscr{L}=\mathrm{d}_t\mathscr{L}\;, \quad (13.71)$$

also (13.59) mit $K=\mathscr{L}$.

Die zur Symmetrie unter Zeitverschiebung gehörige Noether-Ladung (13.61)

$$E=v^k\frac{\partial}{\partial v^k}\mathscr{L}-\mathscr{L} \quad (13.72)$$

ist definitionsgemäß die Energie $E$. Sie ist erhalten, wenn die Lagrangefunktion nicht von der Zeit abhängt.

Aus dem Ausdruck für die Energie folgt, wie sich die Lagrangefunktion aus den Anteilen $E_n$ der Energie zusammensetzt, die homogen vom Grad $n$ in den Geschwindigkeiten $v$ sind. Der Operator $v\,\partial_v$ zählt den Homogenitätsgrad ab: $v\,\partial_v v^n=n\,v^n$. Jeder Term $E_n$ in der Energie, der $n$ Faktoren $v$ enthält, $n\neq 1$, muß in der Lagrangefunktion mit Vorfaktor $1/(n-1)$, erscheinen, damit (13.72) $E=\sum_n E_n$ lautet. Ein Anteil $\mathscr{L}_1=qv^iA_i(x)$, der linear in den Geschwindigkeiten ist, trägt nicht zur Energie bei, wohl aber eine magnetische Kraft $\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}_1}{\hat{\partial}x^j}=q\,v^i(\partial_{x^j}A_i-\partial_{x^i}A_j)$ zu den Bewegungsgleichungen

$$\mathscr{L}=\sum_{n\neq 1}\frac{E_n}{n-1}+\mathscr{L}_1\;. \quad (13.73)$$

Besteht die Energie wie bei Newtonscher Bewegung im Potential aus der geschwindigkeitsunabhängigen potentiellen Energie, $n=0$, und aus kinetischer Energie, die quadratisch in den Geschwindigkeiten ist, $n=2$, so ist ohne solch eine Magnetkraft die Lagrangefunktion die Differenz

$$\mathscr{L}_{\text{Newton}}(t,x,v)=E_{\text{kin}}-E_{\text{pot}}\;. \quad (13.74)$$

## Brachistochrone und Tautochrone

Die Frage nach der Kurve in einer vertikalen Ebene, auf der ein Teilchen im homogenen Gravitationsfeld schnellstens von einem Startpunkt reibungsfrei zu einem tieferen Zielpunkt gleitet, begründete die Variationsrechnung. Johann Bernoulli hatte 1696 die Mathematiker seiner Zeit mit diesem Problem herausgefordert. Außer ihm lösten sein Bruder Jakob und Leibniz, L'Hospital und Newton die Aufgabe. Mit dem Noether-Theorem können das heute auch Studenten im zweiten Semester.

Denn es handelt sich um energieerhaltende Bewegung längs einer Bahn $y(x)$, die im Laufe der Zeit durchlaufen wird, $t\mapsto(x(t),y(x(t)))$. Das Potential ist $V(x)=m\,g\,y(x)$. Wir wählen den Ursprung des Koordinatensystems als Startpunkt und $t=0$ als die Startzeit, zu der das Teilchen losgleitet. Dann verschwindet die Energie

$$0=\frac{1}{2}\,m\left((v_x)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(v_x)^2\right)+m\,g\,y\;. \quad (13.75)$$

Wir lösen nach $v_x$ für den Fall auf, daß der Zielort $(\overline{x}, y(\overline{x}))$ bei $\overline{x} > 0$ liegt, dann ist $v_x$ positiv. Die Ableitung der Umkehrfunktion $t(x)$ ist der Kehrwert von $v_x$

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1 + (\frac{dy}{dx})^2}{-2g\,y}}\ , \tag{13.76}$$

und die Zeit, die zu minimieren ist, ist das Integral

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\overline{x}} dx \sqrt{\frac{1 + (\frac{dy}{dx})^2}{-y}}\ . \tag{13.77}$$

Um an die bisher verwendete Notation bei Variationsproblemen physikalischer Bahnen anzuschließen, bezeichnen wir die Integrationsvariable mit $t$ und die Funktion $y$ mit $-f$ und minimieren einfachheitshalber das mit $\sqrt{2g}$ multiplizierte Funktional, nämlich

$$W[f] = \int dt \sqrt{\frac{1 + (\frac{df}{dt})^2}{f}} = \int dt\, \big(\mathcal{L} \circ \hat{f}\big)(t)\ . \tag{13.78}$$

Dies ist eine Wirkung mit Lagrangefunktion $\mathcal{L}(t, x, v) = \sqrt{(1 + v^2)/x}$. Sie ist im Bereich $x > 0$ definiert. Die Lagrangefunktion hängt nicht von der Zeit ab, $\partial_t \mathcal{L} = 0$, ist also zeittranslationsinvariant. Die nach dem Noethertheorem zu dieser Lagrangefunktion gehörige Energie

$$v\,\partial_v \mathcal{L} - \mathcal{L} = -1/\sqrt{(1 + v^2)\,x} \tag{13.79}$$

ist auf der Bahn $f$, auf der $W$ stationär ist, erhalten. Diese Funktion $f$ erfüllt also mit einer positiven Konstanten $R$ die Gleichung

$$(1 + (\frac{df}{dt})^2)\, f = 2R \quad \text{oder} \quad (\frac{df}{dt})^2 - \frac{2R}{f} = -1\ . \tag{13.80}$$

Das ist der Energiesatz eines senkrecht im Keplerpotential fallendes Teilchen (10.76) mit $m = 2$, $2R = \alpha$. Die (10.81) entsprechende Lösung ist, wenn wir zu den ursprünglichen Bezeichnungen zurückkehren und $y(x)$ parametrisch darstellen, die Zykloide

$$\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ \cos\varphi - 1 \end{pmatrix}\ . \tag{13.81}$$

Der Radius $R$ der Zykloide, die wegen (13.80) am Startpunkt $s = (0, 0)$ eine senkrechte Tangente hat und durch den Zielpunkt $p = (\overline{x}, \overline{y})$, $\overline{x} > 0$, $\overline{y} < 0$, geht, ergibt sich aus der Nullstelle $0 < \overline{\varphi} < 2\pi$ von $(\cos\overline{\varphi} - 1)/(\overline{\varphi} - \sin\overline{\varphi}) - \overline{y}/\overline{x}$ als $R = \overline{x}/(\overline{\varphi} - \sin\overline{\varphi})$.

Um $R$ graphisch zu bestimmen, zeichnet man die Strecke von $s$ nach $p$ und die Zykloide eines unter der $x$-Achse rollenden Rades mit irgend einem Radius. Sie schneidet die Strecke in einem Verhältnis $a$ zur Gesamtlänge der Strecke.

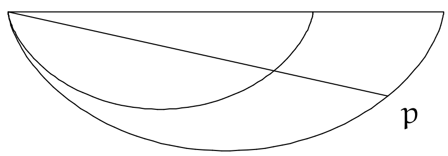



Abbildung 13.1: Brachistochrone

Die Zykloide des um $1/a$ vergrößerten Rades geht durch $p$ und ist die gesuchte Brachistochrone. Falls das Gefälle $-\overline{y}/\overline{x}$ kleiner als $2/\pi$ ist, ist $\overline{\varphi} > \pi$, und ein Teil der Brachistochrone liegt niedriger als das Ziel $p$.

Die Zykloide ist auch die Tautochrone, das heißt die Bahnkurve im homogenen Gravitationsfeld, auf der Schwingungen um die Ruhelage unabhängig von der Auslenkung gleich lang dauern. Parametrisieren wir (13.81) so, daß die Ruhelage bei $\varphi = 0$ durchlaufen wird, und verwenden wir sie als Koordinatenursprung, dann ist sie die Zykloide

$$\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \varphi + \sin\varphi \\ -\cos\varphi + 1 \end{pmatrix} . \tag{13.82}$$

Die Weglänge $s(\overline{\varphi})$ von $\varphi = 0$ bis $\overline{\varphi}$ beträgt

$$s(\overline{\varphi}) = R\int_0^{\overline{\varphi}} d\varphi\,\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = R\int_0^{\overline{\varphi}} d\varphi\,2\cos\frac{\varphi}{2} = 4R\sin\frac{\overline{\varphi}}{2}\ , \tag{13.83}$$

denn nach Additionstheorem der Winkelfunktionen gilt $1+\cos(\varphi/2+\varphi/2) = 2\cos^2\varphi/2$.

Fassen wir $\varphi$ als die Funktion $\varphi(s)$ der Weglänge $|s| \leq 4R$ auf, dann ist wegen

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} \tag{13.84}$$

die kinetische Energie einfach

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 . \tag{13.85}$$

Die potentielle Energie $V(s) = m\,g\,R\,(1-\cos\varphi)$ ist wegen $1-\cos\varphi = 2\sin^2\varphi/2 = 2(\frac{s}{4R})^2$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\,\omega^2 s^2\ ,\ \ \omega^2 = \frac{g}{4\,R}\ . \tag{13.86}$$

Also ist die Energie, ausgedrückt durch die Weglänge und ihre Zeitableitung, die Energie eines harmonischen Oszillators, der unabhängig von der Auslenkung mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{g/4R}$ schwingt.

# 14 Maxwellgleichungen

Elektrische und magnetische Felder $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ verändern durch die Lorentzkraft

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}}(x, \vec{v}) = q\left(\vec{E}(x) + \vec{v} \times \vec{B}(x)\right) \tag{14.1}$$

den Impuls $\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$ (9.13) und damit die Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Probeteilchens mit Masse $m$ und Ladung $q$, das zur Zeit $t$ den Ort $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ durchläuft,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} \ . \tag{14.2}$$

In (14.1) faßt der Vierervektor $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ mit $x^0 = t$ die Orts- und Zeitkoordinaten zusammen.

Die elektromagnetischen Felder hängen mit der Ladungsdichte $\rho$ und der Stromdichte $\vec{j}$ durch die Maxwellgleichungen zusammen,

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \ , \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \ , \tag{14.3}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \ , \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \ , \tag{14.4}$$

wobei $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ ist und alle Größen im SI-System angegeben sind.

Die in diesen Gleichungen auftretenden Differentialoperatoren Divergenz und Rotation sind in kartesischen Koordinaten definiert als

$$\operatorname{div} \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \partial_i E^i \ , \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x \end{pmatrix} \ , \ (\operatorname{rot} \vec{B})^i = \epsilon_{ijk} \partial_j B^k \ . \tag{14.5}$$

Im Gaußschen System wird das mit $c$ multiplizierte magnetische Feld $B$ des SI-Systems als Magnetfeld bezeichnet,

$$\vec{B}_G = c\,\vec{B} \ . \tag{14.6}$$

Es hat, wie sich an der Lorentzkraft $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_G)$ zeigt, dieselbe Maßeinheit wie das elektrische Feld. Zudem verwendet das Gaußsche Einheitensystem $4\pi\epsilon_0$ statt der Stromeinheit Ampere als Grundeinheit (siehe Kapitel 25) und verzichtet darauf, bei physikalischen Größen diese Einheit anzugeben. Es setzt also $4\pi\epsilon_0 = 1$ und $c\,\mu_0 = 4\pi/c$ (Tabelle 25.3) Dann haben die Maxwellgleichungen die Form

$$\operatorname{div} \vec{B}_G = 0 \ , \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B}_G = 0 \ , \tag{14.7}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\,\rho \ , \quad \operatorname{rot} \vec{B}_G - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \ . \tag{14.8}$$

Um das Wesentliche der Dynamik der elektromagnetischen Wechselwirkungen herauszuarbeiten, verwenden wir für Länge und Ladung relativistische Heaviside-Lorentz-Einheiten, in denen $c = 1$ und $\epsilon_0 = 1$ sind. Dann treten in den Maxwellgleichungen als Koeffizienten nur noch Vorzeichen auf,

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0\ , \quad \operatorname{rot}\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0\ , \tag{14.9}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho\ , \quad \operatorname{rot}\vec{B} - \partial_t\vec{E} = \vec{j}\ . \tag{14.10}$$

## Integralsätze

Zur Untersuchung der Maxwellgleichungen benötigen wir den folgenden, allgemeinen Integralsatz. Erst später, wenn wir seine Nützlichkeit gesehen haben, werden wir ihn beweisen. Er besagt, daß das $p+1$-dimensionale Integral über eine geeignete Ableitung $d\omega$ über eine Fläche (ein Gebiet oder ein Volumen) $\mathcal{F}$ dem $p$-dimensionalen Integral über den Rand der Fläche (des Gebietes oder des Volumens) $\partial\mathcal{F}$ (lies „Rand von ef") über den Integranden $\omega$ gleich ist,

$$\int_{\mathcal{F}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{F}} \omega\ . \tag{14.11}$$

Insbesondere ist nach dem Stokesschen Satz das zweidimensionale Integral über eine Fläche $\mathcal{F}$ über die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{B}$ dem Umlaufintegral über $\vec{B}$ längs der Randkurve $\partial\mathcal{F}$ gleich.

$$\int_{\mathcal{F}} d^2\vec{f}\cdot \operatorname{rot}\vec{B} = \int_{\partial\mathcal{F}} d\vec{s}\cdot\vec{B} \tag{14.12}$$

Die Randkurve wird, von einem benachbarten, inneren Flächenpunkt aus gesehen, wie eine Rechtsschraube mit Vortrieb in Richtung des Flächennormalenvektors durchlaufen.

Nach dem Gaußschen Satz ist das Integral über ein dreidimensionales Volumen $\mathcal{V}$ über die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{E}$ dem zweidimensionalen Flächenintegral über die Randfläche $\partial\mathcal{V}$ mit nach außen gerichtetem Normalenvektor $d^2\vec{f}$ mal $\vec{E}$ gleich,

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \operatorname{div}\vec{E} = \int_{\partial\mathcal{V}} d^2\vec{f}\cdot\vec{E}\ . \tag{14.13}$$

## Magnetfeld eines zylindersymmetrischen Stromfadens

Mit dem Satz von Stokes bestimmen wir das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes, den wir der einfachen Geometrie wegen als gerade, unendlich lang und mit kreisförmigem Querschnitt von einer homogenen Stromdichte $\vec{j}$ durchflossen vorgeben. Sie ist invariant unter Drehungen um den Draht und unter Verschiebungen längs des Drahtes und in geeigneten Koordinaten im Drahtinneren für $x^2 + y^2 \leq R^2$

$$\vec{j}(\vec{x}) = \frac{J}{\pi R^2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ . \tag{14.14}$$

Außerhalb des Drahtes, für $x^2 + y^2 > R^2$, verschwindet sie. Es bezeichnen hierbei $J$ den Gesamtstrom durch den Draht und $2R$ seinen Durchmesser.

Für diese Stromdichte suchen wir eine zeitunabhängige Lösung von $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}$. Da die Stromdichte zylindersymmetrisch ist, untersuchen wir den Ansatz, daß das Magnetfeld ebenfalls zylindersymmetrisch ist und in der Ebene quer zum Draht in Richtung zunehmenden Polarwinkels zeigt,

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{e}_\varphi \, B(\sqrt{x^2 + y^2}) \ , \quad \vec{e}_\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{14.15}$$

Wie groß der Betrag $B(\sqrt{x^2 + y^2})$ des Magnetfeldes ist, folgt mit dem Stokesschen Satz. Wenn wir ihn für konzentrische Kreisscheiben $K_{r,z} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le r^2\}$ parallel zur $z$-Ebene verwenden, können wir die beteiligten Integrale einfach auswerten, denn die Integranden sind (stückweise) konstant. Das Flächenintegral über die Stromdichte ergibt für $r > R$ den Gesamtstrom $J$ und für $r < R$ nur den Anteil $J\, r^2/R^2$ des Stroms, der durch den Flächenanteil $\pi r^2$ des Drahtquerschnitts $\pi R^2$ fließt,

$$\int_{K_{r,z}} d^2\vec{f} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \int_{K_{r,z}} d^2\vec{f} \cdot \vec{j} = J \cdot \begin{cases} \frac{r^2}{R^2} & \text{für } r \le R \\ 1 & \text{für } r > R \end{cases} . \tag{14.16}$$

Nach dem Stokesschen Satz ist dies gleich dem Umlaufintegral über $\vec{B}$ längs der Randkurve $\partial K_{r,z}: \ \varphi \mapsto (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z) \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Nach Ansatz zeigt das Magnetfeld $\vec{B}$ in Richtung des Wegelements $d\vec{s} = d\varphi \, r \, \vec{e}_\varphi$, ihr Skalarprodukt ist das Produkt der Beträge, $r\, B(r)$. Es ist auf der Kreiskurve konstant, demnach ist das Umlaufintegral

$$\int_{K_{r,z}} d^2\vec{f} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \int_{\partial K_{r,z}} d\vec{s} \cdot \vec{B} = 2\pi r \, B(r) \ . \tag{14.17}$$

Für $B(r)$ erhalten wir

$$B(r) = \frac{J}{2\pi r} \cdot \begin{cases} \frac{r^2}{R^2} & \text{für } r \le R \\ 1 & \text{für } r > R \end{cases} , \quad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{J}{2\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} \frac{1}{R^2} & \text{für } r \le R \\ \frac{1}{x^2+y^2} & \text{für } r > R \end{cases} . \tag{14.18}$$

Nachrechnen zeigt, daß $\vec{B}$ die Maxwellgleichungen $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}$ erfüllt. Diese rechnerische Probe ist erforderlich, denn die Gründe für den Ansatz (14.15) sind nicht zwingend: Lösungen von Differentialgleichungen mit Symmetrien müssen nicht unbedingt invariant unter der Symmetrie sein, sondern nur in Lösungen übergehen.

Der Strom im Draht wird angetrieben von einem elektrischen Feld, das, wie in einem Plattenkondensator mit unendlich fernen Platten, konstant ist,

$$\vec{E} = \frac{J}{\sigma \pi R^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \ . \tag{14.19}$$

$\sigma$ bezeichnet die Leitfähigkeit des Ohmschen Drahtes. Außen fließt kein Strom, weil das Vakuum nicht leitet, $\sigma(\vec{x}) = 0$ für $x^2 + y^2 > R^2$. Der Draht ist ungeladen, $\rho = 0$. Der Strom kommt durch die unterschiedliche Geschwindigkeit der Ladungsträger zustande, die Elektronen sind beweglich, die Atomrümpfe sind in Kristallgitter eingebaut. Offensichtlich löst $\vec{E}$ die statischen Maxwellgleichungen $\operatorname{div}\vec{E} = \rho = 0$ und $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$.

## Stokessche Schleife

Daß der Anteil des $\vec{E}$-Feldes in Drahtrichtung an der Oberfläche des Drahtes stetig sein muß, zeigt die Betrachtung einer sogenannten Stokesschen Schleife. Das ist ein schmales Rechteck, dessen eine Längsseite parallel zur Oberfläche im Draht verläuft, während die andere außerhalb verläuft. Macht man das Rechteck schmaler und schmaler, verschwindet mit der Länge der schmalen Rechteckseite das Flächenintegral über $\operatorname{rot}\vec{E}$ und die Beiträge der kurzen Seiten zum Umlaufintegral. Da das Umlaufintegral insgesamt verschwindet, heben sich die Beiträge der beiden in Gegenrichtung durchlaufenen Längsseiten auf,

$$\operatorname{rot}\vec{E}\ \text{stetig} \ : \ d\vec{s}\cdot(\vec{E}_{\text{innen}} - \vec{E}_{\text{außen}}) = 0\ , \quad \vec{E}_{\text{tangential, innen}} = \vec{E}_{\text{tangential, außen}}\ . \tag{14.20}$$

## Elektrisches Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

Das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen, statischen Ladungsverteilung folgt aus dem Gaußschen Integralsatz und dem naheliegenden Ansatz, daß das $\vec{E}$-Feld zeitunabhängig, radial gerichtet und invariant unter Drehungen ist, sodaß der Betrag von $\vec{E}$ nur vom Betrag $r$ des Ortsvektors $\vec{x}$ abhängt,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r}\,E(r)\ , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{x}|\ . \tag{14.21}$$

Den Betrag des $\vec{E}$-Feldes bestimmt man, indem man $\operatorname{div}\vec{E} = \rho$ (14.10) über eine Kugel $K_r$ um den Ursprung mit Radius $r$ integriert, $K_r = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$. Das Integral über $\rho$ ist die Ladung $Q(r)$, die in der Kugel eingeschlossen ist. Das Volumenintegral über $\operatorname{div}\vec{E}$ ist nach dem Gaußschen Satz dem Integral über die Kugeloberfläche $\partial K_r$ gleich,

$$Q(r) = \int_{K_r} d^3x\ \operatorname{div}\vec{E}(x) = \int_{\partial K_r} d^2\vec{f}\cdot\vec{E}(x)\ . \tag{14.22}$$

Auf der Kugeloberfläche ist die nach außen gerichtete Flächennormale $d^2\vec{f}$ parallel zur Richtung des $\vec{E}$-Feldes, das Skalarprodukt $d^2\vec{f}\cdot\vec{E}$ ist also gleich dem Produkt der Beträge. Der Betrag des elektrischen Feldes ist auf der Kugeloberfläche konstant und kann vor das Integral gezogen werden, das die Größe $4\pi r^2$ der Kugeloberfläche ergibt (12.112). Wir erhalten $Q(r) = 4\pi r^2\, E(r)$,

$$E(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{Q(r)}{r^2}\ . \tag{14.23}$$

Bei einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung wirken sich auf eine Probeladung $q$ am Ort $\vec{x}$, wie bei gravitativer Anziehung durch eine kugelsymmetrische Massenverteilung (12.95), nur die Ladungen aus, die innerhalb der Kugel mit Radius $|\vec{x}|$ sind. Die Kraft $\vec{F} = q\,\vec{E}$ ist abstoßend, wenn die Ladungen $q$ und $Q(r)$ gleiches Vorzeichen haben.

Innerhalb einer homogen geladenen Kugel mit Radius $R$ verhält sich $Q(r)$ zur Gesamtladung Q wie das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ zum Gesamtvolumen $\frac{4}{3}\pi R^3$, $Q(r) = \frac{r^3}{R^3}Q$. Demnach gilt für eine homogen geladene Kugel

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R^3}\,r\,, & \text{falls } r < R \\ \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\,, & \text{falls } r \geq R\,. \end{cases}\,,\quad \vec{E}(\vec{x}) = \vec{x}\cdot \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R^3}\,, & \text{falls } r < R \\ \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^3}\,, & \text{falls } r \geq R\,. \end{cases} \tag{14.24}$$

Im Inneren einer homogen geladenen Kugel wirkt auf ein entgegengesetzt geladenes Probeteilchen dieselbe mit dem Abstand linear anwachsende, anziehende Kraft wie auf einen kugelsymmetrischen harmonischen Oszillator. Das Teilchen durchläuft eine Ellipsenbahn, deren *Mittel*punkt, nicht wie bei Keplerellipsen der *Brenn*punkt, im Ursprung liegt (12.99).

Durch Nachrechnen bestätigt man, daß $\operatorname{div}\vec{E} = \rho$ erfüllt ist. Das elektrostatische Feld läßt sich als Gradient eines Potentials $\phi(\vec{x})$ schreiben und erfüllt wegen $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$ auch die restlichen Maxwell-Gleichungen mit $\vec{B} = 0$ und $\vec{j} = 0$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi\,,\quad \phi(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{Q}{8\pi R^3}\,r^2 + \frac{3Q}{8\pi R}\,, & \text{falls } |\vec{x}| < R \\ \frac{Q}{4\pi r}\,, & \text{falls } |\vec{x}| \geq R\,. \end{cases} \tag{14.25}$$

Demnach ist das Potential außerhalb eines Punktteilchens mit Ladung $q$, das im Ursprung ruht, das Coulombpotential $\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi|\vec{x}|}$. Befindet sich das Teilchen bei $\vec{y}$, so gehört dazu das verschobene Potential $\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}$. Das Potential mehrerer Punktladungen erhält man als Summe der Potentiale der einzelnen Ladungen, denn die Maxwellgleichungen sind linear inhomogen

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{x}-\vec{y}_i|}\,. \tag{14.26}$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{y})$ geht dies in die kontinuierliche Summe über, nämlich in das Integral

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y\,\frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,. \tag{14.27}$$

Dieses Potential erfüllt, wie wir später zeigen, die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi = -\rho\,. \tag{14.28}$$

Hierbei ist $\Delta$ der Laplace-Operator

$$\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad} = \partial_1{}^2 + \partial_2{}^2 + \partial_3{}^2\,. \tag{14.29}$$

Die homogene Poisson-Gleichung $\Delta u = 0$ heißt Laplace-Gleichung, ihre Lösungen $u$ heißen harmonische Funktionen. In ladungsfreien Gebieten ist das elektrostatische Potential eine harmonische Funktion.

## Kontinuitätsgleichung der elektromagnetischen Ladung

Addiert man die Zeitableitung und die Divergenz der inhomogenen Maxwellgleichungen (14.10),

$$\partial_t \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E}) = \dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} \tag{14.30}$$

so tragen wegen $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$ und $\partial_t \operatorname{div} = \operatorname{div} \partial_t$ die Feldstärken auf der linken Seite der Gleichung nicht bei, und man erhält eine Differentialgleichung für die Ladungs- und Stromdichte, die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \ . \tag{14.31}$$

Die Kontinuitätsgleichung schränkt denkbare Quellen $\rho$ und $\vec{j}$ für elektromagnetische Felder ein. Es können in den Maxwellgleichungen nur solche Ladungs- und Stromdichten auftreten, die der Kontinuitätsgleichung und damit lokaler Ladungserhaltung genügen.

Lokale Ladungserhaltung besagt mehr, als daß die Gesamtladung erhalten ist. Mit Erhaltung der Gesamtladung wäre auch der nie beobachtete Vorgang verträglich, daß Ladung im Labor verschwindet und gleichzeitig hinter dem Mond wieder erscheint. Lokale Ladungserhaltung besagt, daß sich die Ladung in jedem Volumen $V$, das man zeitlich unverändert abgegrenzt hat, nur dadurch im Laufe der Zeit ändert, daß durch die Oberfläche $\partial V$ Ströme fließen, deren Bilanz nicht ausgeglichen ist. Dies folgert man aus der Kontinuitätsgleichung durch Integration über das Volumen $V$ mit dem Gaußschen Integralsatz

$$Q_V(t) = \int_V d^3x\, \rho(t, \vec{x}) \ , \tag{14.32}$$

$$\frac{d}{dt} Q_V(t) = \int_V d^3x\, \dot{\rho} = -\int_V d^3x \ \operatorname{div} \vec{j} = -\int_{\partial V} d^2\vec{f} \cdot \vec{j} \ . \tag{14.33}$$

Insbesondere kann zu keiner Zeit eine einzelne Punktladung aus dem Vakuum entstehen. Ebenso ist ein Elektron nicht im Laufe der Zeit mehr oder weniger geladen.

## Kontinuitätsgleichung für Energie und Impuls

Aus den Maxwellgleichungen folgt nicht nur die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladungsdichte, sondern auch für die Energie- und Impulsdichte, die zu elektromagnetischen Feldern gehören.

Formen wir die Zeitableitung der Größe

$$u = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \tag{14.34}$$

mit den Maxwellgleichungen um, und berücksichtigen wir dabei

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \epsilon_{ijk}\big(E^i \partial_j B^k - B^i \partial_j E^k\big) = -\partial_i\big(\epsilon_{ijk} E^j B^k\big) = -\operatorname{div}\big(\vec{E} \times \vec{B}\big) \ , \tag{14.35}$$

so erhalten wir

$$\vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} + \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}} = \vec{E} \cdot (\operatorname{rot} \vec{B} - \vec{j}) - \vec{B} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{j} \ , \tag{14.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \operatorname{div}\vec{S} = -\vec{E}\cdot\vec{j}\,, \tag{14.37}$$

mit

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{B}\,. \tag{14.38}$$

Das ist für verschwindende Ladungsstromdichte $\vec{j}$ eine Kontinuitätsgleichung.

Um die Bedeutung der Größen $u$ und des Poynting-Vektors $\vec{S}$ zu klären, denken wir uns die Stromdichte $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$ durch eine Ladungsdichte $\rho$ gegeben, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, und integrieren $\vec{E}\cdot\rho\,\frac{d\vec{x}}{dt}$ über ein kleines Gebiet und eine kurze Zeit. Solch ein Integral ergibt nach Zwischenwertsatz die Ladung $q$ in dem kleinen Gebiet mal $\vec{E}\cdot d\vec{x}$, also die in der Zeit $dt$ an der Ladung $q$ durch Verschiebung um $d\vec{x}$ verrichtete Arbeit. Diese Energie wird dem elektromagnetischen Feld entzogen, wenn die Energie insgesamt erhalten ist. Dies rechtfertigt, $u$ als Energiedichte und den Poynting-Vektor $\vec{S}$ als Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes anzusehen.

Ohne Beweis merken wir eine tieferliegende Rechtfertigung für die Bezeichnungen an: Die Maxwellgleichungen und die Bewegungen der Ladungen folgen aus einem Wirkungsprinzip, daß ein lokales Funktional der Felder und Teilchen, die Wirkung, bei allen physikalischen Abläufen stationär ist. Diese Wirkung ist invariant unter Zeittranslationen und zu dieser Invarianz gehört der Energieerhaltungssatz, genauer die Kontinuitätsgleichung (14.37). Ihr zufolge ändert sich die Energiedichte $u$ in jedem Volumen nur dadurch, daß mehr oder weniger Energiestromdichte $\vec{S}$ hinein- als herausströmt, und daß sie durch die Leistungsdichte $\vec{E}\cdot\vec{j}$ auf Ladungen übergeht.

Der Poynting-Vektor ist nicht nur die Energiestromdichte, sondern auch die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes. Um dies zu belegen, berechnen wir seine Zeitableitung

$$\partial_t(\vec{E}\times\vec{B}) = \dot{\vec{E}}\times\vec{B} + \vec{E}\times\dot{\vec{B}} = (\operatorname{rot}\vec{B} - \vec{j}\,)\times\vec{B} + \vec{E}\times(-\operatorname{rot}\vec{E})\,. \tag{14.39}$$

Für Ausdrücke wie $(\operatorname{rot}\vec{C})\times\vec{C}$ gilt

$$\begin{aligned}((\operatorname{rot}\vec{C})\times\vec{C})^i &= \epsilon_{ijk}\,(\operatorname{rot}\vec{C})^j\,C^k = \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{jlm}\,(\partial_l C^m)\,C^k\\ &= (-\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl})(\partial_l C^m)\,C^k = -C^k\,(\partial_i C^k) + C^k\,\partial_k C^i\\ &= \partial_k(C^i\,C^k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\,\vec{C}^2) - C^i\partial_k C^k\,.\end{aligned} \tag{14.40}$$

Führen wir die Bezeichnung

$$T^{ik} = T^{ki} = -\big(E^i\,E^j + B^i\,B^j - \frac{1}{2}\,\delta_{ik}\,(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\big) \tag{14.41}$$

ein, so schreibt sich schließlich wegen $\partial_k E^k = \rho$ und $\partial_k B^k = 0$ die Zeitableitung des Poynting-Vektors als

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\vec{E}\times\vec{B}\big)^i + \frac{\partial}{\partial x^k}T^{ik} = -\big(\rho\,\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}\big)^i\,. \tag{14.42}$$

Auf der rechten Seite steht eine Kraftdichte, wie man durch Integration über ein kleines Volumen für $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$ (2.36) bestätigt. Die Kraft ist die zeitliche Änderung des Impulses, also ist $\vec{S}$ eine Impulsdichte. Für jede Komponente $i$ der Impulsdichte sind die Komponenten $T^{ik}$ des Maxwellschen Spannungstensors die zugehörigen Impulsstromdichten, die in Abwesenheit von elektrischen Ladungs- und Stromdichten eine Kontinuitätsgleichung erfüllen.

Da $T^{ij}$ Impulsstromdichten sind, fließt durch ein kleines Parallelogramm mit Kanten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ pro Zeit der Impuls $F^i(\vec{a},\vec{b}) = T^{ij}(\vec{a}\times\vec{b})^j$. Wird der Impulsstrom vom Parallelogramm absorbiert, dann bewirkt er die Kraft $F^i(\vec{a},\vec{b})$, und übt, geteilt durch die Flächengröße, den Druck $T^{ij}n^j$ auf den Absorber mit Normalenvektor $\vec{n}$ aus.

Der richtungsunabhängige Teil von $T^{ij}$, der proportional zu $\delta^{ij}$ ist, ist der Druck von isotrop einfallender Strahlung. Er beträgt ein Drittel der Energiedichte.

Zusammengefaßt sind die Energiedichte $T^{00} = u = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$, die Impulsdichten und die Energiestromdichte $T^{0i} = T^{i0} = S^i = (\vec{E}\times\vec{B})^i$ und der Maxwellsche Spannungstensor $T^{ij} = T^{ji}$ die Komponenten des Energie-Impulstensors $T^{mn} = T^{nm}$, $m, n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Formuliert man, wie wir ohne Beweis angeben, die Maxwellgleichungen als Stationaritätsbedingung einer lokalen Wirkung, so ergibt sich die Kontinuitätsgleichung für die Impulsdichten aus der Translationsinvarianz der Wirkung. Aus ihr folgt, daß der Impulsübertrag vom elektromagnetischen Feld auf geladene Teilchen durch (14.42) gegeben ist, daß also das elektrische und magnetische Feld die Lorentzkraft bewirken, wenn Energie und Impuls von Feldern und Teilchen insgesamt erhalten sind.

## Abhängigkeitsgebiet

Die elektrodynamischen Feldstärken zur Zeit $t > 0$ am Ort $\vec{x}$ hängen nur von den Ladungen und Strömen und Anfangswerten zur Zeit $t = 0$ in dem Abhängigkeitsgebiet $G$ ab, das vom Rückwärtslichtkegel von $(t, \vec{x})$, das sind die Punkte $(t', \vec{y})$ mit $t - t' = |\vec{x} - \vec{y}|$, und der raumartigen Anfangsfläche $A$ berandet wird, die vom Rückwärtslichtkegel aus der Schicht $t = 0$ ausgeschnitten wird [6],

$$G = \{(t', \vec{y}) : 0 \le t' \le t\ ,\ |\vec{x} - \vec{y}| \le t - t'\}\ , \quad A = \{(0, \vec{y}) : |\vec{x} - \vec{y}| \le t\}\ . \tag{14.43}$$

Stimmen nämlich bei zwei Lösungen die Ladungen und Ströme in $G$ überein und sind die anfänglichen Werte der Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ der beiden Lösungen auf der Anfangsfläche $A$ gleich, so erfüllt die Differenz beider Lösungen die Maxwellgleichungen mit Ladungen und Strömen, die in $G$ verschwinden und mit Anfangswerten, die ebenfalls verschwinden. Solch eine Lösung muß aber, wie wir jetzt zeigen, in $G$ verschwinden.

Zum Beweis bemerken wir, daß die Energiedichte $u$ nirgends kleiner ist als der Betrag der Energiestromdichte $\vec{S}$,

$$u = \frac{1}{2}\big(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\big) \ge |\vec{E}\times\vec{B}| = |\vec{S}|\ , \tag{14.44}$$

denn wegen $(|\vec{E}| - |\vec{B}|)^2 \ge 0$ gilt $(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) \ge 2|\vec{E}|\,|\vec{B}|$, zudem ist $|\vec{E}|\,|\vec{B}| \ge |\vec{E}\times\vec{B}|$. Daher ist für alle zukunftsgerichtete, zeitartige Vierervektoren $w = (w_0, \vec{w})$ mit $w_0 > |\vec{w}|$ die

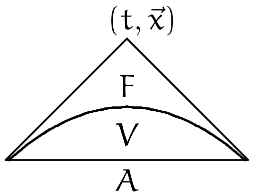



Abbildung 14.1: Abhängigkeitsgebiet $G$

Dichte $w_0 u - \vec{w} \cdot \vec{S}$ nicht negativ,

$$w_0 u - \vec{w} \cdot \vec{S} \geq w_0 u - |\vec{w}|\,|\vec{S}| \geq (w_0 - |\vec{w}|)\, u \geq 0 \ , \qquad (14.45)$$

und verschwindet nur, wenn die Energiedichte $u$ mit den Feldstärken verschwindet.

Betrachten wir nun einen inneren Punkt $(t', \vec{y})$ des Abhängigkeitsgebietes $G$. Er liegt in einer raumartigen, dreidimensionalen Hyperfläche

$$F = \{(t(\vec{y}), \vec{y}) : t(\vec{y}) \geq 0\ , \vec{y} \in A\}\ , \qquad (14.46)$$

die zusammen mit der Anfangsfläche $A$ ein Gebiet $V \subset G \subset \mathbb{R}^4$ berandet. Da $F$ überall raumartig ist, gilt $\partial_i t\, \partial_i t < 1$. Integrieren wir $\partial_t u + \operatorname{div} \vec{S}$ über $V$, so verschwindet das Integral, weil der Integrand bei verschwindenden Stromdichten Null ist (14.37),

$$\int_V d^4x\, \partial_t u + \operatorname{div} \vec{S} = 0\ . \qquad (14.47)$$

Es ist nach dem Gaußschen Satz dem Integral über die Randflächen $A$ und $F$ gleich, wobei aber $A$ nicht beiträgt, da die Anfangswerte verschwinden. Folglich verschwindet das Integral über die Fläche $F$, die wir durch die Koordinaten $\vec{y}$ des Bereichs $A$ und durch $\Phi : \vec{y} \mapsto (t(\vec{y}), \vec{y})$ parametrisieren (15.28),

$$\int_A d^3y\, \big(u(t(\vec{y}), \vec{y}) - \partial_i t(\vec{y})\, S^i(t(\vec{y}), \vec{y})\big) = \int_A d^3y\, (w_0\, u - \vec{w} \cdot \vec{S})(t(\vec{y}), \vec{y})) = 0\ . \quad (14.48)$$

Da aber $w = (1, \partial_x t, \partial_y t, \partial_z t)$ überall auf $F$ zukunftsgerichtet und zeitartig ist, ist der Integrand nicht negativ und das Integral verschwindet nur, falls $\vec{E}$ und $\vec{B}$ überall auf $F$ verschwinden. Demnach verschwinden die Feldstärken im betrachteten Punkt $(t', \vec{y})$, und, da er beliebig gewählt war, im Inneren des Abhängigkeitsgebietes $G$. Aus Stetigkeitsgründen verschwinden die Feldstärken dann in ganz $G$.

Zusammen genommen zeigt dies: die Lösung der Maxwellgleichungen ist bei Vorgabe der Ladungs- und Stromdichten eindeutig durch die Anfangswerte zu einer festen Zeit bestimmt. Die Feldstärken hängen zur Zeit $t > 0$ am Ort $\vec{x}$ nur von den Anfangswerten im Rückwärtslichtkegel von $(t, \vec{x})$ ab und von den Ladungs- und Stromdichten in dem Gebiet, das vom Rückwärtslichtkegel und der Anfangsfläche berandet wird.

Änderungen der Anfangsbedingungen oder der Ladungs- und Stromdichten wirken sich daher nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit aus.

## Gaußsche Schachtel

Wenn zwei Materialien an einer Fläche aneinander grenzen und Felder dort unstetig sein können, dann ist, wenn die Divergenz eines Feldes $\vec{E}$ stetig ist, die Normalenkomponente von $\vec{E}$ an der Grenzfläche stetig.

Dies ergibt die Betrachtung einer sogenannten Gaußschen Schachtel. Das ist ein niedriger Zylinder, dessen Deckenfläche parallel zur Grenzfläche in dem einen Material verläuft, während die Bodenfläche im anderen Material verläuft. Macht man die Schachtel niedriger und niedriger, verschwindet mit der Höhe des Zylinders das Volumenintegral über div $\vec{\mathsf{E}}$, ebenso die Beiträge der Mantelflächen zum Integral über die Randflächen des Zylinders. Da dieses Integral insgesamt verschwindet, heben sich die Beiträge der Boden- und Deckenfläche, deren Normalenvektoren entgegengesetzt sind, gegenseitig auf,

$$\operatorname{div}\vec{\mathsf{E}}\ \text{stetig}\ :\ \mathrm{d}^2\vec{\mathsf{f}}\cdot(\vec{\mathsf{E}}_{\text{innen}}-\vec{\mathsf{E}}_{\text{außen}})=0\ ,\quad \vec{\mathsf{E}}_{\text{normal, innen}}=\vec{\mathsf{E}}_{\text{normal, außen}}\ . \tag{14.49}$$

# 15 Differentialformen

Die bisher nützlichen Anwendungen des Stokesschen und Gaußschen Satzes rechtfertigen nun, den Integralsatz (14.11) auch zu beweisen.

Eine Differentialform $\omega$ vom Grad $p$ am Ort $x$, oder kürzer eine $p$-Form, ordnet $p$ Tangentialvektoren $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ den $\omega$-Inhalt des von ihnen aufgespannten $p$-Spates zu (2.58). Die Abbildung ist linear in jedem Kantenvektor, und, da Volumen dem Cavalierischen Prinzip genügt, total antisymmetrisch,

$$\begin{aligned} \omega(a\,u + b\,v, u_2, \dots u_p) &= a\,\omega(u, u_2, \dots u_p) + b\,\omega(v, u_2, \dots u_p)\ , \\ \omega(u_{\pi(1)}, u_{\pi(2)}, \dots u_{\pi(p)}) &= \mathrm{sign}(\pi)\,\omega(u_1, u_2, \dots u_p)\ . \end{aligned} \tag{15.1}$$

Die Vektoren sind Linearkombinationen der Tangenten an die Koordinatenlinien, $u_i = {u_i}^m \partial_m$ . Folglich ist $\omega$ wegen der Multilinearität die $p$-fache Summe

$$\begin{aligned} \omega(u_1, u_2, \dots u_p) &= {u_1}^{m_1} {u_2}^{m_2} \dots {u_p}^{m_p}\, \omega_{m_1 m_2 \dots m_p}\ , \\ \omega_{m_1 m_2 \dots m_p} &= \omega(\partial_{m_1}, \partial_{m_2}, \dots, \partial_{m_p}) \end{aligned} \tag{15.2}$$

mit total antisymmetrischen Komponenten

$$\omega_{m_{\pi(1)} m_{\pi(2)} \dots m_{\pi(p)}} = \mathrm{sign}(\pi)\, \omega_{m_1 m_2 \dots m_p}\ . \tag{15.3}$$

Insbesondere bilden die $p$-Formen $dx^{m_1} dx^{m_2} \dots dx^{m_p}$ die Kantenvektoren eines $p$-Spats auf sein Koordinatenvolumen ab, das antisymmetrisierte Produkt ihrer Komponenten,

$$\begin{aligned} dx^{m_1} dx^{m_2} \dots dx^{m_p} : (u_1, u_2, \dots u_p) &\mapsto \sum_{\pi \in S_p} \mathrm{sign}(\pi)\, {u_{i_{\pi(1)}}}^{m_1} {u_{i_{\pi(2)}}}^{m_2} \dots {u_{i_{\pi(p)}}}^{m_p} \\ = \sum_{\pi \in S_p} \mathrm{sign}(\pi)\, {u_{i_1}}^{m_{\pi(1)}} {u_{i_2}}^{m_{\pi(2)}} \dots {u_{i_p}}^{m_{\pi(p)}} &= \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} {u_{i_1}}^{m_1} {u_{i_2}}^{m_2} \dots {u_{i_p}}^{m_p}\ . \end{aligned} \tag{15.4}$$

Da die $p$-Formen $dx^{m_1} dx^{m_2} \dots dx^{m_p}$ total antisymmetrisch sind

$$dx^{m_1} dx^{m_2} \dots dx^{m_p} = \mathrm{sign}(\pi)\, dx^{m_{\pi(1)}} dx^{m_{\pi(2)}} \dots dx^{m_{\pi(p)}}\ , \tag{15.5}$$

tragen zu Linearkombinationen nur total antisymmetrische Koeffizienten bei, denn benennen wir in

$$p!\, \omega_{m_1 m_2 \dots m_p} dx^{m_1} dx^{m_2} \dots dx^{m_p} = \omega_{m_1 m_2 \dots m_p} \sum_{\pi \in S_p} \mathrm{sign}(\pi)\, dx^{m_{\pi(1)}} dx^{m_{\pi(2)}} \dots dx^{m_{\pi(p)}} \tag{15.6}$$

die Summationsindizes $m_{\pi(i)}$ mit $n_i$ und folglich $m_i$ mit $n_{\pi^{-1}(i)}$, so ergibt sich

$$\sum_{\pi\in S_p} \operatorname{sign}(\pi)\omega_{n_{\pi^{-1}(1)}n_{\pi^{-1}(2)}\dots n_{\pi^{-1}(p)}} dx^{n_1}dx^{n_2}\dots dx^{n_p}\ . \tag{15.7}$$

Bedenkt man $\operatorname{sign}(\pi) = \operatorname{sign}(\pi^{-1})$ und daß die Summe über alle Permutationen mit der Summe über alle inversen Permutationen übereinstimmt, so folgt, wie behauptet, daß nur der antisymmetrische Teil der Koeffizienten beiträgt,

$$\omega_{m_1m_2\dots m_p}dx^{m_1}dx^{m_2}\dots dx^{m_p} = \Big(\frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \operatorname{sign}(\pi)\omega_{m_{\pi(1)}m_{\pi(2)}\dots m_{\pi(p)}}\Big)\, dx^{m_1}dx^{m_2}\dots dx^{m_p}\ . \tag{15.8}$$

Für $m_1 < m_2 < \dots < m_p$ bilden die $p$-Formen $dx^{m_1}dx^{m_2}\dots dx^{m_p}$ an jedem Punkt eine Basis für $p$-Formen,

$$\omega = \frac{1}{p!}\,\omega_{m_1m_2\dots m_p}\, dx^{m_1}dx^{m_2}\dots dx^{m_p} = \sum_{m_1<m_2<\dots<m_p} \omega_{m_1m_2\dots m_p}dx^{m_1}dx^{m_2}\dots dx^{m_p}\ . \tag{15.9}$$

Mit der Notation der Koordinatenvolumina als Produkt von Einsformen haben wir vorweggenommen, daß $p$-Formen $\omega^{(p)}$ und $q$-Formen $\hat\omega^{(q)}$ multipliziert werden können. Ihr Produkt ist die $p+q$-Form

$$\begin{aligned}\omega^{(p)}\hat\omega^{(q)} &: (u_1,\dots,u_{p+q}) \mapsto \\ &\sum_{\pi\in S_{p+q}} \frac{1}{p!q!}\operatorname{sign}(\pi)\,\omega^{(p)}(u_{\pi(1)},\dots,u_{\pi(p)})\,\hat\omega^{(q)}(u_{\pi(p+1)},\dots,u_{\pi(p+q)})\ .\end{aligned} \tag{15.10}$$

Das Produkt ist bilinear, assoziativ und graduiert kommutativ, das heißt

$$\omega^{(p)}\hat\omega^{(q)} = (-1)^{pq}\hat\omega^{(q)}\omega^{(p)}\ . \tag{15.11}$$

Differentialformen aller Formengrade bilden nicht nur einen Vektorraum, sondern darüber hinaus eine graduiert kommutative Algebra. Insbesondere antikommutieren Differentiale

$$dx^m dx^n = -dx^n dx^m\ . \tag{15.12}$$

Solche Produkte schreibt man auch ausführlicher als $dx \wedge dy$, wenn zudem ein symmetrisches Produkt $dx \vee dy = dy \vee dx$ oder das Tensorprodukt $dx \otimes dy$ auftreten, bei dem es keinen Zusammenhang zu $dy \otimes dx$ gibt. Da bei unseren Betrachtungen diese anderen Produkte nicht auftreten, verwenden wir die leichter zu lesende Schreibweise $dx\,dy$ für das alternierende Produkt von Differentialen, wie sie bei $p$-Formen auftreten.

Die $p$-Form (15.2) hängt nicht vom Koordinatensystem ab. Verwenden wir Koordinaten $x'$ und $x(x')$, um einen Punkt der Mannigfaltigkeit zu bezeichnen, so hängen die Komponenten von $\omega$ an diesem Punkt in beiden Koordinatensystemen durch

$$\omega'_{m_1\dots m_p}(x') = \omega(\partial'_{m_1},\dots,\partial'_{m_p}) = \frac{\partial x^{n_1}}{\partial x'^{m_1}}\dots\frac{\partial x^{n_p}}{\partial x'^{m_p}}\,\omega_{n_1\dots n_p}(x(x')) \tag{15.13}$$

zusammen (5.39). Mit $dx'^m \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} = dx^n$ (5.47) zeigt sich, daß die unterschiedlichen Komponentenfunktionen dieselbe $p$-Form definieren,

$$\omega'_{m_1 m_2 \dots m_p}(x')\, dx'^{m_1} dx'^{m_2} \dots dx'^{m_p} = \omega_{n_1 n_2 \dots n_p}(x(x'))\, dx^{n_1} dx^{n_2} \dots dx^{n_p} \ . \quad (15.14)$$

## Inhalte von Untermannigfaltigkeiten

Jedes $p$-Formfeld $\omega$ definiert den Integranden eines Integrals über $p$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, den $\omega$-Inhalt von $\mathcal{F}$, wobei $\mathcal{F}$ durch eine invertierbare Abbildung $\Phi : (s^1, s^2, \dots, s^p) \mapsto x(s)$ eines $p$-dimensionalen Parameterbereiches $D \subset \mathbb{R}^p$ auf $\mathcal{F} = \Phi(D)$ gegeben sei,

$$\int_{\mathcal{F}} \omega = \int_{D=\Phi^{-1}(\mathcal{F})} d^p s\, \frac{1}{p!}\, \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial s^{i_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial s^{i_2}} \dots \frac{\partial x^{m_p}}{\partial s^{i_p}}\, \omega_{m_1 m_2 \dots m_p}(x(s)) \ . \quad (15.15)$$

Auf der rechten Seite ist $x$ als Funktion der Parameter $s^i$, $i = 1, \dots, p$, aufgefaßt und $dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial s^i} ds^i$ (5.47) als Parameterdifferential. Wegen $ds^i ds^j = -ds^j ds^i$ (15.12) ist das $p$-fache Produkt von Differentialen $ds^i$ total antisymmetrisch und daher

$$ds^{i_1} ds^{i_2} \dots ds^{i_p} = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} ds^1 ds^2 \dots ds^p = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} d^p s \ . \quad (15.16)$$

Das Integral (15.15) hängt nicht von der Parametrisierung der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{F}$ ab. Ist nämlich $x^m(s'(s))$ durch Parameter $s'$ parametrisiert, die ihrerseits invertierbar von $s$ abhängen, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial s^i} x^m(s'(s)) = \frac{\partial s'^j}{\partial s^i} \frac{\partial x^m}{\partial s'^j} \ . \quad (15.17)$$

Da (3.32)

$$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{\partial s'^{j_1}}{\partial s^{i_1}} \frac{\partial s'^{j_2}}{\partial s^{i_2}} \dots \frac{\partial s'^{j_p}}{\partial s^{i_p}} = \left(\det \frac{\partial s'}{\partial s}\right) \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_p} \quad (15.18)$$

die Jacobideterminante der Reparametrisierung ergibt und nach dem Integralsubstitutionssatz (12.72)

$$\int_D d^p s \left(\det \frac{\partial s'}{\partial s}\right) f(s'(s)) = \int_{D'=s'(D)} d^p s'\, f(s') \ , \quad (15.19)$$

ist das Integral (15.15) über den Bereich $D$ der Parameter $s$ dem Integral

$$\int_{D'} d^p s'\, \frac{1}{p!}\, \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_p} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial s'^{j_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial s'^{j_2}} \dots \frac{\partial x^{m_p}}{\partial s'^{j_p}}\, \omega_{m_1 m_2 \dots m_p}(x(s')) \quad (15.20)$$

über den Bereich $D' = s'(D)$ der Parameter $s'$ gleich. (Genauer bedacht ist bei Mannigfaltigkeiten, die sich nur mit mehreren Parameterbereichen überdecken lassen, erforderlich, daß sie orientierbar sind, daß also überall und stetig definiert ist, welches $p$-Volumen positiv ist.)

Das Integral $\int_{\mathcal{F}} \omega$ hängt also weder vom Koordinatensystem ab noch von der Parametrisierung, sondern nur von der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{F}$ selbst und der $p$-Form $\omega$. Es ist auch keine Metrik zur Messung von Kantenlängen und Winkeln erforderlich.

Beispielsweise ist

$$\omega^{(1)} = F_1\, dx^1 + F_2\, dx^2 + F_3\, dx^3 \tag{15.21}$$

eine Einsform. Das Wegintegral über einen Weg $f : t \mapsto (f^1(t), f^2(t), f^3(t))$ ergibt die Arbeit

$$\int_f \omega^{(1)} = \int_{\underline{t}}^{\overline{t}} dt\, \frac{df^i}{dt} F_i(f(t)) \ , \tag{15.22}$$

die längs des Weges $f$ von $f(\underline{t})$ nach $f(\overline{t})$ geleistet wird.

Ebenso ergibt das Integral über die Zweiform

$$\omega^{(2)} = j^1\, dx^2 dx^3 - j^2\, dx^1 dx^3 + j^3\, dx^1 dx^2 \tag{15.23}$$

über eine Fläche $F$, die durch $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ , $(s^1, s^2) \mapsto x(s^1, s^2)$ parametrisiert sei, den zur Stromdichte $\vec{j}$ gehörigen Strom durch $F$,

$$\int_F \omega^{(2)} = \int_{D=\Phi^{-1}F} d^2 s\, j^1(x(s)) \Big(\frac{\partial x^2}{\partial s^1}\frac{\partial x^3}{\partial s^2} - \frac{\partial x^3}{\partial s^1}\frac{\partial x^2}{\partial s^2}\Big) + \ldots = \int_D d^2 s\, \vec{j}\cdot \Big(\frac{\partial \vec{x}}{\partial s^1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial s^2}\Big) \ . \tag{15.24}$$

Ersetzt man hier die Stromdichte $\vec{j}$ durch die magnetische oder elektrische Feldstärke, so erhält man den magnetischen oder elektrischen Fluß durch die Fläche $F$.

Das Integral über eine 3-Form über ein 3-dimensionales Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ ist vergleichsweise einfach, da

$$\omega^{(3)} = \rho\, dx dy dz = \rho\, d^3 x \tag{15.25}$$

nur eine Komponentenfunktion, die Dichte $\rho$, hat

$$\int_V \omega^{(3)} = \int_V d^3 x\, \rho(x) \ . \tag{15.26}$$

Ist in der vierdimensionalen Raumzeit eine dreidimensionale Hyperfläche $F$ (14.48) durch die Abbildung $\Phi : \vec{x} \mapsto (t(\vec{x}), \vec{x})$ der Grundfläche $A \subset \mathbb{R}^3$ gegeben, dann ist beim Integral über $F$ über eine Dreiform

$$\omega^{(3)} = j^0\, dx^1 dx^2 dx^3 - j^1\, dx^0 dx^2 dx^3 + j^2\, dx^0 dx^1 dx^3 - j^3\, dx^0 dx^1 dx^2 \ , \tag{15.27}$$

das Differential $dx^0 = \sum_{i=1}^3 dx^i \partial_i t$. Folglich ist $\int_F \omega^{(3)}$ das Integral über den Bereich $A$ über den Integranden (14.48)

$$\big(j^0 - \partial_1 t\, j^1 - \partial_2 t\, j^2 - \partial_3 t\, j^3\big)\, dx^1 dx^2 dx^3 \ , \tag{15.28}$$

wobei die Komponentenfunktionen $j^m$ am Argument $(t(\vec{x}), \vec{x})$ zu nehmen sind.

## Äußere Ableitung

Als äußere Ableitung d der $p$-Form $\omega = 1/p!\,\omega_{m_1\dots m_p}\,\mathrm{d}x^{m_1}\dots\mathrm{d}x^{m_p}$ definieren wir

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x^m\partial_m\omega\ , \tag{15.29}$$

das $p+1$-dimensionale Volumen, das vom $p$-Flächenelement $\mathrm{d}x^{m_1}\dots\mathrm{d}x^{m_p}$ und dem Gradienten $\mathrm{d}x^{m_0}\partial_{m_0}\,\omega_{m_1\dots m_p}$ aufgespannt wird.

Die äußere Ableitung einer $p$-Form wirkt auf Koeffizientenfunktionen, die wir schon als total antisymmetrisch in ihren $p$ Indizes voraussetzen können. Um den in $p+1$ Indizes total antisymmetrischen Anteil von $\partial_{m_0}\omega_{m_1m_2\dots m_p}$ zu erhalten, brauchen wir daher nicht über alle $(p+1)!$ vorzeichenbehaftete Permutationen zu mitteln, es reichen die $p+1$ zyklischen Vertauschungen $\partial_{m_l}\omega_{m_{l+1}\dots m_p m_0\dots m_{l-1}}$ mit einem Faktor $1/(p+1)$. Eine zyklische Vertauschung von $p{+}1$ Indizes hat das Signum $(-1)^p$, die $l$-fache zyklische Vertauschung das Signum $(-1)^{l\,p}$. Daher ist die äußere Ableitung konkreter

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x^m\partial_m\,\omega &= \frac{1}{p!}\,\partial_{m_0}\omega_{m_1\dots m_p}\,\mathrm{d}x^{m_0}\mathrm{d}x^{m_1}\dots\mathrm{d}x^{m_p} = \\ &= \frac{1}{(p+1)!}\Big(\sum_{l=0}^{p}(-1)^{l\,p}\partial_{m_l}\omega_{m_{l+1}\dots m_p m_0\dots m_{l-1}}\Big)\,\mathrm{d}x^{m_0}\mathrm{d}x^{m_1}\dots\mathrm{d}x^{m_p}\ .\end{aligned} \tag{15.30}$$

Die äußere Ableitung einer Nullform $\omega^{(0)} = h$, einer Funktion, ist ihr Gradient,

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}x^m\,\partial_m h\ . \tag{15.31}$$

Die Komponenten der äußeren Ableitung der Einsform $\omega^{(1)}$ (15.21) sind in drei Dimensionen die Rotation der Komponentenfunktionen

$$\begin{gathered}\mathrm{d}x^m\partial_m\big(F_1\,\mathrm{d}x^1 + F_2\,\mathrm{d}x^2 + F_3\,\mathrm{d}x^3\big)\\ = (\partial_1F_2 - \partial_2F_1)\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + (\partial_2F_3 - \partial_3F_2)\,\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 + (\partial_3F_1 - \partial_1F_3)\,\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^1\ .\end{gathered} \tag{15.32}$$

Die Komponentenfunktion der äußeren Ableitung der Zweiform (15.23) sind in drei Dimensionen die Divergenz der Vektorfeldes

$$\mathrm{d}x^m\partial_m\big(j^1\,\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 - j^2\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3 + j^3\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\big) = \big(\partial_1j^1 + \partial_2j^3 + \partial_3j^3\big)\,\mathrm{d}^3x\ . \tag{15.33}$$

In der vierdimensionalen Raumzeit verschwindet die äußere Ableitung der Dreiform (15.27) genau dann, wenn der Viererstrom $j = (j^0, j^1, j^2, j^3)$ erhalten ist, das heißt, der Kontinuitätsgleichung genügt,

$$\mathrm{d}\omega^{(3)} = \big(\partial_0j^0 + \partial_1j^1 + \partial_2j^2 + \partial_3j^3\big)\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\ . \tag{15.34}$$

Die äußere Ableitung hängt nicht vom Koordinatensystem ab. Drücken wir $\omega_{m_1\dots m_p}$ durch die Komponenten $\omega'_{n_1\dots n_p}$ aus (15.14), leiten wir ab

$$\partial_{m_0}\Big(\frac{\partial x'^{n_1}}{\partial x^{m_1}}\dots\frac{\partial x'^{n_p}}{\partial x^{m_p}}\,\omega'_{n_1\dots n_p}\Big)\ , \tag{15.35}$$

und antisymmetrisieren wir in $m_0, m_1, \ldots m_p$ , so verschwinden alle Beiträge von zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 x'^n}{\partial x^{m_0} \partial x^{m_i}}$ und die antisymmetrisierte Ableitung wirkt als $\partial_{m_0} = \frac{\partial x'^{n_0}}{\partial x^{m_0}} \partial'_{n_0}$ nur auf $\omega'_{n_1 \ldots n_p}$. Die Differentiale fassen wir mit $dx^m \frac{\partial x'^n}{\partial x^m} = dx'^n$ (5.47) zusammen

$$p!\, d\omega = dx^{m_0} dx^{m_1} \ldots dx^{m_p} \partial_{m_0} \omega_{m_1 \ldots m_p} = dx'^{n_0} dx'^{n_1} \ldots dx'^{n_p} \partial'_{n_0} \omega'_{n_1 \ldots n_p} \ . \tag{15.36}$$

Man bestätigt leicht, daß d linear ist, auf Produkte von $p$- und $q$-Formen mit der graduierten Produktregel wirkt,

$$d(\omega^{(p)} \hat{\omega}^{(q)}) = (d\omega^{(p)}) \hat{\omega}^{(q)} + (-1)^p \omega^{(p)} (d\hat{\omega}^{(q)}) \ , \tag{15.37}$$

und nilpotent ist, weil die Doppelsumme über ein symmetrisches Indexpaar, hier $\partial_m \partial_n = \partial_n \partial_m$ , mit einem antisymmetrischen Indexpaar $dx^m dx^n = -dx^n dx^m$ verschwindet, $d^2 = dx^m dx^n \partial_m \partial_n = dx^m dx^n \partial_n \partial_m = -dx^n dx^m \partial_n \partial_m = -d^2$ ,

$$d^2 = 0 \ . \tag{15.38}$$

Insbesondere enthält die Gleichung $d^2 = 0$ die Aussagen

$$\text{rot}\,\text{grad} = 0 \ , \ \text{div}\,\text{rot} = 0 \ . \tag{15.39}$$

## Poincaré Lemma

In sternförmigen Gebieten, die mit jedem Punkt $x$ auch die Verbindungsstrecke $\lambda x$, $0 \le \lambda \le 1$, zum Ursprung enthalten, gilt das Poincaré-Lemma

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = \text{konst} + d\alpha \ . \tag{15.40}$$

Die Folgerung von rechts nach links ist selbstverständlich, denn die äußere Ableitung einer konstanten Funktion verschwindet und d ist nilpotent.

Verschwindet umgekehrt die äußere Ableitung einer Nullform, so ist die Funktion konstant. Diese von $x$ und $dx$ unabhängige Konstante ist nicht d einer anderen Form, da sie kein $dx$ enthält.

Für Eins- und Zweiformen in drei Dimensionen besagt das Poincaré-Lemma, daß in sternförmigen Gebieten ein Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, ein Gradientenfeld ist. Verschwindet seine Divergenz, so handelt es sich um die Rotation eines Vektorfeldes,

$$\text{rot}\,\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\,\text{grad}\,V \ , \ \text{div}\,\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} \ . \tag{15.41}$$

$V$ ist das zu $\vec{F}$ gehörige Potential, $\vec{A}$ das zu $\vec{B}$ gehörige Vektorpotential.

Um das Poincaré-Lemma zu beweisen, betrachten wir für $p > 0$ eine $p$-Form $\omega$ mit $d\omega = 0$ und schreiben $\omega(x)$ als ein Integral längs des Strahls vom Ursprung nach $x$ [1]

$$\omega_{m_1 \ldots m_p}(x) = \int_0^1 d\lambda \, \frac{d}{d\lambda} \big( \lambda^p \, \omega_{m_1 \ldots m_p}(\lambda x) \big) \ . \tag{15.42}$$

[1] In $\lambda^p$ ist $p$ der Exponent, in $x^m$ bezeichnet $m$ Komponenten.

Die Ableitung von $\omega_{m_1\dots m_p}(\lambda x)$ nach $\lambda$ ist nach der Kettenregel die Ableitung von $\omega_{m_1\dots m_p}(z)$ nach $z$ an der Stelle $z = \lambda x$ mal der Ableitung von $z = \lambda x$ nach $\lambda$.

$$= \int_0^1 d\lambda\, p\, \lambda^{p-1} \omega_{m_1\dots m_p|\lambda x} + \lambda^p x^{m_0} \partial_{m_0} \omega_{m_1\dots m_p|\lambda x} \tag{15.43}$$

Da nach Voraussetzung $d\omega$ verschwindet, ist die Ableitung von $\omega_{m_1\dots m_p}$ das Negative der restlichen zyklischen Summe der Ableitungen (15.30)

$$\stackrel{d\omega=0}{=} \int_0^1 d\lambda\, p\, \lambda^{p-1} \omega_{m_1\dots m_p|\lambda x} - \lambda^p x^{m_0} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{lp} \partial_{m_l} \omega_{m_{l+1}\dots m_p m_0 \dots m_{l-1}|\lambda x} \,. \tag{15.44}$$

Durch $p - l$ Paarvertauschungen können wir den Index $m_0$ an die erste Stelle bringen. Einschließlich des negativen Vorzeichens erhalten wir

$$\int_0^1 d\lambda\, p\, \lambda^{p-1} \omega_{m_1\dots m_p|\lambda x} + \lambda^p x^{m_0} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{lp+p-l+1} \partial_{m_l} \omega_{m_0 m_{l+1}\dots m_p m_1 \dots m_{l-1}|\lambda x} \,. \tag{15.45}$$

Dies ist nach Kettenregel die antisymmetrisierte Ableitung

$$= \sum_{l=1}^{p} (-1)^{(l-1)(p-1)} \partial_{m_l} \Big( \int_0^1 d\lambda\, \lambda^{p-1} x^n \omega_{n\, m_{l+1}\dots m_p m_1 \dots m_{l-1}}(\lambda x) \Big) \,. \tag{15.46}$$

Also folgt für die $p$-Form ($p > 0$)

$$\omega = \frac{1}{p!}\, \omega_{m_1 m_2 \dots m_p}\, dx^{m_1} dx^{m_2} \dots dx^{m_p} \tag{15.47}$$

aus $d\omega = 0$, daß sie die äußere Ableitung $\omega = d\alpha$ einer $p-1$-Form $\alpha$ ist,

$$\alpha = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^1 d\lambda\, \lambda^{p-1} x^n \omega_{n\, m_2 \dots m_p}(\lambda x)\, dx^{m_2} \dots dx^{m_p} \,. \tag{15.48}$$

## Allgemeiner Satz von Stokes

Den allgemeinen Satz von Stokes (14.11) für Integrale über $n$-dimensionale Flächen $\mathcal{V}$

$$\int_{\mathcal{V}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{V}} \omega \,. \tag{15.49}$$

zeigt man mit einer simplizialen Zerlegung des $n$-dimensionalen Parameterbereichs, mit dem man $\mathcal{V}$ parametrisiert.

Dabei ist ein $n$-Simplex $S = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ mit Ecken $P_0, P_1, \dots P_n$ die Punktmenge (12.77)

$$\{x : \; x = \sum_{j=0}^{n} P_j\, \alpha^j \,,\; 0 \le \alpha^j \,,\; \sum_{j=0}^{n} \alpha^j = 1\} \,. \tag{15.50}$$

Durch die zusätzliche Angabe eines Vorzeichens, ob es sich bei dem Simplex um Raum oder Hohlraum handelt, wird diese Punktmenge orientiert. Wir kodieren das Vorzeichen durch die Reihenfolge der Eckpunkte und vereinbaren, daß $(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(n)})$ bei einer ungeraden Permutation $\pi$ Hohlraum bezeichnet, wenn $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ Raum ist,

$$(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(n)}) = \text{sign}(\pi)\,(P_0, P_1, \dots, P_n)\ . \tag{15.51}$$

Das Volumen ist translationsinvariant und das $1/n!$-fache des entsprechenden Quadervolumens

$$\begin{aligned} \text{vol}(P_0, P_1, P_2, \dots, P_n) &= \text{vol}(0, P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots P_n - P_0) \\ &= \frac{1}{n!}\,(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0) \wedge \dots \wedge (P_n - P_0)\ . \end{aligned} \tag{15.52}$$

Da das Volumenprodukt in jedem Faktor linear (2.17) und in jedem Paar alternierend ist, $P_i \wedge P_j = -P_j \wedge P_i$, (mit der Folge $P \wedge P = 0$ (2.12)), beträgt das Simplexvolumen

$$\begin{aligned} n!\ \text{vol}(P_0, P_1, P_2, \dots, P_n) &= P_1 \wedge P_2 \dots \wedge P_n - P_0 \wedge P_2 \dots \wedge P_n \pm \dots \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, P_0 \wedge P_1 \wedge \dots P_{i-1} \wedge P_{i+1} \dots \wedge P_n \end{aligned} \tag{15.53}$$

und wechselt bei jeder Paarvertauschung von Ecken sein Vorzeichen, wie es wegen der linken Seite und (15.51) sein muß, wenn das Volumen von vorzeichenbehafteten Summen gleich der vorzeichenbehafteten Summe der einzelnen Volumina ist.

Entsprechend hat ein $(n-1)$-Simplex die translationsinvariante Flächengröße

$$(n-1)!\,\text{vol}(P_1, P_2, \dots P_n) = (P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) \dots \wedge (P_n - P_1)\ . \tag{15.54}$$

Jeder Ecke $P_i$ von $S$ liegt ein $(n-1)$-Randsimplex mit den verbleibenden Ecken $(P_0, P_1, \dots P_{i-1}, P_{i+1}, \dots P_n)$ gegenüber. In (15.50) sind dies die Punkte mit $\alpha^i = 0$.

Das orientierte Volumen von $S$ orientiert seine Randflächen. Die Randfläche

$$S_i = (-1)^i\,(P_0, P_1, \dots P_{i-1}, P_{i+1}, \dots P_n) \tag{15.55}$$

ist in dem Sinn nach außen gerichtet, daß jede nach außen gerichteten Stromdichte $j$ mit der Flächengröße von $S_i$ ein Volumen mit gleichem Vorzeichen wie der Simplex $S$ aufspannt. Denn ist $Q$ ein Punkt auf der Randfläche $S_i$, dann ist $j = Q - P_i$ nach außen gerichtet und spannt mit $\text{vol}(S_i)$ das Volumen $j \wedge \text{vol}(S_i) = n\,\text{vol}(S)$ auf. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} &(-1)^i\, j \wedge (P_1 - P_0) \wedge \dots (P_{i-1} - P_0) \wedge (P_{i+1} - P_0) \dots \wedge (P_n - P_0) \\ &= (P_1 - P_0) \wedge \dots (P_{i-1} - P_0) \wedge (-j) \wedge (P_{i+1} - P_0) \dots \wedge (P_n - P_0)\ , \end{aligned} \tag{15.56}$$

weil die Stromdichte $j$ mit $(i-1)$ Faktoren vertauscht wurde.

Von $-j = (P_i - P_0) - (Q - P_0)$ trägt $(Q - P_0)$ nur das verschwindende Volumen eines in der Ebene von $S_i$ liegenden, flachen $n$-Simplexes $(P_0, P_1, \dots P_{i-1}, Q, P_{i+1}, \dots P_n)$ bei. Der Term $(P_i - P_0)$ aus $-j$ ergänzt den Faktor $\text{vol}(S_i)$ zum $n$-fachen des Volumens von $S$. Ersetzt man $j = Q - P_i$ durch $Q - P$, wobei $P$ irgendein innerer Punkt von $S$ ist, so ändert dies nicht das Vorzeichen von $j \wedge \text{vol}(S_i)$, da das Produkt erst verschwindet, wenn $P$ in der Ebene von $S_i$ liegt.

Der nach außen gerichtete Rand des Simplexes ist also die vorzeichenbehaftete Summe über die Auslassungen eines Randpunktes

$$\partial(P_0, P_1, \dots P_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \,(P_0, P_1, P_{i-1}, P_{i+1}, P_n) \ . \tag{15.57}$$

Für $n = 0$ definieren wir den Rand des 0-Simplexes, des Punktes $(P)$, als $\partial(P) = () = 1$. Dann gilt für jede Stromdichte aus $P$ heraus $j \wedge \partial(P) = j$. Zudem definieren wir den Rand des $-1$-Simplexes, der leeren Menge, als $\partial() = 0$ und daß der Rand von Summen von Simplexen die Summe der Ränder sei.

Für alle Simplexe verschwindet der Rand des Randes,

$$\partial^2 = 0 \ . \tag{15.58}$$

Denn $\partial^2(P_0, P_1, \dots P_n)$ besteht aus $n-2$-Simplexen $S_{ij}$, $i < j$, bei denen die zwei Ecken $P_i$ und $P_j$ weggelassen wurden. Es hebt sich aber der Beitrag, bei dem zuerst $P_j$ und dann $P_i$ weggelassen wurde mit dem Beitrag weg, bei dem zunächst $P_i$ und dann $P_j$ weggelassen wurde, ($\hat{P}$ bezeichne die Auslassung von $P$)

$$\begin{aligned} \partial^2(P_0, \dots P_n) &= \partial\Big((-1)^j (P_0, \dots \hat{P}_j \dots P_n) + (-1)^i (P_0, \dots \hat{P}_i \dots P_n) + \dots\Big) \\ &= ((-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}) \,\big((P_0, \dots \hat{P}_i \dots \hat{P}_j \dots P_n)\big) + \dots = 0 \ . \end{aligned} \tag{15.59}$$

Daher verschwindet die orientierte Gesamtflächengröße des Randes eines Simplexes,

$$\mathrm{vol}\ \partial = 0 \ , \tag{15.60}$$

denn das Volumen (15.53) ist der Rand (15.57), in dessen Formelzeichen Kommas durch $\wedge$ ersetzt sind.

Zum besseren Verständnis erinnern wir daran, daß $(n-1)$-Flächengrößen $\mathrm{vol}(S_i)$ so definiert sind, daß sie mit einer Stromdichte $j$ multipliziert den Strom durch die Fläche als das Volumen $j \wedge \mathrm{vol}(S_i)$ ergeben (2.35). Es handelt sich also um die Querschnittsfläche, (nur sie ist additiv (Seite 22)) und von jeder Richtung besehen hat der Querschnitt eines $n$-Simplexes gleich große, aber entgegengesetzt orientierte Vorder- und Rückseiten. Insbesondere verschwindet bei *konstanter* Stromdichte der nach außen fließende Gesamtstrom, denn er ist ein konstantes Vielfaches der orientierten Flächengrößen des Randes: bei konstanter Stromdichte fließt in ein Simplex genausoviel hinein wie hinaus.

Jede $(n-1)$-Form $\omega$ ist eine Linearkombination von der Form ($\widehat{dx^i}$ bedeutet die Auslassung von $dx^i$)

$$\omega = \sum_i \omega_i \ , \ \omega_i = (-1)^{i-1} j^i \, dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \ , \ d\omega = \partial_i j^i \, dx^1 \, dx^2 \dots dx^n \ . \tag{15.61}$$

Um den Satz von Stokes zu beweisen, reicht es, ihn für jedes $\omega_i$ zu zeigen. Zum Oberflächenintegral über den nach außen gerichteten Rand einer Fläche $V$ trägt $\omega_1$ mit seinen Werten auf der Unterseite $\underline{x}^1(x^2, x^3, \dots x^n)$ und Oberseite $\bar{x}^1(x^2, x^3, \dots x^n)$ mit entgegengesetztem Vorzeichen bei, weil es an der Unterseite in $V$ hinein- statt hinausgeht,

$$\int_{\partial V} \omega_1 = \int_{P_1(V)} (j^1(\bar{x}^1, x^2, \dots x^n) - j^1(\underline{x}^1, x^2, \dots x^n)) \, dx^2 \dots dx^n \ . \tag{15.62}$$

Dabei ist $P_1(V)$ die in die $x^1 = 0$-Ebene projizierte Fläche $V$. Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung (12.13) ist dies gleich

$$\int_{P_1(V)} \int_{\underline{x}^1}^{\bar{x}^1} (\partial_1 j^1)\, dx^1\, dx^2 \dots dx^n = \int_V \partial_1 j^1\, d^n x = \int_V d\omega_1 \ . \tag{15.63}$$

Ebenso ist der Beitrag von $\omega_2 = -j^2 dx^1\, dx^3 \dots dx^n$ ein Integral über die Fläche $V$, die in die $x^2 = 0$-Ebene projiziert ist,

$$\int_{\partial V} \omega_2 = -\int_{P_2(V)} (j^2(x^1, \bar{x}^2, x^3, \dots x^n) - j^2(x^1, \underline{x}^2, x^3, \dots x^n))\, dx^1\, dx^3 \dots dx^n \ . \tag{15.64}$$

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung gleicht dies

$$-\int_{P_2(V)} \int_{\underline{x}^2}^{\bar{x}^2} (\partial_2 j^2)\, dx^2\, dx^1\, dx^3 \dots dx^n = -\int_V \partial_2 j^2\, dx^2\, dx^1\, dx^3 \dots dx^n = \int_V d\omega_2 \ . \tag{15.65}$$

Dies zeigt den allgemeinen Satz von Stokes (14.11).

Er gilt unabhängig davon, ob $V$ euklidisch ist oder ob seine Koordinaten kartesisch sind. Es reicht, daß $V$ orientierbar ist, sodaß es als Summe von gleich orientierten Simplexen zerlegt werden kann. In einem Euklidischen Raum ist das Volumen $j \wedge t_2 \wedge \dots t_n$, das eine Stromdichte mit den Tangentialvektoren $t_2$, $t_3$, $\dots t_n$ einer Randfläche aufspannt, auch das Skalarprodukt von $j$ mit dem Normalenvektor, aber das Volumen ist auch definiert, wenn es keine euklidische Metrik gibt, wie beispielsweise in der Raumzeit.

# 16 Viererpotential

## Vektorpotential

Die Maxwellgleichung $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ gilt in sternförmigen Gebieten nach dem Lemma von Poincaré (15.40) genau dann, wenn das Magnetfeld die Rotation eines Vektorpotentials $\vec{A}$ ist,

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}\ . \tag{16.1}$$

Beispielsweise ergibt die Rotation des folgenden Vektorpotentials (15.48) das divergenzfreie Magnetfeld $\vec{B}$

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\int_0^1 d\lambda\, \lambda\, \vec{x} \times \vec{B}(\lambda\,\vec{x})\ . \tag{16.2}$$

Hierbei wird $\vec{x}\times\vec{B}(\vec{x})$ längs des Strahls vom Ursprung zum Punkt $\vec{x}$ integriert, also unterstellt, daß alle Punkte des Gebietes, in dem $\vec{B}$ definiert ist, mit Strahlen vom Ursprung erreichbar sind, eben, daß das Definitionsgebiet von $\vec{B}$ sternförmig ist.

Zur Bestätigung berechnen wir die dritte Komponente der Rotation von $\vec{A}(\vec{x})$. Dabei ziehen wir die Differentation unter das Integral und berücksichtigen die Kettenregel,

$$\partial_{x^i}\vec{B}(\vec{z}(\vec{x})) = \frac{\partial z^j}{\partial x^i}\,\partial_j\vec{B}_{|_{\vec{z}(\vec{x})}}\ . \tag{16.3}$$

Für $\vec{z}(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}$ gilt insbesondere $\partial_{x^i}\vec{B}(\lambda\,x) = \lambda\,\partial_i\vec{B}_{|_{\lambda\vec{x}}}$. Für $(\operatorname{rot}\vec{A})_z$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_x A_y - \partial_y A_x &= -\int_0^1 d\lambda\,\lambda\,\Big(\partial_x\big(z\,B_x(\lambda\vec{x}) - x\,B_z(\lambda\vec{x})\big) - \partial_y\big(y\,B_z(\lambda\vec{x}) - z\,B_y(\lambda\vec{x})\big)\Big)\\
&= -\int_0^1 d\lambda\,\lambda\Big(z\,\lambda\,\partial_1 B_x - B_z - x\,\lambda\,\partial_1 B_z - B_z - y\,\lambda\,\partial_2 B_z + z\,\lambda\,\partial_2 B_y\Big)\ .
\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ ist $-\partial_1 B_x - \partial_2 B_y = \partial_3 B_z$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 d\lambda\,\lambda\big(\lambda\,z\,\partial_3 B_z + \lambda\,x\,\partial_1 B_z + \lambda\,y\,\partial_2 B_z + 2B_z\big)\\
&= \int_0^1 d\lambda\,\big(\lambda^2\,(x\,\partial_1 + y\,\partial_2 + z\,\partial_3)B_z + 2\,\lambda\,B_z\big) = \int_0^1 d\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\lambda^2 B_z(\lambda\,\vec{x})\big)\\
&= \lambda^2 B_z(\lambda\,\vec{x})\big|_{\lambda=0}^{\lambda=1} = B_z(\vec{x})\ .
\end{aligned} \tag{16.4}$$

Der Leser bestätige übungshalber, daß auch die $x$- und $y$-Komponenten von $\operatorname{rot}\vec{A}$ und $\vec{B}$ übereinstimmen.

Demnach sind mit (16.1) alle Lösungen der ersten homogenen Maxwellgleichung erfaßt.

## Skalares Potential

Setzen wir $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ in die andere homogene Maxwellgleichung (14.9) ein, so besagt sie, weil die partiellen Ableitungen nach dem Ort und der Zeit vertauscht werden können,

$$0 = \operatorname{rot}\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \operatorname{rot}\bigl(\vec{E} + \partial_t\vec{A}\bigr) , \tag{16.5}$$

daß die Rotation von $\vec{E} + \partial_t\vec{A}$ verschwindet.

Nach dem Poincaréschen Lemma (15.40) läßt sich in sternförmigen Gebieten jedes Vektorfeld $\vec{C}$, dessen Rotation verschwindet, als negativer Gradient eines Potential schreiben, beispielsweise von (15.48)

$$\phi(\vec{x}) = -\int_0^1 d\lambda\, x^j\, C_j(\lambda\,\vec{x}) . \tag{16.6}$$

Wir bestätigen dies durch Ableiten, wobei wir wieder die Kettenregel beachten,

$$-\partial_{x^i}\phi(\vec{x}) = \int_0^1 d\lambda\,\bigl(C_i(\lambda\,\vec{x}) + \lambda\, x^j\,\partial_i C_j\bigr) .$$

Da die Rotation von $\vec{C}$ verschwindet, ist $\partial_i C_j = \partial_j C_i$ ,

$$= \int_0^1 d\lambda\,\bigl(C_i + \lambda\, x^j\,\partial_j C_i\bigr) = \int_0^1 d\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\bigl(\lambda\, C_i(\lambda\,\vec{x})\bigr) = C_i(\vec{x}) . \tag{16.7}$$

Also ist das Feld $\vec{E} + \partial_t\vec{A}$ der negative Gradient eines Potentials $\phi$,

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \partial_t\vec{A} . \tag{16.8}$$

Die homogenen Maxwellgleichungen besagen, daß die sechs Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Ableitungen (16.1, 16.8) von vier Potentialfunktionen $\phi$ und $\vec{A}$, dem Viererpotential, sind.

## Eichtransformation, Lorenzbedingung, inhomogene Wellengleichung

Die vier Potentialfunktionen $\phi, \vec{A}$, deren Ableitungen die sechs Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ergeben, sind durch diese Feldstärken nicht eindeutig festgelegt. Die mit einer beliebigen, zweifach stetig differenzierbaren Funktion $\chi$ eichtransformierten[1] Potentiale

$$\phi' = \phi - \partial_t\chi , \quad \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\chi , \tag{16.9}$$

ergeben dieselben Feldstärken,

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{A}' , \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \partial_t\vec{A} = -\operatorname{grad}\phi' - \partial_t\vec{A}' . \tag{16.10}$$

[1] Transformationen mit einer frei wählbaren Funktion, hier $\chi$, heißen Eichtransformationen. Sie wurden erstmals von Hermann Weyl [18] in einer Abwandlung der Allgemeinen Relativitätstheorie bedacht, in der an jedem Punkt der Raumzeit die Einheitslänge, die Eichung, beliebig wählbar war.

Wir machen von der Freiheit Gebrauch, das Viererpotential abzuändern ohne die meßbaren Feldstärken zu ändern, und wählen unter den eichäquivalenten Viererpotentialen diejenigen heraus, die der Lorenzbedingung

$$\partial_t \phi + \operatorname{div} \vec{A} = 0 \tag{16.11}$$

genügen. Diese Eichbedingung, oder kurz Eichung, geht schon auf den dänischen Physiker Ludvig Valentin Lorenz, nicht erst auf Hendrik Antoon Lorentz, zurück [12, 14]. Liegt zunächst ein Viererpotential vor, für das die Funktion $f = \partial_t \phi + \operatorname{div} \vec{A}$ nicht verschwindet, und ist $\chi$ eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\Box \chi = f \ , \quad \Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ , \tag{16.12}$$

dann erfüllt das eichtransformierte Viererpotential $\phi', \vec{A}'$ (16.9) die Lorenzbedingung. Da, wie wir sehen werden, die inhomogene Wellengleichung Lösungen hat, gibt es Viererpotentiale, die der Lorenzbedingung genügen. Wir unterstellen im weiteren, daß sie für $\phi, \vec{A}$ gilt.

Der Operator $\Box$ heißt Wellenoperator oder d'Alembert-Operator und wird „Box" gesprochen. Die scherzhafte Benennung „Quabla" spielt lautmalend mit lateinisch vier, quattuor, und der Ähnlichkeit zum Nabla-Symbol $\nabla$. Allerdings besteht mathematisch keine Ähnlichkeit zum Ableitungsoperator erster Ordnung, $\nabla$, den wir zugunsten von $\partial$ vermeiden. Ähnlich zum Wellenoperator aber auch wesentlich verschieden von ihm ist der Laplace-Operator $\Delta$ (gesprochen „Delta"),

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{16.13}$$

im dreidimensionalen, Euklidischen Raum in kartesischen Koordinaten. Die vierte Ecke im Box-Operator $\Box$ steht für die zusätzliche zweite Ableitung nach der Zeit, die mit dem entgegengesetzten Vorzeichen wie die zweiten Ortsableitungen in den Wellenoperator eingeht, so wie zum Längenquadrat von Vierervektoren (1.64) das Quadrat der Zeitkomponente mit entgegengesetztem Vorzeichen der Quadrate der Ortskomponenten beiträgt.

Allgemeiner bezeichnen in $d$-dimensionalen Räumen und in $d+1$-dimensionalen Raumzeiten mit kartesischen Koordinaten $x^1, x^2, \ldots x^d$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad \Box = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{16.14}$$

den Laplace- und den Wellenoperator.

Setzt man in der inhomogenen Maxwellgleichung $\operatorname{div} \vec{E} = \rho$ die Feldstärke $\vec{E}$ als Ableitungen des Viererpotentials ein und verwendet man $\operatorname{div} \vec{A} = -\partial_t \phi$ , so ergibt sich die inhomogene Wellengleichung des skalaren Potentials,

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi - \partial_t \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \ ,$$

$$\Box \phi = \rho \ . \tag{16.15}$$

Für die verbleibende Maxwellgleichung berechnen wir zunächst die Komponenten von

$$\begin{aligned}(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A})^i = \epsilon_{ijk}\,\partial_j(\mathrm{rot}\,\vec{A})^k = \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\,\partial_j\partial_l A^m = (\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl})\,\partial_j\partial_l A^m \\ = \partial_i\partial_j A^j - \partial_j\partial_j A^i\ .\end{aligned} \tag{16.16}$$

Addieren wir hierzu

$$-\partial_t E^i = \partial_t\big(\partial_i\phi + \partial_t A^i\big)\ , \tag{16.17}$$

und verwenden wir die Lorenzbedingung $\partial_t\phi = -\partial_j A^j$, so zeigt sich

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \partial_t\vec{E} = \Box\vec{A}\ . \tag{16.18}$$

Die inhomogene Maxwellgleichung für rot $\vec{B}$ ist in der Lorenzeichung je eine inhomogene Wellengleichung für jede Komponente des Vektorpotentials

$$\Box\vec{A} = \vec{j}\ . \tag{16.19}$$

Insgesamt erfüllen also die vier Funktionen $A = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, \vec{A})$, das Viererpotential, in der Lorenzeichung (16.11), $\partial_m A^m = 0$, vier entkoppelte inhomogene Wellengleichungen mit dem Viererstrom $j = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (\rho, \vec{j})$

$$\Box A = j\ . \tag{16.20}$$

Allerdings koppelt die Lorenzbedingung (16.11) die Komponentenfunktionen des Viererpotentials, so wie die Kontinuitätsgleichung (14.31) $\partial_m j^m = 0$ den Viererstrom einschränkt.

# 17 Potentialtheorie

Für zeitunabhängige Ladungs- und Stromdichten erfüllt jede Komponente des zeitunabhängigen Viererpotentials eine Poissongleichung

$$\Delta\phi = -\rho\ , \quad \Delta = (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + (\partial_3)^2\ , \tag{17.1}$$

mit der Lösung (14.27)

$$\phi(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x\, \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ . \tag{17.2}$$

Mathematisch allerdings ist unsere frühere Herleitung dieser Lösung mit dem Superpositionsprinzip fragwürdig, denn das Riemannintegral ist als Grenzwert von verfeinerten Riemannsummen definiert, die das Integrationsvolumen zerlegen. Die dabei auftretenden Summen sind nicht Beiträge von kleinen geladenen Kugeln, sondern von Quadern, die nicht kugelsymmetrisch sind.

Um zu überprüfen, daß (14.27) die Poisson-Gleichung löst, schneiden wir [20] aus dem Integrationsgebiet $V$ eine Kugel $K_\epsilon$ um $\vec{y}$ mit Radius $\epsilon$ heraus, $V_\epsilon = V - K_\epsilon$ , und betrachten den Grenzfall $\epsilon \to 0$ . In $V_\epsilon$ gilt

$$I_\epsilon(\vec{y}) = \int_{V_\epsilon} d^3x\, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\Delta\phi(\vec{x}) = \int_{V_\epsilon} d^3x\, \Big(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\Delta\phi(\vec{x}) - \big(\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\big)\,\phi(\vec{x})\Big)\ , \tag{17.3}$$

weil $1/|\vec{x}-\vec{y}|$ in $V_\epsilon$ differenzierbar ist und dort $\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = 0$ gilt.

Der Integrand ist eine Summe von Ableitungstermen,

$$f\Delta g - (\Delta f)g = \partial_i\big(f\partial_i g - (\partial_i f)\, g\big)\ . \tag{17.4}$$

Daher ist nach dem Gaußschen Satz

$$\begin{aligned} I_\epsilon(\vec{y}) &= \int_{\partial V_\epsilon} d^2\vec{f}\cdot\Big(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ \mathrm{grad}\,\phi(\vec{x}) - \big(\mathrm{grad}\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\big)\,\phi(\vec{x})\,\Big)\\ &= \int_{\partial V_\epsilon} d^2\vec{f}\cdot\Big(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ \mathrm{grad}\,\phi(\vec{x}) + \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}\,\phi(\vec{x})\,\Big)\ . \end{aligned} \tag{17.5}$$

Der Rand von $V_\epsilon$ besteht aus dem Rand von $V$ und der Kugelfläche $\partial K_\epsilon$, $\partial V_\epsilon = \partial V + \partial K_\epsilon$ . Dabei ist zu beachten, daß der Normalenvektor $d^2\vec{f} = d^2f\,\vec{n}$ beim Flächenintegral (17.5) aus $V_\epsilon$ heraus in die Kugel $K_\epsilon$ um $\vec{y}$ hinein zeigt. Auf der Kugelfläche $\partial K_\epsilon$ gilt

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{\epsilon}\,, \quad \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} = -\frac{1}{\epsilon^2}\,\vec{n}\ . \tag{17.6}$$

Das Integral über den ersten Term verschwindet im Grenzfall $\epsilon \to 0$,

$$\int_{\partial K_\epsilon} d^2\vec{f} \cdot \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \operatorname{grad} \phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial K_\epsilon} d^2\vec{f} \cdot \operatorname{grad} \phi(\vec{x}) \to 0 \ , \tag{17.7}$$

denn nach dem Integralmittelwertsatz ist es gleich einem Wert von $\vec{n} \cdot \operatorname{grad} \phi$ an einer Stelle der Kugelfläche mal der Größe der Kugelfläche $4\pi\epsilon^2$ geteilt durch $\epsilon$.

Im zweiten Term des Integranden ist das Skalarprodukt das Negative des Produkts der Beträge. Nach dem Mittelwertsatz gilt für eine Zwischenstelle $\vec{z}$ auf der Kugelfläche $\partial K_\epsilon$

$$\int_{\partial K_\epsilon} d^2\vec{f} \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\partial K_\epsilon} d^2 f \, \phi(\vec{x}) = -\frac{4\pi\epsilon^2}{\epsilon^2} \phi(\vec{z}) \ . \tag{17.8}$$

Da $\vec{z}$ für $\epsilon$ gegen Null gegen den Mittelpunkt $\vec{y}$ von $K_\epsilon$ strebt, geht das Integral über $\partial K_\epsilon$ dabei gegen $-4\pi\phi(\vec{y})$.

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_V d^3x \, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \Delta\phi(\vec{x}) = \int_{\partial V} d^2\vec{f} \cdot \Big( \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \operatorname{grad} \phi(\vec{x}) + \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \phi(\vec{x}) \Big) - 4\pi\phi(\vec{y}) \tag{17.9}$$

und nach $\phi(\vec{y})$ aufgelöst

$$\phi(\vec{y}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3x \, \frac{\Delta\phi(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d^2\vec{f} \cdot \Big( \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \operatorname{grad} \phi(\vec{x}) + \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \phi(\vec{x}) \Big) \ . \tag{17.10}$$

Jede in $V$ zweifach stetig differenzierbare Funktion $\phi$ ist durch $\Delta\phi$ und ihre Randwerte auf $\partial V$ festgelegt.

Da das elektrostatische Potential einer räumlich beschränkten Ladungsverteilung für große Abstände verschwindet und sein Gradient schneller als $1/r$ gegen Null geht, verschwinden für $V = \mathbb{R}^3$ die Randterme. Folglich löst (14.27) für inselförmige Ladungsverteilungen die Poisson-Gleichung.

## Harmonische Funktionen

Als harmonisch bezeichnet man Funktionen $\varphi$ eines Gebietes $V$, die dort die Laplace-Gleichung $\Delta\varphi = 0$ erfüllen. Beispielsweise ist das elektrostatische Potential im ladungsfreien Raum harmonisch. Für harmonische Funktionen $\varphi$ verschwindet nach dem Gaußschen Satz das Oberflächenintegral über die Normalenableitung,

$$\int_{\partial V} d^2\vec{f} \cdot \operatorname{grad} \varphi = \int_V d^3x \, \partial_i \partial_i \varphi = 0 \ . \tag{17.11}$$

Für einen inneren Punkt $\vec{y}$ im Gebiet $V$ betrachten wir eine Kugel $K_{R,\vec{y}} \subset V$ um $\vec{y}$ mit einem Radius $R$. Die Darstellung (17.10) zweifach stetig differenzierbarer Funktionen gilt auch für $V = K_{R,\vec{y}}$. Dabei verschwindet, weil $\varphi$ in $K_{R,\vec{y}}$ harmonisch ist, das Volumenintegral und auch das Oberflächenintegral über die Normalenableitung von $\varphi$, denn sie wird mit einem konstanten Faktor $1/R$ integriert. Es verbleibt der Mittelwert $M_{R,\vec{y}}[\varphi]$ von $\varphi$ auf der Kugelfläche um $\vec{y}$ mit Radius $R$

$$\varphi(\vec{y}) = M_{R,\vec{y}}[\varphi] = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{\partial K_{R,\vec{y}}} d^2f\,\varphi(\vec{x})\ . \tag{17.12}$$

Da die harmonische Funktion $\varphi(\vec{x})$ gleich ihrem Mittelwert auf umhüllenden Kugelflächen ist, nimmt sie ihr Minimum und Maximum auf dem Rand jedes Gebietes $V$ an, in dem sie harmonisch ist. Insbesondere hat ein elektrostatisches Potential im ladungsfreien Gebiet keine Mulde, es gibt keine elektrostatische Falle für geladene Teilchen.

Eine leitende Oberfläche ist nach Abklingen aller Ströme eine Äquipotentialfläche. Umschließt sie ein ladungsfreies Gebiet, so ist das Potential auch im Inneren konstant, denn es hat Werte zwischen dem Minimum und Maximum, das auf dem Rand angenommen wird. Folglich verschwindet in einem Faraday-Käfig die elektrische Feldstärke.

Verschwindet auf $\partial V$ die Normalenableitung $n^i\partial_i\varphi$ einer harmonischen Funktion,

$$0 = -\int_V d^3x\,\varphi\,\Delta\varphi = \int_V d^3x\,\partial_i\varphi\,\partial_i\varphi - \int_{\partial V} d^2f\,n^i\,\varphi\,\partial_i\varphi = \int_V d^3x\sum(\partial_i\varphi)^2\ , \tag{17.13}$$

so verschwindet $\partial_i\varphi$ in $V$ und $\varphi$ ist konstant.

Demnach ist jede Lösung der Poisson-Gleichung durch $\rho$ und ihre Werte auf dem Rand festgelegt. Denn die Differenz zweier Lösungen mit gleichem $\rho$ und gleichen Randwerten ist eine Lösung der Laplace-Gleichung, die auf dem Rand verschwindet und folglich im Inneren verschwindet,

$$\begin{aligned} \Delta\phi = -\rho\ ,\quad \Delta\chi = -\rho\ ,\quad \phi_{|\partial V} = \chi_{|\partial V} = f\ ,\\ \Delta(\phi-\chi) = 0\ ,\qquad (\phi-\chi)_{|\partial V} = 0\ ,\ \Rightarrow \phi-\chi = 0\ . \end{aligned} \tag{17.14}$$

Durch ihre Normalenableitung auf dem Rand ist jede Lösung bis auf eine Konstante festgelegt, denn die Differenz zweier Lösungen mit gleichen Normalenableitungen hat verschwindende Normalenableitung und ist konstant.

Weil $\varphi^2$ und $(\partial_i\varphi)^2$ nicht negativ sind, zeigt (17.13) auch, daß auf Gebieten ohne Rand der Laplace-Operator keine positiven Eigenwerte hat, $\Delta\varphi = \lambda\varphi \Rightarrow \lambda \leq 0$ .

## Greenfunktion

An der Darstellung (17.10) der zweifach stetig differenzierbaren Funktion $\phi$ ist unbefriedigend, daß sie von $\phi$ und $\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\phi$ auf dem Rand Gebrauch macht, daß aber bei gegebenem $\Delta\phi$ schon die Angabe der Randwerte von $\phi$ oder der Randwerte von $\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\phi$ die Funktion $\phi$ eindeutig oder bis auf eine Konstante festlegt.

Eine Darstellung von $\phi$, in der nur die Werte von $\Delta\phi$ und die Randwerte von $\phi$ auftreten, erhalten wir mit Hilfe des Potentials $G(\vec{x},\vec{y})$ am Ort $\vec{x}$, das von einer Einheitsladung am Ort $\vec{y}$ in einem Raum $V$ erzeugt wird, dessen Randflächen geerdet sind, $G(\vec{x},\vec{y})_{|\vec{x}\in\partial V} = 0$. Diese Funktion $G$ ist nach George Green (1793 – 1841) [18] benannt. Auch bei anderen linearen, inhomogenen Differentialgleichungen gewinnt man die Lösung für beliebige Inhomogenität aus der zugehörigen Greenfunktion, das ist die Lösung für eine Inhomogenität, die auf einen Punkt beschränkt ist. Die Funktion ist für $\vec{x} \in V$ und $\vec{y} \in V$ durch

$$G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{y}|} + g(\vec{x},\vec{y})\ ,\quad \Delta g(\vec{x},\vec{y}) = 0\ ,\quad g(\vec{x},\vec{y})_{|\vec{x}\in\partial V} = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\ . \quad (17.15)$$

gegeben, wobei $g$ in $V$ harmonisch ist und für verschwindende Randwerte von $G$ sorgt.

Auch wenn $G$ nur in Ausnahmefällen explizit und normalerweise nur numerisch bestimmt werden kann, erlaubt die Greenfunktion wichtige Einsichten. Ersetzen wir in der Herleitung von (17.10) das Coulombpotential $1/4\pi|\vec{x}-\vec{y}|$ durch $G(\vec{x},\vec{y})$, so gelten auf der Kugel $K_\epsilon$ dieselben Abschätzungen und wir erhalten, weil $G$ auf $\partial V$ verschwindet, die Funktion $\phi(\vec{y})$ dargestellt durch $\Delta\phi$ und durch ihre Werte auf dem Rand

$$\phi(\vec{y}) = -\int_V \mathrm{d}^3x\, G(\vec{x},\vec{y})\,\Delta\phi(\vec{x}) - \int_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec{f}\cdot \operatorname{grad} G(\vec{x},\vec{y})\,\phi(\vec{x})\ . \quad (17.16)$$

Ist $\phi$ insbesondere das elektrostatische Potential, das in einem Gebiet $V$ zu einer Ladungsdichte $\rho$ gehört, also $\Delta\phi = -\rho$ erfüllt, und besteht der Rand von $V$ aus den Oberflächen mehrerer Leiter $\partial V_i$ , $i = 1, 2\ldots$, so sind sie, wenn keine Ströme fließen, Äquipotentialflächen $\phi_{|\vec{x}\in\partial V_i} = \phi_i$ und das Potential ist

$$\phi(\vec{y}) = \int_V \mathrm{d}^3x\, G(\vec{x},\vec{y})\,\rho(\vec{x}) - \sum_i \phi_i \int_{\partial V_i} \mathrm{d}^2\vec{f}\cdot \operatorname{grad} G(\vec{x},\vec{y})\ . \quad (17.17)$$

An (17.17) verwundert, daß zum Potential am Ort $\vec{y}$ das Integral von $\rho(\vec{x})$ mit $G(\vec{x},\vec{y})$ über $\vec{x}$ beiträgt, wobei $\vec{y}$ den Ort bezeichnet, an dem sich die Einheitsladung befindet, die das Potential am Ort $\vec{x}$ verursacht. Man würde $G(\vec{y},\vec{x})\,\rho(\vec{x})$ integriert über $\vec{x}$ erwarten.

Die Erwartung ist richtig, denn die Arbeit $G(\vec{x},\vec{y})$, die man braucht, um eine Einheitsladung im Feld einer anderen Einheitsladung bei $\vec{y}$ von einem Ort mit Potentialwert 0 an den Ort $\vec{x}$ zu bringen, ist dieselbe, wie diejenige, die man verrichtet, wenn man im Feld einer Einheitsladung bei $\vec{x}$ eine andere Einheitsladung nach $\vec{y}$ bringt, Actio gleich Reactio,

$$G(\vec{x},\vec{y}) = G(\vec{y},\vec{x})\ . \quad (17.18)$$

Diese Gleichung beweist man zunächst für innere Punkte $\vec{y} \in V$ und $\vec{z} \in V$ mit dem Integral

$$0 = \int_{V_\epsilon} \mathrm{d}^3x\,\big(G(\vec{x},\vec{y})\,\Delta G(\vec{x},\vec{z}) - \big(\Delta G(\vec{x},\vec{y})\big)\,G(\vec{x},\vec{z})\big) \quad (17.19)$$

Dabei ist $V_\varepsilon$ das Volumen $V$, aus dem man eine Kugel $K_\epsilon$ um $\vec{y}$ und eine Kugel $\hat{K}_\epsilon$ um $\vec{z}$ herausgeschnitten hat. Das Integral verschwindet, weil die Greenfunktion $G(\vec{x},\vec{y})$ und $G(\vec{x},\vec{z})$ in $V_\varepsilon$ als Funktion von $\vec{x}$ harmonisch ist.

Der Integrand ist eine Summe von Ableitungen (17.4). Das Integral ist daher nach dem Satz von Gauß gleich dem zugehörigen Oberflächenintegral über den Rand von $V$ – dort verschwinden $G(\vec{x},\vec{y})$ und $G(\vec{x},\vec{z})$ – und über die Ränder der Kugeln $K_\epsilon$ und $\hat{K}_\epsilon$ um $\vec{y}$ und $\vec{z}$. Die Gradienten von $G(\vec{x},\vec{y})$ und von $G(\vec{x},\vec{z})$ verhalten sich dort wie $-\vec{n}/4\pi\epsilon^2$

und die Oberflächenintegrale ergeben für $\epsilon \to 0$ die Faktoren, die den divergierenden Gradienten dort multiplizieren $-G(z,y)$ und $G(y,z)$. Wir erhalten

$$0 = G(\vec{y},\vec{z}) - G(\vec{z},\vec{y}) \ . \tag{17.20}$$

In der Greenfunktion darf der Ort der verursachenden Ladung bei $\vec{z}$ und der Auswirkung bei $\vec{y}$ vertauscht werden.

## Spiegelladung

Das Potential $\phi$ einer Einheitsladung am Ort $\vec{y}$ und negativer Ladungen an anderen Orten, den Spiegelladungen, definiert ein Gebiet $V$, in dem das Potential nicht negativ ist. Das Gebiet enthält nicht die negativen Ladungen und auf $\partial V$ verschwindet das Potential. Eingeschränkt auf $V$ ist das Potential daher die zu $V$ und $\vec{y}$ gehörige Greenfunktion $G(\vec{x},\vec{y})$. Verändert man allerdings den Ort der Einheitsladung $\vec{y}$ und der negativen Ladungen, so verändert sich leider normalerweise das Gebiet $V$, sodaß man nur in Ausnahmefällen die zu einem festgewählten Gebiet $V$ gehörige Greenfunktion $G(\vec{x},\vec{y})$ für alle Orte $\vec{y} \in V$ erhält.

Zu den Ausnahmefällen gehört der Halbraum $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, x \geq 0\}$, der von einer leitenden Fläche, der $y$-$z$-Ebene, begrenzt wird. Das Potential einer Ladung $q$ am Ort $\vec{x}\,' = (x', y', z')$, $x' > 0$, ergänzt um das Potential eines entgegengesetzt geladenen Teilchens am gespiegelten Ort $\vec{x}\,'' = (-x', y', z')$, verschwindet auf der $y$-$z$-Ebene $x = 0$,

$$4\pi\, G(\vec{x},\vec{x}\,') = \frac{q}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \ . \tag{17.21}$$

Im Halbraum $x < 0$ verschwindet das Potential, da nach Annahme im Leiter keine Ströme fließen und folglich das Potential im Leiter konstant ist.

Das elektrische Feld steht senkrecht auf der Grenzfläche

$$\vec{E}(0,y,z) = -\operatorname{grad} G(\vec{x},\vec{x}\,')_{|x=0} = \frac{-2qx'}{4\pi\big((x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\big)^{3/2}}\,\vec{e}_x \tag{17.22}$$

und verschwindet im Leiter für $x < 0$. Es ist auf der Oberfläche unstetig.

Umschließt man mit einer kleinen Gaußschen Schachtel $S$ ein Gebiet, dessen Deckelfläche in $V$ und dessen Bodenfläche im Leiter verläuft, so ergibt das Integral $Q(S) = \int_S d^3x \operatorname{div} \vec{E}$ nach der Maxwellgleichung die in der Schachtel enthaltene Ladung. Sie befindet sich auf der Randfläche: im Leiter ist das Potential konstant, dort verschwinden $\vec{E}$ und $\operatorname{div}\vec{E}$. Nach Gaußschem Satz ist $Q(S)$ gleich $\int_{\partial S} d^2\vec{f} \cdot \vec{E}$, wobei im Grenzfall bei Schachteln geringer Höhe nur das Oberflächenintegral über die Deckelfläche innerhalb $V$ beiträgt. Es ist also die Normalenkomponente von $\vec{E}$ auf der Oberfläche des Leiters gleich der Oberflächenladungsdichte $\sigma$

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_{|\vec{x} \in \partial V} = \sigma \ . \tag{17.23}$$

In unserem Fall beträgt die Oberflächenladungsdichte in der $y$-$z$-Ebene

$$\sigma(y,z) = \frac{1}{4\pi} \frac{-2\,q\,x'}{\big((x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\big)^{3/2}} \ . \tag{17.24}$$

Diese Ladung, die sich im Leiter als Reaktion auf die Punktladung $q$ am Ort $\vec{x}'$ einstellt, und die über die Erdung zufließt, heißt influenzierte Ladung. Insgesamt ist die Spiegelladung $-q$ influenziert, wie Integrieren über die gesamte Oberfläche in Polarkoordinaten für $(y-y', z-z')$ zeigt

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} d^2 f\,\sigma &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dr\, r\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{2\,q\,x'}{\left(x'^2+r^2\right)^{3/2}} = -\frac{4\pi}{4\pi}\,q\,x'\int_0^\infty dr\,\frac{r}{\left(x'^2+r^2\right)^{3/2}}\\ &= q\,x'\left(x'^2+r^2\right)^{-1/2}\Big|_{r=0}^{r=\infty} = -q\ .\end{aligned} \tag{17.25}$$

Die influenzierte Ladung übt auf die Ladung bei $\vec{x}'$ dieselbe Kraft $\vec{F} = -q^2/4\pi\,(2\,x')^2\vec{e}_x$ aus, wie eine Spiegelladung bei $\vec{x}''$, denn sie erzeugt das Potential

$$g(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{q}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{x}''|} \tag{17.26}$$

(17.15,17.21). Leitende, geerdete Oberflächen ziehen geladene Teilchen an.

Ebenso wie für die leitende Ebene kann man für eine leitende Kugeloberfläche oder in zwei Dimensionen für einen Kreis durch eine Spiegelladung die Greenfunktion erschließen. Dazu ist hilfreich, zu wissen, daß Lösungen der Poisson-Gleichung nicht nur durch Verschiebungen und Drehungen in Lösungen zu verschobenen und gedrehten Ladungsverteilungen übergehen, sondern auch unter konformen Transformationen. Konforme Transformationen bilden Kugelflächen auf Kugelflächen ab und werden von Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen $I_R$ (5.60) an Kugelflächen mit Radius $R$ um den Ursprung erzeugt. Diese Spiegelung, die Kelvintransformation, bildet Funktionen $u$ eines Gebietes $G \subset \mathbb{R}^n$, $0 \notin G$ auf Funktionen

$$v(x) = (I_R u)(x) = \frac{r^{2-n}}{R^{2-n}}\,u\Big(\frac{x\,R^2}{r^2}\Big)\ ,\ r^2 = x^i x^i \tag{17.27}$$

des gespiegelten Gebietes ab und umgekehrt, $(I_R)^2 = \mathrm{id}$. Mit einigem Rechenaufwand bestätigt man,

$$\Delta v(x) = \frac{R^{n+2}}{r^{n+2}}\Delta u_{|_{z=\frac{x\,R^2}{r^2}}}\ . \tag{17.28}$$

Die Ladungsdichte $\rho' = -\Delta v$ transformiert also verglichen mit dem Potential mit einem zusätzlichen Vorfaktor $R^4/r^4$.

Bei der rechnerischen Bestätigung von (17.28) ist es hilfreich, mit der Variablen $s = r^2/R^2$ die Kelvintransformierte als $s^{1-m}u(x/s)$ mit $m = n/2$ zu schreiben. Die Produktregel ergibt

$$\Delta v(x) = (\Delta s^{1-m})\,u(x/s) + 2(\partial_i s^{1-m})(\partial_{x^i}u(x/s) + s^{1-m}\,\partial_{x^i}\partial_{x^i}u(x/s) \tag{17.29}$$

Dabei verschwindet der erste Term. Die Kettenregel ergibt

$$\partial_i s^{1-m} = (1-m)\,s^{-m}\,2\frac{x^i}{R^2}\ ,\ \partial_{x^i}u(x/s) = \frac{1}{s}\partial_i u - \frac{2\,x^i\,x^j}{s^2\,R^2}\partial_j u\ , \tag{17.30}$$

wobei die partiellen Ableitung $\partial_i u(z)$ nach der $i$-ten Komponente von $z$ ableitet und diese Funktion bei $z = x/s$ zu nehmen ist. Erneutes Differenzieren mit der Kettenregel zeigt $\Delta s^{1-m} = 0$ (bei $(s \neq 0)$) und

$$\partial_{x^i}\partial_{x^i} u(x/s) = \frac{1}{s^2}\big(\Delta u + \frac{4-2n}{R^2} x^i \partial_i u\big)\ , \tag{17.31}$$

woraus (17.28) folgt.

Ist nun $u$ das Potential einer Punktladung bei $y$ im Inneren der Kugel, so ist $u - I_R u$ ein Potential, das durch $I_R$ in sein negatives übergeht und daher auf der Kugeloberfläche verschwindet, denn die ist ja invariant unter der Spiegelung. Daher ist in $n = 3$ Dimensionen

$$G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{R}{|\vec{x}|}\frac{1}{|\frac{\vec{x}R^2}{\vec{x}^2} - \vec{y}|}\Big) = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \frac{\vec{x}^2\vec{y}^2}{R^2}}}\Big) \tag{17.32}$$

für $|\vec{y}| < R$ die Greenfunktion einer Punktladung im hohlen Inneren einer Metallkugel mit Radius $R$ und für $|\vec{y}| > R$ außerhalb solch einer Metallkugel. Da der Gradient in Normalenrichtung auf der Kugeloberfläche $|\vec{x}| = R$ den Wert

$$\frac{x^i}{R}\partial_i G(\vec{x},\vec{y})_{||\vec{x}|=R} = -\frac{R^2 - \vec{y}^2}{4\pi R|\vec{x}-\vec{y}|^3} \tag{17.33}$$

hat, ist nach (17.16) jede im Inneren der Kugel harmonische Funktion $\varphi$ dort durch

$$\varphi(\vec{y}) = \frac{R^2 - \vec{y}^2}{4\pi R}\int_{|\vec{x}|=R} d^2 f\, \frac{\varphi(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \tag{17.34}$$

als Integral über ihre Randwerte gegeben.

## Kapazitätskoeffizienten

Nach (17.16) ist in einem ladungsfreien Gebiet $V$, das von leitenden Oberflächen $\partial V_j$ begrenzt wird, deren elektrische Spannung $\phi_j$ beträgt, das Potential

$$\phi(\vec{y}) = -\sum_{j=1}^{N} \phi_j \int_{\partial V_j} d^2 f\, \vec{n}\cdot \operatorname{grad} G(\vec{x},\vec{y})\ . \tag{17.35}$$

Die Ladungsdichte auf der Oberfläche $\partial V_i$ ist die Komponente des elektrischen Feldes $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$ in Gegenrichtung des aus $V$ herauszeigenden Normalenvektors (17.23)

$$\sigma(\vec{y}) =_{|\vec{y}\in\partial V_i} \vec{n}'\cdot \operatorname{grad}\phi = -\sum_{j=1}^{N} \phi_j\, n'^l\, \partial_{y^l}\int_{\partial V_j} d^2 f\, n^k\, \partial_{x^k} G(\vec{x},\vec{y})\ , \tag{17.36}$$

wobei $\vec{n}$ den Normalenvektor auf $\partial V_j$ und $\vec{n}'$ den Normalenvektor auf $\partial V_i$ bezeichnet. Die Gesamtladung auf $\partial V_i$ ergibt sich hieraus durch Integration

$$q_i = \sum_j C_{ij}\phi_j\ ,\quad C_{ij} = -\int_{\partial V_i} d^2 f'\, n'^l \partial_{y^l}\int_{\partial V_j} d^2 f\, n^k \partial_{x^k} G(\vec{x},\vec{y}) = C_{ji}\ . \tag{17.37}$$

Das heißt, die Ladungen $q_i$ auf den Leitern mit Oberflächen $\partial V_i$ sind proportional zu den Spannungen $\phi_i$. Die Kapazitätskoeffizienten $C_{ij}$ sind symmetrisch, denn die Greenfunktion ist symmetrisch, $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x})$. Sie hängen nur von der Geometrie der Oberflächen ab. $C_{ij}$ ist die Ladung auf der Fläche $\partial V_i$, falls an $V_j$ die Einheitsspannung anliegt und alle anderen Flächen geerdet sind. Daher ist $C_{ij}$ für $i = j$ positiv und für $i \neq j$ negativ, denn es werden nur Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen induziert.

Beispielsweise ist $\phi(r) = \frac{q_1}{4\pi r} + \frac{q_2}{4\pi r_2}$ das Potential zwischen zwei konzentrischen Kugelschalen mit Radien $r_1$ und $r_2$, auf deren innerer Schale die Ladung $q_1$ und auf deren äußerer Schale die Ladung $q_2$ sitzt. Die Spannungen, $\phi_1 = \phi(r_1)$, $\phi_2 = \phi(r_2)$, und Kapazitätskoeffizienten sind

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 4\pi \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{r_2}{r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} . \tag{17.38}$$

Das elektrische Feld solcher geladener Leiter hat die Energie (14.34)

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \, \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \int d^3x \, \partial_i \phi \, \partial_i \phi = \frac{1}{2} \int d^3x \, \phi \, (-\Delta \phi) = \frac{1}{2} \int d^3x \, \phi(\vec{x}) \, \rho(\vec{x}) . \tag{17.39}$$

Bei der partiellen Integration ist hierbei unterstellt, daß $|\phi \operatorname{grad} \phi|$ für große $|\vec{x}|$ schneller als $1/|\vec{x}|^2$ abfällt, sodaß keine Randterme auftreten.

Da die Ladungen jeweils auf der Oberfläche von Äquipotentialflächen $\partial V_i$ sitzen, ist das Integral einfach die Summe der Potentialwerte $\phi_i$, multipliziert mit der Ladung $q_i$ des jeweiligen Leiters,

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i \int_{\partial V_i} d^2f \, \sigma = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i \, q_i . \tag{17.40}$$

Die Ladungen sind linear in den Spannungen, $q_i = \sum_j C_{ij} \, \phi_j$. Daher ist die Energie quadratisch in den Spannungen. Die Kapazitätskoeffizienten sind die Koeffizienten dieser quadratischen Form,

$$E = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \, \phi_i \, \phi_j . \tag{17.41}$$

# 18 Distributionen

## Diracsche $\delta$-Funktion

Die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ einer punktförmigen Einheitsladung im Ursprung kann keine Funktion in dem Sinne sein, daß sie jedem Ort $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ eine reelle Zahl $\rho(\vec{x})$ zuordnet, und die zudem über ein Volumen $V$ integriert die enthaltene Ladung $Q(V)$ ergibt. Da diese Ladung verschwindet, wenn $V$ den Ursprung nicht enthält, muß die Ladungsdichte, die wir mit $\delta^3(\vec{x})$ bezeichnen, für $\vec{x} \neq 0$ außer in einer Ausnahmemenge vom Maß Null verschwinden. Hingegen über ein Volumen $V$ integriert, das 0 enthält, muß sich der Wert der Einheitsladung ergeben

$$Q(V) = \int_V d^3x\, \delta^3(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \notin V \\ 1 & \text{falls } 0 \in V \end{cases} . \tag{18.1}$$

Solch eine Funktion kann nicht existieren. Denn die Menge der Punkte, in der sie nicht verschwindet, ist vom Maß Null, daher verschwindet $Q(V)$ für jedes Volumen, egal welchen Funktionswert $\delta^3(\vec{x})$ bei $\vec{x} = 0$ hat.

Unbeirrt von der Widersprüchlichkeit der von Paul Dirac (1902-1984) [18] eingeführten Delta-Funktion $\delta^3(\vec{x})$ haben Physiker lange Jahre mit ihr richtig gerechnet, bevor Laurent Schwartz (1915-2002) klärte, was es damit auf sich hat. Eine deutschsprachige, mathematisch stichhaltige Darstellung gibt beispielsweise [21].

Es existieren Scharen reeller Funktionen, beispielsweise, für $\epsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$,

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\epsilon} e^{-(\frac{x}{\epsilon})^2} , \; g_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{falls } |x| \le \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \; h_\epsilon(x) = \begin{cases} a & \text{falls } |x| \le \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{falls } \frac{\epsilon}{2} < |x| \le \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \tag{18.2}$$

die in einfachheitshalber einer Dimension für genügend kleines $\epsilon > 0$ nahezu die Eigenschaften einer Ladungsdichte im Ursprung haben: für jedes abgeschlossene Volumen $V$ das den Ursprung nicht enthält, oder jedes offene Volumen, das ihn enthält, und für jeden vorgegebenen Fehler gibt es ein $\bar{\epsilon}$, sodaß das Integral über $V$ über $f_\epsilon$ oder $g_\epsilon$ oder $h_\epsilon$ für alle $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ um weniger als den vorgegebenen Fehler von 0 oder 1 abweicht.

Aber der Grenzwert $\epsilon \to 0$ von $f_\epsilon(x)$, $g_\epsilon(x)$ und $h_\epsilon(x)$ definiert keine Funktion $\delta(x)$. Vielmehr existiert der Grenzwert im Dualraum der Funktionen, also im Raum der linearen Funktionale, die Funktionen in die reellen Zahlen abbilden.

Zur Erklärung erinnern wir daran, daß reelle oder komplexe Funktionen Vektorräume bilden, beispielsweise den Raum $\vartheta$ der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger. Dabei ist der Träger einer Funktion $t$ der Abschluß der Untermenge der Punkte $x$, in denen $t$ nicht verschwindet. Die Funktionen aus $\vartheta$ nennen wir im weiteren Testfunktionen. Eine Folge von Testfunktionen $t_n$ konvergiert definitionsgemäß gegen eine Testfunktion $t$, wenn die Vereinigung der Träger von $t_n$ kompakt ist und $t_n - t$ mit allen Ableitungen überall gegen Null konvergiert.

Jedes stetige, lineare Funktional $L : \vartheta \to \mathbb{R}$ nennen wir eine Distribution. Dabei ist ein Funktional $L$ stetig, wenn für konvergente Folgen von Testfunktionen

$$\lim_n L[t_n] = L[\lim_n t_n] \tag{18.3}$$

gilt. Beispielsweise definiert jede integrable Funktion $f$ ein lineares Funktional, die Distribution

$$L_f : \begin{cases} \vartheta & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto L_f[t] = \int dx\, f(x)\, t(x) \end{cases} , \tag{18.4}$$

die Testfunktionen stetig in die reellen Zahlen abbildet. Umgekehrt sind nach dem Fundamentallemma (13.17) der Variationsrechnung stetige Funktionen eindeutig durch ihre zugehörige Distribution bestimmt.

Jede Funktion der Schar $f_\epsilon$, $g_\epsilon$ und $h_\epsilon$ definiert eine Distribution. Zudem existiert nach dem Mittelwertsatz (12.8) auch der Grenzwert $\epsilon \to 0$ dieser Distributionen, obwohl der Grenzwert der Funktionen nicht existiert,

$$L_{g_\epsilon}[t] = \int dx\, g_\epsilon(x)\, t(x) = \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} dx\, \frac{1}{\epsilon}\, t(x) = t(\bar{x})\, \frac{\epsilon}{\epsilon} = t(\bar{x}) \to t(0) . \tag{18.5}$$

Ebenso bilden $L_{h_\epsilon}$ und $L_{f_\epsilon}$ im Grenzfall $\epsilon \to 0$ jede Testfunktion auf $t(0)$ ab,

$$\int dx\, \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\epsilon} e^{-(\frac{x}{\epsilon})^2}\, t(x) \overset{x=\epsilon u}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int du\, e^{-u^2}\, t(\epsilon u) \to\ t(0)\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int du\, e^{-u^2} \overset{12.83}{=} t(0) . \tag{18.6}$$

Allerdings muß man hier, um den Grenzwert zu bestimmen, etwas umständlicher den $u$-Integrationsbereich in ein Intervall $[-R, R]$ und die Randbereiche $x < -R$ und $x > R$ unterteilen. Wählt man $R$ genügend groß, dann sind $\left|\int_R^\infty du\, e^{-u^2}\, t(\epsilon u)\right| \le |t|_{\max} \int_R^\infty du\, e^{-u^2}$ und $\int_{-\infty}^{-R} du\, e^{-u^2}\, t(\epsilon u)$ kleiner als jeder vorgegebene Fehler. Aus dem Integral über das Intervall $[-R, R]$ zieht man $t(\epsilon \bar{u})$ an einer Zwischenstelle $|\bar{u}| < R$ heraus.

Die Distribution $\lim_{\epsilon\to 0} L_{g_\epsilon}$, die angewendet auf eine Testfunktion $t$ ihren Funktionswert $t(0)$ ergibt, schreiben wir als

$$L_\delta[t] = t(0) = \int dx\, \delta(x)\, t(x) . \tag{18.7}$$

Sie ist wohldefiniert. Aber ihre Schreibweise als Integral ist nur formal: $\delta(x)$ existiert nicht als Funktion, auch wenn wir $\delta(x)$ so schreiben und von der $\delta$-Funktion reden. Sie existiert nur als Distribution $L_\delta$, angewendet auf Testfunktionen. Das Integral der $\delta$-Funktion mit einer Testfunktion ist nicht als Grenzwert einer Riemannsumme definiert, sondern bezeichnet die lineare Abbildung, die die Testfunktion auf ihren Funktionswert bei $x = 0$ abbildet.

Was ihre Wirkung auf Testfunktionen angeht, verhalten sich $f_\epsilon$ , $g_\epsilon$ und $h_\epsilon$ im Grenzfall $\epsilon \to 0$ wie die $\delta$-Funktion. Sie sind Regularisierungen der $\delta$-Funktion. Dieser Sachverhalt, $\lim_{\epsilon\to 0} L_{h_\epsilon} = L_\delta$ , ist gemeint, wenn man davon spricht, daß

$$\lim_{\epsilon\to 0} h_\epsilon(x) = \delta(x) \tag{18.8}$$

im Distributionensinn gilt.

Daß es sinnlos ist, vom Wert der $\delta$-Funktion bei $x = 0$ zu reden, zeigt die Funktionenschar $h_\epsilon$, die bei $x = 0$ den beliebig wählbaren Wert $h_\epsilon(0) = a$ hat.

## Die Distribution $\lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{x+i\,\epsilon}$

Für positives $\epsilon$, das gegen Null strebt, ist der Grenzwert von

$$\frac{1}{x + i\,\epsilon} = \frac{x - i\,\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \tag{18.9}$$

bei $x = 0$ nicht erklärt. Als Distribution aufgefaßt, also auf Testfunktionen $t$ angewendet, gilt für den Imaginärteil

$$\begin{aligned}\int dx \,\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}\, t(x) &= \int \frac{dx}{\epsilon}\, \frac{\epsilon^2}{x^2+\epsilon^2}\, t(\epsilon\,\frac{x}{\epsilon}) \overset{x=\epsilon\,u}{=} \int du\, \frac{1}{1+u^2}\, t(\epsilon\, u)\\ &\to t(0) \int du\, \frac{1}{1+u^2} = t(0)\,\arctan u\Big|_{u=-\infty}^{u=\infty} = t(0)\,\pi\ .\end{aligned} \tag{18.10}$$

Bei der Substitution $u = x/\epsilon$ haben wir verwendet, daß $\epsilon$ größer als Null ist, sonst wäre ein Faktor $\operatorname{sign}\epsilon$ aufgetreten (12.40). Um zu schließen, daß $t(\epsilon\, u)$ im Grenzfall $\epsilon \to 0$ durch $t(0)$ ersetzt werden darf, muß man das Integral wie bei (18.6) in zwei Randbereiche aufteilen, die nur vernachlässigbar beitragen, und ein Integral über ein Intervall, aus dem man $t(\epsilon\, u)$ mit dem Mittelwertsatz als $t(\epsilon\bar{u})$ an einer Zwischenstelle herausziehen kann.

Als Grenzwert für positive $\epsilon$, die gegen Null streben, erhalten wir im Distributionensinn

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \pi\,\delta(x)\ . \tag{18.11}$$

das heißt, integriert mit einer Testfunktion ergeben beide Seiten $\pi\, t(0)$ .

Auf Testfunktionen angewendet ergibt der Realteil von $1/(x + i\,\epsilon)$ für $\epsilon \neq 0$

$$\int dx\, \frac{x}{x^2+\epsilon^2}\, t(x) = \int dx\, \frac{x}{x^2+\epsilon^2}\, \frac{1}{2}\big(t(x) - t(-x)\big)\ , \tag{18.12}$$

denn $t(x) = \frac{1}{2}\big(t(x) + t(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(t(x) - t(-x)\big)$ kann in seine unter Spiegelung von $x$ geraden und ungeraden Anteile zerlegt werden, und das Integral über den spiegelsymmetrischen Integrationsbereich über das ungerade Produkt der ungeraden Funktion $x/(x^2 + \epsilon^2)$ mit dem geraden Anteil von $t$ verschwindet.

Da die Testfunktion differenzierbar ist, geht

$$\frac{t(x) - t(-x)}{2\,x} \tag{18.13}$$

für $x$ gegen 0 stetig gegen den dortigen Wert der Ableitung $dt/dx$. Also ist der Integrand

$$\frac{x}{x^2+\epsilon^2}\,\frac{t(x)-t(-x)}{2} = \frac{x^2}{x^2+\epsilon^2}\,\frac{t(x)-t(-x)}{2\,x}\ , \tag{18.14}$$

das Produkt eines stetigen Faktors mit einem $\epsilon$-abhängigen Faktor, der für $x \neq 0$ gegen 1 geht und bei $x = 0$ den Wert 0 hat. Für $\epsilon \to 0$ geht das Integral gegen

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int dx\,\frac{x}{x^2+\epsilon^2}\,t(x) = \int dx\,\frac{t(x)-t(-x)}{2\,x}\ . \tag{18.15}$$

Diese Distribution formt man üblicherweise noch um und schneidet ein kleines, spiegelsymmetrisches Intervall $[-\epsilon,\epsilon]$ aus dem Integrationsbereich,

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} dx\,\Big(\frac{1}{2}\,\frac{t(x)}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{t(-x)}{(-x)}\Big)+\int_{\epsilon}^{\infty} dx\,\Big(\frac{1}{2}\,\frac{t(x)}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{t(-x)}{(-x)}\Big)\ . \tag{18.16}$$

Bei der Substitution $u = -x$ der Integrationsvariablen und anschließender Umbenennung von $u$ in $x$ geht der zweite Term in den dritten und der vierte Term in den ersten über. Es ist also

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int dx\,\frac{x}{x^2+\epsilon^2}\,t(x) = \lim_{\epsilon\to 0+}\Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon} dx\,\frac{t(x)}{x}+\int_{\epsilon}^{\infty} dx\,\frac{t(x)}{x}\Big) \tag{18.17}$$

das Integral der Testfunktion $t$ mit $1/x$, wobei man aus dem Integrationsbereich ein symmetrisches Intervall $[-\epsilon,\epsilon]$ herausschneidet und nach der Integration $\epsilon > 0$ gegen Null gehen läßt. Diese auf Testfunktionen anzuwendende Distribution heißt Hauptwert (englisch „principal value“) von $1/x$. Wir schreiben sie als P. V. $\frac{1}{x}$ und fassen mit dieser Notation zusammen,

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{x+i\,\epsilon} = \text{P. V.}\,\frac{1}{x} - i\,\pi\,\delta(x)\ . \tag{18.18}$$

## Ableitung von Distributionen und Produkt mit glatten Funktionen

Die Ableitung von Distributionen $\sigma$ definiert man so, daß sie mit der bisherigen Definition übereinstimmt, wenn die Distribution durch eine differenzierbare Funktion $f$ gegeben ist. Da die Testfunktionen am Rand des Integrationsgebietes verschwinden, entstehen bei partieller Integration keine Randterme und man kann die Ableitung auf die Testfunktion abwälzen (12.20). Ihre Ableitung ist wieder eine Testfunktion

$$\int dx\,\Big(\frac{d}{dx}f(x)\Big)\,t(x) = \int dx\,f(x)\,\Big(-\frac{d}{dx}t(x)\Big)\ . \tag{18.19}$$

In Übereinstimmung mit dieser Gleichung definieren wir die Ableitung von Distributionen $\sigma$ durch

$$\big(\partial\sigma\big)[t] = \sigma[-\partial t]\ . \tag{18.20}$$

Da nach Voraussetzung die Testfunktionen unendlich oft differenzierbar sind, sind alle Distributionen unendlich oft differenzierbar, $(\partial^k\sigma)[t] = (-1)^k\,\sigma[\partial^k t]$.

Selbst Distributionen, die durch unstetige Funktionen $f$ gegeben sind, sind differenzierbar. Beispielsweise hat die Stufenfunktion (2.6)

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls} \quad x \le 0 \\ 1\,, & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}\,, \tag{18.21}$$

angewendet auf eine Testfunktion $t$, die Ableitung

$$\int dx\,\big(\frac{d}{dx}\Theta(x)\big)\,t(x) = \int dx\,\Theta(x)\,\big(-\frac{d}{dx}t(x)\big) = \int_0^\infty dx\,\big(-\frac{d}{dx}t(x)\big) = -t(x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} = t(0)\ . \tag{18.22}$$

Als Distribution ist folglich die Ableitung der Stufe die $\delta$-Funktion,

$$\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)\ . \tag{18.23}$$

Regularisieren wir die Stufenfunktion, beispielsweise durch die differenzierbare Funktionenschar,

$$\Theta(x) = \lim_{\epsilon\to 0+}\big(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{\epsilon} + \frac{1}{2}\big)\ , \tag{18.24}$$

so erhalten wir für die Ableitung ebenfalls die $\delta$-Funktion

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{\epsilon} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\epsilon}\frac{1}{1+\frac{x^2}{\epsilon^2}} = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \overset{18.11}{\to} \delta(x)\ . \tag{18.25}$$

Auch die $\delta$-Funktion ist differenzierbar. Ihre Ableitung bildet Testfunktionen

$$\int dx\,\big(\frac{d}{dx}\delta(x)\big)\,t(x) = \int dx\,\delta(x)\,\big(-\frac{d}{dx}t(x)\big) = -\frac{dt}{dx}_{|x=0} \tag{18.26}$$

auf das Negative der Ableitung der Testfunktion bei $x = 0$ ab.

Da das Produkt einer glatten, das heißt beliebig oft differenzierbaren, Funktion $f$ mit einer Testfunktionen wieder eine Testfunktion ist, ist erklärt, was das Produkt einer glatten Funktion $f$ mit einer Distribution $\sigma$ ist. Das ist die Distribution

$$\big(f\,\sigma\big)[t] = \sigma[f\,t]\ . \tag{18.27}$$

Insbesondere ist $f(x)\,\delta(x)$ das $f(0)$-fache der $\delta$-Funktion, denn

$$\int dx\,f(x)\,\delta(x)\,t(x) = f(0)\,t(0) = f(0)\int dx\;\delta(x)\,t(x) = \int dx\,f(0)\,\delta(x)\,t(x)\ ,$$

$$f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x)\ . \tag{18.28}$$

Für das Produkt von $f$ mit der Ableitung der $\delta$-Funktion berechnet man

$$\begin{aligned}\int dx\,\big(f(x)\,\frac{d}{dx}\delta(x)\big)\,t(x) &= \int dx\,\big(\frac{d}{dx}\delta(x)\big)\,f(x)\,t(x) = -\frac{d(f\,t)}{dx}_{|x=0} \\ &= -\frac{df}{dx}_{|x=0}\,t(0) + f(0)\big(-\frac{dt}{dx}_{|x=0}\big) \\ &= \int dx\,\big(f(0)\frac{d}{dx}\,\delta(x) - \frac{df}{dx}_{|x=0}\,\delta(x)\big)\,t(x)\ ,\end{aligned}$$

$$f(x)\,\frac{d}{dx}\delta(x) = f(0)\,\frac{d}{dx}\delta(x) - \big(\frac{df}{dx}_{|x=0}\big)\,\delta(x)\ . \tag{18.29}$$

## Kettenregel

Es sei $y : x \mapsto y(x)$ eine streng monotone, beliebig oft differenzierbare Funktion, beispielsweise die Verschiebung um $c$, $y(x) = x + c$, oder die Streckung um einen Faktor $a$, $y(x) = a\,x$, wobei $a \neq 0$ auch negativ sein kann. Da $y$ invertierbar jede kompakte Menge auf eine kompakte Menge abbildet, sind die verketteten Funktionen $t \circ y$ und $t \circ y^{-1}$ Testfunktionen, wenn $t$ eine Testfunktion ist. Verkettung mit monotonen, glatten Funktionen bildet den Raum der Testfunktionen auf sich ab.

Dies erlaubt, die verkettete Distribution $\sigma \circ y$ so zu definieren, daß sie für die linearen Abbildungen $L_f$, die zu integrablen Funktionen $f$ gehören, mit $L_{f \circ y}$ übereinstimmt.

Nach dem Integralsubstitutionssatz (12.40) gilt für $L_{f \circ y}$

$$\int dx\, f(y(x))\, t(x) = \int dy\, f(y)\, \Big|\frac{dx}{dy}\Big|\, t(x(y)) \;, \tag{18.30}$$

wobei auf der rechten Seite $x : y \mapsto x(y)$ die Umkehrabbildung der Abbildung $y$ auf der linken Seite bezeichnet. Also definieren wir als verkettete Distribution $\big(\sigma \circ y\big) = \hat{\sigma}$

$$\hat{\sigma}[t] = |\partial y^{-1}|\, \sigma[t \circ y^{-1}] \;. \tag{18.31}$$

Für die $\delta$-Funktion besagt dies insbesondere

$$\int dx\, \delta(y(x))\, t(x) = \int dy\, \delta(y)\, \Big|\frac{dx}{dy}\Big|\, t(x(y)) = \Big|\frac{dx}{dy}\Big|_{|y=0}\, t(x(0)) \;, \tag{18.32}$$

und für die Streckung $y(x) = a\,x$ um $a \neq 0$ gilt daher wegen $x(y) = y/a$

$$\int dx\, \delta(a\,x)\, t(x) = \int dy\, \delta(y)\, \frac{1}{|a|}\, t(\frac{y}{a}) = \frac{1}{|a|}\, t(0) \;, \quad \delta(a\,x) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x) \;. \tag{18.33}$$

Also ist $\delta(x) = \delta(-x)$ spiegelsymmetrisch.

Für eine Verschiebung um $-c$, falls $y(x) = x - c$ und $x(y) = y + c$ ist, ergibt sich

$$\int dx\, \delta(x - c)\, t(x) = \int dx\, \delta(c - x)\, t(x) = \int dy\, \delta(y)\, t(y + c) = t(c) \;. \tag{18.34}$$

Die verschobene $\delta$-Funktion, angewendet auf eine Testfunktion, ergibt den Wert der Testfunktion an dem Ort, an dem das Argument der $\delta$-Funktion verschwindet.

Bei Integration mit der $\delta$-Funktion fallen das Integral und die $\delta$-Funktion weg, so wie bei der Summe mit ${\delta^i}_j$ die Summe und das Kronecker-Delta wegfallen, ${\delta^i}_j\, t^j = t^i$.

Allgemeiner ergibt $\delta(y(x))$ nach (18.32) den Wert der Testfunktion an der Nullstelle $x_0 = x(0)$ von $y$, $y(x_0) = 0$, multipliziert mit der Ableitung der Umkehrfunktion $x(y)$ bei $y = 0$, das ist der Kehrwert der Ableitung von $y(x)$ bei $x_0$ (4.12). Daher ist

$$\delta(y(x)) = \frac{1}{|\frac{dy}{dx}|}\, \delta(x - x_0) \;. \tag{18.35}$$

Hat die Abbildung $y(x)$ mehrere Nullstellen $x_i$, in denen jeweils die Ableitung $dy/dx$ nicht verschwindet, so kann nicht für alle Distributionen $\sigma$ die Verkettung $\sigma \circ y$ definiert werden, denn $y$ ist nicht invertierbar. Zur Definition der verketteten $\delta$-Funktion reicht aber, daß es nichtüberlappende Umgebungen $U_i$ jeder Nullstelle gibt, die invertierbar auf $y(U_i)$ abgebildet werden. Man schreibt zur Auswertung der verketteten $\delta$-Funktion das Integral (18.30) als Summe von Integralen über diese Umgebungen. Für jedes $U_i$ gilt (18.35). Insgesamt erhalten wir für $\delta(y(x))$ die Summe über die Nullstellen von $y$,

$$\delta(y(x)) = \sum_{y(x_i)=0} \frac{1}{|\frac{dy}{dx}|} \delta(x - x_i) \ . \tag{18.36}$$

Beispielsweise ist $\delta(t^2 - r^2) = (\delta(t-r) + \delta(t+r))/(2\,|r|)$.

## Höherdimensionale Distributionen

Höherdimensionale Distributionen sind lineare Abbildungen von Testfunktionen höherdimensionaler Gebiete $M$. Bei der höherdimensionalen $\delta$-Funktion deutet man die Dimension so wie bei der Integrationsvorschrift durch eine hochgestellte Zahl an. Beispielsweise bildet die verschobene, dreidimensionale $\delta^3$-Funktion jede Testfunktion auf ihren Wert an dem Punkt $\vec{a} = (u, v, w)$ ab, an dem das Argument der $\delta$-Funktion verschwindet,

$$\int d^3x\, \delta^3(\vec{x} - \vec{a})\, t(\vec{x}) = t(\vec{a}) \ . \tag{18.37}$$

Zerlegt man die Integration über $\vec{x} = (x, y, z)$ in drei Integrationen über $x$, $y$ und $z$, so erweist sich die $\delta^3$-Funktion als Produkt dreier eindimensionaler $\delta$-Funktionen *verschiedener* Argumente

$$\delta^3(\vec{x} - \vec{a}) = \delta(x - u)\, \delta(y - v)\, \delta(z - w) \ . \tag{18.38}$$

Das Produkt von $\delta(x)$ mit sich ist nicht definiert.

Für jede Testfunktion $t \in \vartheta$ gilt nach (17.10)

$$t(\vec{y}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x\, \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, \Delta t(\vec{x}) \ , \tag{18.39}$$

denn da $t$ einen kompakten Träger hat, verschwindet die Testfunktion und ihr Gradient auf dem Rand, wenn der Integrationsbereich genügend groß gewählt ist. Die Ableitungen der Testfunktion, integriert mit $1/|\vec{x} - \vec{y}|$, sind bis auf das Vorzeichen definitionsgemäß die Ableitungen der Distribution $1/|\vec{x} - \vec{y}|$, angewendet auf die Testfunktion,

$$\int d^3x\, \Big(\frac{1}{4\,\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\Big)\, t(\vec{x}) = -t(\vec{y}) \ . \tag{18.40}$$

Also gilt im Distributionensinn

$$\frac{1}{4\,\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \ . \tag{18.41}$$

Diese Gleichung ist nicht durch Ableiten von $1/|\vec{x}-\vec{y}|$ für $\vec{x} \neq \vec{y}$ zu erschließen, denn als Funktion ist $1/|\vec{x}-\vec{y}|$ ist bei $\vec{x} = \vec{y}$ nicht definiert, geschweige denn differenzierbar. Die Ableitung $\Delta 1/|\vec{x}-\vec{y}|$ ist in einer Umgebung von $\vec{x} = \vec{y}$ nur als Distribution, das heißt durch ihre Wirkung auf Testfunktionen, erklärt.

Die Greenfunktion $G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}}|$ kann als Inverses des zugehörigen Operators $-\Delta$ aufgefaßt werden. So wie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Lu = g$ durch $u = L^{-1}\,g$ gegeben ist, wobei $L^i{}_j L^{-1\,j}{}_k = \delta^i{}_k$ gilt, so ergeben sich Lösungen $u$ einer linearen Differentialgleichung $(Lu)(x) = g(x)$ mit einer zu $L$ gehörigen Greenfunktion

$$LG(x,y) = \delta(x-y) \tag{18.42}$$

als $u(x) = \int dy\, G(x,y)\, g(y)$ .

# 19 Komplex differenzierbare Funktionen

## Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Eine komplexe Funktion $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ , $z \mapsto f(z)$, kann nach Zerlegen in Real- und Imaginärteil, $z = x + i\,y$ , auch als komplexe Linearkombination

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \tag{19.1}$$

zweier reeller Funktionen $u$ und $v$ verstanden werden. Die Funktion $f$ heißt bei $z \in G$ komplex differenzierbar, wenn dort $u$ und $v$ reell differenzierbar sind und die lineare Näherung

$$df = (\partial_x u + i\,\partial_x v)\,dx + (\partial_y u + i\,\partial_y v)\,dy = (\partial_x u + i\,\partial_x v)\,dx + (\partial_y v - i\partial_y u)\,i\,dy \tag{19.2}$$

proportional zu $dz = dx + i\,dy$ ist, wenn also eine komplexe Zahl $df/dz$ existiert, sodaß für alle $dx$ und $dy$ die Änderung

$$df = \frac{df}{dz}\,dz \tag{19.3}$$

ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $dx$ und $i\,dy$ mit demselben Faktor zu $df$ beitragen.

$$\frac{df}{dz} = \partial_x f = -i\,\partial_y f\ , \quad (\partial_x u + i\,\partial_x v) = (\partial_y v - i\partial_y u) \tag{19.4}$$

In Real- und Imaginärteil getrennt, sind (19.4) die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v\ , \quad \partial_y u = -\partial_x v\ . \tag{19.5}$$

Sie sind über reelle Differenzierbarkeit hinaus erforderlich, damit eine komplexe Funktion komplex differenzierbar ist.

Anschaulich besagt reelle Differenzierbarkeit, daß der Funktionsgraph glatt ist und keine Knicke hat. Daß komplexe Differenzierbarkeit eine weitergehende Einschränkung ist, zeigt die glatte Funktion $u + i\,v = x - i\,y = z^*$ . Sie ist nicht komplex differenzierbar, $1 = \partial_x u \neq \partial_y v = -1$ . Hingegen ist $f(z) = z$ komplex differenzierbar: wegen $dz = 1\,dz$ ist $dz/dz = 1$ .

Der Real- und Imaginärteil jeder in einem Gebiet komplex differenzierbaren Funktion löst dort die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\Delta_{(2)} f = 0\ , \quad \Delta_{(2)} = \partial_x \partial_x + \partial_y \partial_y\ . \tag{19.6}$$

Das folgt für zweifach stetig differenzierbare Funktionen nach Vertauschen der Differentiationsreihenfolge aus (19.5)

$$\partial_x \partial_x u = \partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v = -\partial_y \partial_y u \,, \ \partial_x \partial_x v = -\partial_x \partial_y u = -\partial_y \partial_x u = -\partial_y \partial_y v \,. \quad (19.7)$$

Daher sind komplex differenzierbare Funktionen für zweidimensionale Potentialprobleme wichtig. Wie wichtig für die Mathematik komplex differenzierbarer Funktionen sind, läßt sich kaum überschätzen, eine Ahnung davon vermittelt der Klassiker [22].

Wie bei reell differenzierbaren Funktionen ist die Ableitung linear. Für alle komplexen Zahlen $a$ und $b$ und alle komplex differenzierbaren Funktionen $f$ und $g$ gilt

$$\frac{d}{dz}(a\,f + b\,g) = a\,\frac{df}{dz} + b\,\frac{dg}{dz} \,. \quad (19.8)$$

Ebenso gelten die Produktregel und die Kettenregel. Aus der Produktregel

$$\frac{d}{dz}(f\,g) = \frac{df}{dz}\,g + f\,\frac{dg}{dz} \,, \quad (19.9)$$

ergibt sich die Ableitung von $z^n$ für alle natürlichen Zahlen $n$

$$\frac{dz^n}{dz} = n\,z^{n-1} \,. \quad (19.10)$$

Für negative ganze Zahlen und $z \neq 0$ folgt das entsprechende Ergebnis ebenfalls aus der Produktregel (4.17). Alle Potenzen von $z$ außer $1/z$ haben demnach (für negative $n$ außerhalb $z = 0$) komplexe Stammfunktionen,

$$z^n = \frac{d}{dz}\,\frac{1}{n+1}\,z^{n+1} \,, \quad n \neq -1 \,. \quad (19.11)$$

Die Stammfunktion von $1/z$ ist der komplexe Logarithmus,

$$\ln z = \ln(|z| e^{i\,\varphi}) = \ln|z| + i\,\varphi = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\ \arctan\frac{y}{x} = \ln|z| + i\ \arg z \,, \quad (19.12)$$

wie man durch Ableiten bestätigt,

$$\frac{d\ln z}{dz} = \partial_x \ln z = -i\,\partial_y \ln z = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\frac{-y}{x^2} = \frac{x - i\,y}{x^2+y^2} = \frac{1}{z} \,. \quad (19.13)$$

Allerdings ist $\ln z$ nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene definiert und stetig: der Winkel $\arg z$ zur positiven $x$-Achse nimmt bei einem Umlauf um den Ursprung um $2\pi$ zu.

Da bei komplex differenzierbaren Funktionen $f$ und $g$ die verkettete Funktion $f \circ g$ ebenfalls komplex differenzierbar ist,

$$\frac{d\,(f \circ g)}{dz}_{|z} = \frac{df}{dz}_{|g(z)}\,\frac{dg}{dz}_{|z} \,, \quad (19.14)$$

folgt unter anderem, daß man aus Lösungen $f$ von zweidimensionalen Potentialproblemen durch komplex differenzierbare Abbildungen $g$ neue Lösungen erhält. Ist beispielsweise $\Re f$ auf einer Äquipotentialkurve $\Gamma$ konstant, so ist $\Re(f \circ g)$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, die auf dem Urbild $g^{-1}(\Gamma)$ konstant ist.

Wo $df/dz$ nicht verschwindet, ist die Multiplikation mit $df/dz$ eine Drehstreckung (3.77) von $dz = dx + i\,dy$. Dort bildet die komplex differenzierbare Abbildung in erster Näherung kleine Kreise auf kleine Kreise ab und ist daher winkeltreu.

## Komplexes Wegintegral

Ist $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,, \lambda \mapsto z(\lambda)$, ein parametrisierter Weg in der komplexen Ebene und $f$ eine auf dem Weg definierte Funktion, so definiert

$$\int_\Gamma dz\, f(z) = \int_I d\lambda\, \frac{dz}{d\lambda}\, f(z(\lambda)) \tag{19.15}$$

das komplexe Wegintegral. Es hängt nicht von der Parametrisierung ab (12.50).

Das Wegintegral über eine Ableitung $df/dz$ einer komplex differenzierbaren Funktion ist wegen

$$\frac{dz}{d\lambda}\frac{df}{dz} = \Big(\frac{dx}{d\lambda} + i\,\frac{dy}{d\lambda}\Big)\frac{df}{dz} \overset{19.4}{=} \Big(\frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{d}{d\lambda}\Big(u(x(\lambda), y(\lambda)) + iv(x(\lambda), y(\lambda))\Big) \tag{19.16}$$

nach dem Hauptsatz der Integralrechnung die Differenz der Stammfunktion am Endpunkt $\overline{z} = z(\overline{\lambda})$ und am Anfangspunkt $\underline{z} = z(\underline{\lambda})$ des Weges

$$\int_\Gamma dz\, \frac{df}{dz} = \int_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} d\lambda\, \frac{d}{d\lambda} f(x(\lambda), y(\lambda)) = f(\overline{z}) - f(\underline{z})\ . \tag{19.17}$$

Insbesondere verschwinden Wegintegrale über Ableitungen, wenn der Weg geschlossen ist, also $\overline{z} = \underline{z}$ gilt. Da $(z - a)^n$ für alle ganzen Zahlen $n$ außer für $n = -1$ die Ableitung von $(z - a)^{n+1}/(n + 1)$ ist, gilt daher

$$n \in \mathbb{Z}\ ,\ n \neq -1\ :\quad \oint dz\,(z - a)^n = 0\ . \tag{19.18}$$

Das Symbol $\oint$ betont, daß es sich um ein Integral über einen geschlossenen Weg handelt. Er darf für negative $n$ nicht durch $z = a$ gehen.

Die Stammfunktion $\ln(z - a)$ von $1/(z - a)$ existiert nur in der bei $a$ aufgeschnittenen Ebene. Auf einem Weg, der von $\underline{z}$ im mathematisch positiven Sinn einmal um $a$ herum zu $\overline{z} = \underline{z}$ zurückführt, nimmt der Winkel $\arg(z - a)$ um $2\pi$ und der Logarithmus um $2\pi i$ zu

$$\oint dz\, \frac{1}{z - a} = 2\pi i\ . \tag{19.19}$$

Zerlegen wir $f$ und $\frac{dz}{d\lambda}$ in Real- und Imaginärteil, so erweist sich das komplexe Wegintegral als reelles Wegintegral in zwei Dimensionen über eine komplexe Linearkombination

$\vec{C}$ zweier reeller Vektorfelder

$$\frac{dz}{d\lambda} f = (\frac{dx}{d\lambda} + i \frac{dy}{d\lambda})(u + i v) = \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \cdot \vec{C} \ , \ \vec{C} = \begin{pmatrix} u + i v \\ -v + i u \end{pmatrix} \ . \tag{19.20}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (19.5) besagen, daß die antisymmetrisierte Ableitung des Vektorfeldes dort verschwindet, wo die Funktion $f$ komplex differenzierbar ist

$$\partial_1 C_2 - \partial_2 C_1 = \partial_x(-v + i u) - \partial_y(u + i v) = 0 \ . \tag{19.21}$$

Nach dem Satz von Stokes (14.13) verschwindet daher das Wegintegral über jeden geschlossenen Weg $\Gamma$, der ein Gebiet $G$ berandet, in dem $f$ komplex differenzierbar ist

$$0 = \int_G d^2 s \left(\partial_1 C_2 - \partial_2 C_1\right) = \int_\Lambda d\lambda \frac{ds^i}{d\lambda} C_i(s(\lambda)) = \int_{\Gamma = \partial G} dz\, f(z) \ . \tag{19.22}$$

Dies ist der

**Cauchysche Integralsatz:** *Das Umlaufintegral über die Funktion* $f$ *verschwindet über jeden geschlossenen Weg, auf dem* $f$ *stetig ist und der ein Gebiet berandet, in dem* $f$ *komplex differenzierbar ist,*

$$\oint dz\, f(z) = 0 \ . \tag{19.23}$$

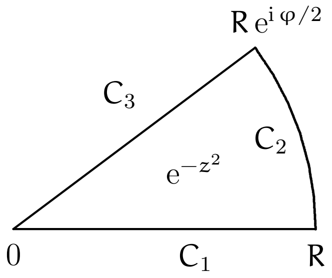
Ist der Integrationsweg $\Gamma$ von $\underline{z}$ zu $\overline{z}$ nicht geschlossen, so ergibt sich aus dem Cauchyschen Integralsatz, daß das Wegintegral mit demjenigen über jeden anderen Weg $\Gamma'$ von $\underline{z}$ zu $\overline{z}$ übereinstimmt, wenn $f$ im Gebiet, das von $\Gamma - \Gamma'$ berandet wird, komplex differenzierbar ist. Dabei bezeichnet $\Gamma - \Gamma'$ den Weg von $\underline{z}$ längs $\Gamma$ nach $\overline{z}$ und längs des rückwärts durchlaufenen Weges $\Gamma'$ zurück nach $\underline{z}$.

Als Beispiel für den Cauchyschen Integralsatz werten wir für komplexes $a \neq 0$ mit nicht negativem Realteil, $a = |a| e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \pi/2$, das Integral

$$\sqrt{|a|}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} \int_0^\infty d\lambda\, e^{-a\lambda^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{C_3} dz\, e^{-z^2} \tag{19.24}$$

aus als Grenzwert für $R \to \infty$ des komplexen Wegintegrals über den Strahl $C_3$ vom Ursprung zu $R\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$,

$$C_3 : [0, \frac{R}{\sqrt{|a|}}] \to \mathbb{C} \ , \quad \lambda \mapsto z(\lambda) = \sqrt{|a|}\, e^{i\varphi/2} \lambda \ . \tag{19.25}$$




Zusammen mit dem Strahl $C_1$ vom Ursprung zu $R$ und dem Kreisbogen $C_2 : \lambda \mapsto R\, e^{i\lambda}$, $0 \leq \lambda \leq \varphi/2$, berandet $C_1 + C_2 - C_3$ einen Kreissektor mit Radius $R$ und Öffnungswinkel $\varphi/2$, in dem der Integrand $e^{-z^2}$ komplex differenzierbar ist. Da das Umlaufintegral verschwindet, ist $\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{C_3}$ für jedes $R$.

Im Grenzfall $R \to \infty$ verschwindet aber, wie die folgende Abschätzung zeigt, das Integral über den Kreisbogen $C_2$,

$$\begin{aligned} \Big|\int_{C_2} dz\, e^{-z^2}\Big| &= \Big|\int_0^{\frac{\varphi}{2}} d\lambda\, R\, i\, e^{i\lambda}\, e^{-R^2(\cos(2\lambda) + i\sin(2\lambda))}\Big| \leq \int_0^{\frac{\varphi}{2}} d\lambda\, R\, e^{-R^2 \cos(2\lambda)} \\ &= \frac{R}{2} \int_0^\varphi d\psi\, e^{-R^2 \cos\psi} \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\, e^{-R^2 \cos\psi} = \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\, e^{-R^2 \sin\alpha} \ . \end{aligned} \tag{19.26}$$

Hierbei haben wir verwendet, daß der Betrag eines Integrals kleiner gleich dem Integral über den Betrag des Integranden ist, $|e^{ix}| = 1$ für reelles $x$, $\varphi \le \pi/2$, und wir haben $\psi = 2\lambda$ und $\alpha = \pi/2 - \psi$ substituiert.

Für $0 \le \alpha \le \pi/2$ ist $\sin(\alpha) \ge (2/\pi)\,\alpha$, und $e^{-R^2 \sin\alpha}$ ist kleiner als $e^{-R^2 (2/\pi)\,\alpha}$. Also gilt

$$\Big|\int_{C_2} dz\, e^{-z^2}\Big| \le \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\, e^{-\frac{2R^2}{\pi}\alpha} = \frac{R}{2}\,\frac{-\pi}{2\,R^2}\, e^{-\frac{2R^2}{\pi}\alpha}\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} < \frac{\pi}{4R}\ , \tag{19.27}$$

und der Betrag von $\int_{C_2}$ strebt mit $R \to \infty$ gegen Null.

Folglich ist in diesem Grenzfall das Integral über $C_3$ gleich dem Integral über $C_1$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} dz\, e^{-z^2} = \int_0^\infty d\lambda\, e^{-\lambda^2} \overset{12.83}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ , \tag{19.28}$$

und wir erhalten das Ergebnis

$$\int_0^\infty d\lambda\, e^{-a\lambda^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\, e^{-i\frac{\varphi}{2}}\ . \tag{19.29}$$

Für $a = i = e^{i\pi/2}$ folgt wegen $e^{-i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

$$\int_0^\infty dx\, e^{-i x^2} = \int_0^\infty dx\, \big(\cos(x^2) - i\,\sin(x^2)\big) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-i)\ . \tag{19.30}$$

In Real- und Imaginärteil zerlegt, ergeben sich die nach Fresnel [18] benannten Integrale

$$\int_0^\infty dx\, \cos(x^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ ,\quad \int_0^\infty dx\, \sin(x^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ . \tag{19.31}$$

In manchen Arbeiten kreativer Theoretiker werden Integrale über reelle Variable kurzerhand durch Integrale über imaginäre Variable ersetzt und unterstellt, das so veränderte Integral, das Wickrotierte Integral, sei dem ursprünglichen Integral bis auf einen Faktor i gleich. Das kann richtig sein, wenn der Integrand eine genügend gutartige Funktion der komplexen Ebene ist, ist aber normalerweise falsch und für reelle Funktionen, die nicht die Einschränkung von komplexen Funktionen auf reelle Argumente sind, so sinnlos wie die Frage „Wo bin ich um $t = 9\,i$ Uhr auf meinem Weg $t \mapsto \vec{x}(t)$ zur Arbeit?“.

## Residuensatz

Eine komplexe Funktion $f$ heißt in einem Gebiet $G$ meromorph, wenn sie in allen Punkten von $G$ bis auf endlich viele Ausnahmepunkte $z_1, z_2 \dots z_n$, die Pole, komplex differenzierbar ist. In einer genügend kleinen Umgebungen jedes Pols wird sie, außer im Pol selbst, durch eine Laurentreihe (Pierre Alphonse Laurent (1813-1854) [18]) dargestellt, das ist eine Potenzreihe in $(z - z_i)$ und $1/(z - z_i)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_i)^n\, c_n + \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_i)^{-n}\, c_{-n}\ . \tag{19.32}$$

Der Koeffizient $c_{-1}$ bei $1/(z-z_i)$ heißt das Residuum von $f$ im Punkt $z_i$. Wir bezeichnen ihn mit

$$\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z) = c_{-1}\ . \tag{19.33}$$

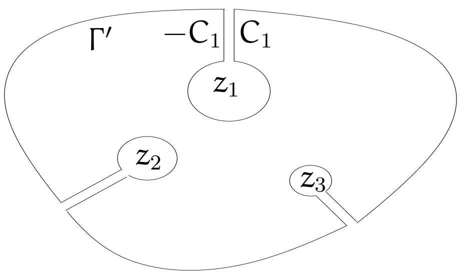
Hat beispielsweise $f$ in $z_1$ einen Pol der Ordnung $k$, $f(z) = g(z)/(z-z_1)^k$, $k > 0$, wobei $g(z) = (z-z_1)^k f(z)$ in $z_1$ komplex differenzierbar ist und durch die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n g}{dz^n}_{|z_1} (z-z_1)^n \tag{19.34}$$

dargestellt wird, dann hat $f$ in $z_1$ das Residuum

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} g}{dz^{k-1}}_{|z_1}\ . \tag{19.35}$$

Ist $f$ in einem Gebiet $G$, das von einer Kurve $\Gamma$ berandet wird, mit Ausnahme von endlich vielen Punkten komplex differenzierbar und auf $\Gamma$ stetig, dann ergibt das Umlaufintegral über die im mathematisch positiven Drehsinn durchlaufene Kurve $\Gamma$ die Summe der Residuen mal $2\pi i$,




$$\oint_{\Gamma=\partial G} dz\, f(z) = 2\pi i \sum_{z_j \in G} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)\ . \tag{19.36}$$

Der Residuensatz folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz bei Betrachtung des nebenstehenden Integrationsweges $\Gamma'$. Auf diesem Weg wird $\Gamma$ jeweils durch einen Weg $C_i$ in die Nähe jedes Pol $z_i$ unterbrochen, daran anschließend wird der Pol im Uhrzeigersinn und der Weg $-C_i$ zurück zu $\Gamma$ durchlaufen. Die Pole liegen alle außerhalb des von $\Gamma'$ umlaufenen Gebietes, also verschwindet das Wegintegral über $\Gamma'$. Die Beiträge der Wegintegrale über $C_i$ und $-C_i$ heben sich auf, wenn beide Wege bis auf den Durchlaufsinn übereinstimmen. Demnach heben sich das Wegintegral über $\Gamma$ und über die im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreise um die Pole gegenseitig auf. Es gilt also

$$\oint_{\Gamma=\partial G} dz\, f(z) = \sum_i \oint_{K_i} dz\, f(z) = \sum_i \oint_{K_i} dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-z_i)^n c_n\ . \tag{19.37}$$

Dabei bezeichnet $K_i$ die im mathematisch positiven Sinn durchlaufenen Kreise um die Pole $z_i$. Für $n \neq -1$ verschwinden die Umlaufintegrale über $(z-z_i)^n$ (19.18), es verbleibt

$$\oint_{K_i} dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-z_i)^n c_n \overset{19.19}{=} 2\pi i\, c_{-1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)\ . \tag{19.38}$$

Umlaufintegrale um Gebiete, in denen der Integrand komplex differenzierbar ist, verschwinden – so wie in drei Dimensionen Oberflächenintegrale über elektrische Feldstärken verschwinden, wenn im umhüllten Gebiet keine Ladung ist. Das Residuum eines Pols entspricht in zwei Dimensionen einer dortigen Punktladung. Sie trägt additiv zum Umlaufintegral bei. Überraschen mag an dieser Analogie, daß Pole höherer Ordnung,

$z^{-n}$ mit $n > 1$, ungeladen sind. Das erklärt sich allerdings, wenn man bedenkt, daß $-q/z^2$ sich als Grenzfall zweier entgegengesetzter, benachbarter Ladungen ergibt, also wie ein Dipol ungeladen ist,

$$-\frac{q}{z^2} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \Big(\frac{q}{z+\epsilon} - \frac{q}{z}\Big) \ . \tag{19.39}$$

Als Anwendung des Residuensatzes werten wir reelle Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, Q(x) \tag{19.40}$$

in den Fällen aus, in denen die stetige reelle Funktion $Q(x)$ der Wert einer komplexen Funktion $Q(z)$ ist, die in der oberen Halbebene $\Im(z) \geq 0$ bis auf endlich viele Ausnahmepunkte komplex differenzierbar ist und dort für große $|z|$ schneller als $1/|z|$ abfällt, sodaß für jede vorgegebene Schranke $\epsilon > 0$ ein $R$ existiert, sodaß für jedes größere $r > R$ und alle $0 \leq \lambda \leq \pi$ die Ungleichung

$$|r\, Q(r\, e^{i\lambda})| < \epsilon \tag{19.41}$$

gilt. Dies ist für rationale Funktionen $Q(z) = Z(z)/N(z)$ der Fall, wenn der Grad des Nennerpolynoms $N$ um mindestens zwei größer als der des Zählers $Z$ ist und $N$ keine reelle Nullstelle hat.

Das Wegintegral über den Halbkreis in der oberen Halbebene

$$\Gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C} \ , \ \lambda \mapsto z(\lambda) = r\, e^{i\lambda} \tag{19.42}$$

verschwindet mit $r \to \infty$, denn für genügend große $r$ ist sein Betrag kleiner als jede vorgegebene Schranke $\epsilon' = \pi\, \epsilon$

$$\Big|\int_{\Gamma_r} dz\, Q(z)\Big| = \Big|\int_0^{\pi} d\lambda\, r\, i\, e^{i\lambda}\, Q(r\, e^{i\lambda})\Big| \leq \int_0^{\pi} d\lambda \, \big| r\, i\, e^{i\lambda}\, Q(r\, e^{i\lambda})\big| < \int_0^{\pi} d\lambda\, \epsilon = \epsilon' \ . \tag{19.43}$$

Also ist das Integral (19.40) das Umlaufintegral um die obere Halbebene und nach dem Residuensatz die Summe der umlaufenen Residuen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, Q(x) = 2\pi i \sum_{z_i :\, \Im(z_i) > 0} \operatorname*{Res}_{z = z_i} Q(z) \ . \tag{19.44}$$

Beispielsweise muß man zur Berechnung des Integrals

$$\int_0^{\infty} dx\, \frac{x^2}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{2} \frac{x^2}{x^4+1} \tag{19.45}$$

die Nullstellen $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $z_2 = i\, z_1$, $z_3 = -z_1$ und $z_4 = -i\, z_1$ des Nenners bestimmen. Die ersten beiden liegen in der oberen Halbebene und tragen zum Umlaufintegral bei. Das Residuum von

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{z^2}{(z - z_1)\,(z - z_2)\,(z - z_3)\,(z - z_4)} \tag{19.46}$$

bei $z_1$ ist einfach der Faktor bei $1/(z - z_1)$, ausgewertet bei $z = z_1$ (19.35)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{2} \frac{z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z_1(1-i)(1+1)(1+i)} = \frac{1}{8\,z_1} \ . \qquad (19.47)$$

Ebenso ergibt sich das Residuum bei $z_2$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{2} \frac{z_2^2}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z_2(1+i)(1-i)(1+1)} = \frac{1}{8\,z_2} \qquad (19.48)$$

Insgesamt folgt

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^2}{x^4+1} = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{16}(1 - i - 1 - i) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ . \qquad (19.49)$$

Ebenso läßt sich mit dem Residuensatz die Fouriertransformation von Funktionen $Q(x)$

$$\int dx\, Q(x)\, e^{i\,k\,x} \qquad (19.50)$$

für $k > 0$ bestimmen, wenn $Q(z)$ eine in der oberen Halbebene $\Im(z) > 0$ meromorphe und auf der reellen Achse stetige Funktion ist, die für $|z| \to \infty$ verschwindet, sodaß für jedes vorgegebene $\epsilon > 0$ ein $R$ existiert, sodaß für alle größeren $r$ und alle $0 \leq \lambda \leq \pi$ der Betrag von $Q$ kleiner als diese Schranke ist,

$$|Q(r\, e^{i\lambda})| < \epsilon \ . \qquad (19.51)$$

Dies gilt beispielsweise bei rationalen Funktionen $Q(z) = Z(z)/N(z)$, wenn das Nennerpolynom $N$ keine reelle Nullstelle hat und sein Grad größer ist als der Grad des Zählerpolynoms $Z$.

Das Wegintegral über den Halbkreis (19.42) in der oberen Halbebene verschwindet für $r \to \infty$, wie die folgende Abschätzung zeigt

$$\Big|\int_{\Gamma_r} dz\, Q(z)\, e^{i\,k\,z}\Big| \leq \int_0^\pi d\lambda\, \big|\, r\, i\, e^{i\lambda}\, Q(r\, e^{i\lambda})\, e^{i\,k\,r(\cos\lambda + i \sin\lambda)}\big| < 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\lambda\, \epsilon\, r\, e^{-k\,r \sin\lambda} \ . \qquad (19.52)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt verwendet, daß der Sinus zwischen $\pi/2$ und $\pi$ dieselben Werte durchläuft wie zwischen $0$ und $\pi/2$. Dort ist der Sinus größer als $(2/\pi)\lambda$, also ist der Betrag des Integrals kleiner als jede vorgegebene Schranke $\epsilon' = \pi\,\epsilon/k$,

$$\Big|\int_{\Gamma_r} dz\, Q(z)\, e^{i\,k\,z}\Big| < 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\lambda\, \epsilon\, r\, e^{-\frac{2\,k\,r}{\pi}\lambda} = \frac{\pi}{2\,k\,r} 2\, r\, \epsilon \left(-e^{-\frac{2r}{\pi}\lambda}\right)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{\pi}{2}} < \frac{\pi\,\epsilon}{k} = \epsilon' \ . \qquad (19.53)$$

Also ist (19.50) gleich dem Umlaufintegral um die obere Halbebene und nach dem Residuensatz durch $2\pi i$ mal den Residuen in der oberen Halbebene gegeben,

$$k > 0: \quad \int dx\, Q(x)\, e^{i\,k\,x} = 2\pi i \sum_{\Im(z_i)>0} \operatorname*{Res}_{z=z_i} Q(z)\, e^{i\,k\,z} \ . \qquad (19.54)$$

Durch Betrachtung des an der $x$-Achse gespiegelten Integrationsweges erhält man ebenso für $Q(z)$, die den entsprechenden Bedingungen in der unteren Halbebene genügen,[1]

$$k > 0: \quad \int dx\, Q(x)\, e^{-i\,k\,x} = -2\pi i \sum_{\Im(z_i)<0} \operatorname*{Res}_{z=z_i} Q(z)\, e^{-i\,k\,z} \ . \qquad (19.55)$$

[1] Der entgegengesetze Umlaufsinn bewirkt ein negatives Vorzeichen.

# 20 Fouriertransformation

## Skalarprodukt von Funktionen

Die Darstellung einer Funktion einer reellen Variablen durch ihre Taylorreihe (12.35) ist gewöhnlich nur in einer kleinen Umgebung des Entwicklungspunktes nützlich. Oft möchte man aber eine Funktion $g$ im Großen und Ganzen in einem Bereich $M$ durch eine Summe

$$f_1(x)\,g_1 + f_2(x)\,g_2 + \ldots = \sum_n f_n(x)\,g_n \tag{20.1}$$

von Standardfunktionen $f_1$, $f_2 \ldots$ mit Zahlenkoeffizienten $g_1\,, g_2 \ldots$ nähern. Die Funktionen $f_n$ sollen bekannte, einfache Eigenschaften haben. Beispielsweise kann es sich um die Potenzen $f_n(x) = x^n\,,\ n = 0, 1, 2 \ldots$ oder um trigonometrische Funktionen $f_n(x) = e^{i\,n\,x} = \cos n\,x + i\,\sin n\,x$, $n \in \mathbb{Z}$, handeln. Die Funktionen und Koeffizienten können komplex sein.

Um die Frage beantworten zu können, mit welchen Koeffizienten $g_i$ bei gegebenen Funktionen $f_i$ eine Funktion $g$ am besten genähert wird, braucht man ein Maß für die Güte der Näherung oder die Größe des Fehlers

$$\delta g(x) = g(x) - \sum_n f_n(x)\,g_n\ . \tag{20.2}$$

Beispielsweise verschwindet die Supremumsnorm des Fehlers

$$\sup_{x\in M} |\delta g(x)|\ , \tag{20.3}$$

wenn $\sum_n f_n\,g_n$ überall in $M$ mit $g$ übereinstimmt. Weicht aber $g$ von der Summe nur in einer kleinen Untermenge von $M$ ab, so berücksichtigt die Supremumsnorm nicht, daß $g$ in der Restmenge gut dargestellt ist.

Wenn wir die Größe des Fehlers, der in verschiedenen Teilen von $M$ gemacht wird, als Integral über $M$ definieren,

$$\int_M dx\, m(|\delta g(x)|)\,\rho(x)\ , \tag{20.4}$$

wobei $m$ eine für nicht negative Argumente streng monotone Funktion ist mit $m(0) = 0$ und wenn $\rho$ eine nichtnegative Funktion ist, mit der man Fehler in unterschiedlichen Teilen von $M$ unterschiedlich wichten kann, so ist diese Größe nicht negativ und verschwindet nur, wenn $\delta g$ höchstens in einer Menge mit verschwindendem Maß von Null verschieden ist.[1]

[1] Verwirrenderweise kann aber bei einer Folge von Näherungen die Größe des Fehlers $\delta g_N$ mit $N \to \infty$ gegen Null gehen, obwohl $\delta g_N$ in keinem Punkt konvergiert [1, Abschnitt 13-14].

Wir wählen als Fehlerquadrat das Integral über das Betragsquadrat der Funktion $\delta g$,

$$\|\delta g\|^2 = \int_M dx\, |\delta g(x)|^2 \ . \tag{20.5}$$

Es verleiht dem Vektorraum $\mathcal{F}_M$ der komplexwertigen Funktionen von $M$, deren Betragsquadrat integrierbar ist, die geometrischen Eigenschaften eines Euklidischen Raumes mit einem Skalarprodukt. Denn das Fehlerquadrat setzt sich ebenso aus einer Summe von Quadraten zusammen, wie nach dem Satz des Pythagoras das Längenquadrat der Hypotenuse, $c^2 = a^2 + b^2$.

Ein Skalarprodukt ordnet Paaren von Vektoren eines komplexen Vektorraumes komplexe Zahlenwerte zu,

$$(\ \ ,\ \ ) : \begin{cases} \mathcal{V} \times \mathcal{V} & \to \mathbb{C} \\ u \quad v & \mapsto (u, v) \end{cases} \ . \tag{20.6}$$

Es ist linear im zweiten Argument, $(a, b \in \mathbb{C}\,,\ u, v, w \in \mathcal{V})$,

$$(u, v\, a + w\, b) = (u, v)\, a + (u, w)\, b \ , \tag{20.7}$$

positiv definit

$$(u, u) \geq 0 \ , \quad (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \tag{20.8}$$

und konjugiert symmetrisch

$$(u, v) = (v, u)^* \ . \tag{20.9}$$

Daher ist es konjugiert linear im ersten Argument,

$$(u\, a + v\, b, w) = a^*\, (u, w) + b^*\, (v, w) \ . \tag{20.10}$$

Mathematiker bezeichnen es als Sesquilinearform, denn lateinisch sesqui bedeutet anderthalb. In einer Orthonormalbasis

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \tag{20.11}$$

ist das Skalarprodukt von $u = e_i\, u^i$ mit $v = e_j\, v^j$

$$(u, v) = (e_i\, u^i, e_j\, v^j) = (u^i)^*\, (e_i, e_j)\, v^j = (u^i)^*\, \delta_{ij}\, v^j = (u^i)^*\, v^i \ . \tag{20.12}$$

Im unendlichdimensionalen Funktionenraum $\mathcal{F}_M$ gehört zum Fehlerquadrat (20.5) das Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_M dx\, f^*(x)\, g(x) \ . \tag{20.13}$$

Das Skalarprodukt einer Funktion $f$ mit sich, das Längenquadrat von $f$, verschwindet nur, wenn $f$ überall bis auf eine Ausnahmemenge vom Maß Null verschwindet,

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_M dx\, f(x)^*\, f(x) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ . \tag{20.14}$$

Daher gilt wie in alltäglicher Geometrie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (1.51)

$$|(f,g)| \leq \|f\|\,\|g\| \tag{20.15}$$

und die Dreiecksungleichung

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \ . \tag{20.16}$$

Ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt Hilbertraum, wenn er zudem vollständig ist, das heißt, wenn jede Cauchyfolge[2] von Vektoren gegen einen Vektor des Raumes konvergiert.

Faßt man komplexe Funktionen eines meßbaren Gebietes $M$, die sich nur in einer Menge vom Maß Null unterscheiden, zu Äquivalenzklassen zusammen, so bilden diese Äquivalenzklassen von im Lebesgueschen Sinne quadratintegrablen Funktionen oder die Cauchyfolgen Riemannintegrabler Funktionen einen Hilbertraum.

In der Quantenmechanik entsprechen den Zuständen, die man präpariert, die sich im Laufe der Zeit ändern und deren Eigenschaften man mißt, Vektoren im Hilbertraum. Das Skalarprodukt tritt in der Diracschen Bracketschreibweise $\langle f|g\rangle$ auf. Sein Betragsquadrat hat in der Quantenmechanik die Bedeutung von Wahrscheinlichkeiten.

## Hermitesche und unitäre Abbildungen

Die hermitesch adjungierte Abbildung $A^\dagger$ einer linearen Selbstabbildung $A$ von $\mathcal{V}$ ist durch Abwälzen im Skalarprodukt definiert

$$(u, Av) = (A^\dagger u, v) \ . \tag{20.17}$$

Durch komplexe Konjugation folgt hieraus $(Av, u) = (v, A^\dagger u)$, also ist $(A^\dagger)^\dagger = A$.

In einer Orthonormalbasis erhält man die Matrix von $A^\dagger$ durch Transponieren und komplex Konjugieren der Matrix $A$, $A^\dagger = A^{*\mathrm{T}}$,

$$\begin{aligned}(e_i, A^\dagger e_j) = (e_i, e_k {A^\dagger}^k{}_j) = (e_i, e_k){A^\dagger}^k{}_j = {A^\dagger}^i{}_j \\ = (A^\dagger e_j, e_i)^* = (e_j, A e_i)^* = (A^j{}_i)^* \ .\end{aligned} \tag{20.18}$$

Stimmt $A$ mit der hermitesch adjungierten Abbildung überein, so heißt $A$ hermitesch oder selbstadjungiert. Hermitesche Abbildungen haben reelle Eigenwerte,

$$\big(A = A^\dagger \wedge Au = \lambda\, u\big) \Rightarrow \lambda = \lambda^* \ , \tag{20.19}$$

wie $\lambda\,(u,u) = (u, \lambda\, u) = (u, Au) = (A^\dagger u, u) = (Au, u) = (\lambda\, u, u) = \lambda^*\,(u,u)$ zusammen mit $(u,u) \neq 0$ zeigt. Zudem bildet $A$ den Raum $\mathcal{V}_\perp$ der Vektoren $v$, die senkrecht auf einem Eigenvektor $u$ stehen, $\mathcal{V}_\perp = \{v : (v,u) = 0\}$, auf sich ab, denn $(v,u) = 0$ zieht $(Av, u) = 0$ nach sich, $0 = \lambda(v,u) = (v, Au) = (A^\dagger v, u) = (Av, u)$. Folglich kann man die Eigenvektoren einer hermiteschen $n \times n$-Matrix $A$ paarweise orthogonal zueinander

[2] Eine Folge heißt Cauchyfolge, wenn sich für jedes vorgegebene $\epsilon > 0$ ein $n$ angeben läßt, ab dem die Unterschiede zwischen weiteren Folgengliedern einen kleineren Betrag als $\epsilon$ haben.

und normiert wählen: sie hat, wie jede Matrix, mindestens einen Eigenvektor $u_1$. Man kann ihn normiert wählen. Da die Abbildung $A$ den Unterraum $\mathcal{V}_\perp$ auf sich abbildet, hat sie, auf diesen Unterraum eingeschränkt, einen Eigenvektor $u_2$, der senkrecht auf $u_1$ steht, und den wir normiert wählen können. $A$ läßt auch den Unterraum von $\mathcal{V}_\perp$ invariant, der auf $u_2$ senkrecht steht, und so weiter. Zu jeder hermiteschen $n \times n$-Matrix gibt es eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren.

Umgekehrt ist jede lineare Abbildung $H$ hermitesch, die eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren besitzt, die sie jeweils mit reellen Eigenwerten $\lambda_j$ streckt, denn $H^i{}_j = (e_i, He_j) = \lambda_j \delta_{ij} = (H^j{}_i)^*$ (keine Summe über $j$).

Invertierbare, lineare Selbstabbildungen von $\mathcal{V}$, die das Skalarprodukt invariant lassen, $(Uu, Uv) = (u, v)$ für alle $u, v \in \mathcal{V}$, heißen unitär. Ihre hermitesch adjungierte Abbildung ist ihr Inverses,

$$(Uu, Uv) = (U^\dagger U u, v) = (u, v) \ , \quad U^\dagger U = \mathbf{1} \ . \tag{20.20}$$

Ihre Eigenwerte liegen auf dem komplexen Einheitskreis, $|\lambda|^2 = 1$, denn aus $Uu = \lambda\, u$ und der Invarianz des Skalarproduktes folgt $(u, u) = (Uu, Uu) = (\lambda\, u, \lambda\, u) = \lambda^* \lambda\, (u, u)$. Da die unitäre Abbildung Skalarprodukte invariant läßt, bildet sie den Raum $\mathcal{V}_\perp$ der Vektoren $v$, die senkrecht auf einem Eigenvektor $u$ stehen, auf sich ab, denn in der Argumentationskette $0 = (v, u) = (Uv, Uu) = (Uv, \lambda\, u) = (Uv, u)\, \lambda$ verschwindet der Eigenwert $\lambda$ nicht, sondern liegt auf dem komplexen Einheitskreis. Wie bei hermiteschen Abbildungen folgt daher, daß es für jede unitäre $n \times n$-Matrix $U$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren gibt, und daß jede Matrix unitär ist, die eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren besitzt, die sie jeweils mit Eigenwerten vom Betrag 1, $\lambda^* = \lambda^{-1}$, streckt.

## Orthonormale Funktionensysteme

Berechnen wir für den Fall, daß $M$ das spiegelsymmetrisch zum Ursprung liegende Intervall $I_L = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ der Länge $L$ ist, die Skalarprodukte der Funktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\, e^{i \frac{2\pi}{L} n x} \ , \ n \in \mathbb{Z} \ , \tag{20.21}$$

so erhalten wir für $m \neq n$

$$(f_n, f_m) = \frac{1}{L} \int_{I_L} dx\, e^{-i \frac{2\pi}{L} n x}\, e^{i \frac{2\pi}{L} m x} = \frac{1}{L} \int_{I_L} dx\, e^{i \frac{2\pi}{L} (m-n) x} \tag{20.22}$$

$$= \frac{1}{L} \frac{L}{2\pi i\, (m-n)}\, e^{i \frac{2\pi}{L} (m-n) x} \Big|_{x=-\frac{L}{2}}^{x=\frac{L}{2}} = \frac{1}{2\pi\, i\, (m-n)} \left( e^{i\pi (m-n)} - e^{-i\pi (m-n)} \right) = 0 \ .$$

Das Skalarprodukt von $f_n$ mit sich hat wegen $|f_n(x)|^2 = 1/L$ den Wert $1$. Die Funktionen $f_n$ sind also normiert und stehen aufeinander senkrecht. Sie bilden ein orthonormales System von Funktionen,

$$(f_n, f_m) = \delta_{m\,n} \ . \tag{20.23}$$

Um eine Funktion $g$ mit einer Summe $\sum_m f_m g_m$ orthonormaler Funktionen bestmöglich zu nähern, muß man die Koeffizienten $g_m$ so wählen, daß der Fehler

$$\begin{aligned}\|\delta g\|^2 &= (g - \sum_m f_m g_m, g - \sum_n f_n g_n) = (g, g - \sum_n f_n g_n) - (\sum_m f_m g_m, g - \sum_n f_n g_n) \\ &= (g,g) - (g, \sum_n f_n\, g_n) - (\sum_m f_m\, g_m, g) + (\sum_m f_m\, g_m, \sum_n f_n\, g_n)\end{aligned} \tag{20.24}$$

möglichst klein wird. Verwenden wir nicht nur, daß das Skalarprodukt in beiden Argumenten additiv ist, sondern auch, daß es im zweiten Argument linear und im ersten konjugiert linear ist, so erhalten wir

$$\|\delta g\|^2 = (g,g) - \sum_n (g, f_n)\, g_n - \sum_m g_m^*\, (f_m, g) + \sum_{mn} g_m^*\, (f_m, f_n)\, g_n\ . \tag{20.25}$$

Weil die $f_n$ orthonormal sind, ist die Doppelsumme über $m$ und $n$ einfach eine Summe über die Betragsquadrate der $g_n$. Wir fassen sie mit den Termen, die linear in $g_n$ und $g_n^*$ sind, zu Betragsquadraten von $g_n - (f_n, g)$ zusammen,

$$\begin{aligned}\|\delta g\|^2 &= (g,g) - \sum_n (g, f_n)\, g_n - \sum_n g_n^*\, (f_n, g) + \sum_n g_n^*\, g_n \\ &= (g,g) + \sum_n \big(g_n^* - (g, f_n)\big)\big(g_n - (f_n, g)\big) - \sum_n (g, f_n)\,(f_n, g)\ .\end{aligned} \tag{20.26}$$

Der Fehler wird bei gegebener Funktion $g$ als Funktion der Koeffizienten $g_n$ minimal, wenn die Differenzen $g_n - (f_n, g)$ verschwinden,

$$g_n = (f_n, g)\ . \tag{20.27}$$

Er beträgt dann

$$\|\delta g\|^2 = (g,g) - \sum_n |(f_n, g)|^2 \tag{20.28}$$

und verschwindet, wenn die Parsevalsche Gleichung erfüllt ist,

$$(g,g) = \sum_n |(f_n, g)|^2\ . \tag{20.29}$$

Wenn sich jede Funktion eines Funktionenraumes $\mathcal{F}$ genauer als mit jedem vorgegebenen Fehler $\epsilon > 0$ als Linearkombination der Funktionen $f_n$ nähern läßt, dann heißen die $f_n$ vollständig in $\mathcal{F}$ und werden etwas schlampig als Basis bezeichnet. So verwendet bezeichnet das Wort Basis nicht, was Mathematiker damit meinen, nämlich eine Menge linear unabhängiger Vektoren, die es erlaubt, jeden Vektor des Vektorraumes ohne Fehler als endliche Linearkombination der Basisvektoren zu schreiben.

Für die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen $f_n$ reicht nicht, daß es sich um unendlich viele Funktionen handelt: nimmt man beispielsweise aus den Funktionen (20.21) eine heraus, etwa $f_0 = 1/\sqrt{L}$, so verbleiben unendlich viele, aber sie sind nicht vollständig, weil man die Funktion $f_0$ nicht mit den verbleibenden Funktionen mit einem Fehler nähern kann, der kleiner als 1 ist.

Ist ein orthonormales Funktionensystem $f_1, f_2 \dots$ im Raum von Testfunktionen vollständig, so läßt sich jede Testfunktion $t$ als Reihe

$$t(x) = \sum_n f_n(x)\, t_n \ , \quad t_n = (f_n, t) = \int_M dy\, f_n(y)^*\, t(y) \tag{20.30}$$

darstellen. Setzen wir die Koeffizienten für die Teilsumme der ersten $N$ Summanden ein und vertauschen wir die Summation mit der Integration, so erhalten wir für $N$ gegen unendlich

$$t(x) = \int_M dy \sum_n f_n(x)\, f_n^*(y)\, t(y) \ , \tag{20.31}$$

das heißt, für $N$ gegen unendlich geht die Summe $\sum_{n=1}^N f_n(x)\, f_n^*(y)$ im Distributionensinn gegen die $\delta$-Funktion in $M$

$$x, y \in M : \quad \sum_n f_n(x)\, f_n^*(y) = \delta(x-y) \ . \tag{20.32}$$

## Fourierreihe

Wir verschieben zunächst den Beweis, daß die Funktionen $f_n(x) = e^{i \frac{2\pi}{L} n x}/\sqrt{L}$, $n \in \mathbb{Z}$ (20.21), die Wellen mit Wellenlängen $L/n$ oder die Schwingungen mit Frequenz $n/L$, im Raum der stückweise stetig differenzierbaren Funktionen $g$ des Intervalls $I_L = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ vollständig sind. Die zugehörige Reihe

$$g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i \frac{2\pi}{L} n x}\, g_n \ , \quad g_n = (f_n, g) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i \frac{2\pi}{L} n x}\, g(x) \ , \tag{20.33}$$

die komplexe Fourierreihe von $g$, konvergiert bei periodischen, stetig differenzierbaren Funktionen $g$ gleichmäßig gegen $g(x)$. Die Koeffizienten $g_n$ sind die komplexen Amplituden der Schwingungen mit Frequenzen $n\nu$.

Das Zeichen $\sim$ steht für Gleichheit im Intervall $I_L = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$. Außerhalb des Intervalls setzt die Fourierreihe die Funktion periodisch fort, denn die Funktionen $f_n$ sind periodisch, $f_n(x+L) = f_n(x)$.

In Kosinus und Sinus zerlegt, $e^{i \frac{2\pi}{L} n x} = \cos(\frac{2\pi}{L} n x) + i \sin(\frac{2\pi}{L} n x)$, heißt die Reihe reelle Fourierreihe,

$$\begin{aligned} g(x) &\sim \frac{g_0}{\sqrt{L}} + \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \Big( (g_n + g_{-n}) \cos(\frac{2\pi}{L} n x) + i\, (g_n - g_{-n}) \sin(\frac{2\pi}{L} n x) \Big) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos(\frac{2\pi}{L} n x) + b_n \sin(\frac{2\pi}{L} n x) \Big) \ , \end{aligned} \tag{20.34}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, \cos(\frac{2\pi}{L} n x)\, g(x) \ , \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, \sin(\frac{2\pi}{L} n x)\, g(x) \ .$$

Da die Fourierreihe Funktionen des Intervalls $I_L$ außerhalb periodisch fortsetzt, sieht der Graph der Fourierreihe der Funktion $g(x) = x$ wie die Zahnreihe einer Säge aus. Wir berechnen allgemeiner die Fourierkoeffizienten der Potenzen $g(x) = x^l$, $l = 0, 1, 2\ldots$,

$$g_n = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \, \frac{1}{\sqrt{L}} \, e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} x^l = \frac{1}{\sqrt{L}} \Bigl(\frac{L}{2}\Bigr)^{l+1} \int_{-1}^{1} du \, e^{-i\pi n u} u^l \ . \tag{20.35}$$

Das verbleibende Integral hat für $n = 0$ den Wert

$$\int_{-1}^{1} du \ u^l = \begin{cases} \frac{2}{l+1} & \text{falls } l \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } l \text{ ungerade} \end{cases} \ . \tag{20.36}$$

Für $n \neq 0$ betrachten wir $\int_{-1}^{1} du \, e^{-i\pi n u} u^l$ als den speziellen Wert $k = \pi n$ von Integralen, die durch Differentation aus dem Integral für $l = 0$ hervorgehen,

$$\int_{-1}^{1} du \, e^{-iku} u^l = i^l \Bigl(\frac{d}{dk}\Bigr)^l \int_{-1}^{1} du \, e^{-iku} = i^l \Bigl(\frac{d}{dk}\Bigr)^l \frac{1}{-ik} \, e^{-iku}\Big|_{u=-1}^{u=1} = 2\, i^l \Bigl(\frac{d}{dk}\Bigr)^l \frac{\sin k}{k} \ . \tag{20.37}$$

Für $l = 0$ und $k = \pi n \neq 0$ erhalten wir $2\sin(\pi n)/(\pi n) = 0$. Es verschwinden also alle Fourierkoeffizienten der konstanten Funktion $g(x) = 1$ bis auf $g_0 = \sqrt{L}$, und die Fourierreihe ist $g(x) = 1$. Das ist verständlich, denn $g$ ist ein Vielfaches einer der orthonormalen Funktionen, mit denen wir entwickeln.

Für die Sägezahnfunktion $g(x) = x$, also $l = 1$, verschwindet $g_0$, die Fourierkoeffizienten mit $n \neq 0$ und die zugehörige Fourierreihe ist

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \Bigl(\frac{L}{2}\Bigr)^2 2\, i \Bigl(\frac{\cos(\pi n)}{\pi n} - \frac{\sin(\pi n)}{(\pi n)^2}\Bigr) = \frac{L}{2}\sqrt{L}\, i \frac{(-1)^n}{\pi n} \ , \tag{20.38}$$

$$x \sim \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\Bigl(\frac{2\pi}{L} n x\Bigr) \ . \tag{20.39}$$

Die Parsevalsche Gleichung (20.29) bestimmt die Summe der inversen Quadratzahlen

$$\frac{2}{3}\frac{L^3}{8} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \, x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (|g_n|^2 + |g_{-n}|^2) = 2\, \frac{L^3}{4} \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ . \tag{20.40}$$

Für die Fourierkoeffizienten und die Fourierreihe von $g(x) = x^2$ im Intervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ erhalten wir

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{L}} \Bigl(\frac{L}{2}\Bigr)^3 \frac{2}{3} \ ,$$

$$n \neq 0: \quad g_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \Bigl(\frac{L}{2}\Bigr)^3 2\, i^2 \Bigl(-\frac{\sin k}{k} - 2\frac{\cos k}{k^2} + \frac{2\sin k}{k^3}\Bigr)_{|k=\pi n} = \frac{1}{\sqrt{L}} \Bigl(\frac{L}{2}\Bigr)^3 4\, \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} \ ,$$

$$x^2 \sim \frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\Bigl(\frac{2\pi}{L} n x\Bigr) \ . \tag{20.41}$$

Die Parsevalsche Gleichung für $g(x) = x^2$ bestimmt die Summe über $1/n^4$

$$\frac{2}{5}\left(\frac{L}{2}\right)^5 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, x^4 = |g_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|g_n|^2 + |g_{-n}|^2) = \frac{L^5}{2^6}\left(\frac{4}{9} + 2\frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\ . \tag{20.42}$$

Für größere Potenzen $x^l$ benötigen wir zur Auswertung von (20.37) eine Formel für Vielfachableitungen eines Produktes

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n(A\,B) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^kA}{dx^k}\,\frac{d^{n-k}B}{dx^{n-k}}\ . \tag{20.43}$$

Man beweist sie wie die Binomialformel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k} \tag{20.44}$$

entweder durch vollständige Induktion oder mit der Binomialformel durch die Bemerkung, daß jede Ableitung eines Produktes nach der Produktregel die Summe $d = d_1 + d_2$ zweier Ableitungen ist, wobei $d_1$ nur auf den ersten Faktor und $d_2$ nur auf den zweiten Faktor wirkt.

Zur Vielfachableitung von $(\sin k)/k$ tragen bei $k = \pi n \neq 0$ nur die ungeraden Ableitungen von $\sin k$ bei,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dk}\right)^{2m+1}\sin k &= (-1)^m\cos k =_{|k=\pi n} (-1)^{m+n}\ ,\\ \left(\frac{d}{dk}\right)^{l-2m-1}\frac{1}{k} &= (l-2m-1)!\,(-1)^{l-2m-1}\,k^{-(l-2m)}\ .\end{aligned} \tag{20.45}$$

Für die Fourierkoeffizienten von $x^l$ für $l \geq 1$ und $n \neq 0$ ergibt sich damit

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{L}}\left(\frac{L}{2}\right)^{l+1}2\,i^l\left(\frac{d}{dx}\right)^l\frac{\sin k}{k}_{|k=\pi n} = \frac{1}{\sqrt{L}}\left(\frac{L}{2}\right)^{l+1}2\,i^l\sum_{m=0}^{[\frac{l-1}{2}]}\frac{l!}{(2m+1)!}\frac{(-1)^{m+l+n+1}}{(\pi\,n)^{l-2m}}\ . \tag{20.46}$$

## Fouriertransformation

Das Fourierintegral

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, e^{i\,k\,x}\,\tilde{f}(k)\ , \tag{20.47}$$

stellt betragsintegrable Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ , \quad \int dx\,|f(x)| < \infty \tag{20.48}$$

in den Punkten $x$, in denen die Funktion $h_x$

$$h_x(y) = \frac{1}{y}\big|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\big| \tag{20.49}$$

im $y$-Intervall $[0, \bar{y}]$ mit $\bar{y} > 0$ integrabel ist,[3] als Überlagerung von Schwingungen $e^{ikx}$ mit der Amplitude $\tilde{f}(k)$ dar. Die Amplitude $\tilde{f}$ heißt die Fouriertransformierte von $f$. Sie ist durch

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dy\, e^{-iky}\, f(y) \tag{20.50}$$

gegeben. Anders als bei der Fourierreihe, bei der nur ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz auftreten, sind die Frequenzen $k$ kontinuierlich.

Daß Funktionen $f$ mit den angegebenen Eigenschaften eine Fourierdarstellung erlauben, daß also

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk \int dy\, e^{ik(x-y)}\, f(y) \tag{20.51}$$

gilt, braucht man nur für reelle Funktionen zu zeigen, denn komplexe Funktionen sind komplexe Linearkombinationen reeller Funktionen. Für reelle Funktionen ist die rechte Seite

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \int_0^\infty dy\, \cos(ky)\,\big(f(x+y) + f(x-y)\big)\ . \tag{20.52}$$

Denn für reelle Funktionen verschwindet das $k$-Integral über den $\sin(kx)$-Anteil von $e^{ikx}$, denn der Integrand ist eine ungerade Funktion von $k$. Zudem haben wir die Integrationsvariable $y$ um $-x$ verschoben, für $y < 0$ die Integrationsvariable $-y$ verwendet und berücksichtigt, daß $k$ und $-k$ zum Integral gleich beitragen.

Wir zeigen, daß $I(x)$ den Wert $f(x)$ hat.

Bis auf einen Fehler, der kleiner als jede vorgegebene Schranke $\epsilon$ ist, ist $I(x)$ gleich dem Integral $I_{\bar{y}}(x)$, dessen $y$-Integration sich bis zu einem genügend großen $\bar{y}$ erstreckt,

$$\begin{aligned}
\pi\,|I(x) - I_{\bar{y}}(x)| &= \lim_{\bar{k}\to\infty}\lim_{\hat{y}\to\infty} \Big|\int_0^{\bar{k}} dk \int_{\bar{y}}^{\hat{y}} dy\, \cos(ky)\,\big(f(x+y) + f(x-y)\big)\Big| \\
&= \lim_{\bar{k}\to\infty}\lim_{\hat{y}\to\infty} \Big|\int_{\bar{y}}^{\hat{y}} dy \int_0^{\bar{k}} dk\, \cos(ky)\,\big(f(x+y) + f(x-y)\big)\Big| \\
&= \lim_{\bar{k}\to\infty}\lim_{\hat{y}\to\infty} \Big|\int_{\bar{y}}^{\hat{y}} dy\, \frac{\sin(\bar{k}y)}{y}\,\big(f(x+y) + f(x-y)\big)\Big| \\
&\leq \frac{1}{\bar{y}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, |f(x)| < \epsilon\ .
\end{aligned} \tag{20.53}$$

Dabei haben wir bei endlichen Integrationsgrenzen erlaubtermaßen die Integrationsrei-

[3] Beispielsweise ist $h_x$ integrabel, falls $f$ stetig differenzierbar ist.

henfolge vertauscht. Für $I_{\bar{y}}$ folgt ebenso

$$\begin{aligned}\pi\, I_{\bar{y}}(x) &= \lim_{\bar{k}\to\infty}\int_0^{\bar{k}} dk \int_0^{\bar{y}} dy\, \cos(k\, y)\,(f(x+y)+f(x-y))\\ &= \lim_{\bar{k}\to\infty}\int_0^{\bar{y}} dy \int_0^{\bar{k}} dk\, \cos(k\, y)\,(f(x+y)+f(x-y))\\ &= \lim_{\bar{k}\to\infty}\int_0^{\bar{y}} dy\, \frac{\sin(\bar{k}y)}{y}\,(f(x+y)+f(x-y))\end{aligned} \tag{20.54}$$

Die Auswertung des Grenzwerts des Integrals ist heikel: substituiert man $y = z/\bar{k}$

$$\int_0^{\bar{k}\,\bar{y}} dz\, \frac{\sin z}{z}\,(f(x+z/\bar{k})+f(x-z/\bar{k})) \tag{20.55}$$

so strebt zwar $f(x+z/\bar{k})+f(x-z/\bar{k})$, falls die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren, für jedes $z$ mit $\bar{k}\to\infty$ gegen $f(x+0)+f(x-0)$, und das ist $2f(x)$, wenn $f$ dort stetig ist oder kann zur Definition von $2\,f(x)$ in Unstetigkeitsstellen verwendet werden, aber das gilt nicht gleichmäßig im ganzen Integrationsbereich. Zwar nimmt der Betrag $|\sin z/z|$ mit zunehmendem $z$ ab, aber das Integral darüber divergiert, wenn die obere Integrationsgrenze gegen Unendlich strebt. Wenn also $f(x+z/\bar{k})+f(x-z/\bar{k})$ die Vorzeichenwechsel von $\sin z$ mitmacht, tragen auch große $z$ zu dem Integral bei.

Für die genaue Auswertung des Grenzwert des Integrals benötigt man das Riemann-Lebesgue-Lemma, das wir hier nur zitieren [1, Seite 472]. Es besagt für jede Funktion $h$, deren Betrag in einem Intervall $[a, b]$ integrabel ist (wobei $a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen ist und $h$ Singularitäten haben darf), daß die mit dem oszillierenden Sinus zerhackte Summe ihrer Werte mit zunehmender Zerhackerfrequenz $\nu$ im Grenzfall verschwindet,

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b dy\, \sin(\nu\, y+\beta)\, h(y) = 0\ . \tag{20.56}$$

Ist also $h_x(y) = |f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|/y$ (20.49) eine in $[0,\bar{y}]$ integrable Funktion von $y$, so verschwindet

$$\lim_{\bar{k}\to\infty}\int_0^{\bar{y}} dy\, \frac{\sin(\bar{k}y)}{y}\,(f(x+y)+f(x-y)-2f(x)) = 0 \tag{20.57}$$

und man erhält

$$\begin{aligned}&\lim_{\bar{k}\to\infty}\int_0^{\bar{y}} dy\, \frac{\sin(\bar{k}y)}{y}\,(f(x+y)+f(x-y))\\ &= 2\,f(x)\lim_{\bar{k}\to\infty}\int_0^{\bar{y}} dy\, \frac{\sin(\bar{k}y)}{y} = 2\,f(x)\int_0^{\infty} dz\, \frac{\sin z}{z} = \pi\, f(x)\,.\end{aligned} \tag{20.58}$$

Demnach hat $I_{\bar{y}}(x)$ den Wert $f(x)$ und (20.51) ist gezeigt.

Den Wert von $\int dz\,(\sin z)/z$ kann man übrigens mit dem Residuensatz durch Auswerten des Hauptwertes P. V. $\int dx\, e^{i\,x}/x$ bestimmen. Ergänzt man den Integrationsweg der

Hauptwertintegration um einen kleinen Halbkreis, der $x = 0$ in der oberen Halbebene im Uhrzeigersinn umläuft, und um den Halbkreis $\Gamma_r$ (19.42) in der oberen Halbebene, so verschwinden $\int_{\Gamma_r} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$, weil der Integrand genügend schnell abfällt, und das gesamte Umlaufintegral, weil keine Residuen umlaufen werden. Es ist also das Hauptwertintegral dem Integral über den im Gegenzeigersinn durchlaufenen kleinen Halbkreis über $1/z + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1)/z$ gleich. Der Beitrag des zweiten Terms verschwindet mit kleiner werdendem Radius des kleinen Halbkreises und das Integral über den ersten Term ergibt $\pi \mathrm{i}$. Wegen $\mathrm{P.\,V.}\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/x = -\,\mathrm{P.\,V.}\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}/x$ ist daher $\int \mathrm{d}x\,(\sin x)/x = \pi$ und $\int_0^\infty \mathrm{d}x\,(\sin x)/x = \pi/2$.

Auf gleiche Weise zeigt man, daß eine periodische Funktion $g$ in jedem Punkt $x$ durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, in dem $|g(x+y) + g(x-y) - 2g(x)|/y$ eine im $y$-Intervall $[0, \bar{y}]$ integrierbare Funktion ist. Einfachheitshalber untersuchen wir Funktionen mit Periodizitätslänge $L = \pi$. Setzen wir die Fourierkoeffizienten $g_n$ in die Fourierreihe ein, so besagt (20.33) nach geeigneter Verschiebung der Integrationsvariablen

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y\, e^{2\mathrm{i}ny}\, g(x+y) \tag{20.59}$$

Die Summe betrifft einen Abschnitt einer geometrischen Reihe mit $q = e^{2\mathrm{i}y}$

$$\sum_{n=-N}^{N} q^n = q^{-N} \sum_{n=0}^{2N} q^n = q^{-N} \frac{1 - q^{2N+1}}{1-q} = \frac{q^{-(N+\frac{1}{2})} - q^{(N+\frac{1}{2})}}{q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}}} \tag{20.60}$$

Also ist diese Summe

$$D_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\mathrm{i}ny} = \frac{\sin\big((2N+1)\,y\big)}{\sin(y)}\ . \tag{20.61}$$

Sie heißt Dirichlet-Kern. Das Integral auf der rechten Seite von (20.59) ist also

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{N\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y\, \frac{\sin\big((2N+1)\,y\big)}{\sin(y)} \big(g(x+y) + g(x-y)\big) \tag{20.62}$$

Eine Funktion $f(y)/y$ ist in $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau dann integrabel, wenn dort $f(y)/\sin(y)$ integrabel ist, denn die Differenz $(1/y - 1/\sin(y))f(y)$ ist in $[0, \frac{\pi}{2}]$ das Produkt einer analytischen Funktion mit $f$. Nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma (20.56) kann also in Nenner $\sin(y)$ durch $y$ ersetzt werden und im Zähler $g(x+y) + g(x-y)$ durch $2\,g(x)$. Denn die Unterschiede sind integrable Funktionen, die mit $\sin((2N+1)y)$ zerhackt werden. Folglich ist

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{2}{\pi}\, g(x) \lim_{N\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y\, \frac{\sin\big((2N+1)\,y\big)}{y} = \frac{2}{\pi}\, g(x) \lim_{N\to\infty} \int_0^{(2N+1)\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}z\, \frac{\sin z}{z} \\ &= \frac{2}{\pi}\, g(x) \int_0^\infty \mathrm{d}z\, \frac{\sin z}{z} = g(x)\ . \end{aligned} \tag{20.63}$$

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung von Funktionen $f$ auf ihre Amplituden $\tilde{f} = \mathcal{F} f$, Sind $g$ und $h$ quadratintegrable Funktionen und $a$ und $b$ komplexe Zahlen, dann gilt für die Linearkombination

$$\mathcal{F}(a\,g + b\,h) = a\,\mathcal{F}(g) + b\,\mathcal{F}(h)\ . \tag{20.64}$$

Bis auf ein Vorzeichen sind die Fourierdarstellung der Funktion $f$ durch ihre Amplitude $\tilde{f}$ und der Amplitude $\tilde{f}$ durch die Funktion $f$ gleich (20.47). Bezeichnen wir als Paritätstransformation $\Pi$ die Abbildung, die jede Funktion $f$ auf die Funktion des gespiegelten Argument abbildet,

$$(\Pi f)(x) = f(-x)\ , \tag{20.65}$$

so besagt (20.50), daß die Fouriertransformierte der Fouriertransformierten die Paritätstransformierte ist,

$$\Pi f = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))\ . \tag{20.66}$$

Da jede Funktion durch zweifache Paritätstransformation in sich übergeht, $\Pi^2 = 1$, führt vierfache Fouriertransformation zur ursprünglichen Funktion zurück. Als lineare Abbildung betrachtet, kann die Fouriertransformation folglich nur Eigenwerte $\lambda$ mit $\lambda^4 = 1$, also $\lambda \in \{1, i, -1, -i\}$, haben.

Jede Funktion $f$ kann mit diesen Eigenwerten durch Fouriertransformation in Anteile zerlegt werden,

$$f_\lambda = (\lambda^4 + \lambda^3\mathcal{F} + \lambda^2\mathcal{F}^2 + \lambda\mathcal{F}^3)\frac{1}{4}f = \frac{1}{4}\big(1 + \lambda^2\,\Pi\big)\big(1 + \lambda^3\,\mathcal{F}\big)f\ ,\ f = \sum_\lambda f_\lambda\ , \tag{20.67}$$

die Eigenfunktionen der Fouriertransformation sind, $\mathcal{F} f_\lambda = \lambda f_\lambda$.

Als Distribution aufgefaßt wirkt gemäß (20.51) das Integral $\int dk\, e^{i\,k\,(x-y)}/(2\pi)$ auf Testfunktionen wie die $\delta$-Funktion (18.34)

$$\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{i\,k\,(x-y)} = \delta(x-y)\ . \tag{20.68}$$

Aus der Fourierdarstellung der $\delta$-Funktion liest man ihre Fouriertransformierte ab,

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, e^{i\,k\,x}\,(\mathcal{F}\delta)(k)\ ,\quad (\mathcal{F}\delta)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ . \tag{20.69}$$

Die $\delta$-Funktion enthält alle Frequenzen mit gleicher Amplitude $1/\sqrt{2\pi}$.

Verwenden wir im Skalarprodukt zweier quadratintegrabler Funktionen $f$ und $g$ ihre Fourierdarstellung, so zeigt sich, wenn wir die Integrationsreihenfolge vertauschen und die Fourierdarstellung der $\delta$-Funktion verwenden,

$$\begin{aligned}(f,g) = \int dx\, f^*(x)\,g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int dx \int dk \int dk'\, e^{-i\,k\,x}\,\tilde{f}^*(k)\,e^{i\,k'\,x}\,\tilde{g}(k')\\ &= \int dk \int dk'\,\big(\frac{1}{2\pi}\int dx\, e^{i(k'-k)\,x}\big)\,\tilde{f}^*(k)\,\tilde{g}(k')\\ &= \int dk \int dk'\,\delta(k'-k)\,\tilde{f}^*(k)\,\tilde{g}(k') = \int dk\,\tilde{f}^*(k)\,\tilde{g}(k) = (\tilde{f},\tilde{g})\ ,\end{aligned} \tag{20.70}$$

daß die Fouriertransformation das Skalarprodukt im Hilbertraum invariant läßt. Lineare, invertierbare Selbstabbildungen eines Hilbertraumes, die wie die Fouriertransformation das Skalarprodukt invariant lassen, nennt man unitär.

In der Literatur finden sich die umständlich zu schreibenden Faktoren $1/\sqrt{2\pi}$ auch anders aufgeteilt: ein Faktor $1/2\pi$ in der Fourierdarstellung der Funktion $f$ durch ihre Amplitude $\tilde{f}$ und ein Faktor 1 bei der Rücktransformation, die die Amplitude $\tilde{f}$ durch $f$ angibt. Wichtig ist, daß bei der Fouriertransformation von Funktionen mehrerer Argumente für jede Integration bei Hin- und Rücktransformation insgesamt ein Faktor $2\pi$ für jede Integrationsvariable auftaucht. Die Fourierdarstellung und die Fouriertransformation von Funktionen des Ortsraumes $\mathbb{R}^3$ beispielsweise lauten

$$g(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\tilde{g}(\vec{k})\ , \quad \tilde{g}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,g(\vec{x})\ . \tag{20.71}$$

Die Ableitung einer Funktion $f$ hat eine mit $i\,k$ multiplizierte Amplitude,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\,\big(\frac{d}{dx}e^{i\,k\,x}\big)\,\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, e^{i\,k\,x}\,\big(i\,k\,\tilde{f}(k)\big)\ ,$$
$$\widetilde{\frac{df}{dx}}(k) = i\,k\,\tilde{f}(k)\ . \tag{20.72}$$

Insbesondere ist die Fouriertransformierte einer Linearkombination von Ableitungen, wie sie in linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auftreten, ein Polynom im Argument $k$ mal der Fouriertransformierten der gesuchten Funktion. Linear inhomogene Differentialgleichungen für $f$ sind algebraische Gleichungen für $\tilde{f}$, die man nach $\tilde{f}$ auflösen kann. Kann man das Integral, das $f$ durch seine Fourieramplitude $\tilde{f}$ darstellt, explizit auswerten, so hat man die Differentialgleichung durch Integrieren gelöst.

Die um $a$ verschobene Funktion $T_a f$ hat definitionsgemäß am verschobenen Ort $x + a$ den Funktionswert, den $f$ am Urbild $x$ hat,

$$\big(T_a f\big)(x) = f(x - a)\ . \tag{20.73}$$

Aus der Fourierdarstellung lesen wir ab, daß die Translation bei der Fourieramplitude eine Multiplikation mit $e^{-i\,k\,a}$ bewirkt,

$$\big(T_a f\big)(x) = f(x-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, e^{i\,k\,(x-a)}\,\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, e^{i\,k\,x}\big(e^{-i\,k\,a}\,\tilde{f}(k)\big)\ ,$$
$$\widetilde{T_a f}(k) = e^{-i\,k\,a}\,\tilde{f}(k)\ . \tag{20.74}$$

Für die verschobene $\delta$-Funktion $(T_y\delta)(x) = \delta(x-y)$ heißt dies $\big(\widetilde{T_y\delta}\big)(k) = e^{-i\,k\,y}/\sqrt{2\pi}$.

Auf gleiche Art ist definiert, daß bei einer Streckung um einen Faktor $c$, $c \neq 0$, die $x$ auf $c\,x$ abbildet, die gestreckte Funktion $D_c f$ am gestreckten Ort den Wert von $f$ am Urbild hat,

$$\big(D_c f\big)(x) = f(\frac{x}{c})\ . \tag{20.75}$$

Die zugehörige Fourieramplitude wird mit dem *inversen* Faktor $c^{-1}$ gestreckt und mit $|c|$ multipliziert,

$$\begin{aligned}\big(D_c f\big)(x) = f(\frac{x}{c}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, e^{i k \frac{x}{c}}\, \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, \frac{1}{|c|} e^{i \frac{k}{c} x}\, |c|\, \tilde{f}(c\, \frac{k}{c}) \\ &\overset{k'=k/c}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk'\, e^{i k' x}\, |c|\, \tilde{f}(c\, k')\ , \\ \big(\widetilde{D_c f}\big)(k) &= |c|\, \big(D_{c^{-1}}\tilde{f}\big)(k) = |c|\, \tilde{f}(c\, k)\ .\end{aligned} \tag{20.76}$$

Als Beispiel berechnen wir die Fouriertransformierte der Gaußfunktion

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\ . \tag{20.77}$$

Mit einem unbequemen Vorfaktor $1/\sqrt[4]{\pi}$ wäre sie normiert,

$$(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} f, \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dx\, f^*(x)\, f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dx\, e^{-x^2} \overset{12.83}{=} 1\ . \tag{20.78}$$

Bei der Berechnung der Fouriertransformierten fassen wir die Produkte der e-Funktionen zusammen und ergänzen den Exponenten zu Differenzen vollständiger Quadrate,

$$\sqrt{2\pi}\, \tilde{f}(k) = \int dx\, e^{-i k x}\, e^{-\frac{x^2}{2}} = \int dx\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+2i k x)} = e^{-\frac{k^2}{2}}\int dx\, e^{-\frac{1}{2}(x+i k)^2}\ . \tag{20.79}$$

Im verbleibenden Integral kann man *nicht* $u = x + i\,k$ substituieren und (12.83) verwenden, denn der Integralsubstitutionssatz (12.40) gilt nur für reelle Substitutionen. Für reelle Integranden ist ja normalerweise nicht definiert, was ihr Wert an komplexen Argumenten sein soll. Vielmehr handelt es sich um das komplexe Wegintegral über $e^{-z^2/2}$ über den Weg $\Gamma_1\colon \lambda \to z(\lambda) = \lambda + i\,k$, der parallel zur $x$-Achse mit konstanten Imaginärteil verläuft.

Wir beschränken den Integrationsbereich zunächst auf $-R \le \lambda \le R$, schließen den Integrationsweg durch die Strecke $\Gamma_2\colon \lambda \to z(\lambda) = R + i\,(k - \lambda)$, $0 \le |\lambda| \le |k|$, zur reellen Achse, dann zurück längs der reellen Achse $\Gamma_3\colon \lambda \to z(\lambda) = -\lambda$, $-R \le \lambda \le R$ und schließlich zum Ausgangspunkt zurück längs $\Gamma_4\colon \lambda \to z(\lambda) = -R + i\,\lambda$, $0 \le |\lambda| \le |k|$. Da der Integrand $e^{-z^2/2}$ im umlaufenen Rechteck komplex differenzierbar ist, verschwindet das Umlaufintegral, $\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} = 0$.

Das Integral längs $\Gamma_4$ verschwindet für jedes $k$ mit $R$ gegen unendlich.

$$\Big|\int_{\Gamma_4} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}}\Big| \le \int_0^{|k|} d\lambda\, \Big|i\, e^{-\frac{1}{2}(-R+i\lambda)^2}\Big| = e^{-\frac{R^2}{2}}\int_0^{|k|} d\lambda\, e^{\frac{\lambda^2}{2}} \tag{20.80}$$

Gleiches gilt für $\int_{\Gamma_2}$. Als Ergebnis dieser Abschätzung ergibt sich für $R$ gegen unendlich $\int_{\Gamma_1} = -\int_{\Gamma_3}$, das heißt

$$\int dx\, e^{-\frac{1}{2}(x+i k)^2} = \int dx\, e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2}\int du\, e^{-u^2} = \sqrt{2\pi}\ , \tag{20.81}$$

wobei wir $x = \sqrt{2}\,u$ substituiert haben. Für die Fouriertransformierte der Gaußfunktion erhalten wir

$$\tilde{f}(k) = e^{-\frac{k^2}{2}} = f(k)\ . \tag{20.82}$$

Die Gaußfunktion stimmt mit ihrer Fouriertransformierten überein.

Skalieren wir die Argumente der Gaußfunktion um einen Faktor $l > 0$,

$$f_l(x) = (D_l f)(x) = f(\frac{x}{l}) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{l})^2}\ , \tag{20.83}$$

so ist die Fouriertransformierte dieser für $l > 1$ verbreiterten und für $0 < l < 1$ geschmälerten Gaußfunktion um $1/l$ schmaler oder breiter (20.76),

$$\widetilde{f_l}(k) = |l|\tilde{f}(l\,k) = |l| e^{-\frac{1}{2}(l\,k)^2}\ . \tag{20.84}$$

Einer im Ortsraum schmalen Verteilung entspricht eine breite Amplitudenverteilung und umgekehrt. Das Produkt der Breiten einer Gaußkurve und ihrer Fouriertransformierten ändert sich nicht bei Skalierung. Dieser Sachverhalt liegt den Unschärferelationen der Quantenmechanik zugrunde, die beispielsweise besagen, daß das Produkt der Ortsunschärfe mit der Impulsunschärfe nicht $\hbar/2$ unterschreiten kann. Zum Grenzfall einer schmalen Ortsverteilung, zur $\delta$-Funktion, gehört eine unendlich breite Amplitudenverteilung (20.69).

Verschieben wir die skalierte Gaußfunktion um $a$,

$$f_{l,a}(x) = (T_a f_l)(x) = f_l(x - a) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{l})^2}\ , \tag{20.85}$$

so gehört zu dieser Gaußverteilung um $a$ mit Breite $l$ die Fouriertransformierte (20.74)

$$\widetilde{f_{l,a}}(k) = e^{-i\,k\,a}\widetilde{f_l}(k) = e^{-i\,k\,a}\,|l| e^{-\frac{1}{2}(l\,k)^2}\ . \tag{20.86}$$

Fouriertransformieren wir $\widetilde{f_{l,a}}(x) = |l|\,e^{-\frac{1}{2}(l\,x)^2 - i\,a\,x}$ erneut und fassen wir dabei die Exponenten zusammen, substituieren $u = l\,x$, und ergänzen die Exponenten zu vollständigen Quadraten, so erhalten wir die ursprüngliche Funktion am gespiegelten Ort

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,\widetilde{\widetilde{f_{l,a}}}(k) &= \int dx\, e^{-i\,k\,x}|l|\,e^{-\frac{1}{2}(l\,x)^2 - i\,a\,x} = \int dx\,|l|\,e^{-\frac{1}{2}(l\,x)^2 - i\,(k+a)\,x} \\ &= \int du\, e^{-\frac{1}{2}u^2 - i\,\frac{k+a}{l}\,u} = e^{-\frac{1}{2}(\frac{k+a}{l})^2}\int du\, e^{-\frac{1}{2}(u + i\,\frac{k+a}{l})^2} = \sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(\frac{k+a}{l})^2} \\ &= \sqrt{2\pi}\,f_{l,a}(-k)\ .\end{aligned} \tag{20.87}$$

Dies zeigt für Gaußfunktionen explizit, daß wiederholte Fouriertransformation die Paritätstransformation ist, mit anderen Worten, daß die inverse Fouriertransformation bis auf ein Vorzeichen die Fouriertransformation ist.

Um die Fouriertransformierte eines Produktes zu beschreiben, benötigen wir den Begriff des Faltungsintegrals oder Faltungsprodukts $f \star g$ (lies „f Stern g“) zweier quadratintegrabler Funktionen der reellen Zahlen,

$$\big(f \star g\big)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int dy\, f(y)\, g(x - y)\ . \tag{20.88}$$

Es ist symmetrisch, $f \star g = g \star f$, und distributiv, $(af_1 + f_2) \star g = af_1 \star g + f_2 \star g$.

Die Fouriertransformierte eines Produktes erweist sich als das Faltungsintegral der Fouriertransformierten der beiden Faktoren: setzen wir die Fourierdarstellung ein und werten wir die Integrale in vertauschter Reihenfolge aus, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\big(\widetilde{f\,g}\big)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-i\,k\,x}\, f(x)\, g(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int dx \int dk' \int dk''\, e^{-i\,k\,x}\, e^{i\,k'\,x}\, e^{i\,k''\,x}\, \tilde{f}(k')\, \tilde{g}(k'') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk' \int dk''\, \Big(\frac{1}{2\pi} \int dx\, e^{i\,(k'+k''-k)\,x}\Big)\, \tilde{f}(k')\, \tilde{g}(k'') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk' \int dk'' \delta(k' + k'' - k)\, \tilde{f}(k')\, \tilde{g}(k'') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk'\, \tilde{f}(k')\, \tilde{g}(k - k') = \big(\tilde{f} \star \tilde{g}\big)(k) \\
\big(\widetilde{f\,g}\big) &= \tilde{f} \star \tilde{g}\ .
\end{aligned}
\tag{20.89}
$$

Dies ist der Faltungssatz.

Umgedreht ist natürlich die Fouriertransformierte eines Faltungsintegrals zweier Funktionen das Produkt beider Fouriertransformierter.

# 21 Wellengleichung

## Wellengleichung in zwei Dimensionen

Bei der Wellengleichung in einer Raum- und einer Zeitdimension

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)\, u(t,x) = 0 \tag{21.1}$$

zerfällt der Wellenoperator, ebenso wie $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$ faktorisiert,

$$\Box_{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big)\,\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big)\ . \tag{21.2}$$

Schreiben wir die Funktion $u$ von $t$ und $x$ als Funktion $h$ von $t_+ = t+x$ und $t_- = t-x$, so ergibt sich für die Ableitungen

$$u(t,x) = h(t_+, t_-)\ , \quad \partial_t u = (\partial_+ + \partial_-)h\ , \quad \partial_x u = (\partial_+ - \partial_-)h\ , \tag{21.3}$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big)u = 2\partial_+ h\ , \quad \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big)u = 2\partial_- h\ , \quad \Box_{(2)} u = 4\partial_+\partial_- h\ . \tag{21.4}$$

Die Wellengleichung $\partial_+\partial_- h = 0$ besagt, daß $\partial_- h$ nicht von $t_+$ abhängt, $\partial_- h = F(t_-)$, was wiederum besagt, daß $h$ bis auf eine Funktion $g$ von $t_+$, die beim Differenzieren nach $t_-$ wegfällt, eine Funktion $f$ von $t_-$ ist. Die allgemeine Lösung $u(t,x)$ der Wellengleichung in einer Raum- und einer Zeitdimension ist daher von der Form

$$u(t,x) = f(x-t) + g(x+t)\ . \tag{21.5}$$

Die Lösung $u(t,x) = f(x-t) + g(x+t)$ setzt sich aus einem Rechtsläufer $f(x-t)$ und einem Linksläufer $g(x+t)$ zusammen, die mit Lichtgeschwindigkeit und unveränderter Form nach rechts und nach links laufen: zur Zeit $t+\delta t$ hat $f$ am Ort $x+\delta x$ mit $\delta x = v\,\delta t$, $v = 1$, denselben Wert wie bei $(t,x)$; ebenso hat $g$ bei $(t+\delta t, x+\delta x)$ mit $\delta x = v\,\delta t$, $v = -1$, denselben Wert wie bei $(t,x)$.

Die Lösung $u$ wird durch ihre Anfangswerte $\chi$ und $\psi$ zur Zeit $t = 0$,

$$u(0,x) = f(x) + g(x) = \chi(x)\ , \quad (\partial_t u)_{|_{(0,x)}} = -f'(x) + g'(x) = \psi(x)\ , \tag{21.6}$$

eindeutig festgelegt. Integrieren wir nämlich die zweite Gleichung von $0$ bis $x$

$$\int_0^x dy\, \psi(y) = -f(x) + f(0) + g(x) - g(0) \tag{21.7}$$

und addieren und subtrahieren wir dies Ergebnis zur ersten Gleichung, so ergibt sich

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\Big(\chi(x) + \int_0^x dy\, \psi(y) + g(0) - f(0)\Big)\ , \\ f(x) &= \frac{1}{2}\Big(\chi(x) - \int_0^x dy\, \psi(y) - g(0) + f(0)\Big)\,. \end{aligned} \tag{21.8}$$

Drehen wir noch mit $-\int_0^x = \int_x^0$ die Integrationsgrenzen bei $f(x)$ um und setzen wir in (21.5) ein, so erhalten wir die durch die Anfangswerte dargestellte Lösung

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(\chi(x+t) + \chi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} dy\, \psi(y)\Big)\ . \tag{21.9}$$

Die Lösung existiert, ist durch die Anfangswerte eindeutig gegeben und hängt stetig von den Anfangswerten ab. Das Anfangswertproblem der Wellengleichung ist in diesem Sinn sachgemäß.

Die Lösung $u$ hängt zur Zeit $t$ am Ort $x$ nur von den Anfangswerten an Orten $y$ ab, für die $|x-y| \le t$ ist. Ändert man die Anfangswerte in einem Bereich $B \subset \mathbb{R}$, so wirkt sich später diese Änderung nur auf die Lösung im Vorwärtslichtkegel von $B$ aus. Das sind die Punkte $(t,x)$ in der zweidimensionalen Raumzeit, für die ein Punkt $y \in B$ mit $|x-y| \le t$ existiert.

## Dispersion

Eine lineare, homogene, partielle Differentialgleichung der Ordnung $l$ für eine Funktion $u$

$$\big(P_l(\partial_0, \partial_1 \dots \partial_d) + P_{l-1}(\partial_0, \partial_1 \dots \partial_d) + \dots + P_0\big)\, u(x) = 0\ , \tag{21.10}$$

wobei $P_i$ homogene Polynome vom Grad $i$ bezeichne und $\partial_m$ die partiellen Ableitungen nach den Variablen $x^m$, schränkt normalerweise die Form $f$ von ebenen Wellen

$$u(x) = f(k_0\, x^0 + k_1\, x^1 + \dots + k_d\, x^d) \tag{21.11}$$

ein, die als Lösungen auftreten können. Mit der Notation

$$f^{(n)}(y) := \frac{d^n}{dy^n} f(y) \tag{21.12}$$

für die $n$-fache Ableitung von $f$ lautet die Gleichung

$$P_l(k_0, k_1 \dots k_d)\, f^{(l)}(k\cdot x) + P_{l-1}(k_0, k_1 \dots k_d)\, f^{(l-1)}(k\cdot x) + \dots P_0\, f(k\cdot x) = 0\,. \tag{21.13}$$

Dies ist, wenn nicht für spezielle $k$ alle $P_i(k)$ verschwinden, für jedes $k$ eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung für die Form $f$ der ebenen Welle. Beispielsweise hat die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)\, u = 0\ , \tag{21.14}$$

die bei der Beschreibung von relativistischen Teilchen der Masse $m$ auftritt, nur Lösungen der Form $u(x) = f(k \cdot x)$, $k \cdot x := \omega\, t - \vec{k} \cdot \vec{x}$, wenn $f$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(\omega^2 - \vec{k}^2)\, f'' + m^2\, f = 0 \tag{21.15}$$

erfüllt. Für $\omega^2 > \vec{k}^2$ ist das die Gleichung eines harmonischen Oszillators

$$u(x) = a\, \cos(\frac{m}{\sqrt{\omega^2 - \vec{k}^2}}\, k \cdot x + \alpha) = a\, \cos(\hat{k} \cdot x + \alpha)\ ,\ \hat{\omega} = \sqrt{m^2 + \hat{\vec{k}}^2}\ . \tag{21.16}$$

Für $\omega^2 < \vec{k}^2$ wächst $f$ exponentiell in Richtung $\vec{k}$ oder $-\vec{k}$ an

$$u(x) = a\, e^{\hat{k} \cdot x} + b\, e^{-\hat{k} \cdot x}\ ,\ \hat{\omega} = \sqrt{(\hat{\vec{k}})^2 - m^2}\ . \tag{21.17}$$

Streng genommen sind beide Scharen von Lösungen unphysikalisch, da sie nicht für große Abstände klein werden. Lösungen, die für große Abstände abfallen, sind Fouriertransformierbar und Superpositionen der Lösungen (21.16),

$$u(t, \vec{x}) = \Re \int d^3k\, e^{i\,(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega\, t)}\, a(\vec{k})\ , \quad \omega = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}\ . \tag{21.18}$$

Da die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der einzelnen Wellenanteile, die Phasengeschwindigkeiten $\omega/|\vec{k}|$, verschieden sind, laufen diese Anteile mit der Zeit auseinander: das Wellenpaket zeigt Dispersion. Allerdings täuscht der Wert $\sqrt{1 + m^2/\vec{k}^2} > 1$ der Phasengeschwindigkeit über die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Bei einem schmalbandigen Wellenpaket, dessen Amplituden $a(\vec{k})$ in einem kleinen Bereich um $\vec{k}_0$ konzentriert sind, entwickeln wir $\omega(\vec{k}) = \omega_0 + (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{v} + o(|\vec{k} - \vec{k}_0|)$. Kann man die höheren Terme in der Entwicklung vernachlässigen, so ist ein schmalbandiges Wellenpaket von der Form

$$u(t, \vec{x}) = \Re\, e^{-i\,(\omega_0 - \vec{k}_0 \cdot \vec{v})\, t} \int d^3k\, e^{i\,\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{v}\, t)}\, a(\vec{k})\ . \tag{21.19}$$

Es ist der Realteil eines komplexen Wellenpakets, das bis auf eine komplexe Phase von $t$ und $\vec{x}$ nur über $\vec{x} - \vec{v}\, t$ abhängt, sich also mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v^i = \frac{\partial \omega}{\partial k^i} \tag{21.20}$$

bewegt. Bei der Klein-Gordon-Gleichung ist die Gruppengeschwindigkeit durch die Lichtgeschwindigkeit beschränkt, $\vec{v} = \vec{k}/\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$, $|\vec{v}| < 1$.

Weder die Phasengeschwindigkeit noch die Gruppengeschwindigkeit erlauben exakte Rückschlüsse auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen. Die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung $(\Box - M^2)u = 0$ mit negativem Massenquadrat hängen wie alle Lösungen von Gleichungen der Form $\Box u(x) + f(x, u, \partial u) = 0$ im Punkt $x$ nur von den Anfangswerten und den Werten von $f(y, 0, 0)$ im Rückwärtslichtkegel von $x$ ab [7, Kapitel 7]. Nicht einmal die Klein-Gordon-Gleichung eines Tachyons erlaubt überlichtschnelle Signale.

## Ebene Wellen beliebiger Form

Nach Annahme ist das Polynom $P_l$ in der Differentialgleichung (21.10) nicht Null. Wenn alle anderen $P_m$ mit $m < l$ verschwinden und $P_l(\nu, \vec{y})$ für reelle $\vec{y}$ reelle Nullstellen $\nu$ hat, dann hat die homogene, partielle Differentialgleichung

$$P_l(\partial_0, \partial_1 \ldots \partial_d)\, u = 0 \ , \tag{21.21}$$

bei der alle Ableitungsterme von gleicher Ordnung sind, die bemerkenswerte Eigenschaft, ebene Wellen $u(x) = f(k \cdot x)$ von beliebiger Form $f$ zuzulassen, solange $f$ $l$-fach differenzierbar ist. Denn

$$P_l(\partial_0, \partial_1 \ldots)\, u(x) = P_l(k_0, k_1, \ldots)\, f^{(l)}(k \cdot x) = 0 \tag{21.22}$$

ist erfüllt, wenn $P_l(k) = |\vec{k}|^l P_l(\nu, -\vec{n})$ verschwindet. Da $P_l$ ein Polynom in $\nu$ ist, gibt es zu jeder Richtung $\vec{n}$ des Wellenvektors $\vec{k}$ bis zu $l$ reelle Nullstellen $\nu_i$, das heißt bis zu $l$ Geschwindigkeiten, mit der sich eine ebene Welle in dieser Richtung bewegen kann.

## Wellengleichung in vier Dimensionen

Daher bewegen sich ebene Wellen, die der Wellengleichung in $3 + 1$-Dimensionen

$$\Box u = 0 \ , \quad \Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ , \tag{21.23}$$

genügen, mit Geschwindigkeit $\nu^2 - \vec{n}^2 = 0$, also mit Lichtgeschwindigkeit $\nu = \pm 1$ in jede Richtung. Ebene Wellen der Form $f(t - \vec{n}\,\vec{x})$ mit beliebigem, zweifach differenzierbarem $f$ und beliebiger Richtung $\vec{n}$, $\vec{n}^2 = 1$, lösen die Wellengleichung in vier Dimensionen.

Da die Wellengleichung linear ist, sind Linearkombinationen $u = a\, u_1 + b\, u_2$ von Lösungen wieder Lösungen. Ebenso sind, da die Koeffizienten der Wellengleichung konstant sind, verschobene Lösungen $(T_a u)(x) = u(x - a)$ und die Ableitungen $\partial_m u$ Lösungen.

Superponieren wir [6] ebene Wellen $f(t - \vec{n}\,\vec{x})$, indem wir über alle Richtungen $\vec{n}$ integrieren, so erhalten wir eine drehinvariante, nur von $t$ und $r$ abhängige Lösung der Wellengleichung

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, f(t - x \sin\theta \cos\varphi - y \sin\theta \sin\varphi - z \cos\theta) \ . \tag{21.24}$$

Die Auswertung des Integrals vereinfacht sich, wenn wir die Kugelkoordinaten von $\vec{n}$ auf eine $z$-Achse in Richtung von $\vec{x}$ beziehen. Dann ist $\vec{n}\,\vec{x} = |\vec{n}|\,|\vec{x}| \cos\theta = r \cos\theta$, die $\varphi$-Integration ergibt einen Faktor $2\pi$ und es verbleibt

$$u(t, x, y, z) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta\, f(t - r \cos\theta) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}s\, f(t - r\, s) \ . \tag{21.25}$$

Wir benennen mit $F$ die Stammfunktion der beliebigen Funktion $f$

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) \ , \tag{21.26}$$

dann gilt nach der Kettenregel

$$f(t - r\,s) = -\frac{d}{ds}\frac{F(t - r\,s)}{r} \ . \tag{21.27}$$

Damit können wir das Integral durch $F$ ausdrücken

$$u(t, x, y, z) = -\int_{-1}^{1} ds\, \frac{d}{ds}\frac{F(t - r\,s)}{r} = -\frac{F(t - r\,s)}{r}\Big|_{s=-1}^{s=1} = \frac{F(t + r) - F(t - r)}{r} \ . \tag{21.28}$$

Diese drehinvariante Lösung besteht aus einer einlaufenden Kugelwelle $F(t + r)/r$ und einer auslaufenden Kugelwelle $F(t-r)/r$ und ist bei $r = 0$ mehrfach differenzierbar, wenn $F$ einmal mehr differenzierbar ist.

Die allgemeinste drehinvariante Funktion, die außerhalb $\vec{x} = 0$ die Wellengleichung in $3 + 1$-Dimensionen löst, ist die Summe einer ein- und einer auslaufenden Kugelwelle: man bestätigt leicht für den Laplace-Operator in drei Dimensionen, angewendet auf Funktionen $f$ von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, für $r > 0$,

$$\Delta f(r) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\frac{x^i}{r}\,f'\big)\big) = \frac{x^i}{r}\frac{x^i}{r}\,f'' + \big(\frac{3}{r} - \frac{x^i}{r^3}\,x^i\big)\,f' = f'' + \frac{2}{r}\,f' = \frac{1}{r}\,\big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,f)\big) \ . \tag{21.29}$$

Daher gilt für kugelsymmetrische Lösungen $u(t, \vec{x}) = f(t, r)$ der Wellengleichung

$$\Box u = \frac{1}{r}\,\big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\big)(r\,u) = 0 \ , \tag{21.30}$$

also für $r > 0$ die zweidimensionale Wellengleichung (21.1) für $r\,u$ mit der Lösung (21.5)

$$r\,u = g(t - r) + h(t + r) \ , \quad u = \frac{g(t - r)}{r} + \frac{h(t + r)}{r} \ . \tag{21.31}$$

Die allgemeinste, drehinvariante Lösung der Wellengleichung ist also die Summe einer ein- und einer auslaufenden Kugelwelle. Für $g = -h$ (21.28) ist sie auch im Ursprung regulär und löst für dreifach differenzierbares $g$ die Wellengleichung überall.

## Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet

Daß die Lösung $u$ der inhomogenen Wellengleichung (16.12)

$$\Box u = g \tag{21.32}$$

bei Vorgabe der Inhomogenität $g$ und der Werte von $u$ und $\partial_t u$ zur Zeit $t = 0$ eindeutig ist und im Punkt $(t, \vec{x})$ nur von der Inhomogenität im Abhängigkeitsgebiet $G$ und den Anfangswerten im Bereich $A$ (14.43) abhängt, folgt so wie der entsprechende Sachverhalt für die elektromagnetischen Feldstärken mit den Argumenten ab Seite 156.

Denn die zur Wellengleichung gehörige Energiedichte $e$ und Energiestromdichte $\vec{S}$

$$e = \frac{1}{2}\big((\dot{u})^2 + (\mathrm{grad}\,u)^2\big) \ , \ \vec{S} = -\dot{u}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u \tag{21.33}$$

erfüllen die Kontinuitätsgleichung $\dot{e} + \operatorname{div} \vec{S} = 0$, wenn $u$ die homogene Wellengleichung $\Box u = 0$ löst. Zusammen genügen sie für jeden zukunftsgerichteten, zeitartigen Vektor $w = (1, w_1, w_2, w_3)$, $w_i\, w_i < 1$, der Ungleichung

$$\begin{aligned} 2(e + \vec{w}\vec{S}) &= \dot{u}^2 + \partial_i u\, \partial_i u + 2w_i\, \partial_i u\, \dot{u} = (\dot{u} + w_i\, \partial_i u)^2 + (\partial_i u\, \partial_i u) - (w_i \partial_i u)^2 \\ &\geq (\dot{u} + w_i\, \partial_i u)^2 + (\partial_i u\, \partial_i u)(1 - w_j w_j) \geq 0 \ . \end{aligned} \tag{21.34}$$

Diese Summe verschwindet nur, falls $\partial_i u$ und $\dot{u}$ verschwinden. Nach den Argumenten auf Seite 156 ist daher die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Wellengleichung mit gleicher Inhomogenität und gleichen Anfangsbedingungen auf jeder raumartigen Fläche $F$ im Abhängigkeitsgebiet $G$ konstant, und verschwindet, weil $F$ und die Anfangsfläche $A$ gemeinsame Punkte haben.

Allgemeiner hängt bei jeder Gleichung $\Box u(x) + f(x, u, \partial u) = 0$ die Lösung $u$ im Punkt $x$ nur von den Anfangswerten und von der Inhomogenität $f(y, 0, 0)$ im Rückwärtslichtkegel von $x$ ab, falls $|f(y, u, \partial u) - f(y, 0, 0)| < c\sqrt{u^2 + \sum_m (\partial_m u)^2}$ mit einer Konstanten $c$ in einer Umgebung von $(u, \partial u) = 0$ abgeschätzt werden kann [7, Kapitel 7].

## Das Prinzip von Huygens

Die Welle an einem Ort $\vec{x}$ zur Zeit $t > 0$ sollte sich, so die physikalisch motivierte Vermutung, aus der Überlagerung der früheren Welle zur Zeit $t = 0$ von all denjenigen Orten $\vec{x} + t\,\vec{n}$ mit $\vec{n}^2 = 1$ ergeben, die von $\vec{x}$ in der Laufzeit $t$ erreicht werden. Zur Klärung dieser Vermutung betrachten wir den Mittelwert

$$M_{t,\vec{x}}[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=+1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \phi\big(\vec{x} + t\,\vec{n}(\cos\theta, \varphi)\big) \tag{21.35}$$

einer Funktion $\phi$ auf Kugelschalen $K_{t,\vec{x}}$ um den Punkt $\vec{x}$ mit Radius $|t|$. Dabei bezeichnet

$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{21.36}$$

den Einheitsvektor mit Richtungswinkeln $\theta, \varphi$ (5.25).

Als Funktion von $t$ ist $M_{t,\vec{x}}$ auch für negative $t$ definiert. Da das Mittel über alle Richtungen mit dem Mittel über alle Gegenrichtungen übereinstimmt, ist $M_{t,\vec{x}}$ eine gerade Funktion von $t$,

$$M_{t,\vec{x}}[\phi] = M_{-t,\vec{x}}[\phi] \ , \quad M_{0,\vec{x}}[\phi] = \phi(\vec{x}) \ . \tag{21.37}$$

Sie ist zweimal stetig differenzierbar, wenn $\phi$ zweimal stetig differenzierbar ist.

Differenzieren wir nach $t$, so erhalten wir ein Oberflächenintegral über den Rand der Kugel um $\vec{x}$ mit Radius $|t|$

$$K_{t,\vec{x}} = \{\vec{y} : |\vec{x} - \vec{y}| \leq |t|\} \ . \tag{21.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{t,\vec{x}}[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d\cos\theta\, d\varphi\, n^i\, \partial_i \phi(\vec{x} + t\,\vec{n}) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial K_{t,\vec{x}}} d^2 f\, n^i\, \partial_i \phi(\vec{y}) \tag{21.39}$$

Dabei ist $\vec{n}$ für $t > 0$ der nach außen gerichtete Normalenvektor. Das Oberflächenintegral ist nach dem Satz von Gauß gleich dem Volumenintegral über die Divergenz [1]

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{t,\vec{x}}[\phi] = \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^t \mathrm{d}r\, r^2 \int \mathrm{d}\cos\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \Delta\phi \ . \tag{21.40}$$

Dies gilt auch für negative $t$, denn dann ist $\vec{n}$ der nach innen gerichtete Normalenvektor bei $\vec{y} = \vec{x} + t\,\vec{n}$.

Differenzieren wir erneut nach $t$ und wirkt die Ableitung nach der Produktregel auf $1/t^2$, so ergibt sich ein Term, der bis auf einen Faktor $-2/t$ mit $\partial_t M$ übereinstimmt. Die Ableitung des Volumenintegrals nach der oberen Grenze $t$ ergibt den Integranden an der oberen Grenze, das ist der Mittelwert der Ableitung $\Delta\phi$ und gleich der Ableitung $\Delta M_{t,\vec{x}}[\phi]$ des Mittelwerts,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{t,\vec{x}}[\phi] = \frac{-2}{t} \frac{\partial}{\partial t} M_{t,\vec{x}}[\phi] + \Delta M_{t,\vec{x}}[\phi] \ . \tag{21.41}$$

Da der Mittelwert der Darbouxschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{t,\vec{x}}[\phi] + \frac{2}{t} \frac{\partial}{\partial t} M_{t,\vec{x}}[\phi] - \Delta M_{t,\vec{x}}[\phi] = 0 \tag{21.42}$$

genügt, löst $t\, M_{t,\vec{x}}[\phi]$ die homogene Wellengleichung

$$\Box \big(t\, M_{t,\vec{x}}[\phi]\big) = 0 \ . \tag{21.43}$$

Sie ist auch für $t = 0$ erfüllt, da die zweiten Ableitungen von $t\, M_{t,\vec{x}}[\phi]$ stetig sind.

Für $t = 0$ verschwindet die Lösung $t\, M_{t,\vec{x}}[\phi]$, ihre Zeitableitung hat zur Zeit $t = 0$ am Ort $\vec{x}$ den Wert $\phi(\vec{x})$.

Da die Koeffizienten $\eta^{nm}$ der Wellengleichung $\eta^{mn}\partial_m\partial_n u = 0$ konstant sind, lösen auch die partiellen Ableitungen $\partial_k u$ von Lösungen $u$ die Wellengleichung. Also ist $\partial_t(t\, M_{t,\vec{x}}[\psi])$ eine Lösung der Wellengleichung. Sie hat für $t = 0$ am Ort $\vec{x}$ den Wert $\psi(\vec{x})$ und verschwindende Zeitableitung, denn $\partial_t(t\, M_{t,\vec{x}}[\psi])$ ist eine gerade Funktion von $t$. Daher löst

$$u(t,\vec{x}) = t\, M_{t,\vec{x}}[\phi] + \frac{\partial}{\partial t}\big(t\, M_{t,\vec{x}}[\psi]\big) \tag{21.44}$$

in $3 + 1$-Dimensionen die Wellengleichung $\Box u = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(0,\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \ , \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0,\vec{x}) = \phi(\vec{x}) \ . \tag{21.45}$$

Jede Lösung der Wellengleichung ist eindeutig durch ihre Anfangswerte bestimmt (Seite 157). Demnach ist (21.44) *die* Lösung, die zu den Anfangswerten $\psi$ und $\phi$ gehört.

[1] Gleichung (21.40) zeigt zusammen mit (21.37), daß harmonische Funktionen, $\Delta\phi = 0$, an jeder Stelle $\vec{x}$ ihrem Mittelwert auf Kugelschalen gleich sind, die $\vec{x}$ umhüllen, sofern der Radius der Kugelschale so klein ist, daß sie in dem Gebiet liegt, in dem $\phi$ harmonisch ist (17.12).

Da sie sich durch die Mittelwerte der Anfangswerte schreiben läßt, ändert sich die Lösung der Wellengleichung wenig, wenn man die Anfangsdaten ein wenig ändert. Das Anfangswertproblem der Wellengleichung ist sachgemäß.

Die Lösung (21.44) genügt dem Prinzip von Huygens: zur Zeit $t$ am Ort $\vec{x}$ setzt sie sich additiv aus den Anfangswerten zur Zeit $t = 0$ von allen Orten $\vec{y}$ zusammen, von denen man in der Laufzeit $t$ mit Lichtgeschwindigkeit $v = 1$ zu $\vec{x}$ gelangt. Dies gilt nicht in geradzahligen Raumdimensionen und für eine Raumdimension (21.9). In ihnen tragen zur Lösung zur Zeit $t$ am Ort $\vec{x}$ die Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ von allen Orten $\vec{y}$ bei, die mit bis zu Lichtgeschwindigkeit von $\vec{x}$ in der Laufzeit $t$ erreichbar sind. In $1, 2, 4\ldots$ Raumdimensionen hallen die anfänglichen Werte nach.

Da Kugelwellen $F(t-r)/r$ in drei Raumdimensionen wie $1/r$ abfallen, tragen sie am Ort $\vec{x}$ mit einem Faktor $1/r = 1/t$ bei. Dies macht den Vorfaktor $t$ bei $t\,M_{t,\vec{x}}[\phi]$ verständlich, denn beim Mittelwert $M_{t,\vec{x}}[\phi]$ wird das Integral über die Kugeloberfläche mit Radius $|t|$ durch $t^2$ geteilt (21.35) und nicht durch $t$.

Daß Kugelwellen in drei Raumdimensionen wie $1/r$ abfallen, hängt mit der Erhaltung der Energie zusammen und damit, daß die Energiestromdichte wie der Poynting-Vektor quadratisch in den Feldern ist: wenn die Energie erhalten ist, dann verdünnt sich mit zunehmendem $r$ eine auslaufende Energiestromdichte so, wie die Kugeloberfläche $4\pi r^2$ zunimmt. Damit die Energiestromdichte wie $1/r^2$ abfällt, müssen die Felder, aus deren Produkten sie zusammengesetzt ist, wie $1/r$ abfallen.

## Wellenpaket

Die Lösung (21.44) der homogenen Wellengleichung heißt Wellenpaket, denn sie ist eine Superposition von ebenen Wellen $e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$. Stellen wir nämlich eine Lösung $u(t,\vec{x})$ der Wellengleichung zu jeder Zeit $t$ durch ihr Fourierintegral dar,

$$u(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{x}}\,\tilde{u}(t,\vec{k}) \ , \tag{21.46}$$

so besagt die Wellengleichung $\Box u = 0$,

$$\Box u(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{x}}\,\bigl(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(t,\vec{k}) + \vec{k}^2\tilde{u}(t,\vec{k})\bigr) = 0 \ . \tag{21.47}$$

Dies ist, da die Fourierdarstellung eindeutig ist, genau dann der Fall, wenn der Integrand verschwindet, wenn also $\tilde{u}$ als Funktion von $t$ ein harmonischer Oszillator mit Kreisfrequenz $\omega = |\vec{k}|$ ist,

$$\tilde{u}(t,\vec{k}) = \frac{1}{2}\bigl(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\bigr)\tilde{\psi}(\vec{k}) + \frac{1}{2\,i\,\omega}\bigl(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\bigr)\tilde{\phi}(\vec{k}) \ , \quad \omega = |\vec{k}| \ . \tag{21.48}$$

Die Amplituden bei $e^{i\omega t}$ und $e^{-i\omega t}$ haben wir so zusammengefaßt, daß $u(0,\vec{x})$ zur Zeit $t = 0$ mit der Fourierdarstellung von $\psi(\vec{x})$ übereinstimmt, und daß die Zeitableitung von $u$ zur Zeit $t = 0$ mit der Fourierdarstellung von $\phi(\vec{x})$ übereinstimmt,

$$u(0,\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \ , \quad \frac{\partial}{\partial t}u(0,\vec{x}) = \phi(\vec{x}) \ . \tag{21.49}$$

Die Fourierdarstellung von $u$ stimmt mit der in der Feldtheorie wichtigen Darstellung des Wellenpakets überein,

$$u(t,\vec{x}) = \int d^3k \, \frac{1}{(2\pi)^3\, 2\,\omega} \big( e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\, a(\vec{k}) + e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\, a^*(\vec{k}) \big) \ , \quad \omega = |\vec{k}| \ , \tag{21.50}$$

allerdings ist der Zusammenhang von Anfangswerten $\phi$ und $\psi$ mit der Lösung $u$ in der Zerlegung (21.48) klarer zu überblicken als bei den Amplituden

$$a(\vec{k}) = \sqrt{2\pi}^3 \left(\omega\, \tilde{\psi}(\vec{k}) - i\, \tilde{\phi}(\vec{k})\right) \ , \quad a^*(\vec{k}) = \sqrt{2\pi}^3 \left(\omega\, \tilde{\psi}(-\vec{k}) + i\, \tilde{\phi}(-\vec{k})\right) \ . \tag{21.51}$$

Wir rechnen in der Fourierdarstellung der Lösung $u$ nach, daß $\phi$ zur Zeit $t$ am Ort $\vec{x}$ mit $t\, M_{t,\vec{x}}[\phi]$ beiträgt. Wir setzen dazu in das Integral

$$f(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{x}}\, \frac{1}{2\,i\,|\vec{k}|} \big( e^{i|\vec{k}|t} - e^{-i|\vec{k}|t} \big)\, \tilde{\phi}(\vec{k}) \tag{21.52}$$

die Fouriertransformierte

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3y\, e^{-i\vec{k}\vec{y}}\, \phi(\vec{y}) \tag{21.53}$$

ein, substituieren die Integrationsvariable, $\vec{y} = \vec{x} + \vec{z}$, vertauschen, wie wir bei genügend gutartigen Funktionen $\phi$ dürfen, die Integrationsreihenfolge und führen für die $d^3k$-Integration Kugelkoordinaten ein, wobei wir die $z$-Achse im Raum der $\vec{k}$-Vektoren in Richtung $\vec{z}$ wählen, sodaß einfach $\vec{k}\vec{z} = k\,|\vec{z}| \cos\theta = k\,|\vec{z}|\, u$, $u = \cos\theta$, gilt.

$$\begin{aligned} f(t,\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3y \frac{1}{2\,i\,|\vec{k}|} \big( e^{i(\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})+|\vec{k}|t)} - e^{i(\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})-|\vec{k}|t)} \big)\, \phi(\vec{y}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3z \int d^3k \frac{1}{2\,i\,|\vec{k}|} \big( e^{-i(\vec{k}\vec{z}-|\vec{k}|t)} - e^{-i(\vec{k}\vec{z}+|\vec{k}|t)} \big)\, \phi(\vec{x}+\vec{z}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3z \int_0^\infty dk\, k^2 \int_{-1}^1 du \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{1}{2\,i\,k}\, e^{-i k |\vec{z}| u} \big( e^{ikt} - e^{-ikt} \big)\, \phi(\vec{x}+\vec{z}) \ . \end{aligned} \tag{21.54}$$

Die $\varphi$-Integration ergibt einen Faktor $2\pi$, zur Integration über $u = \cos\theta$ gehört die Stammfunktion $e^{-ik|\vec{z}|u}/(-i\,k\,|\vec{z}|)$, die bei $u = \pm 1$ auszuwerten ist. Es verbleibt

$$\begin{aligned} f(t,\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3z\, \frac{1}{2\,|\vec{z}|} \int_0^\infty dk \left( e^{-ik|\vec{z}|} - e^{ik|\vec{z}|} \right) \left( e^{ikt} - e^{-ikt} \right) \phi(\vec{x}+\vec{z}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3z\, \frac{1}{2\,|\vec{z}|} \int dk \left( e^{-ik(|\vec{z}|-t)} - e^{-ik(|\vec{z}|+t)} \right) \phi(\vec{x}+\vec{z}) \ , \end{aligned} \tag{21.55}$$

denn von den vier e-Funktionen, die bei Ausmultiplizieren der zwei Klammern entstehen, gehören zwei zu $k$-Werten, die im Integrationsbereich von $-\infty$ bis 0 durchlaufen werden, $\int_0^\infty dk\, (g(k) + g(-k)) = \int_{-\infty}^\infty dk\, g(k)$.

Das Integral über $k$ ergibt zwei $\delta$-Funktionen (20.68), die wir bei der Integration $d^3z$ in Kugelkoordinaten, $\vec{z} = r\,\vec{n}(\theta,\varphi)$, verwenden

$$f(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dr\, r^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{1}{r} \big( \delta(t-r) - \delta(r+t) \big)\, \phi(\vec{x} + r\,\vec{n}(\theta,\varphi)) \ . \tag{21.56}$$

Für positive Zeiten $t$ trägt im Integrationsbereich $0 < r < \infty$ nur die erste $\delta$-Funktion bei, für negative $t$ nur die zweite,

$$f(t,\vec{x}) = \begin{cases} t\,\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\ \phi\big(\vec{x}+t\,\vec{n}(\theta,\varphi)\big) & \text{für } t>0 \\ t\,\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\ \phi\big(\vec{x}-t\,\vec{n}(\theta,\varphi)\big) & \text{für } t<0 \end{cases} . \tag{21.57}$$

Es ist also mit der Notation von (21.35), da $f(t,\vec{x})$ für $t=0$ stetig ist, für alle Zeiten $t$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int\mathrm{d}^3k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vec{k}\,\vec{x}}\,\frac{1}{2\,\mathrm{i}\,|\vec{k}|}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,|\vec{k}|\,t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\vec{k}|\,t}\big)\,\tilde{\phi}(\vec{k}) = t\,M_{t,\vec{x}}[\phi] \tag{21.58}$$

und demnach auch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int\mathrm{d}^3k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vec{k}\,\vec{x}}\,\frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,|\vec{k}|\,t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,|\vec{k}|\,t}\big)\,\tilde{\psi}(\vec{k}) = \frac{\partial}{\partial t}\big(t\,M_{t,\vec{x}}[\psi]\big)\ . \tag{21.59}$$

## Retardiertes Potential

Um einen Eindruck über die Lösung der inhomogenen Wellengleichung zu bekommen, integrieren wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta u = \hat{g} \tag{21.60}$$

über das Zeitintervall $\tau < t < \tau + \epsilon$. Dabei mögen die Anfangswerte von $u$ zur Zeit $\tau$ verschwinden, $u(\tau,\vec{x}) = 0$, $\partial_t u(\tau,\vec{x}) = 0$. Das Integral auf der linken Seite gibt $\partial_t u(\tau+\epsilon)$, bis auf Terme, die wegen der Anfangsbedingung von zweiter Ordnung in $\epsilon$ sind. Das Ergebnis der rechten Seite benennen wir

$$\partial_t u(\tau+\epsilon) = \int_\tau^{\tau+\epsilon}\mathrm{d}t\,\big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta u\big) = \int_\tau^{\tau+\epsilon}\mathrm{d}t\,\hat{g}(t,\vec{x}) = g(\tau+\epsilon,\vec{x})\ . \tag{21.61}$$

Wirkt die Störung $\hat{g}$ nur diese kurze Zeit, so liegt anschließend für $t > \tau$ eine Funktion $\varphi_\tau(t,\vec{x})$ vor, die bis auf Terme, die mit $\epsilon$ gegen Null verschwinden, die Wellengleichung mit Anfangsbedingung

$$\Box\varphi_\tau(t,\vec{x}) = 0\ ,\quad \varphi_\tau(\tau,\vec{x}) = 0\ ,\quad \partial_t\varphi_\tau(t,\vec{x})_{|t=\tau} = g_\tau(\vec{x})\ ,\quad g_\tau(\vec{x}) = g(\tau,\vec{x})\ , \tag{21.62}$$

erfüllt. Konkret geht diese Lösung durch Translation in der Zeit um $\tau$ aus der entsprechenden Lösung (21.44) hervor. Sie ist durch den Mittelwert über die Funktion $g_\tau$, gemittelt über eine Kugeloberfläche mit Radius $t-\tau$ gegeben,

$$\varphi_\tau(t,\vec{x}) = (t-\tau)\,M_{(t-\tau),\vec{x}}[g_\tau]\ . \tag{21.63}$$

Wirkt die Störung $g$ längere Zeit, so denken wir uns die Lösung zusammengesetzt aus Lösungen, die von den kurzzeitigen Störungen erzeugt worden sind, denn wenn $Lu_1 = g_1$ die Lösung einer linear inhomogenen Gleichung mit Inhomogenität $g_1$ ist und $Lu_2 = g_2$ die Lösung zu einer anderen Inhomogenität, dann ist die Summe $u = u_1 + u_2$ Lösung der Gleichung mit der Summe der Inhomogenitäten $L(u_1+u_2) = (g_1+g_2)$.

Wir betrachten daher das Integral

$$u(t,\vec{x}) = \int_0^t d\tau\, \varphi_\tau(t,\vec{x}) \ . \qquad (21.64)$$

Zur Anfangszeit $t = 0$ verschwindet es, da dann der Integrationsbereich verschwindet. Die Zeitableitung leitet nach der oberen Integrationsgrenze ab – und ergibt den Integranden an der Stelle $\tau = t$ – und nach dem ersten Argument von $\varphi$ ab

$$\partial_t u(t,\vec{x}) = \varphi_t(t,\vec{x}) + \int_0^t d\tau\, \partial_t \varphi_\tau(t,\vec{x}) = \int_0^t d\tau\, \partial_t \varphi_\tau(t,\vec{x}) \ . \qquad (21.65)$$

Sie verschwindet zur Anfangszeit $t = 0$, da dann der Integrationsbereich verschwindet. Die zweite Zeitableitung ergibt

$$(\partial_t)^2 u(t,\vec{x}) = \partial_t \varphi_\tau(t,\vec{x})_{|\tau=t} + \int_0^t d\tau\, (\partial_t)^2 \varphi_\tau(t,\vec{x}) = g(t,\vec{x}) + \int_0^t d\tau\, (\partial_t)^2 \varphi_\tau(t,\vec{x}) \ . \qquad (21.66)$$

Addieren wir hierzu $-\Delta u = \int_0^t d\tau\, (-\Delta\varphi_\tau(t,\vec{x}))$ und berücksichtigen wir, daß $\varphi_\tau$ die Wellengleichung löst, so verbleibt

$$\Box u(t,\vec{x}) = g(t,\vec{x}) \ . \qquad (21.67)$$

Es ist also zu allen Zeiten $t$ und für alle $\vec{x}$ das Integral

$$u(t,\vec{x}) = \int_0^t d\tau\, (t-\tau)\, M_{(t-\tau),\vec{x}}[g_\tau] \qquad (21.68)$$

die Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\Box u = g$ mit den Anfangswerten $u(0,\vec{x}) = 0$ und $\partial_t u(0,\vec{x}) = 0$.

Zur Auswertung des Integrals für $t > 0$ substituieren wir $\tau(r) = t - r$ und integrieren über $r$

$$u(t,\vec{x}) = \int_0^t dr\, r\, M_{r,\vec{x}}[g_{t-r}] = \frac{1}{4\pi}\int_0^t dr\, r^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{1}{r}\, g(t-r, \vec{x} + r\,\vec{n}) \qquad (21.69)$$

Bei den drei Integralen handelt es sich, da $t > 0$ ist, um die Integration in Kugelkoordinaten über die Punkte $\vec{z}$ mit Betrag kleiner $t$

$$u(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\vec{z}|\leq t} d^3z\, \frac{g(t-|\vec{z}|, \vec{x}+\vec{z})}{|\vec{z}|} \ . \qquad (21.70)$$

Wechseln wir hier zur Integrationsvariablen $\vec{y} = \vec{x} + \vec{z}$ und bezeichnen wir die Kugel um $\vec{x}$ mit Radius $|r|$ als

$$K_{r,\vec{x}} = \{\vec{y} : |\vec{x} - \vec{y}| \leq |r|\} \ , \qquad (21.71)$$

so lautet die Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\Box u = g$, die zur Zeit $t = 0$ zusammen mit ihrer ersten Zeitableitung verschwindet,

$$t \geq 0 : \qquad u(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{K_{|t|,\vec{x}}} d^3y\, \frac{g(t-|\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \ . \qquad (21.72)$$

Für $t < 0$ substituieren wir in (21.68) $\tau(r) = t + r$, dann erstreckt sich, nachdem wir die untere und obere Integrationsgrenze vertauscht haben, das $r$-Integral von 0 bis $-t = |t|$ und die drei Integrale können als Volumenintegral über eine Kugel mit Radius $|t|$ aufgefaßt werden. Wir erhalten so für $t < 0$

$$t \le 0 : \qquad u(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{K_{|t|,\vec{x}}} d^3y \, \frac{g(t + |\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \ . \tag{21.73}$$

Bei nichtverschwindenden Anfangswerten zur Zeit $t = 0$ setzt sich die Lösung des Anfangswertproblems aus dieser partikulären Lösung der inhomogenen Wellengleichung und einem Wellenpaket (21.44) zusammen, das die Anfangswerte hat,

$$u(t,\vec{x}) = t\,M_{t,\vec{x}}[\phi] + \frac{\partial}{\partial t}\big(t\,M_{t,\vec{x}}[\psi]\big) + \frac{1}{4\pi}\int_{K_{|t|,\vec{x}}} d^3y \, \frac{g(t - \mathrm{sign}(t)\,|\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \ . \tag{21.74}$$

Da die Lösung stetig von den Anfangswerten und der Inhomogenität abhängt, ist das Anfangswertproblem der inhomogenen Wellengleichung sachgemäß.

Das Integral über die retardierte Inhomogenität $g$ ist für jeden Radius $R > 0$ der Kugel um $\vec{x}$ eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung, denn die Differenz zweier solcher Integrale ($R > R'$)

$$h(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{K_{R,\vec{x}}-K_{R',\vec{x}}} d^3y \, \frac{g(t - |\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{4\pi}\int_{K_{R,\vec{x}}} d^3y \, \frac{\hat{g}(t - |\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{21.75}$$

ist das retardierte Potential einer Ladungsdichte $\hat{g}$, die in der inneren Kugel und demnach in $\vec{x}$ verschwindet. Folglich ist die Differenz $h$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung, $\Box h(t,\vec{x}) = \hat{g}(t,\vec{x}) = 0$.

Falls die Quelle $g$ mit wachsendem räumlichen Abstand genügend schnell abfällt, sodaß der Grenzwert $R \to \infty$ existiert, so ist also das retardierte Potential

$$u_{\mathrm{ret}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y \, \frac{g(t - |\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{21.76}$$

eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung.

Zum retardierten Potential zur Zeit $t$ am Ort $\vec{x}$ tragen alle Inhomogenitäten $g$ von allen Orten $\vec{y}$ mit dem Wert bei, den sie zur retardierten Zeit $t_{\mathrm{ret}}$ hatten: das ist die Zeit, die um die Lichtlaufzeit von $\vec{y}$ nach $\vec{x}$, $|\vec{x}-\vec{y}|$, früher als $t$ ist. Die Lösung $u$ der inhomogenen Wellengleichung hängt an jedem Punkt $(t,\vec{x})$ der Raumzeit nur von dem Wert von $g$ auf dem Rückwärtslichtkegel von $(t,\vec{x})$ ab, das sind die Punkte $(t_{\mathrm{ret}},\vec{y})$, für die $t - t_{\mathrm{ret}} = |\vec{x}-\vec{y}|$ gilt. Der Beitrag von jeder einzelnen Inhomogenität am Ort $\vec{y}$ wird mit dem Kepler- oder Coulombpotential $1/|\vec{x}-\vec{y}|$ gewichtet, das sie am Ort $\vec{x}$ bewirkt.

# 22 Fernfeld einer Ladungsverteilung

## Gaußbedingung

In der Lorenzeichung $\partial_t\phi + \operatorname{div}\vec{A} = 0$ (16.11) erfüllt jede Komponente des Viererpotentials $(A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, \vec{A})$ eine inhomogene Wellengleichung (16.19) mit Inhomogenität $(j^0, j^1, j^2, j^3) = (\rho, \vec{j})$,

$$\Box A^m = j^m \ , \ m = 0, 1, 2, 3 \ . \tag{22.1}$$

Die Lösung läßt sich als Summe des retardiertem Potentials und eines Wellenpakets schreiben

$$A^m = A^m_{\text{ret}} + A^m_{\text{hom}} \ , \tag{22.2}$$

$$A^m_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y \, \frac{j^m(t - |\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \ . \tag{22.3}$$

Da die Lösung nach Vorgabe der Inhomogenität $j^m$ und der Anfangswerte von $A^m$ eindeutig festgelegt ist, ist zu prüfen, ob auch die Lorenzbedingung erfüllt ist. Die Funktion $\partial_m A^m = \partial_t\phi + \operatorname{div}\vec{A}$ erfüllt als Folge der inhomogenen Wellengleichungen $\Box A^m = j^m$ und der Kontinuitätsgleichung $\partial_m j^m = 0$ eine homogene Wellengleichung

$$\Box\big(\partial_m A^m\big) = 0 \ . \tag{22.4}$$

Folglich verschwindet $\partial_m A^m$ zu allen Zeiten, wenn ihr anfänglicher Wert und ihre anfängliche Zeitableitung verschwinden,

$$\partial_t\phi(0,\vec{x}) = -\operatorname{div}\vec{A}(0,\vec{x}) \ , \ \partial_t\partial_t\phi(0,\vec{x}) = -\operatorname{div}\partial_t\vec{A}(0,\vec{x}) \ . \tag{22.5}$$

Die erste Bedingung legt die anfängliche Zeitableitung von $\phi$ fest, die zweite Bedingung ist die Gaußbedingung $\operatorname{div}\vec{E}(0,\vec{x}) = \rho(0,\vec{x})$, denn wegen $\Box\phi = \rho$ besagt sie

$$\operatorname{div}\big(-\operatorname{grad}\phi - \partial_t\vec{A}\big)(0,\vec{x}) = \rho(0,\vec{x}) \ . \tag{22.6}$$

Dies ist eine Poissongleichung für das skalare Potential $\phi(0,\vec{x})$ und legt es eindeutig fest, wenn $\rho$ und $\partial_t\vec{A}$ gegeben sind und wenn man verschwindende Randwerte für $|\vec{x}| \to \infty$ unterstellt.

Beliebige, auf ein Gebiet beschränkte Änderungen $\delta\rho$ der anfänglichen Ladungsdichte gehören normalerweise zu nichtlokalisierten Änderungen $\delta\vec{E}$ des elektrischen Feldes. Nur wenn sich $\delta\rho$ als Divergenz eines Feldes $\delta\vec{E}$ schreiben läßt, das außerhalb eines Gebietes verschwindet, ist die Änderung der Anfangswerte und der Ladungs- und Stromdichten lokalisiert. Solche lokalisierten Änderungen wirken sich nur im Vorwärtslichtkegel der Änderungen aus.

## Zeitableitung von Ladungs- und Strommomenten

Ist die Quelle $j^m$, die das retardierte Viererpotential erzeugt, räumlich auf ein Gebiet beschränkt, dessen Ausdehnung klein ist gegen den Abstand $r = |\vec{x}|$, so kann man den Integranden von (22.3) durch eine Entwicklung nach $y^i/r$ nähern. Wir berücksichtigen beim Fernfeld $A^m_{\text{fern}}$ des Potentials nur Anteile, die im Grenzfall $r \to \infty$ bei konstanter retardierter Zeit

$$t_- = t - r \tag{22.7}$$

nicht stärker als $1/r$ abfallen, und nähern die unterschiedliche Retardierung der Beiträge von verschiedenen Orten $\vec{y}$ durch eine Taylorreihe. Die Richtung von der Quelle zum Ort $\vec{x}$, an dem wir das Potential bestimmen, ist $\vec{n} = \vec{x}/r$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} &= \frac{1}{r} + O(\frac{1}{r^2}) \\ |\vec{x}-\vec{y}| &= r\big(1 - 2\frac{\vec{x}}{r^2}\cdot\vec{y} + \frac{\vec{y}^{\,2}}{r^2}\big)^{\frac{1}{2}} = r - \vec{n}\cdot\vec{y} + O(\frac{1}{r}) \end{aligned} \tag{22.8}$$

$$j^m(t - r + \vec{n}\cdot\vec{y} - O(\frac{1}{r})) = j^m(t_-) + \vec{n}\cdot\vec{y}\,\partial_t j^m(t_-) + \frac{1}{2}(\vec{n}\cdot\vec{y})^2\,\partial_t{}^2 j^m(t_-) + \dots \tag{22.9}$$

Dies gilt nur ungefähr, wenn sich während der Zeiten, um die sich die Lichtlaufzeiten verschiedener Teile der Quelle unterscheiden, die Quelle $j^m$ nur wenig ändert.

In dieser Näherung ist das Fernfeld

$$A^m_{\text{fern}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r}\Big(\int d^3y\, j^m + n^i\int d^3y\, y^i\,\partial_t j^m + \frac{1}{2}n^i n^j\int d^3y\, y^i y^j\,\partial_t{}^2 j^m\Big)\ , \tag{22.10}$$

wobei $j^m$, $\partial_t j^m$ und $\partial_t{}^2 j^m$ die Argumente $(t_-,\vec{y})$ haben und $i,j \in \{1,2,3\}$ räumliche Komponenten abzählen. Terme mit höheren Zeitableitungen vernachlässigen wir.

Für das skalare Potential $A^0 = \phi$ erhalten wir, da $j^0 = \rho$ die Ladungsdichte ist,

$$\phi_{\text{fern}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r}\Big(\int d^3y\,\rho + n^i\frac{d}{dt}\int d^3y\, y^i\,\rho + \frac{1}{2}n^i n^j\frac{d^2}{dt^2}\int d^3y\, y^i y^j\,\rho\ \Big)\ , \tag{22.11}$$

also die zeitunabhängige Ladung $q$ und zur retardierten Zeit $t - r$ die Zeitableitung des elektrischen Dipolmoments $\vec{P}$ und die zweiten Zeitableitungen der Quadrupolmomente $Q^{ij}$, die wir als Matrixelemente einer symmetrischen, spurfreien Matrix $Q$ auffassen,

$$q = \int d^3y\,\rho\ ,\ \ P^i = \int d^3y\, y^i\rho\ ,\ \ Q^{ij} = \int d^3y\,\big(3y^iy^j - \delta^{ij}\vec{y}^{\,2}\big)\rho\ ,\ \ \delta_{ij}Q^{ij} = 0\ , \tag{22.12}$$

$$\phi_{\text{fern}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r}\big(q + \vec{n}\,\dot{\vec{P}} + \frac{1}{6}\vec{n}\cdot\ddot{Q}\,\vec{n} + \frac{1}{6}\int d^3y\,\vec{y}^{\,2}\ddot{\rho}\ \big)\ . \tag{22.13}$$

Das Integral über die Stromdichte $\vec{j}$, das beim Vektorpotential $\vec{A}$ auftritt, kann man mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, $\dot{\rho} + \partial_k j^k = 0$, als Zeitableitung von $\vec{P}$ schreiben,

$$\int d^3x\, j^i(\vec{x}) = \int d^3x\,\big(\partial_k(x^i j^k) - x^i\,(\partial_k j^k)\big) = \int d^3x\, x^i\,\dot{\rho} = \dot{P}^i\ , \tag{22.14}$$

denn das Integral über die räumlichen Ableitungen $\partial_k(x^i j^k)$ gibt Randterme und verschwindet, weil nach Annahme die Ströme für große $r$ verschwinden.

Ebenso kann man räumliche Momente der Stromdichte, genauer symmetrisierte Momente, als Zeitableitung des Quadrupolmomentes schreiben,

$$\begin{aligned}\int d^3x\,(j^i x^j + j^j x^i) &= \int d^3x\,\big(\partial_k(x^i x^j j^k) - x^i x^j\,\partial_k j^k\big) = \int d^3x\, x^i x^j\,\dot\rho \\ &= \frac{1}{3}\,\dot Q^{ij} + \frac{1}{3}\,\delta^{ij}\int d^3x\,\vec x^2\,\dot\rho\ .\end{aligned} \tag{22.15}$$

Das magnetische Moment $\vec M$ einer Stromverteilung ist das antisymmetrisierte Moment

$$\frac{1}{2}\int d^3x\,(x^j j^k - x^k j^j) = \epsilon_{jki} M^i\ ,\quad \vec M = \frac{1}{2}\int d^3x\,\vec x \times \vec j\ . \tag{22.16}$$

Damit erhalten wir

$$\int d^3x\, x^i j^j = \epsilon_{ijk} M^k + \frac{1}{6}\,\dot Q^{ij} + \frac{1}{6}\,\delta^{ij}\int d^3x\,\vec x^2\dot\rho \tag{22.17}$$

und können die ersten zwei Terme von (22.10) auswerten

$$\vec A_{\text{fern}}(t,\vec x) = \frac{1}{4\pi\, r}\Big(\dot{\vec P} - \vec n \times \dot{\vec M} + \frac{1}{6}\,\ddot Q\,\vec n + \frac{1}{6}\,\vec n\int d^3y\,\vec y^{\,2}\ddot\rho\Big)\ . \tag{22.18}$$

Der dritte Term in (22.10) betrifft zweite Zeitableitungen von Integralen über $x^i x^j j^k$. Wir vernachlässigen sie so wie dritte Zeitableitungen von $x^i x^j x^k \rho$.

Die Feldstärken bestimmen wir ebenfalls nur bis zur Ordnung $1/r$. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{1}{r} = 0 + O(\frac{1}{r^2})\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x^k} f(t-r) = -\frac{x^k}{r}\frac{d}{dt} f\ , \tag{22.19}$$

wirkt in dieser Näherung $\partial/\partial x^i$ wie die Zeitableitung, multipliziert mit der Komponente $-n^i$ der Richtung zur Quelle. Daher ist das Magnetfeld $\vec B = \operatorname{rot}\vec A = -\vec n \times \dot{\vec A}$,

$$\vec B_{\text{fern}}(t,\vec x) = -\frac{1}{4\pi\, r}\vec n \times \Big(\ddot{\vec P} - \vec n \times \ddot{\vec M} + \frac{1}{6}\dddot Q \vec n\Big)\ , \tag{22.20}$$

und das elektrische Feld $\vec E = -\operatorname{grad}\phi - \partial_t \vec A = \vec n\,\dot\phi - \dot{\vec A}$,

$$E^i_{\text{fern}}(t,\vec x) = -\frac{1}{4\pi\, r}(\delta^{ij} - n^i n^j)\Big(\ddot{\vec P} - \vec n \times \ddot{\vec M} + \frac{1}{6}\dddot Q \vec n\Big)^j\ . \tag{22.21}$$

Da $(\delta^{ij} - n^i n^j)$ Vektoren $\vec v$ auf ihren zu $\vec n$ senkrechten Teil $\vec v_\perp$ projiziert, ist $\vec E = -\dot{\vec A}_\perp$ und $\vec B = \vec n \times \vec E$. In der Fernzone bilden also $\vec n$, $\vec E$ und $\vec B$ ein orthogonales Rechtssystem, wobei $\vec E$ und $\vec B$ gleich groß sind. Die Energiestromdichte $\vec S$ (14.38) ist nach außen gerichtet

$$\vec S_{\text{fern}} = \vec E_{\text{fern}} \times \vec B_{\text{fern}} = \vec n\,\frac{1}{2}(\vec E^2_{\text{fern}} + \vec B^2_{\text{fern}})\ . \tag{22.22}$$

Beschleunigte Ladungen strahlen Energie ab, die mit Lichtgeschwindigkeit nach außen strömt.

## Feld einer Punktladung

Wir betrachten ein geladenes Teilchen, das die Weltlinie $z(s) = (z^0(s), z^1(s), z^2(s), z^3(s))$ mit begrenzter Höchstgeschwindigkeit $\big((\mathrm{d}\vec{z}/\mathrm{d}s)/(\mathrm{d}z^0/\mathrm{d}s)\big)^2(t) \leq \vec{v}^2_{\max} < 1$ durchlaufe, und untersuchen, welches elektromagnetische Feld es erzeugt. Die Weltlinie sei mit der Eigenzeit $s$ parametrisiert, die eine vom Teilchen mitgeführte Uhr anzeigt. Dann ist der Tangentialvektor $u$ an die Weltlinie normiert,

$$u = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\ , \quad u^2 = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = 1 \tag{22.23}$$

und hängt durch $u = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}(1, \vec{v})$ mit der räumlichen Geschwindigkeit $\vec{v}$ zusammen.

Die Eigenzeit auf der Weltlinie definiert die Zeit $s(x)$, die ein Beobachter im Ereignis $x$ mit Licht von $z(s)$ gerade auf der Uhr des Teilchens ablaufen sieht. Sie hat überall auf dem Vorwärtslichtkegel von $z(s)$ den Wert $s$.

Zur Berechnung des Viererpotentials schreiben wir das retardierte Potential in der scheinbar komplizierteren, gleich aber einfacher auszuwertenden Form. Wir schreiben $(x-y)^2$ für $(x^0-y^0)^2 - (x^1-y^1)^2 - (x^2-y^2)^2 - (x^3-y^3)^2$ und behaupten

$$A^m_{\mathrm{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4y\, \delta\big((x-y)^2\big)\, \Theta(x^0-y^0)\, j^m(y)\ . \tag{22.24}$$

Wenn wir zunächst über $y^0$ integrieren und dabei verwenden, wie eine verkettete $\delta$-Funktion wirkt (18.36), erweist sich dies tatsächlich als das retardierte Potential

$$\begin{aligned} A^m_{\mathrm{ret}}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^3y \int \mathrm{d}y^0\, \frac{1}{2|x^0-y^0|}\, \delta(x^0 - y^0 - |\vec{x}-\vec{y}|)\, j^m(y) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3y\, \frac{j^m(x^0 - |\vec{x}-\vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \end{aligned} \tag{22.25}$$

Die Viererstromdichte des Teilchens schreiben wir als Integral über eine vierdimensionale $\delta$-Funktion

$$j^m(y) = q \int \mathrm{d}s\, \delta^4(y - z(s))\, \frac{\mathrm{d}z^m}{\mathrm{d}s}\ . \tag{22.26}$$

Auch hier können wir die verkettete $\delta$-Funktion $\delta(y^0 - z^0(s))$ mit (18.36) auswerten und erhalten

$$\begin{aligned} j^m(y) &= q \int \mathrm{d}s\, \delta(y^0 - z^0(s))\, \frac{\mathrm{d}z^m}{\mathrm{d}s}\, \delta^3(\vec{y} - \vec{z}(s)) \\ &= q \int \mathrm{d}s\, \delta(s - \underline{s})\, \frac{1}{|\frac{\mathrm{d}z^0}{\mathrm{d}s}|}\, \frac{\mathrm{d}z^m}{\mathrm{d}s}\, \delta^3(\vec{y} - \vec{z}(s)) = q\, \frac{1}{|\frac{\mathrm{d}z^0}{\mathrm{d}s}|}\, \frac{\mathrm{d}z^m}{\mathrm{d}s}\, \delta^3(\vec{y} - \vec{z}(\underline{s}))\ , \end{aligned} \tag{22.27}$$

wobei dieser Ausdruck für die Eigenzeit $\underline{s}(y^0)$ auszuwerten ist, zu der die Koordinatenzeit $z^0(\underline{s}(y^0)) = y^0$ durchlaufen wird. Schreiben wir kurz $\vec{z}(t)$ für die verkettete Funktion $\vec{z}(\underline{s}(t))$, so erweist sich die Ladungsdichte als die eines Punktteilchens bei $\vec{z}(t)$ und die Stromdichte die Geschwindigkeit des Teilchen multipliziert mit der Ladungsdichte,

$$\rho(t, \vec{y}) = q\, \delta^3(\vec{y} - \vec{z}(t))\ , \quad \vec{j}(t, \vec{y}) = q\, \frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t}\, \delta^3(\vec{y} - \vec{z}(t))\ . \tag{22.28}$$

Setzen wir die Stromdichte (22.26) in die kovariante Schreibweise des retardierten Potentials (22.24) ein, so heben sich die vier $\delta$-Funktionen mit der $d^4y$-Integration weg, es verbleibt

$$A^m(x) = \frac{1}{2\pi}\int ds\, \delta\big((z(s)-x)^2\big)\, \theta(x^0 - z^0(s))\, \frac{dz^m}{ds} \tag{22.29}$$

Auch hier brauchen wir die Kettenregel (18.36) für die $\delta$-Funktion. Mit

$$\Big|\frac{d}{ds}(z(s)-x)^2\Big| = 2\,\frac{dz}{ds}\cdot(x - z(s)) \tag{22.30}$$

und der Kurzschrift $u^m = dz^m/ds$ (22.23) erhalten wir das von Alfred Marie Liénard (1869-1958) und Emil Wiechert (1861-1928) im Jahr 1898 beziehungsweise 1900 hergeleitete Viererpotential

$$A^m(x) = \frac{q}{4\pi}\,\frac{u^m}{u\cdot(x - z(s(x)))}\ . \tag{22.31}$$

Der hier auftretende Vierervektor

$$y = x - z(s(x)) \tag{22.32}$$

zeigt von der Ursache zur Auswirkung: vom Ereignis $z(s)$, in dem die Weltlinie des Teilchens den Rückwärtslichtkegel von $x$ durchläuft, zum Ereignis $x$, dessen Potential das Teilchen bewirkt. Der Vierervektor $y$ ist lichtartig und zukunftsgerichtet,

$$y(x) = x - z(s(x))\ ,\quad y^2 = 0\ ,\quad y^0 > 0\ , \tag{22.33}$$

und hängt auch über $s(x)$ von $x$ ab. In räumliche und zeitliche Komponenten aufgespaltet, gilt

$$y = \big(r, \vec{x} - \vec{z}(s(x))\big) = r\,(1, \vec{n})\ , \tag{22.34}$$

wobei $r$ den Abstand und $\vec{n}$ den Richtungsvektor vom Teilchen zum Beobachter bei $\vec{x}$ bezeichnet. Die Vierergeschwindigkeit des Teilchens ist

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,(1, \vec{v})\ . \tag{22.35}$$

Folglich ist das Skalarprodukt

$$y\cdot u = \frac{r}{\sqrt{1-v^2}}\,(1 - \vec{n}\cdot\vec{v})\ . \tag{22.36}$$

Die Ableitungen von $s(x)$ bestimmen wir durch Ableiten von $y^2 = 0$,

$$0 = (\delta_m{}^n - u^n\,\partial_m s)\, y_n\ ,\quad \partial_m s = \frac{y_m}{y\cdot u} =: k_m\ . \tag{22.37}$$

Der Vierervektor $k$ in Richtung von $y$ ist lichtartig, durch sein Skalarprodukt mit $u$ normiert und hat die Zerlegung

$$k = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1 - \vec{n}\cdot\vec{v}}\,(1, \vec{n})\ ,\quad k^2 = 0\ ,\quad k\cdot u = 1\ . \tag{22.38}$$

Damit können wir die Ableitungen von $y$ und $y \cdot u$ durch die Viererbeschleunigung

$$\dot{u} = \frac{du}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1,\vec{v})\Big) = \frac{1}{1-v^2}\Big(\frac{\vec{v}\,\vec{a}}{1-v^2}, \vec{a} + \vec{v}\,\frac{\vec{v}\,\vec{a}}{1-v^2}\Big)\ , \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\ , \tag{22.39}$$

und die bisher eingeführten Größen ausdrücken,

$$\begin{aligned} \partial_m y^n &= \delta_m{}^n - u^n k_m\ , \\ \partial_m (y \cdot u) &= (\partial_m y^n)\, u_n + y \cdot \dot{u}\, k_m = u_m + (y \cdot \dot{u} - 1)\, k_m\ . \end{aligned} \tag{22.40}$$

Wir erhalten so die Feldstärken ($m \leftrightarrow n$ bezeichnet den vorstehenden Ausdruck, in dem $m$ mit $n$ vertauscht worden ist)

$$\begin{aligned} F_{mn} = \big(\partial_m A_n - \partial_n A_m\big) &= -\frac{q}{4\pi}\frac{\partial_m (y \cdot u)\, u_n}{(y \cdot u)^2} + \frac{q}{4\pi}\frac{\partial_m u_n}{(y \cdot u)} - m \leftrightarrow n \\ &= k_m w_n - k_n w_m\ , \end{aligned} \tag{22.41}$$

wobei zu

$$w_m = \frac{q}{4\pi}\frac{u_m}{(y \cdot u)^2} + \frac{q}{4\pi}\frac{\dot{u}_m - (u_m - k_m)\, k \cdot \dot{u}}{(y \cdot u)}\ . \tag{22.42}$$

ein beliebiges Vielfaches von $k_m$ hinzugefügt werden darf, ohne die Feldstärken $F_{mn}$ zu ändern. Wir wählen dieses Vielfache so, daß der in $\dot{u}$ lineare Anteil senkrecht auf $u$ steht. Zudem ist er senkrecht auf $k$. Folglich trägt nur der Anteil der Viererbeschleunigung zu den Feldstärken bei, der senkrecht auf der von $u$ und $k$ aufgespannten Ebene ist.

Insbesondere besagt dies für das elektrische Feld, $E^i = F_{0i} = k_0 w_i - k_i w_0$ ,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi}\frac{1-v^2}{r^2\,(1-\vec{v}\,\vec{n})^3}\big(\vec{n} - \vec{v}\big) + \frac{q}{4\pi}\frac{\vec{n} \times \big((\vec{n} - \vec{v}) \times \vec{a}\big)}{r(1-\vec{v}\,\vec{n})^3}\ . \tag{22.43}$$

Sein beschleunigungsunabhängiger Teil fällt mit $1/r^2$ ab und zeigt nicht in Richtung $\vec{n}$ von der Ursache, dem retardierten Ereignis $z$, zur Auswirkung bei $x$, sondern in Richtung von $\vec{x} - (\vec{z} + r\,\vec{v})$, vom Bestimmungsort $\vec{z} + r\,\vec{v}$ nach $\vec{x}$. Der Bestimmungsort ist der Ort, den das Teilchen mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\vec{v}$ in dem Augenblick erreichen würde, in dem es sich bei $\vec{x}$ auswirkt.

Der beschleunigungsabhängige Teil des elektrischen Feldes fällt wie $1/r$ ab. Er steht senkrecht auf der Richtung $\vec{n}$ von der Ursache zum Ort $\vec{x}$ und ist linear in der Beschleunigung $\vec{a}$. Von der Beschleunigung trägt bei $\vec{x}$ nur der Anteil zum Feld bei, der senkrecht auf der Richtung $\vec{n} - \vec{v}$ vom Bestimmungsort zu $\vec{x}$ ist.

Das Magnetfeld des Teilchens steht senkrecht auf $\vec{n}$ und $\vec{E}$. Denn es ist $k^0 = |\vec{k}|$ und

$$B^k = -\varepsilon_{ijk} k_i w_j = \varepsilon_{ijk} k^i w_j = \varepsilon_{ijk}\, k^i/k^0\, E^j\ , \quad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}\ . \tag{22.44}$$

Die Energiestromdichte $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$ des Strahlungsfeldes zeigt in Richtung $\vec{n}$ von der Ursache weg: eine beschleunigte Ladung strahlt Energie ab. Das heißt nicht, daß viele beschleunigte Ladungen in jedem Fall strahlen: Ladungen, die, gleichmäßig auf einen Kreis verteilt, ihn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen, gehören zu einer konstanten Ladungs- und Stromdichte und erzeugen statische Felder.

# 23 Kovariante Maxwellgleichungen

In geeigneter Schreibweise zeigt sich, daß die Raum- und Zeitableitungen und magnetische und elektrische Felder in die Maxwellgleichungen auf gleiche Art eingehen und daß die Maxwellgleichungen kovariant unter Poincaré-Transformationen sind, das heißt: sie gelten auch für gleichförmig bewegte Beobachter, die Poincaré-transformierte Koordinaten und Felder verwenden.

## Feldstärketensor

Schreibt man für die partiellen Ableitungen nach den Raumzeitkoordinaten

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}\,, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}\,, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x^3}\,, \tag{23.1}$$

so lauten die homogenen Maxwellgleichungen (14.9)

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0\ , \qquad \operatorname{rot}\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \tag{23.2}$$

ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
\partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 &= 0\ ,\\
\partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \partial_0 B^1 &= 0\ ,\\
\partial_3 E^1 - \partial_1 E^3 + \partial_0 B^2 &= 0\ ,\\
\partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 + \partial_0 B^3 &= 0\ .
\end{aligned} \tag{23.3}$$

Allen vier Gleichungen ist gemein, daß sie eine Linearkombination von drei Feldstärken betreffen, die einmal abgeleitet werden.

Die kovariante Schreibweise der Maxwellgleichungen deutet die Feldstärken als die sechs Komponenten eines antisymmetrischen Tensors, des Feldstärketensors [1]

$$F_{mn} = -F_{nm}\ , \quad F_{0i} = E^i\,,\ F_{ij} = -\epsilon_{ijk}B^k\,. \tag{23.4}$$

Explizit gilt

$$\begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13}\\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23}\\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3\\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2\\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1\\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{23.5}$$

[1] Indizes $i, j, k$ haben Werte aus $\{1, 2, 3\}$, lexographisch spätere Buchstaben wie $m, n$ stehen für Werte aus $\{0, 1, 2, 3\}$.

Mit diesen Bezeichnungen haben die homogenen Maxwellgleichungen die Form

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} &= 0 \ , \\ \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} &= 0 \ , \\ \partial_3 F_{01} + \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} &= 0 \ , \\ \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} &= 0 \end{aligned} \tag{23.6}$$

und können in Indexschreibweise kurz als

$$\partial_l F_{mn} + \partial_m F_{nl} + \partial_n F_{lm} = 0 \tag{23.7}$$

geschrieben werden.

Weil die Komponenten des Feldstärketensors antisymmetrisch sind, $F_{mn} = -F_{nm}$, ist die zyklische Summe auf der linken Seite bis auf einen Faktor 2 auch die vorzeichenbehaftete Summe über alle Permutationen von $l, m, n$ und daher (2.57) total antisymmetrisch,

$$\begin{gathered} Y_{lmn} = \partial_l F_{mn} + \partial_m F_{nl} + \partial_n F_{lm} \\ = \frac{1}{2}\big(\partial_l F_{mn} + \partial_m F_{nl} + \partial_n F_{lm} - \partial_l F_{nm} - \partial_m F_{ln} - \partial_n F_{ml}\big) \\ Y_{\pi(l)\pi(m)\pi(n)} = \operatorname{sign}(\pi) Y_{lmn} \ . \end{gathered} \tag{23.8}$$

Die Gleichungen (23.7) bestehen also nicht aus $4 \cdot 4 \cdot 4$ unabhängigen Komponentengleichungen, wie man bei drei Indizes $l$, $m$ und $n$ und einem Laufbereich über vier Werte vermuten könnte, sondern $l$, $m$ und $n$ müssen in einer nichttrivialen Gleichung paarweise verschieden sein und ihre Permutation führt nicht auf eine neue Gleichung. Daher enthält (23.7) $4 \cdot 3 \cdot 2 \,/\, 3! = 4$ unabhängige Gleichungen, nämlich (23.6).

Die inhomogenen Maxwellgleichungen (14.10)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \ , \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j} \ , \tag{23.9}$$

lauten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 &= \rho \ , \\ -\partial_0 E^1 + \partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 &= j^1 \ , \\ -\partial_0 E^2 + \partial_3 B^1 - \partial_1 B^3 &= j^2 \ , \\ -\partial_0 E^3 + \partial_1 B^2 - \partial_2 B^1 &= j^3 \ , \end{aligned} \tag{23.10}$$

oder, wenn wir die elektrischen und magnetischen Felder als Komponenten des Feldstärketensors schreiben und zur Betonung der Struktur verschwindende Terme wie $\partial_0 F_{00}$ einfügen,

$$\begin{aligned} \partial_0 F_{00} - \partial_1 F_{10} - \partial_2 F_{20} - \partial_3 F_{30} &= \rho \ , \\ -\partial_0 F_{01} + \partial_1 F_{11} + \partial_2 F_{21} + \partial_3 F_{31} &= j^1 \ , \\ -\partial_0 F_{02} + \partial_1 F_{12} + \partial_2 F_{22} + \partial_3 F_{32} &= j^2 \ , \\ -\partial_0 F_{03} + \partial_1 F_{13} + \partial_2 F_{23} + \partial_3 F_{33} &= j^3 \ . \end{aligned} \tag{23.11}$$

Das Minuszeichen bei den Komponenten $F_{01}$, $F_{02}$ und $F_{03}$ gehört zur Definition der Komponenten des Feldstärketensors mit oberen Indizes

$$F^{mn} = \eta^{mk}\eta^{nl}F_{kl}\ , \quad F^{0i} = -F_{0i}\ , \quad F^{ij} = F_{ij}\ , \tag{23.12}$$

$$\eta^{mn} = \begin{cases} 1 & m = n = 0 \\ -1 & m = n \in \{1,2,3\} \\ 0 & m \neq n \end{cases}\ , \tag{23.13}$$

$$\begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{23.14}$$

Dann haben die inhomogenen Maxwellgleichungen die Form

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \rho\ , \\ \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= j^1\ , \\ \partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} &= j^2\ , \\ \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} + \partial_3 F^{33} &= j^3\ . \end{aligned} \tag{23.15}$$

und lauten mit $j = (\rho, j^1, j^2, j^3)$ in Indexschreibweise

$$\partial_m F^{mn} = j^n\ . \tag{23.16}$$

## Lokale Ladungserhaltung

Weil $F^{mn} = -F^{nm}$ antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes ist und weil die zweifache partielle Ableitung, wenn sie in einem Gebiet stetig ist, nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängt, $\partial_n\partial_m = \partial_m\partial_n$, verschwindet die Doppelsumme $\partial_n\partial_m F^{mn}$. Denn eine Doppelsumme über ein symmetrisches und ein antisymmetrisches Indexpaar verschwindet (Seite 164).

Wenden wir $\partial_n$ auf (23.16) an, so erhalten wir $\partial_n\partial_m F^{mn} = \partial_n j^n$. Die linke Seite verschwindet. Sie ist der Viererdivergenz $\partial_n j^n = \partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3$ des Viererstroms gleich

$$\partial_n j^n = 0\ . \tag{23.17}$$

In Ladungs- und Stromdichte ausgedrückt ist dies die Kontinuitätsgleichung

$$\dot\rho + \operatorname{div}\vec{j} = 0\ . \tag{23.18}$$

Die Kontinuitätsgleichung schränkt denkbare Quellen $\rho$ und $\vec{j}$ für elektromagnetische Felder ein. Es können in den Maxwellgleichungen nur solche Ladungs- und Stromdichten auftreten, die der Kontinuitätsgleichung und damit lokaler Ladungserhaltung genügen.

## Viererpotential

Setzen wir die Lösung der homogenen Maxwellgleichungen (16.1,16.8)

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}\ , \quad \vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\phi - \partial_t \vec{A}\ . \tag{23.19}$$

in $F_{mn}$ (23.5) ein, verwenden wir dabei die Schreibweise $A^0 = \phi$, $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$ für die Komponenten des Viererpotentials mit oberen Indizes und

$$(A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)\ , \quad A^m = \eta^{mn} A_n\ , \tag{23.20}$$

so erweisen sich die Feldstärken

$$\begin{aligned} F_{01} = E^1 = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0\ , \quad F_{02} = E^2 = \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0\ , \quad F_{03} = E^3 = \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0\ , \\ F_{12} = -B^3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1, \quad F_{23} = -B^1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2\ , \quad F_{13} = B^2 = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1\ , \end{aligned} \tag{23.21}$$

als die antisymmetrisierte Ableitung des Viererpotentials,

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m\ . \tag{23.22}$$

Diese Feldstärken lösen die homogenen Maxwellgleichungen, denn wegen $F_{mn} = -F_{nm}$ ist (23.7) total antisymmetrisch. Da aber der Wert partieller Ableitungen nicht von der Reihenfolge abhängt, verschwindet die Antisymmetrisierung der Ableitungen

$$\begin{aligned} &\partial_l(\partial_m A_n - \partial_n A_m) + \partial_m(\partial_n A_l - \partial_l A_n) + \partial_n(\partial_l A_m - \partial_m A_l) = \\ &= (\partial_l\partial_m - \partial_m\partial_l)A_n + (\partial_m\partial_n - \partial_n\partial_m)A_l + (\partial_n\partial_l - \partial_l\partial_n)A_m = 0\ . \end{aligned} \tag{23.23}$$

Auch ohne Rückgriff auf die Lösungen (16.1,16.8) können wir aus (23.7) schließen, daß die Feldstärken $F_{mn}$ die antisymmetrisierten Ableitungen eines Viererpotentials sind, falls das Gebiet der Raumzeit, in dem die Felder definiert sind und (23.7) erfüllen, sternförmig ist, also mit jedem Punkt $x$ den Verbindungsstrahl vom Ursprung zu $x$ enthält.

Um das einzusehen, wiederholen wir den Beweis des Poincaréschen Lemmas (15.40). Wir schreiben $F_{mn}(x)$ als ein Integral über eine Ableitung, führen sie mit der Kettenregel aus, verwenden (23.7), die Antisymmetrie von $F_{mn}$ und identifizieren das Ergebnis als antisymmetrisierte, mit der Kettenregel ausgewertete Ableitung,

$$\begin{aligned} F_{mn}(x) &= \int_0^1 \mathrm{d}\lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\big(\lambda^2 F_{mn}(\lambda x)\big) = \int_0^1 \mathrm{d}\lambda \left(2\,\lambda\, F_{mn\,|_{\lambda x}} + \lambda^2 x^l \partial_l F_{mn\,|_{\lambda x}}\right) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}\lambda \left(2\,\lambda\, F_{mn\,|_{\lambda x}} - \lambda^2 x^l \big(\partial_m F_{nl\,|_{\lambda x}} + \partial_n F_{lm\,|_{\lambda x}}\big)\right) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}\lambda \left(2\,\lambda\, F_{mn\,|_{\lambda x}} + \lambda^2 x^l \big(\partial_m F_{ln\,|_{\lambda x}} - \partial_n F_{lm\,|_{\lambda x}}\big)\right) \\ &= \partial_m \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \lambda\, x^l F_{ln}(\lambda x) - \partial_n \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \lambda\, x^l F_{lm}(\lambda x)\ . \end{aligned} \tag{23.24}$$

Es ist also $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$, wobei hier das Vektorpotential durch ein Integral längs des Strahls vom Ursprung zum Punkt $x$ gegeben ist (15.48),

$$A_n(x) = \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \lambda\, x^l F_{ln}(\lambda x)\ . \tag{23.25}$$

## Eichinvarianz und Lorenzbedingung

Das Viererpotential kann umgeeicht werden, ohne die Feldstärken zu ändern (16.9),

$$\phi' = \phi - \partial_t \chi \ , \quad \vec{A}\,' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi \ . \tag{23.26}$$

Ausgedrückt in Komponenten des Viererpotentials mit unteren Indizes, lautet die Eichtransformation

$$A'_m = A_m - \partial_m \chi \ . \tag{23.27}$$

Klarerweise bleiben alle antisymmetrisierten Ableitungen $F_{mn}$ ungeändert, wenn man zu $A_n$ einen Vierergradienten hinzufügt, denn der Wert partieller Ableitungen hängt nicht von der Reihenfolge ab.

$$F'_{mn} = \partial_m(A_n - \partial_n \chi) - \partial_n(A_m - \partial_m \chi) = \partial_m A_n - \partial_n A_m - (\partial_m \partial_n - \partial_n \partial_m)\chi = F_{mn} \tag{23.28}$$

Durch Umeichen kann man die Lorenzbedingung

$$\partial_m A^m = 0 \tag{23.29}$$

erfüllen. Gilt zunächst $\partial_m A'^m = f$, dann ist die Lorenzbedingung für $A^m$ eine Differentialgleichung für $\chi$

$$f = \partial_m A'^m = \partial_m(A^m - \partial^m \chi) = -\partial_m \partial^m \chi \ . \tag{23.30}$$

Hier tritt $\partial^m \chi$ mit oberem Index auf. Wir haben $A^m = \eta^{mn} A_n$ und $A'^m = \eta^{mn} A'_n$ vereinbart, also auch

$$\partial^m \chi = \eta^{mn} \partial_n \chi \ . \tag{23.31}$$

Der Differentialoperator $\partial_m \partial^m$ erweist sich also als der Wellenoperator (16.12),

$$\partial_m \partial^m = \eta^{mn} \partial_m \partial_n = (\partial_0)^2 - (\partial_1)^2 - (\partial_2)^2 - (\partial_3)^2 = \Box \ . \tag{23.32}$$

Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung für $\chi$, $\Box \chi = -f$ ,

$$\chi(t, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 y \, \frac{f(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \tag{23.33}$$

ist nicht eindeutig. Sie läßt weiteres Umeichen mit Wellenpaketen $\chi$ zu, die die Wellengleichung $\Box \chi = 0$ erfüllen.

## Inhomogene Wellengleichung

Mit der Lorenzbedingung $\partial_m A^m = 0$ entkoppeln die inhomogenen Maxwellgleichungen, denn wenn wir die Lösung der homogenen Maxwellgleichungen $F^{mn} = \partial^m A^n - \partial^n A^m$ einsetzen und die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen, verschwindet wegen der Lorenzbedingung der zweite Term

$$\partial_m F^{mn} = \partial_m(\partial^m A^n - \partial^n A^m) = \partial_m \partial^m A^n - \partial^n \partial_m A^m = \Box A^n \ . \tag{23.34}$$

In der Lorenzeichung sind die inhomogenen Maxwellgleichungen entkoppelte, inhomogene Wellengleichungen für die vier Komponentenfunktionen $A^n$ des Viererpotentials

$$\Box A^n = j^n \ . \tag{23.35}$$

Die Funktionen $A^n$ sind allerdings noch durch die Lorenzbedingung gekoppelt.

In der Viererschreibweise treten Raum- und Zeitableitungen und elektrische und magnetische Feldstärken in den Maxwellgleichungen in gleicher Weise auf. Einzig das Vorzeichen von $\eta^{00}$ im Vergleich zu $\eta^{11}$, $\eta^{22}$ und $\eta^{33}$ unterscheidet die zweiten Zeitableitungen im Wellenoperator von den zweiten Ableitungen nach den kartesischen Ortskoordinaten.

## Kovarianz der Maxwellgleichungen

Die Kontinuitätsgleichung (23.17), die Lorenzbedingung (23.29), der Zusammenhang von Feldstärken und Viererpotential (23.22), die Eichtransformationen (23.27) und die Wellengleichungen (23.35) sind kovariant unter Poincaré-Transformationen. Das heißt, bringt man in diesen Gleichungen alle Terme auf die linke Seite, so sind diese linken Seiten Funktionen der Felder und ihrer Ableitungen, also Jet-Funktionen, die unter Poincaré-Transformationen linear transformieren. Diese Jet-Funktionen sind das, was man die „Form“ der Gleichungen nennt.

Die homogenen Maxwellgleichungen (23.7) sind sogar kovariant unter beliebigen Transformationen $x(x'))$, wenn man durch

$$F'_{mn}(x') = \frac{\partial x^r}{\partial x'^m}\frac{\partial x^s}{\partial x'^n} F_{rs}(x(x')) \tag{23.36}$$

die transformierten Feldstärken definiert. Denn die zyklische Summe auf der linken Seite der homogenen Maxwellgleichungen ist wegen $F_{mn} = -F_{nm}$ eine vorzeichenbehaftete Summe über alle Permutationen und daher total antisymmetrisch unter jeder Vertauschung eines Indexpaares (23.8). In

$$\begin{aligned}
2Y'_{lmn}(x') &= \partial'_l\big(\frac{\partial x^r}{\partial x'^m}\frac{\partial x^s}{\partial x'^n} F_{rs}(x(x')) + \dots\big)\\
&= \frac{\partial x^t}{\partial x'^l}\frac{\partial x^r}{\partial x'^m}\frac{\partial x^s}{\partial x'^n}\,\partial_{x^t} F_{rs}{}_{|(x(x'))}\\
&+ \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^m \partial x'^t}\frac{\partial x^s}{\partial x'^n} F_{rs}(x(x')) + \frac{\partial x^r}{\partial x'^m}\frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^n \partial x'^t}\ F_{rs}(x(x')) + \dots\\
&= \frac{\partial x^t}{\partial x'^l}\frac{\partial x^r}{\partial x'^m}\frac{\partial x^s}{\partial x'^n}\, 2Y_{trs}(x(x'))\ ,
\end{aligned} \tag{23.37}$$

wobei die Punkte für die permutierten Ausdrücke stehen, heben sich daher die zweiten Ableitungen von $x$ nach $x'$ paarweise weg, denn $\frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^n \partial x'^t} - \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^t \partial x'^n} = 0$. Als Folge ist die transformierte Funktion $Y'_{lmn}$ linear in $Y_{trs}$ und verschwindet genau dann, wenn $Y_{trs}$ verschwindet. Die homogenen Maxwellgleichungen sind unter beliebigen Transformationen $x(x')$ kovariant.

Liest man die inhomogenen Maxwellgleichungen als Definition der Stromdichten

$$\eta^{km}\partial_m F_{kl}(x) = j_l(x) \ , \tag{23.38}$$

dann sind sogar alle Maxwellgleichungen unter beliebigen Transformationen $x(x')$ invariant, denn dann definiert $\eta^{km}\partial'_m F'_{kl}(x')$ die transformierte Stromdichte.

Allerdings ist Elektrovakuum, ein Gebiet, in dem die Ladungs- und Stromdichten verschwinden, nicht invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen, sondern $\eta^{km}\partial_m F_{kl}(x)$ transformiert unter beliebigen Koordinatentransformationen nichtlinear, ist also nicht kovariant unter beliebigen Koordinatentransformationen. Wir unterstellen, daß alle Beobachter darin übereinstimmen, ob ein Gebiet ladungs- und stromfrei ist (statt zu unterstellen, daß beschleunigte Beobachter Ladungen sehen, wo unbeschleunigte nur Feldstärken, aber keine Ladungen sehen) und zeigen, daß Elektrovakuum durch Poincaré-Transformationen in sich übergeht.

Poincaré-Transformationen

$$x \mapsto x' = \Lambda x + a \tag{23.39}$$

transformieren Raumzeitpunkte $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ durch eine Lorentztransformation $\Lambda$ und eine Verschiebung um $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ . Zu ihnen gehört die adjungierte Transformation (3.106) von Feldern, also von Abbildungen des Minkowskiraumes in einen Bildraum, in dem eine Darstellung der Poincaré-Gruppe wirkt.

Bei den Stromdichten $j^m$ und dem Viererpotential $A^m$ transformiert der Bildraum als Vierervektor,

$$\begin{aligned} j'^{\,m}(x) &= \Lambda^m{}_n\, j^n(\Lambda^{-1}(x-a)) \ , \\ A'^{\,m}(x) &= \Lambda^m{}_n\, A^n(\Lambda^{-1}(x-a)) \ . \end{aligned} \tag{23.40}$$

Die Kontinuitätsgleichung und die Lorenzbedingung sind unter solchen Transformationen invariant. Denn nach der Kettenregel gilt

$$\partial_{x^m} f(z(x)) = \frac{\partial z^r}{\partial x^m}\, \partial_{z^r} f_{|_{z(x)}} \ , \tag{23.41}$$

also für $z^r = \Lambda^{-1\,r}{}_n(x^n - a^n)$ mit $\partial_{x^m} z^r = \Lambda^{-1\,r}{}_m$

$$\partial_m j'^{\,m}(x) = \Lambda^{-1\,r}{}_m\, \Lambda^m{}_n\, \partial_r j^n{}_{|_{\Lambda^{-1}(x-a)}} = \partial_m j^m{}_{|_{\Lambda^{-1}(x-a)}} \ , \tag{23.42}$$

wobei wir $\Lambda^{-1\,r}{}_m\, \Lambda^m{}_n = \delta^r{}_n$ und $\delta^r{}_n\, \partial_r = \partial_n$ und $\partial_n j^n = \partial_m j^m$ verwendet haben. Es transformiert also die Viererdivergenz eines Vektorfeldes (23.40) wie ein Skalarfeld $\phi$ ,

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}(x-a)) \ , \tag{23.43}$$

und verschwindet genau dann, wenn das transformierte Feld verschwindet, denn die Transformationen sind linear und Null ist ein Fixpunkt.

Genauer betrachtet ist $\partial_m j^m$ ein Skalarfeld unter allgemeinen linear inhomogenen Transformationen der Raumzeit, denn wir wir haben nur die Invertierbarkeit von $\Lambda$ benutzt.

Der Wellenoperator $\Box = \eta^{mn}\,\partial_m\partial_n$ ist unter Poincaré-Transformationen invariant: auf ein Vektorfeld oder ein Skalarfeld angewendet ergibt er ein Vektor- oder Skalarfeld. Mit (23.41) gilt für jedes Skalarfeld $\phi$

$$\Box\phi'(x) = \eta^{mn}\Lambda^{-1\,r}{}_m\partial_{z^r}\,\Lambda^{-1\,s}{}_n\partial_{z^s}\phi_{|_{\Lambda^{-1}(x-a)}} \ . \tag{23.44}$$

Wir erinnern daran, daß Lorentztransformationen definitionsgemäß diejenigen linearen Transformationen sind, die das Skalarprodukt der Raumzeit

$$x\cdot y = x^0\,y^0 - x^1\,y^1 - x^2\,y^2 - x^3\,y^3 = \eta_{kl}\,x^k\,y^l \tag{23.45}$$

invariant lassen, für die also für alle $x$ und $y$ gilt

$$x\cdot y = (\Lambda x)\cdot(\Lambda y)\ ,\ \eta_{kl}\,x^k\,y^l = \eta_{mn}\,\Lambda^m{}_k\,x^k\,\Lambda^n{}_l\,x^l\ , \tag{23.46}$$

was genau dann der Fall ist, wenn

$$\eta_{kl} = \eta_{mn}\,\Lambda^m{}_k\,\Lambda^n{}_l\ ,\ \eta = \Lambda^T\,\eta\,\Lambda\ . \tag{23.47}$$

Daher gilt $\eta = \Lambda^T\,\eta\,\Lambda$ und die inverse Relation

$$\eta^{mn}\Lambda^{-1\,r}{}_m\,\Lambda^{-1\,s}{}_n = \eta^{rs}\ . \tag{23.48}$$

Folglich ist

$$\Box\phi'(x) = \Box\phi_{|_{\Lambda^{-1}(x-a)}}\ . \tag{23.49}$$

Entsprechend gilt für Vektorfelder $\Box A'^m(x) = \Lambda^m{}_n\Box A^n(\Lambda^{-1}(x-a))$, weil die Transformationsmatrix $\Lambda$ nicht von $x$ abhängt.

Es sind also die Gleichungen $\Box A^m = j^m$, $\partial_m A^m = 0$ und $\partial_m j^m = 0$ Poincaré-kovariant. Sie gelten genau dann, wenn die Poincaré-transformierten Potentiale und Stromdichten dieselben Gleichungen erfüllen.

Das Feld $A_m = \eta_{mn}A^n$ transformiert wie ein duales Vektorfeld mit $\Lambda^{-1\,T}$, denn multipliziert man $\eta = \Lambda^T\eta\Lambda$ von links mit $\Lambda^{-1\,T}$ und von rechts mit $\eta^{-1}$, so zeigt sich

$$\Lambda^{-1\,T} = \eta\Lambda\eta^{-1}\ , \tag{23.50}$$

und

$$A'_m(x) = \eta_{mn}\Lambda^n{}_k\eta^{kl}\eta_{lr}A^r(\Lambda^{-1}(x-a)) = \Lambda^{-1\,T}{}_m{}^l A_l(\Lambda^{-1}(x-a))\ . \tag{23.51}$$

Daraus folgt in Übereinstimmung mit (23.36) für die Feldstärken $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$

$$F'_{mn}(x) = \Lambda^{-1\,T}{}_m{}^k\,\Lambda^{-1\,T}{}_n{}^l\,F_{kl}(\Lambda^{-1}(x-a))\ . \tag{23.52}$$

## Feldstärken einer gleichförmig bewegten Ladung

Wenn wir im Transformationsgesetz (23.52) die Summation in Beiträge der elektrischen und magnetischen Feldstärken aufspalten, besagt es für die Komponenten $E^i = F_{0i}$ und $B^k = -\epsilon_{kij} F_{ij}/2$, $i,j,k \in \{1,2,3\}$ (23.4)

$$\begin{aligned} E'^{\,i} &= ((\Lambda^{-1})^0{}_0\,\Lambda^{-1\,j}{}_i - \Lambda^{-1\,j}{}_0\,(\Lambda^{-1})^0{}_i)\,E^j - \Lambda^{-1\,j}{}_0\,\Lambda^{-1\,k}{}_i\,\epsilon_{jkl}\,B^l\ , \\ B'^{\,n} &= -\epsilon_{nij}\,(\Lambda^{-1})^0{}_i\,\Lambda^{-1\,k}{}_j\,E^k + \frac{1}{2}\,\epsilon_{nij}\,\epsilon_{klm}\Lambda^{-1\,k}{}_i\,\Lambda^{-1\,l}{}_j\,B^m\ . \end{aligned} \tag{23.53}$$

Handelt es sich bei $\Lambda$ um die drehungsfreie Lorentztransformation, die die Weltlinie $x(s) = (s,0,0,0)$ eines ruhenden Teilchens auf diejenige eines Teilchens abbildet, das sich mit Geschwindigkeit $v$ in Richtung $\vec{n}$ bewegt, $\Lambda x(s) = s/\sqrt{1-v^2}\,(1, v\,\vec{n})$, so hat $\Lambda$ die Matrixelemente

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma\ ,\quad \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = \gamma v n^i\ ,\quad \Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + (\gamma-1)n^i n^j\ ,\quad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}\ . \tag{23.54}$$

Die Matrixelemente von $\Lambda^{-1}$ ergeben sich durch Vorzeichenwechsel von $v$,

$$(\Lambda^{-1})^0{}_0 = \gamma\ ,\quad (\Lambda^{-1})^0{}_i = (\Lambda^{-1})^i{}_0 = -\gamma v n^i\ ,\quad (\Lambda^{-1})^i{}_j = \delta^i{}_j + (\gamma-1)n^i n^j\ . \tag{23.55}$$

Das bewegte Teilchen erzeugt folglich die Feldstärken

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma\vec{E} + \vec{n}\cdot\vec{E}\,(1-\gamma)\,\vec{n} - \gamma v\,\vec{n}\times\vec{B}\ , \\ \vec{B}' &= \gamma\vec{B} + \vec{n}\cdot\vec{B}\,(1-\gamma)\,\vec{n} + \gamma v\,\vec{n}\times\vec{E}\ , \end{aligned} \tag{23.56}$$

wobei die Felder auf der rechten Seite am Urbild $\Lambda^{-1}x$ des Arguments der linken Seite zu nehmen sind. In ihre Anteile parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung $\vec{n}$ zerlegt, lauten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \vec{E}'_\parallel &= \vec{E}_\parallel\ ,\quad \vec{E}'_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\vec{E}_\perp - \vec{v}\times\vec{B})\ , \\ \vec{B}'_\parallel &= \vec{B}_\parallel\ ,\quad \vec{B}'_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\vec{B}_\perp + \vec{v}\times\vec{E})\ . \end{aligned} \tag{23.57}$$

Es ist bemerkenswert, daß diese ungleiche Transformation der parallelen und senkrechten Anteile zur Folge hat, daß das elektrische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung jederzeit zu dem Ort zeigt, an dem es augenblicklich ist: Ein bei $\vec{x} = 0$ ruhendes Teilchen der Ladung $q$ erzeugt bei $(t,x,y,z)$ die Feldstärken

$$\vec{E}(t,x,y,z) = \frac{q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}\ ,\quad \vec{B}(t,x,y,z) = 0\ . \tag{23.58}$$

Die $y$- und $z$-Komponenten eines elektrischen Feldes eines Teilchens, das sich mit Geschwindigkeit $v$ längs der $x$-Achse bewegt, sind um $1/\sqrt{1-v^2}$ vergrößert und betragen

$$\left(E'_x, E'_y, E'_z\right) = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(\sqrt{1-v^2}\,x, y, z\right)\ . \tag{23.59}$$

Drücken wir die Argumente $(t, x, y, z)$ von $\vec{E}$ durch die Argumente von $\vec{E}'$ aus, $x = (x' - v\,t')/\sqrt{1-v^2}$, $y = y'$ und $z = z'$, so bedeutet dies

$$\begin{aligned}
\vec{E}'(t', x', y', z') &= \frac{q}{4\pi} \frac{(1-v^2)}{((x'-v\,t')^2 + (1-v^2)\,(y'^2 + z'^2))^{3/2}} \big(x' - v\,t', y', z'\big) \\
&= \frac{q}{4\pi} \frac{(1-v^2)}{(1-v^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \frac{\vec{e}(t')}{(r'(t'))^2}\ , \text{ wobei} \\
\sin^2\theta &= \frac{y'^2 + z'^2}{(x'-vt')^2 + y'^2 + z'^2}\ .
\end{aligned} \tag{23.60}$$

Das elektrische Feld $\vec{E}'(t, \vec{x})$ eines Teilchens, das die Weltlinie $\vec{w}(t) = \vec{w}(0) + \vec{v}\,t$ gleichförmig durchläuft, zeigt zur Zeit $t$ am Ort $\vec{x}$ in Richtung $\vec{x} - \vec{w}(t) = r(t)\,\vec{e}(t)$ vom augenblicklichen, nicht vom retardierten Ort des Teilchens $\vec{w}(t)$ zu $\vec{x}$. Das Feld ist nicht radialsymmetrisch, sondern hängt vom Winkel $\theta$ zwischen $\vec{v}$ und $\vec{e}$ ab. In Bewegungsrichtung ist es um $(1-v^2)$ schwächer als das elektrische Feld eines gleichzeitig am gleichen Ort ruhenden Teilchens, quer dazu um einen Faktor $1/\sqrt{1-v^2}$ stärker, ähnlich einem Pfannkuchen, zu dem man eine Kugel ausgewalzt hat.

Das Magnetfeld der gleichförmig bewegten Ladung ist gemäß (23.57, 23.58) senkrecht auf der Geschwindigkeit $\vec{v}$ und der Richtung $\vec{e}$ zu ihrem augenblicklichen Ort, also axialsymmetrisch um die Achse $\vec{v}$,

$$\vec{B}' = \vec{v} \times \vec{E}'\ . \tag{23.61}$$

## Kovarianz des retardierten Potentials und des Wellenpakets

Bei zeitrichtungstreuen Lorentztransformationen ist das retardierte Potential einer transformierten Quelle das Transformierte des retardierten Potentials der Quelle und transformierte Amplituden eines Wellenpakets ergeben das transformierte Wellenpaket.

Um dies zu zeigen, ersetzen wir im Integral

$$f(t, \vec{x}) = \int \mathrm{d}^3 y\, \frac{g(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}\ , \tag{23.62}$$

das bis auf einen Faktor das retardierte Potential einer Inhomogenität $g$ ergibt, die Integrationsvariablen $\vec{y}$ durch $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$ und setzen $z^0 = \sqrt{\vec{z}^2}$. Dann ist $\vec{y} = \vec{x} - \vec{z}$ und $t - |\vec{x} - \vec{y}| = x^0 - z^0$, und das Integral erstreckt sich über die drei Koordinaten $(z^1, z^2, z^3)$ der Punkte des Vorwärtslichtkegels des Ursprungs, $z^2 = (z^0)^2 - (\vec{z})^2 = 0$, $z^0 = \sqrt{(\vec{z})^2}$,

$$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, g(x - z)\ . \tag{23.63}$$

Wir betrachten allgemeiner Integrale über die Massenschale $z^2 = (z^0)^2 - (\vec{z})^2 = m^2$, $z^0 = \sqrt{m^2 + \vec{z}^2} > 0$, das retardierte Potential ist der Spezialfall $m = 0$. Da sich das $\mathrm{d}^3z$-Integral, anders als beispielsweise (21.72), über $\mathbb{R}^3$ erstreckt, ist der Integrationsbereich invariant unter Lorentztransformationen.

Daß der Zusammenhang von $f$ und $g$ Poincaré-invariant ist, ist für Translationen $g'(x) = g(x-a)$ offensichtlich, denn

$$\int \frac{d^3z}{z^0}\, g'(x-z) = \int \frac{d^3z}{z^0}\, g(x-z-a) = f(x-a) = f'(x)\ . \tag{23.64}$$

Ebenso einfach wirken räumliche Drehungen $g'(x) = g(x^0, D^{-1}\vec{x})$. Wenn man über die gedrehten Variable $\vec{u} = D^{-1}\vec{z}$ integriert und $d^3z = d^3u$ und $u^0 = \sqrt{m^2+\vec{u}^2} = z^0 = \sqrt{m^2+\vec{z}^2}$ beachtet (Drehungen haben Determinanten von Betrag 1 und lassen Längenquadrate invariant), so gilt

$$\int \frac{d^3z}{z^0}\, g(x^0-z^0, D^{-1}(\vec{x}-\vec{z})) = \int \frac{d^3u}{u^0}\, g(x^0-u^0, D^{-1}(\vec{x})-\vec{u}) = f(x^0, D^{-1}\vec{x}) = f'(x)\ . \tag{23.65}$$

Das Maß $d^3z/z^0$ ist unter allen zeitrichtungstreuen Lorentztransformationen invariant. Das brauchen wir nur für einen Schub (Boost) in $x$-Richtung zeigen (6.21), denn jede zeitrichtungstreue Lorentztransformation kann als solch ein Schub geschrieben werden (24.110), dem eine Drehung vorangeht und dem eine weitere Drehung nachfolgt.

Der Schub in $x$-Richtung (6.21), angewendet auf den Vierervektor $(\sqrt{m^2+\vec{z}^2}, \vec{z})$, ergibt

$$\begin{aligned} \sqrt{m^2+\vec{z}'^2} &= \frac{\sqrt{m^2+\vec{z}^2} - v\, z_x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\Big(1 - \frac{v\, z_x}{\sqrt{m^2+\vec{z}^2}}\Big)\sqrt{m^2+\vec{z}^2}\ , \\ z'_x &= \frac{z_x - v\sqrt{m^2+\vec{z}^2}}{\sqrt{1-v^2}}\ , \quad z'_y = z_y\ , \quad z'_z = z_z\ , \end{aligned} \tag{23.66}$$

die Determinante der $3\times 3$ Jacobimatrix $J$, $J^i{}_j = \partial z'^i/\partial z^j$, ist

$$\det J = \frac{\partial z'_x}{\partial z_x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\Big(1 - \frac{v\, z_x}{\sqrt{m^2+\vec{z}^2}}\Big) = \frac{\sqrt{m^2+\vec{z}'^2}}{\sqrt{m^2+\vec{z}^2}}\ . \tag{23.67}$$

Zusammengenommen ist für jeden Wert von $m^2 \geq 0$ das Maß $d^3k/\sqrt{m^2+\vec{k}^2}$ Lorentz-invariant,

$$\frac{d^3z'}{\sqrt{m^2+\vec{z}'^2}} = \frac{d^3z}{\sqrt{m^2+\vec{z}'^2}}\,\big|\det J\big| = \frac{d^3z}{\sqrt{m^2+\vec{z}^2}}\ . \tag{23.68}$$

Nach Wechsel und Umbenennung der Integrationsvariablen zeigt sich, daß die Lorentztransformierte Quelle das Lorentztransformierte retardierte Potential erzeugt,

$$\int \frac{d^3z}{z^0}\, g(\Lambda^{-1}(x-z)) = \int \frac{d^3z'}{z'^0}\, g(\Lambda^{-1}x - z') = \int \frac{d^3z}{z^0}\, g(\Lambda^{-1}x - z) = f(\Lambda^{-1}x) = f'(x)\ . \tag{23.69}$$

Bei den Lösungen der homogenen Maxwellgleichungen, den Wellenpaketen (21.50)

$$A^m(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2k^0}\Big(e^{-ik\cdot x}\, a^m(k) + e^{ik\cdot x}\, a^{m*}(k)\Big)_{|_{k^0=|\vec{k}|}}\ , \tag{23.70}$$

gehören zum Lorentztransformierten Feld $A'^m(x) = \Lambda^m{}_n A^n(\Lambda^{-1}x)$ die folgendermaßen transformierten Amplituden: Das Skalarprodukt $k \cdot \Lambda^{-1}x$ ist Lorentzinvariant,

$$k \cdot (\Lambda^{-1}x) = (\Lambda k) \cdot (\Lambda\Lambda^{-1}x) = (\Lambda k) \cdot x \ . \tag{23.71}$$

Verwenden wir die transformierten Integrationsvariablen $\vec{k}'$, die räumlichen Komponenten von $k' = \Lambda k$, so ist das Maß $\mathrm{d}^3k/k^0 = \mathrm{d}^3k'/k^{0\prime}$ Lorentzinvariant, das Argument der Amplituden $a^n(k)$ und $a^{n*}(k)$ ist $k = \Lambda^{-1}k'$. Also ist

$$A'^m(x) = \Lambda^m{}_n \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{2k'^0} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k'\cdot x}\, a^n(\Lambda^{-1}k') + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k'\cdot x}\, a^{n*}(\Lambda^{-1}k')\right)_{|_{k'^0=|\vec{k}'|}} \tag{23.72}$$

Benennen wir $k'$ in $k$ um, so zeigt dies, daß zum Lorentztransformierten Feld die transformierten Amplituden

$$a'^m(k) = \Lambda^m{}_n\, a^n(\Lambda^{-1}k) \ , \ a'^{m*}(k) = \Lambda^m{}_n\, a^{n*}(\Lambda^{-1}k) \ . \tag{23.73}$$

gehören. Sie transformieren wie ein Vierervektorfeld auf der Massenschale $m = 0$ der Wellenvektoren $k$.

Bei Translationen um $b$ werden die Amplituden mit der Funktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\cdot b}$ multipliziert,

$$A'^m(x) = A^m(x-b) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2k^0} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot(x-b)}\, a^m(\vec{k}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\cdot(x-b)}\, a^{m*}(\vec{k})\right)_{|_{k^0=|\vec{k}|}} \ ,$$

$$a'^m(\vec{k}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\cdot b}\, a^m(k) \ , \ a'^{m*}(\vec{k}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot b}\, a^{m*}(k) \ . \tag{23.74}$$

Daß die Maxwellgleichungen des Elektrovakuums unter einer größeren Gruppe invariant sind, zeigt die Streckung $x \mapsto x' = \lambda x$ mit transformierten Feldstärken

$$F'_{kl}(x) = \lambda^{-2}\, F_{kl}(\lambda^{-1}x) \ . \tag{23.75}$$

Erfüllt $F_{kl}$ die Maxwellgleichungen $\eta^{mk}\partial_m F_{kl} = j_l$ mit einem Viererstrom $j_l(x)$, so genügt $F'_{kl}$ ebenfalls den Maxwellgleichungen mit einem Viererstrom $j'_l(x) = \lambda^{-3} j_l(\lambda^{-1}x)$,

$$\eta^{mk}\partial_m F'_{kl}(x) = \lambda^{-3}\, \eta^{mk}\partial_m F_{kl}{}_{|_{\lambda^{-1}x}} \ . \tag{23.76}$$

Die gestreckte Ladungsverteilung $\rho'(x) = \lambda^{-3}\rho(\lambda^{-1}x)$ gehört zu unveränderter Gesamtladung,

$$Q' = \int \mathrm{d}^3x\, \rho'(x) = \int \mathrm{d}^3x\, \lambda^{-3}\, \rho(\lambda^{-1}x) \overset{z=\lambda^{-1}x}{=} \int \mathrm{d}^3z\, \rho(z) = Q \ , \tag{23.77}$$

was mit dem nicht in den Maxwellgleichungen enthaltenen Befund verträglich ist, daß es Elektronen und Protonen nur mit einer und keiner anderen Ladung gibt. Aber es gibt nicht Wasserstoffatome in beliebig gestreckter Größe. Demnach bilden Streckungen nicht physikalisch realisierte Sachverhalte auf ebenfalls reale Sachverhalte ab. Daß nicht Streckungen und konforme Transformationen, die sich als allgemeinste Symmetrien der Maxwellgleichungen des Elektrovakuums erweisen [7, Kapitel 5.8], sondern nur Poincaré-Transformationen physikalische Abläufe auf physikalische Abläufe abbilden, beruht auf Eigenschaften der Materie, die nicht mit den Maxwellgleichungen erfaßt werden. Insbesondere können die diskreten Massen von Teilchen nicht aus den Maxwellgleichungen folgen, denn mit jeder Lösung der Maxwellgleichung löst sie auch jede beliebig skalierte Lösung.

# 24 Darstellungen

Wirkt auf einem Vektorraum $\mathcal{V}$ eine Darstellung $\mathsf{D}$ einer Gruppe $\mathsf{G}$, so definiert sie die kontragrediente Darstellung $\tilde{\mathsf{D}}$ im Dualraum $\mathcal{V}^*$ durch die Invarianzforderung, daß für jedes $g \in \mathsf{G}$ jeder transformierte Dualvektor $\tilde{\mathsf{D}}_g u$, angewendet auf jeden transformierten Vektor $\mathsf{D}_g \vec{v}$ dasselbe ergibt, wie vor der Transformation

$$\big(\tilde{\mathsf{D}}_g u\big)(\mathsf{D}_g \vec{v}) = u(\vec{v}) \ . \tag{24.1}$$

Die lineare Abbildung $\tilde{\mathsf{D}}_g$ ist hierdurch eindeutig festgelegt, denn

$$u(\vec{v}) = \big(\tilde{\mathsf{D}}_g u\big)(\mathsf{D}_g \vec{v}) \overset{3.51}{=} \big(\mathsf{D}_g^{\mathrm{T}} \tilde{\mathsf{D}}_g u\big)(\vec{v}) \tag{24.2}$$

gilt für alle $\vec{v}$ nur, wenn $\mathsf{D}_g^{\mathrm{T}} \tilde{\mathsf{D}}_g u = u$ ist, was wiederum genau dann für alle $u$ gilt, falls

$$\tilde{\mathsf{D}}_g = \mathsf{D}_g^{\mathrm{T}\,-1} \ . \tag{24.3}$$

Die linearen Abbildungen $\tilde{\mathsf{D}}_g$ stellen $g$ dar,

$$\big(\tilde{\mathsf{D}}_g \tilde{\mathsf{D}}_h u\big)(\mathsf{D}_{g\,h} \vec{v}) = \big(\tilde{\mathsf{D}}_g \tilde{\mathsf{D}}_h u\big)(\mathsf{D}_g \mathsf{D}_h \vec{v}) = \big(\tilde{\mathsf{D}}_h u\big)(\mathsf{D}_h \vec{v}) = u(\vec{v}) \tag{24.4}$$

und da $\tilde{\mathsf{D}}_{g\,h}$ eindeutig ist, stimmt es mit $\tilde{\mathsf{D}}_{g\,h} = \tilde{\mathsf{D}}_g \tilde{\mathsf{D}}_h$ überein. Man kann natürlich die Darstellungseigenschaft auch einfach nachrechnen,

$$\tilde{\mathsf{D}}_{g\,h} = ((\mathsf{D}_{g\,h})^{\mathrm{T}})^{-1} = ((\mathsf{D}_g \mathsf{D}_h)^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathsf{D}_h^{\mathrm{T}} \mathsf{D}_g^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathsf{D}_g^{\mathrm{T}})^{-1} (\mathsf{D}_h^{\mathrm{T}})^{-1} = \tilde{\mathsf{D}}_g \tilde{\mathsf{D}}_h \ . \tag{24.5}$$

Transformiert ein Vektorraum $\mathcal{V}$ unter einer Darstellung $\mathsf{D}$, so definieren wir, daß der Dualraum unter der kontragredienten Transformation $\tilde{\mathsf{D}} = \mathsf{D}^{\mathrm{T}\,-1}$ transformiert.

Dann unterscheidet die Stellung der Indizes nicht nur zwischen Vektorkomponenten mit oberen Indizes und Dualvektorkomponenten mit unteren Indizes, sondern unterscheidet auch das Transformationsgesetz. Transformierte Vektoren $\vec{v}' = \mathsf{D}_g \vec{v}$ und transformierte Dualvektoren $u' = \tilde{\mathsf{D}}_g u$ haben Komponenten

$$v'^{\,i} = \mathsf{D}^i{}_j \, v^j \ , \quad u'_i = \mathsf{D}^{\mathrm{T}\,-1}{}_i{}^j \, u_j \ . \tag{24.6}$$

Im Formelbild treten die Indizes entweder nur als Summationsindexpaar eines oberen und eines unteren Indexes auf oder als einzelner Index, der in jedem Term in derselben Indexstellung erscheint.

Der Übersichtlichkeit wegen erlauben wir uns, das $g$ bei $\mathsf{D}_g$ wegzulassen, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, ob wir von der Darstellung $\mathsf{D}$ sprechen, die die Gruppe

$\mathsf{G}$ in die lineare Gruppe $\mathsf{GL}(n)$ abbildet, oder von der Darstellungsmatrix $\mathsf{D}_g$ eines Gruppenelementes, die einen Vektorraum $\mathcal{V}$ auf sich abbildet.

Wenn $\mathsf{D}_g$ Darstellungsmatrizen sind, dann sind nicht nur $\tilde{\mathsf{D}}_g = \mathsf{D}_g^{\mathrm{T}\,-1}$, sondern auch die komplex konjugierten Matrizen $\mathsf{D}_g^*$, Darstellungsmatrizen derselben Dimension, denn die Darstellungseigenschaft $\mathsf{D}_g^*\,\mathsf{D}_h^* = (\mathsf{D}_g\,\mathsf{D}_h)^* = \mathsf{D}_{g\,h}{}^*$ ist erfüllt.

Die Komponenten von Vektoren $\vec{w}$ eines Vektorraumes $\bar{\mathcal{V}}$, in dem die Gruppe $\mathsf{G}$ durch $\mathsf{D}^*$ dargestellt ist, bezeichnen wir mit gequerten Indizes, $\vec{w} = \vec{n}_{\bar{\imath}}\,w^{\bar{\imath}}$, entsprechend die Komponenten von dazu dualen Vektoren mit $x_{\bar{\jmath}} = x(\vec{n}_{\bar{\jmath}})$. In dieser Notation haben die Matrizen und die transformierten Vektoren die Komponenten

$$\bar{\mathsf{D}}^{\bar{\imath}}{}_{\bar{\jmath}} = (\mathsf{D}^i{}_j)^*\ , \quad w'^{\bar{\imath}} = \bar{\mathsf{D}}^{\bar{\imath}}{}_{\bar{\jmath}}\,w^{\bar{\jmath}}\ , \quad x'_{\bar{\imath}} = \bar{\mathsf{D}}^{\mathrm{T}\,-1}{}_{\bar{\imath}}{}^{\bar{\jmath}}\,x_{\bar{\jmath}}\ . \tag{24.7}$$

Insbesondere bei mit griechischen Buchstaben bezeichneten Indizes findet sich auch die Notation, den Index mit einem Punkt zu versehen, $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$, um am Indexbild klarzumachen, daß es sich um die Komponenten eines Vektors handelt, auf den die konjugiert komplexe Darstellung wirkt. Diese Notation verbietet sich aber bei den lateinischen Buchstaben wie $i$ und $j$.

Transformiert ein Vektor unter der Darstellung $\mathsf{D}$, so bezeichnen wir seine Komponenten mit einem oberen Index, transformiert er unter $\mathsf{D}^{\mathrm{T}\,-1}$, so schreiben wir den Index unten. Zum komplex konjugierten Transformationsgesetz gehört ein gequerter oder gepunkteter Index.

Der erste Index der Matrixelemente $\mathsf{D}^i{}_j$ der Transformationsmatrix bezeichnet die Zeile, der zweite die Spalte. Dabei schreiben wir den ersten Index von $\mathsf{D}$ nach oben. Er steht dann in derselben Höhe wie der Index der Komponente des transformierten Vektors. Die Matrix $\mathsf{D}^{-1}$ ist wie $\mathsf{D}$ und die $\mathbf{1}$-Matrix ein Element der Matrixgruppe $\mathsf{D}(\mathsf{G})$. Ihre Matrixelemente werden mit demselben Indexbild geschrieben

$$\mathsf{D}^i{}_j\,(\mathsf{D}^{-1})^j{}_k = \delta^i{}_k\ . \tag{24.8}$$

Die Matrixelemente der transponierten Matrix erhält man durch Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex. Es bezeichnet der erste Index die Zeile, also entsteht das Indexbild

$$(\mathsf{D}^{\mathrm{T}\,-1})_i{}^j = (\mathsf{D}^{-1})^j{}_i\ , \tag{24.9}$$

das zur Konvention paßt, daß im Transformationsgesetz von Komponenten jeweils der erste Index von $\mathsf{D}$ oder $\mathsf{D}^{\mathrm{T}\,-1}$ die transformierte Komponente bezeichnet und der zweite Index zu einem Indexpaar gehört, von denen einer oben und einer unten steht und über das summiert wird.

Die Summe $u_i v^i$ von Produkten der Vektorkomponenten mit den Komponenten eines Dualvektors ist invariant

$$u'_i v'^i = \mathsf{D}^{\mathrm{T}\,-1}{}_i{}^j\,u_j\,\mathsf{D}^i{}_k\,v^k = u_j\,\mathsf{D}^{-1j}{}_i\,\mathsf{D}^i{}_k\,v^k = u_j\,\delta^j{}_k\,v^k = u_j\,v^j\ . \tag{24.10}$$

Für diesen Sachverhalt, der unserer Definition des kontragredienten Transformationsgesetzes (24.3) zugrunde lag, gibt es umgangssprachliche, anschauliche Formulierungen: ein unterer Index frißt, was die Transformation betrifft, in der Summe einen oberen

Index auf, die Summe eines oberen mit einem unteren Index transformiert nicht, das Summationsindexpaar ist stumm.

Die vier Darstellungen

$$\mathsf{D}\ , \quad \mathsf{D}^{\mathrm{T}\,-1}\ , \quad \mathsf{D}^*\ , \quad \mathsf{D}^{*\,\mathrm{T}\,-1} \tag{24.11}$$

können auf unterschiedliche Weise miteinander zusammenhängen. So gilt für jede Darstellung auf einem reellen Vektorraum

$$\mathsf{D}\text{ reell:} \qquad \mathsf{D}^* = \mathsf{D}\ . \tag{24.12}$$

Stimmen $\mathsf{D}$ und $\mathsf{D}^{*\,\mathrm{T}\,-1}$ überein, also die inverse Matrix $\mathsf{D}^{-1}$ mit der hermitesch adjungierten Matrix $\mathsf{D}^{*\,\mathrm{T}}$, so heißt die Darstellung unitär,

$$\mathsf{D}\text{ unitär:} \qquad \mathsf{D}^{\dagger} = \mathsf{D}^{-1}\ . \tag{24.13}$$

Auch wenn in der Quantenmechanik unitäre Transformationen besonders wichtig sind, sind nicht alle in der Physik wichtigen Darstellungen unitär, zum Beispiel kann es, wie wir nur andeuten, keine treue,[1] endlichdimensionale, unitäre Darstellung von Lorentztransformationen geben, denn für jedes $n$ ist die Gruppe $\mathrm{U}(n)$ der unitären Transformationen eines $n$-dimensionalen Vektorraumes kompakt, die Lorentzgruppe hingegen ist es nicht.

Ist die Darstellung reell und unitär, dann handelt es sich um orthogonale Darstellungsmatrizen $\mathsf{D}^{\mathrm{T}} = \mathsf{D}^{-1}$, und alle vier Darstellungen $\mathsf{D}, \mathsf{D}^{\mathrm{T}\,-1}, \mathsf{D}^*, \mathsf{D}^{*\,\mathrm{T}\,-1}$ stimmen überein. Dann braucht man nicht das unterschiedliche Transformationsverhalten durch die Indexstellung und Indexschreibung, durch obere und untere, gequerte und ungequerte Indizes, zu unterscheiden.

## Orthogonale Darstellungen

Als nicht wesentlich verschieden, als äquivalent, sehen wir Darstellungen $\mathsf{D}$ und $\mathsf{D}'$ an, wenn sie sich nur durch einen Basiswechsel $\mathsf{B}$ unterscheiden (3.38), wenn also mit einer linearen Abbildung $\mathsf{B}$ für alle $g \in G$ gilt

$$\mathsf{D}'_g = \mathsf{B}\,\mathsf{D}_g\,\mathsf{B}^{-1}\ . \tag{24.14}$$

Sind $\mathsf{D}$ und $\mathsf{B}$ nicht reell, so fassen wir die komplexen Matrizen als reelle Matrizen in einem rellen Raum doppelter Dimension auf. Wir unterstellen so, ohne die Gültigkeit unserer Überlegungen einzuschränken, daß $\mathsf{B}$ und $\mathsf{D}$ reell sind.

Ist die kontragrediente Darstellung $\mathsf{D}^{\mathrm{T}\,-1}$ zur ursprünglichen Darstellung $\mathsf{D}$ äquivalent, so gilt für alle $g \in G$

$$\mathsf{D} = \mathsf{B}^{-1}\,\mathsf{D}^{\mathrm{T}\,-1}\mathsf{B} \tag{24.15}$$

und nach Multiplikation von links mit $\mathsf{D}^{\mathrm{T}}\,\mathsf{B}$

$$\mathsf{D}^{\mathrm{T}}\mathsf{B}\,\mathsf{D} = \mathsf{B}\ , \quad {\mathsf{D}^{\mathrm{T}}}_i{}^k\mathsf{B}_{kl}\,\mathsf{D}^l{}_j = \mathsf{B}_{ij}\ . \tag{24.16}$$

[1] Treu ist eine Darstellung, die verschiedenen Gruppenelementen verschiedene Darstellungsmatrizen zuordnet.

Dies heißt, daß $B$ eine reelle Bilinearform $B(x,y) = B_{ij}\, x^i\, y^j$ definiert und daß die Darstellungsmatrizen Transformationen $x^i \mapsto D^i{}_k\, x^k$, $y^j \mapsto D^j{}_l\, y^l$ bewirken, die $B$ invariant lassen,

$$\begin{aligned} B(Dx, Dy) &= B_{ij}\, D^i{}_k\, x^k\, D^j{}_l\, y^l = (D^i{}_k\, B_{ij}\, D^j{}_l)\, x^k\, y^l \\ &= (D^T B\, D)_{kl}\, x^k\, y^l = B_{kl}\, x^k\, y^l = B(x,y)\ . \end{aligned} \tag{24.17}$$

Die Darstellung $D$ bildet, wenn sie äquivalent zur kontragredienten Darstellung ist, die Gruppe $G$ nicht irgendwie in $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ ab, sondern in die Untergruppe der Transformationen, die eine Bilinearform invariant lassen. Die Bilinearform ist nicht entartet (Es verschwindet $B(x,y)$ für alle $y$ nur, falls $x = 0$.), denn $B^{-1}$ existiert.

Für jede äquivalente Darstellung $D' = C^{-1}\, D\, C$ gilt

$$D' = B'^{-1}\, (D')^{T\,-1} B' \text{ mit } B' = C^T\, B\, C\ . \tag{24.18}$$

Es ändert sich also die Matrix $B$, die die Äquivalenztransformation bewirkt, bei beliebigem Basiswechsel wie eine Bilinearform. Mit den Transformationen $C$, die $B$ nicht invariant lassen, können wir $B$ auf eine Standardform wie zum Beispiel (24.20) oder (24.27) bringen, die Darstellungsmatrizen $D$ hingegen lassen $B$ invariant.

Die Darstellungsmatrizen lassen den symmetrischen Anteil $S = (B + B^T)/2 = S^T$ und den antisymmetrischen Anteil $A = (B - B^T)/2 = -A^T$ der Bilinearform $B = S + A$ getrennt invariant: aus $D^T B D = D$ (24.16) folgt durch Transponieren $D^T B^T D = D$ (3.54). Addieren und Subtrahieren ergibt

$$D^T(B \pm B^T)\, D = (B \pm B^T)\ , \quad D^T S\, D = S\ , \quad D^T A\, D = A\ . \tag{24.19}$$

Also definiert $S$ eine reelle, symmetrische Form, die, wie auf Seite 108 gezeigt, reell diagonalisierbar ist. Wählt man die Länge der Basisvektoren geeignet, so kann man die Zahlenwerte der Diagonalelemente, wenn $S$ nichtentartet ist, auf 1 oder $-1$ normieren: es gibt eine zu $S$ gehörige Orthonormalbasis. In dieser Basis ist $S$ die Metrik $\eta$ in einer Raumzeit $\mathbb{R}^{p,q}$ mit $p$ zeitartigen Koordinaten und $q = d - p$ raumartigen Koordinaten

$$\eta_{mn} = \begin{cases} \phantom{-}1 & \text{falls} \quad m = n \in \{1 \ldots p\} \\ -1 & \text{falls} \quad m = n \in \{p+1 \ldots d\} \\ \phantom{-}0 & \text{falls} \quad m \neq n \end{cases}\ . \tag{24.20}$$

Die Bedingung $D^T \eta D = \eta$ besagt, daß die Matrizen $D$ Lorentztransformationen

$$\Lambda : x \mapsto x' = \Lambda x\ , \quad x'^m = \Lambda^m{}_r\, x^r \tag{24.21}$$

sind, die das Längenquadrat $x \cdot x = \eta_{mn}\, x^m\, x^n$ des Minkowskiraumes $\mathbb{R}^{p,q}$ invariant lassen,

$$x' \cdot x' = \eta_{mn} \Lambda^m{}_r\, x^r\, \Lambda^n{}_s\, x^s = x \cdot x\ , \quad \eta_{mn} \Lambda^m{}_r\, \Lambda^n{}_s = \eta_{rs}\ , \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\ . \tag{24.22}$$

Die Darstellung $D : G \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ ist der kontragredienten Darstellung $D^{T\,-1}$ genau dann mit einer symmetrischen, reellen Matrix $S$ äquivalent, wenn die Darstellungsmatrizen in geeigneter Basis Lorentztransformationen $\Lambda \in O(p,q)$ eines Minkowskiraumes

$\mathbb{R}^{p,q}$ sind. Ist $S$ positiv oder negativ definit, so bildet die Darstellung $D$ die Gruppe $G$ in die Gruppe der orthogonalen Transformationen, $O(d)$, das ist die Gruppe der Drehspiegelungen, ab.

In einem Vektorraum mit einem Skalarprodukt definiert jeder Vektor $x$ einen Vektor $\tilde{x}$ aus dem Dualraum, der jeden Vektor $y$ auf sein Skalarprodukt mit $x$ abbildet, $\tilde{x}(y) = x \cdot y = (x^n \eta_{nm})\, y^m = \tilde{x}_m\, y^m$. Die Komponenten von $x$ und $\tilde{x}$ hängen, da das Skalarprodukt nicht entartet ist, invertierbar miteinander zusammen,

$$\tilde{x}_m = x^n \eta_{nm} \ , \quad x^n = \tilde{x}_l\, \eta^{-1\, ln} \ . \tag{24.23}$$

Um Schreibarbeit zu sparen, läßt man das Symbol ˜ weg und entnimmt dem Indexbild, nämlich dem untenstehenden Index, daß es sich um die Komponenten $x_m$ des zu $x$ gehörigen Dualvektors handelt. Bei der zu $\eta$ inversen Matrix schreibt man den Exponenten nicht aus: man entnimmt der Indexstellung, daß es sich bei dem $\eta$ mit zwei oberen Indizes um die Komponenten der zu $\eta$ inversen Matrix handelt,

$$x_m = x^n \eta_{nm} \ , \quad x^n = x_l\, \eta^{ln} \ , \quad \eta^{ln}\eta_{nm} = \delta^l{}_m \ . \tag{24.24}$$

Diese abkürzende Schreibweise nennt man Hoch- und Runterziehen von Indizes.

Es transformiert $x_m = x^n \eta_{nm}$, wie das Indexbild angibt, als Komponenten eines Dualvektors, wenn sich die Komponenten $x^n$ wie die eines Vektors ändern. In Matrixschreibweise gilt nämlich wegen $\Lambda^{T\,-1} = \eta\, \Lambda\, \eta^{-1}$ (23.50)

$$\Lambda^{T\,-1}(\eta\, x) = \eta\, (\Lambda\, x) \ . \tag{24.25}$$

Ob man erst den Index herunterzieht und dann transformiert oder umgekehrt ist gleich.

Transponiert man $\Lambda^{T\,-1} = \eta\, \Lambda\, \eta^{-1}$ (23.50), so erhält man wegen $\eta^T = \eta$ mit hoch- und runtergezogenen Indizes

$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta \ , \quad \Lambda^{-1\, m}{}_n = \eta^{mk} \Lambda^T{}_k{}^l\, \eta_{ln} = \Lambda^{T m}{}_n \ . \tag{24.26}$$

Die Notation täuscht bei unaufmerksamem Lesen $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$ vor. Es sind aber $\Lambda^{T m}{}_n$ nicht die Matrixelemente der transponierten Matrix: die haben das Indexbild $\Lambda^T{}_n{}^m$, sondern die Matrixelemente von $\eta^{-1}\Lambda^T\eta$, bei denen ein Index hoch- und der andere runtergezogen worden ist.

## Symplektische Transformationen

Ist die kontragrediente Darstellung $D^{T\,-1}$ zur Darstellung $D$ mit einer reellen, antisymmetrischen Matrix $A = -A^T$ äquivalent, $D^{T\,-1} = ADA^{-1}$, dann ist $\det A \neq 0$ und man kann $A$ durch eine reelle Basistransformation $C$ auf die Form $C^T A\, C = \jmath$ bringen,

$$\jmath = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \end{pmatrix} \ , \quad \jmath^2 = -1 \ . \tag{24.27}$$

Solch eine antisymmetrische $2N \times 2N$-Matrix $\jmath$ tritt als Wert der Poisson-Klammer der Phasenraumkoordinaten in der Hamiltonschen Mechanik von $N$ Freiheitsgraden auf.

Die Herleitung, warum $A$ von dieser Form ist, sei hier nur angedeutet: man geht wie auf Seite 108 vor, schließt, daß die Eigenwerte der antisymmetrischen Form rein imaginär sind, $\lambda = \mathrm{i}\,l$, und daß demnach die Eigenvektoren komplexe Linearkombinationen $u + \mathrm{i}\,v$ reeller Vektoren $u$ und $v$ sind. Die Eigenwertgleichung $A(u + \mathrm{i}\,v) = \mathrm{i}\,l\,(u + \mathrm{i}\,v)$, in Real- und Imaginärteil getrennt, besagt $Au = -lv$ und $Av = lu$. Wie bei symmetrischen Matrizen bildet $A$ den Raum $\mathcal{V}_\perp = \{z : z^{\mathrm{T}}Au = 0 = z^{\mathrm{T}}Av\}$ der auf $u$ und $v$ bezüglich $A$ senkrecht stehenden Vektoren auf sich ab. Schließlich absorbiert man den Zahlenwert von $l$, der nicht verschwindet, da $A^{-1}$ existiert, in Basisvektoren $e_1 = u$ und $e_{1+N} = v/l$.

Formuliert man mit dem derart auf Standardform $\jmath$ gebrachten $A$ die Äquivalenz der Darstellung $D$ zur kontragredienten Darstellung, so besagt

$$D^{\mathrm{T}} \jmath\, D = \jmath\ , \tag{24.28}$$

daß jede Darstellungsmatrix eine symplektische Transformation bewirkt. Die Gruppe der symplektischen Transformationen $\mathrm{Sp}(2N)$ besteht aus Transformationen

$$x'^{\,n} = S^n{}_m\, x^m\ , \tag{24.29}$$

die die antisymmetrische Bilinearform $\langle x, y\rangle = x^m y^n \jmath_{mn}$ mit $\jmath_{mn} = \delta_{m+N,n} - \delta_{m,n+N}$ in einem reellen, $2N$-dimensionalen Vektorraum invariant lassen,

$$\langle x', y'\rangle = \jmath_{mn}\, S^m{}_r\, x^r\, S^n{}_s\, y^s = \jmath_{rs}\, x^r\, y^s\ , \quad \jmath_{mn}\, S^m{}_r\, S^n{}_s = \jmath_{rs}\ , \quad S^{\mathrm{T}} \jmath\, S = \jmath\ . \tag{24.30}$$

Die Darstellung $D : G \to \mathrm{GL}(2N, \mathbb{R})$ ist der kontragredienten Darstellung $D^{\mathrm{T}\,-1}$ genau dann mit einer antisymmetrischen, reellen Matrix $A$ äquivalent, wenn in geeigneter Basis die Darstellungsmatrizen symplektische Transformationen $S$ aus $\mathrm{Sp}(2N)$ sind.

In einem Vektorraum mit einer antisymmetrischen Bilinearform $\langle x, y\rangle = x^m\, y^n\, \jmath_{mn}$ definiert jeder Vektor $x$ einen Vektor $\tilde{x}$ aus dem Dualraum, der jeden Vektor $y$ auf die reelle Zahl $\tilde{x}(y) = \langle x, y\rangle = x^m\, \jmath_{mn}\, y^n = \tilde{x}_n\, y^n$ abbildet. Die Komponenten von $x$ und $\tilde{x}$ hängen, da die antisymmetrische Form $\langle\,,\rangle$ nicht entartet ist, invertierbar miteinander zusammen,

$$\tilde{x}_n = x^m\, \jmath_{mn}\ , \quad x^n = \tilde{x}_l\, \jmath^{-1\,ln}\ . \tag{24.31}$$

Um Schreibarbeit zu sparen, läßt man das Symbol ˜ weg und entnimmt dem Indexbild, nämlich dem untenstehenden Index, daß es sich bei $x_m$ um die Komponenten des zu $x$ gehörigen Dualvektors handelt. Bei der zu $\jmath$ inversen Matrix schreibt man den Exponenten nicht aus: man entnimmt der Indexstellung, daß es sich bei dem $\jmath$ mit zwei oberen Indizes um die Komponenten der zu $\jmath$ inversen Matrix handelt,

$$x_n = x^m\, \jmath_{mn}\ , \quad x^m = x_l\, \jmath^{lm}\ , \quad \jmath^{lm} \jmath_{mn} = \delta^l{}_n\ . \tag{24.32}$$

Diese abkürzenden Schreibweise definiert das Hoch- und Runterziehen von Indizes in einem Raum mit nichtentarteter Bilinearform $\jmath$. Da $\jmath$ antisymmetrisch ist, muß man beim Hoch- und Runterziehen und bei einem Indexpaar die Reihenfolge von oberem und unterem Summationsindex beachten, $x_m\, y^m = x^n\, \jmath_{nm}\, y^m = -x^n\, \jmath_{mn}\, y^m = -x^n y_n$.

Da die Bilinearform nach Definition der symplektischen Transformationen invariant unter symplektischen Transformationen ist, gehört zum symplektisch transformierten

Vektor $x$ der Dualvektor $\widetilde{Sx}$, der sich durch die kontragrediente symplektische Transformation im Dualraum aus dem zu $x$ gehörigen Vektor ergibt, $\widetilde{Sx} = S^{T\,-1}\tilde{x}$. Es transformiert $x_m = x^n \jmath_{nm}$, wie das Indexbild angibt, als Komponenten eines Dualvektors, wenn sich die Komponenten $x^n$ wie die eines Vektors ändern. In Matrixschreibweise gilt nämlich

$$S^{T\,-1}(\jmath\, x) = (S^{T\,-1}\jmath\, S^{-1})\, S\, x = \jmath\, (S\, x)\ , \tag{24.33}$$

wobei wir $S^T \jmath\, S = \jmath$ in der von links mit $S^{T\,-1}$ und von rechts mit $S^{-1}$ multiplizierten Form verwendet haben.

## Tensoren, Tensorprodukt

Tensor ist die Sammelbezeichnung für Abbildungen in die reellen (oder komplexen) Zahlen, die von keinem, einem oder mehreren Vektoren linear abhängen.

Entsprechend ist ein Tensorfeld einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ eine lineare Abbildung $T$, die an jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ keinem, einem oder mehreren Vektorfeldern $u, v, \ldots$ einen reellen Funktionswert zuordnet. Für jede reelle Funktion $f$ von $\mathcal{M}$ und für jedes Vektorargument $u$ des Tensorfeldes gilt $T(f\, u, v, \ldots)(p) = f(p)\, T(u, v, \ldots)(p)$.

Beispielsweise ist der Grundstückspreis $P(x, y)$ eines rechteckigen Grundstücks ein Tensor. Er ist linear in den Kanten $x$ und $y$ und vollständig durch den Preis der Einheitsfläche bestimmt, $P(x, y) = x\, y\, P(1, 1)$. Auch das Skalarprodukt $u \cdot w$ zweier Vektoren $u$ und $v$ hängt linear von $u$ und linear von $v$ ab. Es definiert einen Tensor, die Metrik

$$g(u, v) = u \cdot v\ . \tag{24.34}$$

Ebenso ist in drei Dimensionen das Volumen eines Tetraeders mit Kanten $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear in den drei Vektoren

$$V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \epsilon_{ijk}\, u^i\, v^j\, w^k\, V(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\ . \tag{24.35}$$

Tensorfelder, die von Vektorfeldern und Dualvektorfeldern abhängen, sind beispielsweise die Torsion $T(u, v, z)$ und die Krümmung $R(u, v, w, z)$, die bei Parallelverschiebung in gekrümmten Räumen auftreten und die an jedem Punkt $p$ angeben, um wieviel ein kleines Parallelogramm sich zu schließen fehlt und um wieviel verdreht ein Vektor nach Parallelverschiebung um ein kleines Parallelogramm endet [7, Anhang C].

Als einen Tensor über den Vektorräumen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ bezeichnen wir jede Abbildung

$$T : \begin{cases} \mathcal{U} \times \mathcal{V} & \to \mathbb{R} \\ u \quad\ v & \mapsto T(u, v) \end{cases} \ . \tag{24.36}$$

die in beiden Argumenten linear ist. Es gilt also für jeden Tensor $T$ und für alle Zahlen $a, b$ und für alle Vektoren $u, u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ und für alle Vektoren $v, v_1, v_2 \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned} T(a\, u_1 + b\, u_2, v) &= a\, T(u_1, v) + b\, T(u_2, v)\ , \\ T(u, a\, v_1 + b\, v_2) &= a\, T(u, v_1) + b\, T(u, v_2)\ . \end{aligned} \tag{24.37}$$

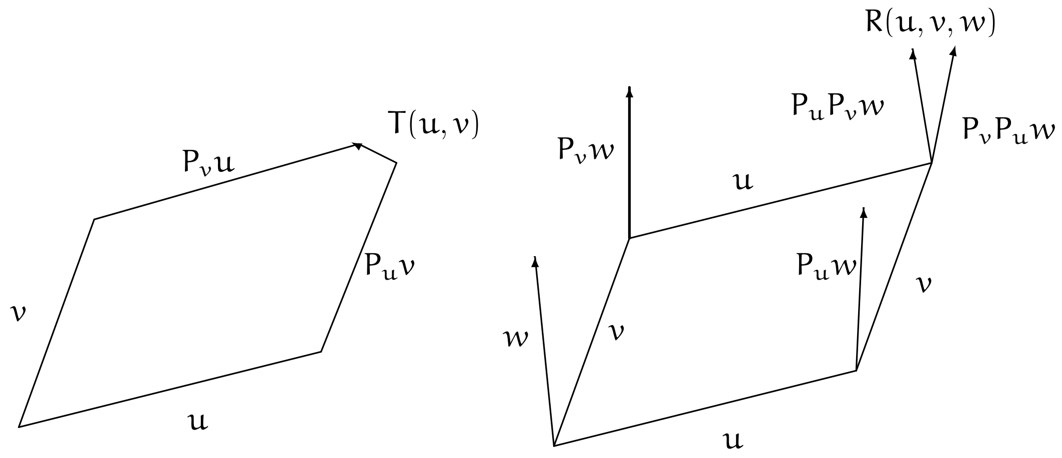



Abbildung 24.1: Torsion und Krümmung

Seien $e_1, e_2, \ldots$ und $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots$ je eine Basis von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ und die Vektoren $u = e_i\, u^i \in \mathcal{U}$ und $v = \hat{e}_j\, v^j \in \mathcal{V}$ in diesen Basen entwickelt. Dann ist $T(u, v)$ wegen der Bilinearität eine Doppelsumme

$$T(u, v) = T(e_i\, u^i, \hat{e}_j\, v^j) = T_{ij}\, u^i\, v^j \ , \ T_{ij} = T(e_i, \hat{e}_j) \tag{24.38}$$

von Produkten der Komponenten von $u$ und $v$ mit den Komponenten von $T$.

Da man lineare Abbildungen addieren und vervielfältigen kann, bildet die Menge der Tensoren über $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ einen Vektorraum, den Vektorraum $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ der bilinearen Abbildungen von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$. Der Dualraum von $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ ist das Tensorprodukt $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Wir bestimmen die Eigenschaften von $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ aus den Eigenschaften der linearen Abbildungen $T$ wie aus einem Spiegelbild.

Wir können jeden Tensor über $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ für jedes $v$ als Tensor über $\mathcal{U}$ auffassen und für jedes $u$ als einen Tensor über $\mathcal{V}$. Dual zu den Tensoren über einem Vektorraum ist der Vektorraum selbst, wir können also $u$ als lineare Abbildung der Tensoren über $\mathcal{U}$ auffassen und $v$ als lineare Abbildung von Tensoren über $\mathcal{V}$. Das Tensorprodukt $\otimes$ bildet Paare $(u, v)$ solcher linearen Abbildungen auf die lineare Abbildung $u \otimes v$ ab, die Tensoren über $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ die Zahl

$$(u \otimes v)\,(T) = T(u, v) \tag{24.39}$$

zuordnet. Weil $T$ im linken Argument linear ist (24.37), gilt für jeden Tensor $T$ und für alle Zahlen $a, b$ und für alle Vektoren $u, u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ und für alle Vektoren $v, v_1, v_2 \in \mathcal{V}$

$$((a\, u_1 + b\, u_2) \otimes v)\,(T) = (a\, u_1 \otimes v)\,(T) + (b\, u_2 \otimes v)\,(T) \ , \tag{24.40}$$

also das Distributivgesetz für den linken Faktor, entsprechend folgt es für den rechten,

$$(a\, u_1 + b\, u_2) \otimes v = a\, u_1 \otimes v + b\, u_2 \otimes v \ , \tag{24.41}$$

$$u \otimes (a\, v_1 + b\, v_2) = a\, u \otimes v_1 + b\, u \otimes v_2 \ , \tag{24.42}$$

also insbesondere

$$(a\,u) \otimes v = u \otimes (a\,v) = a\,(u \otimes v)\ . \tag{24.43}$$

Dabei sind die Summe und das Vielfache von Tensorprodukten als Summe und Vielfache von linearen Abbildungen definiert, die Tensoren $T$ in die reellen Zahlen abbilden.

Zum Vergleich: Im kartesischen Produkt $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ ist $(2u, v) \neq (u, 2v)$ und Addition und das Vielfache sind nicht definiert.

Weil das Tensorprodukt $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ dual zu den Tensoren über $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ sind, können Tensoren umgekehrt auch als lineare Abbildungen von $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ gedeutet werden, die auf Tensorprodukten gemäß

$$T(u \otimes v) = (u \otimes v)(T) = T(u, v) \tag{24.44}$$

wirken und auf Summen und Vielfachen von Tensorprodukten dadurch erklärt sind, daß sie linear sind,

$$T(a\,u \otimes v + b\,u' \otimes v') = a\,T(u \otimes v) + b\,T(u' \otimes v')\ . \tag{24.45}$$

Streng genommen ist der Tensor, der Linearkombinationen von Produkten $u \otimes v$ linear in die reellen Zahlen abbildet, verschieden von dem Tensor, der von Paaren von Vektoren $(u, v)$ abhängt, denn ihr Definitionsbereich unterscheidet sich. Aber wir identifizieren durch (24.44) das Duale des Dualen Vektorraumes mit dem ursprünglichen Vektorraum der Tensoren.

Das Tensorprodukt ist assoziativ. Sei $\mathcal{W}$ ein dritter Vektorraum und $T$ eine in allen Argumenten lineare Abbildung von $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ in die reellen Zahlen. Für $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$ und $w \in \mathcal{W}$ gilt

$$\begin{aligned} T(u, v, w) &= T(u \otimes v, w) = T((u \otimes v) \otimes w)\ , \\ &= T(u, v \otimes w) = T(u \otimes (v \otimes w))\ . \end{aligned} \tag{24.46}$$

Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen, weil $T$ für jedes $w$ ein Tensor über $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ ist und das zweite gilt für Tensoren über $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$, das dritte Gleichheitszeichen gilt, weil $T$ für jedes $u$ ein Tensor über $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ ist und das letzte Gleichheitszeichen gilt für Tensoren über $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$. Da diese Gleichungen für alle Tensoren $T$ gelten, ist das Tensorprodukt assoziativ und die Klammern sind überflüssig,

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w) = u \otimes v \otimes w\ . \tag{24.47}$$

Sei $(e_1, e_2, \ldots)$ eine Basis von $\mathcal{U}$ und sei ebenso $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots)$ eine Basis von $\mathcal{V}$, dann definiert

$$(e_i \otimes \hat{e}_j)(T) = T(e_i, \hat{e}_j) = T_{ij} \tag{24.48}$$

in dieser Basis die Komponenten von $T$ und zeigt, daß die Tensorprodukte $(e_i \otimes \hat{e}_j)$ linear unabhängig sind: jede Linearkombination $c^{ij} e_i \otimes \hat{e}_j$ mit Koeffizienten $c^{ij}$ verschwindet für alle Tensoren $T$ nur, falls alle Koeffizienten verschwinden,

$$(c^{ij} e_i \otimes \hat{e}_j)(T) = c^{ij}\, T_{ij} = 0\ \forall T\ \Leftrightarrow c^{ij} = 0\ \forall\, i\, j\ . \tag{24.49}$$

Umgekehrt sind alle linearen Abbildungen eines Tensors linear in seinen Komponenten, $L(T) = L^{ij}T_{ij}$, also bilden die Tensorprodukte jeder Basis $e_1, e_2 \ldots$ von $\mathcal{U}$ mit jeder Basis $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots$ von $\mathcal{V}$ eine Basis des Tensorproduktes: die lineare Hülle ihrer Tensorprodukte ist das Tensorprodukt $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$

$$\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} = \{c^{ij} e_i \otimes \hat{e}_j : c^{ij} \in \mathbb{R}\} . \tag{24.50}$$

Insbesondere ist die Dimension des Tensorproduktes zweier Räume gleich dem Produkt der Dimensionen der Faktoren,

$$\dim(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \dim \mathcal{U} \, \dim \mathcal{V} . \tag{24.51}$$

Im Unterschied dazu ist die Dimension der direkten Summe zweier Vektorräume die Summe der Dimensionen der Summanden, $\dim(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V}$.

Man beachte, daß $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ nicht nur aus Tensorprodukten von Vektoren, sondern aus Linearkombinationen von Tensorprodukten besteht. Bei $(a^i e_i) \otimes (b^j \hat{e}_j) = a^i \, b^j \, e_i \otimes \hat{e}_j$ hat die Komponentenmatrix $c^{ij} = a^i \, b^i$ den Rang 1, falls $(a^i e_i) \neq 0$ und $(b^j \hat{e}_j) \neq 0$, gewöhnlich hat aber die Matrix der Koeffizienten von $c^{ij} u_i \otimes v_j$ maximalen Rang.

Das Tensorprodukt ist nicht kommutativ. Selbst wenn die Vektorräume $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ übereinstimmen, besteht zwischen $T(u, v)$ und $T(v, u)$ keine für alle Tensoren $T$ gültige Beziehung.

Es läßt sich allerdings das symmetrische Produkt $\mathcal{V} \vee \mathcal{V}$ und das alternierende Produkt $\mathcal{V} \wedge \mathcal{V}$ zweier gleicher Vektorräume, das dual zu symmetrischen Tensoren, $T(v, w) = T(w, v)$, beziehungsweise zu antisymmetrischen Tensoren, $T(v, w) = -T(w, v)$, ist, durch

$$v \vee w = v \otimes w + w \otimes v \ , \quad v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v \ , \tag{24.52}$$

definieren. Für $k$ Faktoren $\mathcal{V}$ wird es assoziativ und multilinear durch die (vorzeichenbehaftete) Summe über alle Permutationen $\pi$ der $k$ Faktoren definiert,

$$\begin{aligned} v_1 \vee v_2 \vee \ldots \vee v_k &= \sum_{\pi \in S_k} v_{\pi(1)} \otimes v_{\pi(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\pi(k)} \ , \\ v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k &= \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sign}(\pi) \, v_{\pi(1)} \otimes v_{\pi(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\pi(k)} \ . \end{aligned} \tag{24.53}$$

Sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ euklidisch, haben sie also eine Metrik $g_{\mathcal{U}}$ und $g_{\mathcal{V}}$, so definiert

$$g(u \otimes v, u' \otimes v') = g_{\mathcal{U}}(u, u') \, g_{\mathcal{V}}(v, v') \tag{24.54}$$

auf natürliche Art die Metrik des Tensorproduktes $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Die Tensorprodukte zweier Orthonormalbasen sind dann eine Orthonormalbasis des Tensorproduktraumes.

## Tensorprodukt von Darstellungen

Sei $L$ eine lineare Selbstabbildung von $\mathcal{U}$ und $K$ eine lineare Selbstabbildung von $\mathcal{V}$. Beide definieren die natürliche Abbildung $L \times K$, die das kartesische Produkt $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$

durch $(L \times K)(u, v) = (Lu, Kv)$ auf sich abbildet. Ebenso definieren sie auf natürliche Art die lineare Selbstabbildung $L \otimes K$ des Tensorproduktes $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ durch

$$(L \otimes K)\, u \otimes v = (Lu) \otimes (Kv)\ . \tag{24.55}$$

Hierdurch ist die Abbildung $L \otimes K$ schon vollständig festgelegt, denn sie ist linear. Auf einen beliebigen Vektor $N = e_i \otimes \hat{e}_j\, N^{ij} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ wirkt sie gemäß

$$\begin{aligned}(L \otimes K)(e_i \otimes \hat{e}_j\, N^{ij}) &= \big((L \otimes K)(e_i \otimes \hat{e}_j)\big)\, N^{ij} = \big((Le_i) \otimes (K\hat{e}_j)\big)\, N^{ij} \\ &= \big((e_k L^k{}_i) \otimes (\hat{e}_l K^l{}_j)\big)\, N^{ij} = e_k \otimes \hat{e}_l\, L^k{}_i\, N^{ij}\, K^l{}_j = e_k \otimes \hat{e}_l\, N'^{kl}\ ,\end{aligned} \tag{24.56}$$

wobei $N'^{kl} = L^k{}_i\, N^{ij}\, K^l{}_j$ die Komponenten des transformierten Vektors $(L \otimes K)N$ sind. Schreiben wir die Komponenten $N^{ij}$ als Rechteckmatrix $N$, wobei $i$ die Zeile und $j$ die Spalte abzählt, so wirkt $(L \otimes K)$ auf diese Komponentenmatrix durch Multiplikation von links mit der Matrix $L$ und von rechts mit $K^T$,

$$N' = LNK^T\ . \tag{24.57}$$

Sind insbesondere $L$ und $K$ Darstellungsmatrizen $D$ und $\hat{D}$ einer Gruppe, die auf $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ dargestellt ist, so ist $D \otimes \hat{D}$ eine Darstellung. Denn es gilt, je nachdem welche Schreibweise man bevorzugt,

$$\begin{aligned}(D_g \otimes \hat{D}_g)\,(D_h \otimes \hat{D}_h) &= (D_g D_h) \otimes (\hat{D}_g \hat{D}_h) = D_{g\,h} \otimes \hat{D}_{g\,h}\ , \\ N'' = D_g N' \hat{D}_g^T &= D_g D_h N \hat{D}_h^T \hat{D}_g^T = D_{g\,h} N \hat{D}_{g\,h}^T\ .\end{aligned} \tag{24.58}$$

Die bequeme Schreibweise, Elemente des Tensorproduktes durch Rechteckmatrizen darzustellen, auf die Tensorprodukte von linearen Abbildungen von links und transponiert von rechts wirken, versagt bei mehr als zwei Faktoren. Dann muß auf die Indexschreibweise zurückgegriffen werden. In ihr transformieren die Komponenten $N^{ij}$ mit einer Darstellungsmatrix $D$ für den ersten Index $i$, der die Komponenten eines Vektors in $\mathcal{U}$ benennt, und einer Darstellungsmatrix $\hat{D}$ für den zweiten Index $j$, der die Komponenten eines Vektors in $\mathcal{V}$ abzählt,

$$N'^{kl} = D^k{}_i\, \hat{D}^l{}_j\, N^{ij}\ , \quad N' = DN\hat{D}^T\ . \tag{24.59}$$

Ist hierbei $\mathcal{V}$ seinerseits ein Tensorprodukt und $\hat{D}$ das Tensorprodukt von Darstellungen und kontragredienten Darstellungen, so haben die Komponenten mehrere Indizes und transformieren beispielsweise beim Produkt von $s$ Faktoren $\mathcal{V}$ und $r$ Faktoren $\mathcal{V}^*$ mit

$$\begin{aligned}N'^{j_1 \dots j_s}{}_{i_1 \dots i_r} &= D^{j_1}{}_{k_1} \dots D^{j_s}{}_{k_s}\, D^{T\,-1}{}_{i_1}{}^{l_1} \dots D^{T\,-1}{}_{i_r}{}^{l_r} N^{k_1 \dots k_s}{}_{l_1 \dots l_r} \\ &= D^{j_1}{}_{k_1} \dots D^{j_s}{}_{k_s}\, D^{-1\,l_1}{}_{i_1} \dots D^{-1\,l_r}{}_{i_r} N^{k_1 \dots k_s}{}_{l_1 \dots l_r}\ .\end{aligned} \tag{24.60}$$

## Unter Drehungen invariante Unterräume von $\mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_3$

Die Transformation des Tensorproduktes zweier Vektorräume zerfällt normalerweise in die Transformation niedriger dimensionaler Unterräume. Betrachten wir beispielsweise das neundimensionale Tensorprodukt $\mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_3$ eines reellen, euklidischen, dreidimensionalen Vektorraumes $\mathcal{V}_3$, auf den Drehspiegelungen $\mathsf{D}$, $\mathsf{D}^\mathrm{T} = \mathsf{D}^{-1}$, wirken.

Im Tensorprodukt $\mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_3$ sind der sechsdimensionale Unterraum, der von symmetrischen Produkten $u \otimes v + v \otimes u$ aufgespannt wird, und der dreidimensionale Unterraum, der von antisymmetrischen Produkten $u \otimes v - v \otimes u$ aufgespannt wird, invariante Unterräume, denn symmetrisierte und antisymmetrisierte Produkte werden auf symmetrisierte und antisymmetrisierte Produkte abgebildet,

$$(\mathsf{D} \otimes \mathsf{D})(u \otimes v \pm v \otimes u) = (\mathsf{D}u) \otimes (\mathsf{D}v) \pm (\mathsf{D}v) \otimes (\mathsf{D}u) \ . \tag{24.61}$$

Für die Komponentenmatrix von $\mathsf{N} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\, \mathsf{N}^{ij}$, die in $\mathsf{N}' = \mathsf{D}\,\mathsf{N}\,\mathsf{D}^\mathrm{T}$ transformiert, bedeutet dies, daß ihre symmetrischen und antisymmetrischen Anteile getrennt transformieren,

$$(\mathsf{N}' + \mathsf{N}'^\mathrm{T}) = \mathsf{D}\,(\mathsf{N} + \mathsf{N}^\mathrm{T})\,\mathsf{D}^\mathrm{T} \ , \quad (\mathsf{N}' - \mathsf{N}'^\mathrm{T}) = \mathsf{D}\,(\mathsf{N} - \mathsf{N}^\mathrm{T})\,\mathsf{D}^\mathrm{T} \ . \tag{24.62}$$

Der sechsdimensionale Unterraum der symmetrischen Tensorprodukte $\hat{\mathsf{S}} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\, \hat{\mathsf{S}}^{ij}$, $\hat{\mathsf{S}}^{ij} = \hat{\mathsf{S}}^{ji}$, zerfällt in Vielfache der $\mathbf{1}$ und den Raum der spurfreien Tensorprodukte $\hat{\mathsf{S}}^{ij} = \mathsf{S}\,\delta^{ij} + \mathsf{S}^{ij}$, $\mathsf{S}^{ij}\delta_{ij} = 0$, die wegen $\mathsf{D}^i{}_k\,\mathsf{D}^j{}_l\,\delta^{kl} = \delta^{ij}$ (3.62) unter Drehungen getrennt transformieren,

$$\hat{\mathsf{S}}'^{ij} = \mathsf{D}^i{}_k\,\mathsf{D}^j{}_l\,(\mathsf{S}\,\delta^{kl} + \mathsf{S}^{kl}) = \mathsf{S}\,\delta^{ij} + \mathsf{D}^i{}_k\,\mathsf{D}^j{}_l\,\mathsf{S}^{kl} \ . \tag{24.63}$$

Dabei ist $\mathsf{D}^i{}_k\,\mathsf{D}^j{}_l\,\mathsf{S}^{kl}$ spurfrei, wenn $\mathsf{S}^{kl}$ spurfrei ist, denn es ist $\delta_{ij}\mathsf{D}^i{}_k\,\mathsf{D}^j{}_l = \delta_{kl}$. Die Tensortransformation des neundimensionalen Tensorproduktes läßt also den eindimensionalen Unterraum $\mathcal{W}_1$ der Elemente $\mathsf{S}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_i$, den fünfdimensionalen Unterraum $\mathcal{W}_5$ der Elemente mit spurfreien, symmetrischen Komponenten $\mathsf{S}^{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ und den dreidimensionalen Unterraum $\mathcal{W}_3$, der von antisymmetrischen Produkten aufgespannt wird, invariant,

$$\mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_5 \oplus \mathcal{W}_3 \ . \tag{24.64}$$

Die Elemente von $\mathcal{W}_1$ sind punktweise invariant.

Der Raum $\mathcal{W}_5$ der symmetrischen, spurfreien Tensoren enthält keinen echten, invarianten Unterraum: jedes $\mathsf{S} \in \mathcal{W}_5$ definiert eine symmetrische Bilinearform, die durch eine Drehung diagonalisiert werden kann (Seite 108), und ist daher von der Form

$$\mathsf{S} = \mathsf{D} \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \mathsf{D}^\mathrm{T} \ . \tag{24.65}$$

Mit $\mathsf{S}$ enthält der Darstellungsraum nicht nur die Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $(a, b, -a-b)$, sondern auch die Matrix mit vertauschten Diagonalelementen, die sich hieraus durch Drehung um die $z$-Achse um $\pi/2$ ergibt,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & & \\ & a & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \ . \tag{24.66}$$

Ebenso enthält er die Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $(a, -a-b, b)$. Von diesen drei Matrizen sind aber, wenn $S$ nicht verschwindet, zwei linear unabhängig, sie spannen den gesamten Raum der diagonalen, spurfreien Matrizen auf, der seinerseits durch Drehungen in den Raum $\mathcal{W}_5$ transformiert wird. Also enthält $\mathcal{W}_5$ keinen echten, invarianten Unterraum.

Die antisymmetrischen Tensorprodukte, $A^{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, $A^{ij} = -A^{ji} =: \epsilon_{ijk}\,A^k$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, heißen Axialvektoren. Sie transformieren unter Drehungen mit $\det D = 1$ wie Vektoren, bleiben aber, anders als die Vektoren aus $\mathcal{V}_3$, die man zur Betonung des Unterschieds auch polare Vektoren nennt, unter Spiegelungen invariant (2.46),

$$
\begin{gathered}
(D \otimes D)(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\,\epsilon_{ijk}\,A^k) = (D\vec{e}_i \otimes D\vec{e}_j)\,\epsilon_{ijk}\,A^k = (\vec{e}_l \otimes \vec{e}_m)\,D^l{}_i\,D^m{}_j\,\epsilon_{ijk}\,A^k \\
\epsilon_{ijk}\,D^l{}_i\,D^m{}_j\,A^k = \epsilon_{ijk}\,D^l{}_i\,D^m{}_j\,D^n{}_k\,D^n{}_r\,A^r = \det D\,\epsilon_{lmn}\,D^n{}_r\,A^r = \epsilon_{lmn}\,A'^n \\
A'^i = (\det D)\,D^i{}_j\,A^j\ . \qquad (24.67)
\end{gathered}
$$

Axialvektoren $\vec{A}$ sind Elemente eines dreidimensionalen Darstellungsraumes der Drehgruppe O(3), auf dem jedes $D \in \mathrm{O}(3)$ durch $(\det D)\,D$ dargestellt ist.

Beispielsweise ist das Magnetfeld ein Axialvektor: durchläuft ein geladenes Teilchen unter der Wirkung der Lorentzkraft $\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ die Bahn $\vec{x}(t)$ durch $\vec{x}(0)$ mit Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}(0)$, so wird die gespiegelte Bahn $-\vec{x}(t)$ durch $-\vec{x}(0)$ mit gespiegelter Anfangsgeschwindigkeit $-\vec{v}(0)$ in den Feldern $\vec{E}'(t, \vec{x}) = -\vec{E}(t, -\vec{x})$ und $\vec{B}'(t, \vec{x}) = \vec{B}(t, -\vec{x})$ durchlaufen.

Da das Kreuzprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ zweier Vektoren aus $\mathcal{V} = \mathcal{V}_3$ wie ein Axialvektor unter Spiegelungen invariant ist, $(-\vec{u}) \times (-\vec{v}) = \vec{u} \times \vec{v}$ ist es streng genommen nicht in $\mathcal{V}$, sondern ein Axialvektor in $\mathcal{A} = \mathcal{W}_3$. So gesehen ist das Kreuzprodukt eine Abbildung von $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{A}$, beim wiederholten Kreuzprodukt handelt es sich um Abbildungen $\mathcal{V} \times \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ und $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Die Orthonormalbasis von $\mathcal{A}$ liegt bei gewählter Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$ bis auf einen Faktor fest. Drehungen um die $x$-Achse von $\mathcal{V}$ lassen eine Drehachse in $\mathcal{A}$ invariant, von der man einen nichtverschwindenden Vektor als Einheitsvektor $\vec{e}_x$ wählen kann. Er geht durch dieselben Drehungen wie in $\mathcal{V}$ in die Einheitsvektoren $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ über. Die so durch Drehungen in $\mathcal{A}$ ausgezeichnete Basis ist nach der Wahl des Einheitsvektors $\vec{e}_x$, also bis auf einen Faktor $\lambda \neq 0$, eindeutig. Daß die Basen von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{A}$ nur bis auf einen Faktor relativ zueinander festliegen, zeigt sich auch daran, daß die Vektoren und Axialvektoren, etwa Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und Magnetfeldstärke $\vec{B}$, unterschiedliche Maßeinheiten haben und nicht addiert werden können. Sie können zwar der Richtung nach, nicht aber der Größe nach verglichen werden.

## Lorentztransformationen als Tensordarstellung von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

Wirkt die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ der linearen Transformationen $M$ des Raumes $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$, deren Determinanten den speziellen Wert 1 haben,

$$
M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ ,\ \ a, b, c, d \in \mathbb{C}\ ,\ \ ad - bc = 1\ , \qquad (24.68)
$$

durch die Selbstdarstellung und auf einen anderen Vektorraum $\mathcal{W}$ durch Multiplikation mit der konjugiert komplexen Darstellung, dann besteht das Tensorprodukt von $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ aus Vektoren $N$, deren Komponenten man als $2 \times 2$ Matrix angeben kann, auf die ein $M \in SL(2, \mathbb{C})$ durch Multiplikation von links gemeinsam mit Multiplikation mit $M^{*T} = M^\dagger$ von rechts wirkt (24.59),

$$N' = MNM^\dagger \ . \tag{24.69}$$

Unter dieser Darstellung von $SL(2, \mathbb{C})$ ist der reelle, vierdimensionale Unterraum der hermiteschen $2\times2$ Matrizen invariant: wenn $N^\dagger = N$ ist, dann ist auch $N'^\dagger = N'$. Mit den folgenden vier hermiteschen Basismatrizen, der **1**-Matrix und den drei Pauli-Matrizen $\sigma^1$, $\sigma^2$ und $\sigma^3$,

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \ , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \ , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \ , \tag{24.70}$$

läßt sich jede hermitesche $2 \times 2$ Matrix als reelle Linearkombination $\hat{k} = k_0\,\sigma^0 + k_1\,\sigma^1 + k_2\,\sigma^2 + k_3\,\sigma^3$ schreiben,

$$\hat{k} = k_m\,\sigma^m = \eta_{mn}\,k^n\,\sigma^m = \begin{pmatrix} k_0 + k_3 & k_1 - ik_2 \\ k_1 + ik_2 & k_0 - k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^0 - k^3 & -k^1 + ik^2 \\ -k^1 - ik^2 & k^0 + k^3 \end{pmatrix} \ . \tag{24.71}$$

Sie geht durch jede Transformation

$$\hat{k} \mapsto M\hat{k}M^\dagger = \hat{k'} \tag{24.72}$$

in eine hermitesche $2 \times 2$ Matrix $\hat{k'}$ über, wobei $k' = \Lambda\,k$ linear mit $k$ zusammenhängt. Diese zu $M$ gehörige Transformation $\Lambda$ hat reelle Matrixelemente, denn für alle reellen Vierervektoren $k$ ist $k'$ reell. Genauer handelt es sich bei $\Lambda \in O(1,3)$ um eine Lorentztransformation, denn die Determinante von $\hat{k}$

$$\det \hat{k} = (k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2 \tag{24.73}$$

stimmt, da die Determinante von $M \in SL(2, \mathbb{C})$ Eins ist, nach dem Determinantenproduktsatz mit $\det \hat{k'} = \det(M\,\hat{k}\,M^\dagger) = \det M \det \hat{k} \det M^\dagger = \det \hat{k}$ überein,

$$(k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2 = (k'^0)^2 - (k'^1)^2 - (k'^2)^2 - (k'^3)^2 \ . \tag{24.74}$$

Um den Zusammenhang von $SL(2, \mathbb{C})$ mit der Lorentzgruppe $SO(1,3)$ genauer anzugeben, müssen wir zunächst den folgenden algebraischen Sachverhalt klären.

## Polardarstellung invertierbarer Matrizen

So wie sich jede nichtverschwindende komplexe Zahl $z = e^{i\,\alpha}\,r$ eindeutig als Produkt einer Drehung $e^{i\alpha}$ und einer Streckung $r = e^h > 0$ schreiben läßt, so läßt sich jede invertierbare Matrix $M$ als Produkt einer unitären Matrix $U$ mit einer Matrix $e^H$ schreiben, wobei $H = H^\dagger$ hermitesch ist, und $U$ und $H$ eindeutig durch $M$ bestimmt sind,

$$M = Ue^H \ , \quad U^\dagger = U^{-1} \ , \quad H^\dagger = H \ . \tag{24.75}$$

Denn $M^\dagger M$ ist hermitesch und hat eine zugehörige Orthonormalbasis von Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten (20.19). Kein Eigenwert $\lambda$ verschwindet, denn $M$ ist invertierbar. Vielmehr ist der zum Eigenvektor $u$ gehörige Eigenwert von $M^\dagger M$ positiv wegen $\lambda\,(u,u) = (u, M^\dagger M u) = (Mu, Mu)$ und weil $(u,u)$ und $(v,v)$ mit $v = Mu$ positiv sind. Also ist die hermitesche Abbildung $H$ wohldefiniert, die jeden dieser Eigenvektoren mit dem zugehörigen Eigenwert $1/2 \log \lambda$ streckt,

$$M^\dagger M = e^{2H} \ . \tag{24.76}$$

Ebenso ist die hermitesche Abbildung $e^{-H}$ definiert, die jeden Eigenvektor $u$ von $M^\dagger M$ mit dem zugehörigen $1/\sqrt{\lambda}$ streckt. Aber dann ist $U = M e^{-H}$ unitär, wie man einfach nachrechnet: Die Abbildung

$$U^\dagger U = e^{-H}\, M^\dagger M e^{-H} \tag{24.77}$$

bildet jeden Eigenvektor $u$ auf sich ab, denn $u$ wird um $1/\sqrt{\lambda}$, danach um $\lambda$ und schließlich wieder um $1/\sqrt{\lambda}$ gestreckt. Da die Eigenvektoren eine Basis bilden, ist $U^\dagger U = 1$, also $U = M e^{-H}$ unitär. Damit ist $M = U e^{H}$ (24.75) gezeigt.

Weil jede invertierbare, komplexe Matrix $M$ eindeutig zu einem Paar $(U, H)$ einer unitären und einer hermiteschen Matrix gehört und weil die hermiteschen $N \times N$-Matrizen einen reellen, $N^2$-dimensionalen Vektorraum bilden, ist die Gruppe $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ in $N$ komplexen Dimensionen die Mannigfaltigkeit $\mathrm{U}(N) \times \mathbb{R}^{N^2}$.

Hat die Determinante von $M$ den speziellen Wert 1, dann ist $\det U \det e^{H} = 1$. Es ist aber $\det U$ das Produkt der Eigenwerte von $U$, die auf dem komplexen Einheitskreis liegen, also eine komplexe Zahl $e^{ib}$ vom Betrag 1. Die Determinante von $e^{H}$ ist eine positive Zahl $e^{a}$, denn die Eigenwerte von $e^{H}$ sind von der Form $e^{\alpha}$, wobei $\alpha$ ein reeller Eigenwert von $H$ ist. Das Produkt der Determinanten $e^{a+ib}$ ist genau dann 1, wenn $e^{a} = e^{ib} = 1$ ist, das heißt, wenn $U$ aus der Gruppe $\mathrm{SU}(n)$ der speziellen unitären Transformationen ist, deren Determinante den Wert 1 hat, und wenn $\det e^{H} = 1$ ist. Letzteres schränkt die Summe der Eigenwerte von $H$ ein, $\det e^{H} = e^{\alpha_1} e^{\alpha_2} \ldots = e^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots}$ ergibt nur 1, falls die Summe der Eigenwerte von $H$ verschwindet, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = 0$, das heißt, daß die Spur von $H$ verschwindet, $\mathrm{Sp}\, H = 0$. Die Gruppe $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ ist also die Mannigfaltigkeit $\mathrm{SU}(N) \times \mathbb{R}^{(N^2-1)}$.

Insbesondere ist, wie wir gleich sehen werden, $\mathrm{SU}(2)$ die Mannigfaltigkeit $S^3$, und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ist die Mannigfaltigkeit $S^3 \times \mathbb{R}^3$.

## Die Drehgruppe $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$

Den Gruppenelementen von $\mathrm{SU}(2)$ entsprechen umkehrbar eindeutig die Punkte der dreidimensionale Kugeloberfläche $S^3$. Denn die Spalten jeder unitären $2{\times}2$-Matrix $U$ sind wegen $U^\dagger U = \mathbf{1}$ die Komponenten von Vektoren einer Orthonormalbasis. Hat also $U$ die Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \tag{24.78}$$

so gilt $|a|^2 + |c|^2 = 1$. Die zweite Spalte steht genau dann senkrecht auf der ersten, $a^* b + c^* d = 0$, wenn $(b, d)$ ein Vielfaches von $(-c^*, a^*)$ ist, und dieses Vielfache wird dadurch festgelegt, daß die Determinante von $U$ Eins ist. Daher hat $U$ die Form

$$U = \begin{pmatrix} a & -c^* \\ c & a^* \end{pmatrix} , \quad (\Re a)^2 + (\Im a)^2 + (\Re c)^2 + (\Im c)^2 = 1 \ . \tag{24.79}$$

Zu jedem $U$ gehört eine Punkt auf $S^3 = \{(v,w,x,y) \in \mathbb{R}^4 : v^2 + w^2 + x^2 + y^2 = 1\}$ und zu jedem Punkt auf $S^3$ gehört ein $U \in \mathrm{SU}(2)$ mit $a = v + \mathrm{i}\, w$ und $c = x + \mathrm{i}\, y$ .

Da sich jeder Punkt auf $S^3$ mit einem Winkel $0 \le \alpha \le 2\pi$ und einem dreidimensionalen Einheitsvektor $(n_x, n_y, n_z)$ als $(v,w,x,y) = \cos\alpha/2\,(1,0,0,0) - \sin\alpha/2\,(0,n_z,n_x,n_y)$ schreiben läßt, kann jede SU(2)-Matrix als folgende Linearkombination der **1**-Matrix $\sigma^0$ und der Pauli-Matrizen $\sigma^1$, $\sigma^2$ und $\sigma^3$ (24.70) geschrieben werden:

$$U_{\alpha n} = (\cos\frac{\alpha}{2})\,\mathbf{1} - \mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,\vec{n}\,\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} - \mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,n_z & -\mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,(n_x - \mathrm{i}\,n_y) \\ -\mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,(n_x + \mathrm{i}\,n_y) & \cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,n_z \end{pmatrix} . \tag{24.80}$$

Für die neun Produkte der drei Pauli-Matrizen gilt, wie man elementar nachrechnet,

$$\sigma^i\,\sigma^j = \delta^{ij}\,\mathbf{1} + \mathrm{i}\,\epsilon^{ijk}\,\sigma^k \ , \quad i,j,k \in \{1,2,3\} \ . \tag{24.81}$$

Multipliziert und summiert mit den Komponenten $a^i$ und $b^j$ von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$,

$$\vec{a}\,\vec{\sigma} := a^i\,\sigma^i = \begin{pmatrix} a^3 & a^1 - \mathrm{i}\,a^2 \\ a^1 + \mathrm{i}\,a^2 & -a^3 \end{pmatrix} \tag{24.82}$$

lautet dies

$$(\vec{a}\,\vec{\sigma})\,(\vec{b}\,\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\mathbf{1} + \mathrm{i}\,(\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{\sigma} \ . \tag{24.83}$$

Insbesondere vertauschen $(\vec{a}\,\vec{\sigma})\,(\vec{b}\,\vec{\sigma}) = (\vec{b}\,\vec{\sigma})\,(\vec{a}\,\vec{\sigma})$, falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind. Falls sie zueinander senkrecht stehen, antivertauschen die Matrizen $(\vec{a}\,\vec{\sigma})\,(\vec{b}\,\vec{\sigma}) = -(\vec{b}\,\vec{\sigma})\,(\vec{a}\,\vec{\sigma})$ .

Für einen Einheitsvektor $\vec{n}$ ist das Quadrat $(\vec{n}\,\vec{\sigma})^2 = \mathbf{1}$ und mit $(\vec{n}\,\vec{\sigma})^{2k} = \mathbf{1}$ und $(\vec{n}\,\vec{\sigma})^{2k+1} = \vec{n}\,\vec{\sigma}$ vereinfachen sich Potenzreihen der Matrix $\vec{n}\,\vec{\sigma}$

$$\begin{aligned} \exp(-\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\,\vec{\sigma}) &= \sum_k \frac{(-\mathrm{i}\,\alpha/2)^{2k}}{(2k)!}\,\mathbf{1} + \sum_k \frac{(-\mathrm{i}\,\alpha/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\vec{n}\,\vec{\sigma} \\ &= \sum_k \frac{(-1)^k(\frac{\alpha}{2})^{2k}}{(2k)!}\,\mathbf{1} - \mathrm{i}\sum_k \frac{(-1)^k(\frac{\alpha}{2})^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\vec{n}\,\vec{\sigma} \\ &= (\cos\frac{\alpha}{2})\,\mathbf{1} - \mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,\vec{n}\,\vec{\sigma} \ . \end{aligned} \tag{24.84}$$

Es wird also jedes $U \in \mathrm{SU}(2)$ von einer infinitesimalen Transformation $-\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\,\vec{\sigma}$ erzeugt,

$$U_{\alpha n} = \exp(-\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\,\vec{\sigma}) = \cos\frac{\alpha}{2}\,\mathbf{1} - \mathrm{i}\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\,\vec{\sigma} \ . \tag{24.85}$$

Jede lineare Transformation (24.72) $\hat{k} \mapsto U\,\hat{k}\,U^\dagger$ läßt den eindimensionalen Unterraum der Vielfachen $k_0\,\sigma^0$ der **1** und den dreidimensionalen Unterraum der spurfreien Matrizen $\vec{k}\,\vec{\sigma}$ getrennt invariant und bewirkt in letzterem jeweils eine Drehung um die Achse $\vec{n}$

um den Winkel $\alpha$. Um dies nachzurechnen, zerlegen wir $\vec{k} = k_{\|}\,\vec{n} + \vec{k}_\perp$ in einen zu $\vec{n}$ parallelen und einen senkrechten Teil, $\hat{k} = \hat{k}_{\|} + \hat{k}_\perp$, wobei $\hat{k}_{\|} = k^0\,\sigma^0 - k_{\|}\,\vec{n}\,\vec{\sigma}$ und $\hat{k}_\perp = -\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma}$ ist.

Der Anteil $\hat{k}_{\|}$ vertauscht mit jeder Potenzreihe von $\vec{n}\,\vec{\sigma}$, also mit $U$,

$$U\,\hat{k}_{\|}\,U^\dagger = \hat{k}_{\|}\,U\,U^\dagger = \hat{k}_{\|}\ . \tag{24.86}$$

Bei der Berechnung der Transformation von $\hat{k}_\perp = -\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma}$ berücksichtigen wir (24.83), daß $\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma}$ mit $\vec{n}\,\vec{\sigma}$ antivertauscht

$$(\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma})\,(\vec{n}\,\vec{\sigma}) = -(\vec{n}\,\vec{\sigma})\,(\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma})\ , \tag{24.87}$$

weil $\vec{k}_\perp$ und $\vec{n}$ senkrecht aufeinander stehen, und schreiben $U$ (24.85) mit $c = \cos\frac{\alpha}{2}$ und $s = \sin\frac{\alpha}{2}$ kurz als $U = c - \mathrm{i}\,s\,\vec{n}\,\vec{\sigma}$. Mit $(\vec{n}\,\vec{\sigma})^2 = \mathbf{1}$ und (24.83) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&U\,(\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma})\,U^\dagger = (c - \mathrm{i}\,s\,\vec{n}\,\vec{\sigma})\,(\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma})\,(c + \mathrm{i}\,s\,\vec{n}\,\vec{\sigma}) = (c - \mathrm{i}\,s\,\vec{n}\,\vec{\sigma})(c - \mathrm{i}\,s\,\vec{n}\,\vec{\sigma})\,(\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma})\\
&= U^2\,(\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma}) = (\cos\alpha - \mathrm{i}\,\sin\alpha\,\vec{n}\,\vec{\sigma})\,(\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma}) = \big((\cos\alpha)\,\vec{k}_\perp + (\sin\alpha)\,\vec{n}\times\vec{k}_\perp\big)\,\vec{\sigma}\ .
\end{aligned} \tag{24.88}$$

Es bewirkt also $U_{\alpha n} = e^{-\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\,\vec{\sigma}}$ durch $\vec{k}\,\vec{\sigma} \mapsto U_{\alpha n}\,\vec{k}\,\vec{\sigma}\,U^\dagger_{\alpha n} = (D_{\alpha n}\vec{k})\,\vec{\sigma}$ die Drehung $D_{\alpha n}$ von Vektoren $\vec{k}$ um die Achse $\vec{n}$ und den Winkel $\alpha$

$$D_{\alpha n}:\ \vec{k} \mapsto \vec{k}' = \vec{k}_{\|} + \cos\alpha\,\vec{k}_\perp + \sin\alpha\,\vec{n}\times\vec{k}_\perp\ . \tag{24.89}$$

Umgekehrt gehört zu jeder Drehmatrix $D_{\alpha n}$ mit Drehachse $\vec{n}$ und Drehwinkel $\alpha$ das Paar unitärer Matrizen $U_{\alpha n} = e^{-\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\,\vec{\sigma}}$ und $-U_{\alpha n} = e^{-\mathrm{i}\,\frac{\alpha+2\pi}{2}\,\vec{n}\,\vec{\sigma}}$. Die Matrixpaare $\pm U_{\alpha n}$, also $U_{\alpha n}$ bis auf die Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$, bilden die Gruppe $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$. Sie ist auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ als die Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ dargestellt.

## Drehungsfreie Lorentztransformation

Die Lorentztransformation $\hat{k} \mapsto M\hat{k}M^\dagger$ (24.72), die zu $M = e^H$, $H = H^\dagger$, $\mathrm{Sp}\,H = 0$ gehört, stellt sich als ein drehungsfreier Schub heraus.

Die spurfreie, hermitesche Matrix $H$ können wir als Linearkombination $H = -\frac{\beta}{2}\,\vec{n}\,\vec{\sigma}$ der drei Pauli-Matrizen (24.70) schreiben, wobei wir $\vec{n}$ normiert wählen, $(\vec{n})^2 = 1$. Die Exponentialreihe $e^H$ vereinfacht sich wegen $(\vec{n}\,\vec{\sigma})^2 = \mathbf{1}$ wie in (24.84)

$$e^H = \exp(-\frac{\beta}{2}\,\vec{n}\,\vec{\sigma}) = (\cosh\frac{\beta}{2}) - (\sinh\frac{\beta}{2})\,\vec{n}\,\vec{\sigma}\ , \tag{24.90}$$

wobei wir die $\mathbf{1}$-Matrix nicht explizit schreiben.

Die Matrix $\hat{k}$, die auf $\hat{k}' = e^H\hat{k}\,(e^H)^\dagger = e^H\hat{k}\,e^H$ abgebildet wird, schreiben wir als $\hat{k} = \hat{k}_{\|} + \hat{k}_\perp$, wobei $\hat{k}_{\|} = k^0 - k_{\|}\,\vec{n}\,\vec{\sigma}$ und $\hat{k}_\perp = -\vec{k}_\perp\,\vec{\sigma}$ ist und $\vec{k} = k_{\|}\,\vec{n} + \vec{k}_\perp$ den Vektor in seinen zu $\vec{n}$ parallelen und senkrechten Anteil zerlegt.

Zur Berechnung der Transformation von $\hat{k}_\perp$ brauchen wir nur, daß $\hat{k}_\perp$ mit $H \propto \vec{n}\,\vec{\sigma}$ antivertauscht (24.87), $\hat{k}_\perp\, H = -H\,\hat{k}_\perp$, weil $\vec{k}_\perp$ und $\vec{n}$ senkrecht aufeinander stehen,

$$e^H \hat{k}_\perp\, e^H = e^H e^{-H} \hat{k}_\perp = \hat{k}_\perp \ . \tag{24.91}$$

Die Matrix $\hat{k}_\parallel$ vertauscht mit $e^H$. Wegen $(\vec{n}\,\vec{\sigma})^2 = \mathbf{1}$ gilt

$$\begin{aligned} e^H \hat{k}_\parallel\, e^H &= \hat{k}_\parallel\, e^{2H} = (k^0 - k_\parallel\, \vec{n}\,\vec{\sigma})\,(\cosh\beta - (\sinh\beta)\,\vec{n}\,\vec{\sigma}) \\ &= \big((\cosh\beta)\,k^0 + (\sinh\beta)\,k_\parallel\big) - \big((\sinh\beta)\,k^0 + (\cosh\beta)\,k_\parallel\big)\,\vec{n}\,\vec{\sigma} \\ &= k'^0 - k'_\parallel\,\vec{n}\,\vec{\sigma} \ . \end{aligned} \tag{24.92}$$

Hieraus lesen wir ab

$$\begin{pmatrix} k'^0 \\ k'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^0 \\ k_\parallel \end{pmatrix} \ . \tag{24.93}$$

Der zu $\vec{n}$ senkrechte Anteil $\vec{k}_\perp$ bleibt unverändert.

Dies ist die drehungsfreie Lorentztransformation in $\vec{n}$-Richtung mit Geschwindigkeit $v = \tanh\beta$. Bis auf das Vorzeichen der Geschwindigkeit stimmt diese Transformation mit der passiven Lorentztransformation (6.14) überein.

Anders als bei Drehungen oder drehungsfreien Lorentztransformationen kann nicht jede Matrix $M \in SL(2,\mathbb{C})$ als Exponentialreihe einer infinitesimalen Transformation

$$N = \exp((\vec{k} + i\vec{l}\,)\,\vec{\sigma}) = \cosh z + \frac{\sinh z}{z}\,(\vec{k} + i\,\vec{l}\,)\vec{\sigma} \ , \quad (\vec{k} + i\,\vec{l}\,)^2 = z^2 \ , \tag{24.94}$$

geschrieben werden. Die Ausnahmen sind von der Form

$$M = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad b \neq 0 \ . \tag{24.95}$$

Denn damit $M = N$ gelten kann, muß $\frac{\sinh z}{z}$ von Null verschieden sein, sonst wäre $N$ diagonal. Damit die Hauptdiagonalelemente übereinstimmen, muß $k^3 = l^3 = 0$ sein. $N_{12} = 0$ besagt $k^1 + il^1 + i(k^2 + il^2) = 0$. Als Folge ist $z = 0$ und $N_{11} = \cosh z = 1 \neq M_{11}$.

## Möbiustransformationen von Lichtstrahlen

Für jeden Wellenvektor $k^m$ eines Lichtstrahls verschwindet die Determinante der Matrix $\hat{k} = k^m\,\eta_{mn}\,\sigma^n$, denn sie ist das Längenquadrat des Vierervektors $k$ (24.73) und $k$ ist lichtartig, $k^2 = 0$. Weil die Matrix $\hat{k}$ nur Rang 1 hat, lassen sich ihre Matrixelemente als Produkte $\hat{k}_{\alpha\dot{\beta}} = u_\alpha\, u^*_{\dot{\beta}}$ , $\alpha, \dot{\beta} \in \{1, 2\}$, der Komponenten eines zweidimensionalen, komplexen Vektors $u$ schreiben

$$\begin{pmatrix} k^0 - k^3 & -k^1 + i\,k^2 \\ -k^1 - i\,k^2 & k^0 + k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (u_1^*, u_2^*) \ , \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = e^{i\gamma} \begin{pmatrix} \sqrt{k^0 - k^3} \\ -\frac{k^1 + i\,k^2}{\sqrt{k^0 - k^3}} \end{pmatrix} \ . \tag{24.96}$$

Dabei ist $u$ durch ein gegebenes $\hat{k}$, $\hat{k} = \hat{k}^\dagger \neq 0$, $\det \hat{k} = 0$, bis auf eine Phase bestimmt. Lorentztransformationen ändern $\hat{k}_{\alpha\dot\beta} = u_\alpha u^*_{\dot\beta}$ in $\hat{k}'_{\alpha\dot\beta} = M_\alpha{}^\gamma M^*_{\dot\beta}{}^{\dot\delta} k_{\gamma\dot\delta}$ (24.69) und transformieren demnach $u$ in $u'_\alpha = M_\alpha{}^\beta u_\beta$

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, u_1 + b\, u_2 \\ c\, u_1 + d\, u_2 \end{pmatrix} \ , \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \ , \quad ad - bc = 1 \ . \tag{24.97}$$

Einen zweidimensionalen, komplexen Vektor, der wie $u$ linear unter $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ transformiert, nennen wir Spinor.

Das Verhältnis $z = u_1/u_2$ der Komponenten des zum Lichtstrahl gehörigen Spinors hängt umkehrbar eindeutig mit der Richtung $\vec{e}$ zusammen, aus der man den Lichtstrahl einfallen sieht, der Real- und der Imaginärteil von $1/z$ sind stereographische Koordinaten (5.22) von $S^2$. Denn der Wellenvektor eines Lichtstrahls hat die Form $(k^0, \vec{k}) = k^0(1, -\vec{e})$. Drücken wir die Richtung wie in (5.25) durch die Winkel $\theta$ und $\varphi$ aus, $\vec{e} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, und verwenden wir die trigonometrischen Identität

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1+\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)\,\sin(\theta/2)} = \cot(\theta/2) \ , \tag{24.98}$$

so ergibt sich

$$z = \frac{u_1}{u_2} = -\frac{k^0 - k^3}{k^1 + \mathrm{i}\, k^2} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta\, e^{\mathrm{i}\,\varphi}} = \cot\frac{\theta}{2}\, e^{-\mathrm{i}\,\varphi} \ . \tag{24.99}$$

Da die Richtung $z$ eines Lichtstrahls das Verhältnis von Spinorkomponenten ist, ändern es Lorentztransformationen $\Lambda$ durch die zum Matrixpaar $\pm M(\Lambda) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ gehörige Möbiustransformation

$$T_M : z \mapsto \frac{a\, z + b}{c\, z + d} \ . \tag{24.100}$$

Aberration und Drehung sind Möbiustransformationen von $z = \cot\frac{\theta}{2}\, e^{-\mathrm{i}\,\varphi}$.

Zu gegebener Möbiustransformation mit Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gehört jeweils ein Paar von linearen Transformationen mit Matrizen $\pm M$. Die Möbiusgruppe ist zur Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ und demnach zur eigentlichen Lorentzgruppe $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$ isomorph.

Sind $z_1, z_2, z_3$ drei verschieden Punkte der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und sind $w_1, w_2, w_3$ ebenfalls verschieden, dann [17] gibt es genau eine Möbiustransformation

$$T : z \mapsto w(z) \ , \quad \frac{(w - w_1)\,(w_2 - w_3)}{(w - w_2)\,(w_1 - w_3)} = \frac{(z - z_1)\,(z_2 - z_3)}{(z - z_2)\,(z_1 - z_3)} \ , \tag{24.101}$$

die $z_1$ in $w_1 = w(z_1)$, $z_2$ in $w_2 = w(z_2)$ und $z_3$ in $w_3 = w(z_3)$ überführt. Demnach gibt es an einem Ort genau einen Beobachter, der drei vorgegebene Sterne in drei vorgegebenen Richtungen sieht. Die Örter der anderen Sterne liegen dann fest.

## Die Lorentzgruppe in $N$ Dimensionen

Die Lorentzgruppe $\mathrm{O}(p, q)$ besteht aus den reellen, linearen Transformationen $\Lambda$ der Punkte $x$ des $N$-dimensionalen Minkowskiraumes $\mathbb{R}^{p,q}$, $N = p + q$,

$$x' = \Lambda\, x \ , \tag{24.102}$$

die das Skalarprodukt $x \cdot y$ invariant lassen. Es ist in Matrixschreibweise $x \cdot y = x^T \eta\, y$. Dabei ist $\eta$ eine symmetrische, invertierbare Matrix, die bei geeigneter Wahl der Basis diagonal ist, und die $p$ positive und $q$ negative Diagonalelemente hat (24.20). Lorentztransformationen gehören also zu den Matrizen $\Lambda$, die für alle $x$ und alle $y$ die Gleichung $(\Lambda x)^T \eta\, \Lambda y = x^T \eta\, y$ und demnach die Matrixgleichung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{24.103}$$

erfüllen. Nehmen wir hiervon die Determinante, so folgt

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \tag{24.104}$$

wegen $\det(\Lambda^T \eta\, \Lambda) = (\det \Lambda^T)(\det \eta)(\det \Lambda)$ und wegen $\det \Lambda^T = \det \Lambda$.

Die Determinante einer Lorentztransformation kann also nur die Werte $+1$ oder $-1$ haben. Die speziellen Transformationen $\Lambda$, deren Determinante den Wert 1 hat, bilden die spezielle, orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(p, q)$, oder $\mathrm{SO}(N)$, falls $p = 0$ oder $q = 0$ ist.

Für $(q\,p) > 0$ ist die Gruppe $\mathrm{O}(p, q)$ die Mannigfaltigkeit $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{qp}$ und hat vier Zusammenhangskomponenten.

Um dies zu zeigen, zerlegen wir die $(p + q) \times (p + q)$-Matrizen $\eta$ und $\Lambda$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \ , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{24.105}$$

in einen $p \times p$-Block 1 und $A$, einen $q \times q$-Block $-1$ und $D$, einen $q \times p$-Block $C$ und einen $p \times q$-Block $B$ und schreiben (24.103) aus

$$A^T A = 1 + C^T C \ , \quad D^T D = 1 + B^T B \ , \quad A^T B = C^T D \ . \tag{24.106}$$

Da $C^T C$ nicht negative Eigenwerte hat, hat $1 + C^T C$ Eigenwerte, die nicht kleiner als 1 sind. Also ist $A$ invertierbar, $(\det A)^2 = \det(1 + C^T C) \geq 1$, und ebenso $D$, $(\det D)^2 \geq 1$.

Jede reelle, invertierbare Matrix $A$ kann eindeutig in ein Produkt einer orthogonalen Matrix $O$, $O^T = O^{-1}$, mit einer positiv definiten, symmetrischen Matrix $S$, $S = S^T$, zerlegt werden,

$$A = OS \ . \tag{24.107}$$

Denn $A^T A$ definiert eine symmetrische Matrix $S^2$ mit positiven Eigenwerten $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots p$, und dadurch auch die positive, symmetrische Matrix

$$S = \sqrt{A^T A} \ , \quad S = S^T \ , \tag{24.108}$$

mit denselben Eigenvektoren wie $S^2$ und den positiven Eigenwerten $\sqrt{\lambda_i}$. Die Matrix

$$O = AS^{-1} \ , \quad O^T = O^{-1} \ , \tag{24.109}$$

ist orthogonal, wie $S^{T\,-1} A^T A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = 1$ zeigt.

Da $A$ und $D$ invertierbar sind, kann $\Lambda$ (24.105) eindeutig zerlegt werden

$$\Lambda = \begin{pmatrix} O & \\ & \hat{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & Q \\ P & \hat{S} \end{pmatrix} \ , \tag{24.110}$$

wobei wir abkürzend $P = \hat{O}^{-1}C$ und $Q = O^{-1}B$ schreiben. $S$ und $\hat{S}$ sind invertierbar und symmetrisch, $O$ und $\hat{O}$ sind orthogonale Matrizen. Gleichung (24.103) besagt

$$S^2 = 1 + P^T P \ , \quad SQ = P^T \hat{S} \ , \quad \hat{S}^2 = 1 + Q^T Q \ . \tag{24.111}$$

Setzen wir $Q = S^{-1}P^T\hat{S}$ und $S^{-2} = (1 + P^T P)^{-1}$ in der letzten Gleichung ein, so folgt

$$\hat{S}^2 = 1 + \hat{S}PS^{-1}S^{-1}P^T\hat{S} \quad \text{oder} \quad 1 = \hat{S}^{-2} + P(1 + P^T P)^{-1}P^T \ . \tag{24.112}$$

Was dies für $\hat{S}^{-2}$ besagt, finden wir heraus, indem wir die Matrizen auf eine Basis, nämlich die Eigenvektoren $w$ von $PP^T$ anwenden, $PP^T w = \lambda w$. Wenn $P^T w$ nicht verschwindet, ist $P^T w$ Eigenvektor von $P^T P$, $(P^T P)P^T w = \lambda P^T w$, zu demselben Eigenwert. Dann gilt

$$P(1 + P^T P)^{-1}P^T w = P\frac{1}{1+\lambda}P^T w = \frac{\lambda}{1+\lambda} w \ . \tag{24.113}$$

Dies gilt auch, wenn $P^T w$ verschwindet, denn dann ist $PP^T w = 0$, also $\lambda = 0$. In (24.112) eingesetzt ergibt sich $\frac{1}{1+\lambda} w = \hat{S}^{-2} w$ oder $\hat{S}^2 w = (1+\lambda) w$. Also ist

$$\hat{S}^2 = 1 + PP^T \ . \tag{24.114}$$

Dies gilt, wenn wir $\hat{S}$ auf Eigenvektoren von $PP^T$ anwenden. Da sie eine Basis in $\mathbb{R}^q$ bilden, gilt dies auch angewendet auf einen beliebigen Vektor, also als Matrixgleichung.

Aus gleichen Grund ist, angewendet auf Eigenvektoren von $PP^T$ und demnach für alle Vektoren,

$$Q = S^{-1}P^T\hat{S} = \sqrt{1 + P^T P}^{\,-1} P^T \sqrt{1 + PP^T} = P^T \ . \tag{24.115}$$

Also ist jede Lorentzmatrix eindeutig durch ein Paar von Drehspiegelungen $O \in O(p)$, $\hat{O} \in O(q)$ und eine drehungsfreie Lorentztransformation $L_P$, $L_P = (L_P)^T$, gegeben, die durch eine Matrix $P$ mit $q$ Zeilen und $p$ Spalten bestimmt ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} O & \\ & \hat{O} \end{pmatrix} L_P \ , \quad L_P = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + P^T P} & P^T \\ P & \sqrt{1 + PP^T} \end{pmatrix} \ . \tag{24.116}$$

Da $q \times p$ Matrizen $P$ den Vektorraum $\mathbb{R}^{qp}$ bilden, gehört zu jeder Lorentztransformation genau ein Punkt in der Mannigfaltigkeit $O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{qp}$, die aus Tripeln $(O, \hat{O}, P)$ besteht. Da $\mathbb{R}^{qp}$ zusammenhängend ist und die Drehspiegelungen jeweils zwei Zusammenhangskomponenten haben, hat $O(p, q)$ mit $(q\,p) > 0$ genau vier Zusammenhangskomponenten.

Lorentztransformationen $\Lambda$ mit $\det O = \det \hat{O} = 1$ erhalten die Orientierung der zeitartigen und der raumartigen Richtungen und bilden die eigentliche Lorentzgruppe $SO(p, q)^{\uparrow}$, die zusammenhängend ist. Die anderen Zusammenhangskomponenten von $O(p, q)$ erhält man durch Multiplikation mit der Zeitumkehr $\mathcal{T}$ und mit der Raumspiegelung $\mathcal{P}$, die eine ungerade Anzahl zeitlicher oder räumlicher Koordinaten spiegeln, sowie mit $\mathcal{T}\mathcal{P}$.

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \ , \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{24.117}$$

Die Lorentztransformation $L_P$ wirkt in $1+1$-dimensionalen Unterräumen $U_i$ des Minkowskiraumes $\mathbb{R}^{p,q}$, die zueinander senkrecht stehen, jeweils wie die Lorentztransformation (6.14). Der zu diesen Unterräumen senkrechte Unterraum bleibt punktweise invariant.

Dies sieht man durch Betrachtung der Eigenvektoren $w_i$ von $PP^T$. Sie stehen aufeinander senkrecht, wenn sie zu verschiedenen Eigenwerten gehören, und können zueinander senkrecht gewählt werden, wenn der Eigenwert entartet ist. Wir wählen sie zudem normiert $w_j^T w_i = \delta_{ij}$. Gleiches gilt für die Eigenvektoren von $P^T P$, die durch $P^T w_i/\sqrt{\lambda_i}$ gegeben sind, wenn der zugehörige Eigenwert nicht verschwindet. Im weiteren bezeichne $w_i$ einschränkender Eigenvektoren mit nichtverschwindendem Eigenwert.

Die Eigenvektoren $u_j$ von $PP^T$ zum Eigenwert 0, $PP^T u_j = 0$, werden schon von $P^T$ vernichtet, $P^T u_j = 0$, denn aus $PP^T u_j = 0$ folgt $u_j^T PP^T u_j = 0$. Dies ist die Summe der Quadrate der Komponenten von $P^T u_j$ und verschwindet nur, falls $P^T u_j = 0$ ist. Entsprechend gilt $Pv_k = 0$ für Eigenvektoren $v_k$ von $P^T P$ zum Eigenwert 0.

Da die Eigenvektoren von $PP^T$ ebenso wie die Eigenvektoren von $P^T P$ aufeinander senkrecht stehen, sind die $N$ Vektoren des Minkowskiraumes

$$t_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\begin{pmatrix} P^T w_i \\ 0 \end{pmatrix} , \quad x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ w_i \end{pmatrix} , \quad n_k = \begin{pmatrix} v_k \\ 0 \end{pmatrix} , \quad m_j = \begin{pmatrix} 0 \\ u_j \end{pmatrix} , \tag{24.118}$$

ein Vielbein, also eine orthonormierte Basis.

Die Vektoren $n_k$ und $m_j$ werden von $L_P$ invariant gelassen. Die Punkte $a\,t_i + b\,x_i$ der Unterräume $U_i$, die von $t_i$ und $x_i$ aufgespannt werden, transformieren ineinander

$$\begin{gathered} L_P t_i = \sqrt{1+\lambda_i}\, t_i + \sqrt{\lambda_i}\, x_i \ , \quad L_P x_i = \sqrt{\lambda_i}\, t_i + \sqrt{1+\lambda_i}\, x_i \ , \\ L_P(a\,t_i + b\,x_i) = a'\,t_i + b'\,x_i \ , \quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda_i} & \sqrt{\lambda_i} \\ \sqrt{\lambda_i} & \sqrt{1+\lambda_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ . \end{gathered} \tag{24.119}$$

Dies sind zweidimensionale Lorentztransformationen wie in (6.14) mit Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}} \ . \tag{24.120}$$

Beim Vorzeichen der Geschwindigkeit $v$ ist zu beachten, daß (6.14) eine Koordinatentransformation beschreibt und nicht eine aktive Transformation von Punkten.

# 25 Maßsysteme

Meßwerte $Q$ sind Produkte einer Maßzahl $z \in \mathbb{R}$ oder eines Fehlerintervalls mit ganzzahligen Potenzen von Maßeinheiten $q = (q_1, q_2, \ldots q_n)$, deren Produkt auch Dimension des Meßwerts heißt. Man kann Meßwerte addieren und multiplizieren. Mathematisch gesprochen bilden sie eine Polynomalgebra von Einheiten und ihren Inversen. So verwendet das SI-System (Internationales Einheitensystem, auch MKSA-System genannt) die Einheiten Meter, Kilogramm, Sekunde, Ampere, Kelvin und Mol ($n = 6$). Physiker brauchen auch einige Wurzeln aus diesen Einheiten, weil es zum Beispiel in der Quantenmechanik Größen gibt, die Wellenfunktionen $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}\,,\ x \mapsto \psi(x)$, deren Betragsquadrat Wahrscheinlichkeitsdichten sind. Daher hat $\psi(x)$ die Maßeinheit Meter$^{-\frac{3}{2}}$.

Die Summe zweier Meßgrößen unterschiedlicher Dimension ist direkt: 299 792 458 Meter + 5 Kilogramm, kann eindeutig in 299 792 458 Meter und 5 Kilogramm zerlegt werden. Daher betrachtet man normalerweise nur Summen von Meßgrößen gleicher Dimension. Allerdings ist nicht immer klar, was genau dies heißt.

Ist ein Fuß verschieden von $1{,}646 \cdot 10^{-4}$ nautischen Meilen? Für Piloten ja, denn in der Luftfahrt sind Höhe und Entfernung grundverschieden und werden in diesen verschiedenen Einheiten gemessen. Holzfäller hingegen wandeln beim Fällen von Bäumen Höhe mit dem obigen Umrechnungsfaktor in Länge.

Sind Kilo oder Milli Einheiten? Sicher nicht: die Namen stehen für die Faktoren 1000 und 1/1000. Was aber ist ein Mol anderes? Es bezeichnet die Avogadrozahl

$$1 \text{ mol} = N_A = 6{,}022\,142 \cdot 10^{23} \ , \tag{25.1}$$

nämlich die Zahl von Atomen in 12 Gramm des Kohlenstoffisotops C-12. Solange diese reelle Zahl nur mit einem größeren Fehler bekannt ist, als die Stoffmenge 12 g reproduzierbar ist, mag es sich lohnen, Mol als Einheit aufzufassen. Dennoch begreife ich sie als maßsystemunabhängige Zahl wie Kilo, Mega oder Giga.

Die Reaktionsrate oder katalytische Aktivität von einem mol pro Sekunde hat in der Chemie den Namen Katal und das Formelzeichen kat= mol/s.

Bei allen Kreissegmenten mit demselben Öffnungswinkel ist das Verhältnis der Bogenlänge zum Radius gleich. Also kann man mit diesem dimensionslosen Verhältnis den Winkel angeben. Die hinzugefügte Maßeinheit Radiant (rad) ist überflüssig, denn 1 rad ist 1. Sie besagt lediglich, daß die Zahl, von der man spricht, einen Winkel bezeichnet.

Der Vollkreis hat den Winkel $2\pi$. Man unterteilt ihn in 360 Winkelgrade. Also ist ein Winkelgrad die Zahl $\pi/180 \approx 0{,}0174533$ (1.31).

Der Raumwinkel eines Teils der Kugeloberfläche ist die Größe dieser Fläche geteilt durch das Quadrat des Kugelradiusses. Dieses dimensionslose Verhältnis von Flächen beträgt bei der vollständigen Kugeloberfläche $4\pi$. Die Maßeinheit Steradiant (sr) besagt nur, daß die Zahl einen Raumwinkel bezeichnet, denn 1 sr ist 1.

Vorsicht ist geboten bei Größen, die pro Radiant oder pro Steradiant angegeben werden, etwa die Lichtstärke einer Kerze, den Energiestrom pro Raumwinkel. Der Gesamtenergiestrom ist das Integral über den Raumwinkel und bei richtungsunabhängigem Integranden das $4\pi$-fache der pro Raumwinkel angegebenen Größe.

Viele Produkte der Maßeinheiten haben eigene Namen. Sie sind zusammen mit den Werten der wichtigsten Naturkonstanten in der folgenden Tabelle aufgelistet. Dabei sind die Zahlen in den Spalten m, kg, s und A die Potenzen dieser Maßeinheiten. Beispielsweise besagt die Zeile elektrische Feldkonstante $\epsilon_0 = 10^7/(4\pi z_c^2)\,\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^4\,\mathrm{A}^2$ mit

$$z_c = 299\,792\,458 \ . \tag{25.2}$$

Tabelle 25.1: Maßeinheiten und Naturkonstante

| Größe | Maßeinheit | Zeichen | Wert | m | kg | s | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Länge | Meter | m | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Masse | Kilogramm | kg | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Zeit | Sekunde | s | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Strom | Ampere | A | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Lichtgeschwindigkeit | | $c$ | $z_c$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| elektrische Feldkonstante | | $\epsilon_0$ | $10^7/(4\pi z_c^2)$ | -3 | -1 | 4 | 2 |
| Wirkungsquantum | | $\hbar$ | $1{,}054\,571\,6 \cdot 10^{-34}$ | 2 | 1 | -1 | 0 |
| Gravitationskonstante | | $G_N$ | $6{,}673 \cdot 10^{-11}$ | 3 | -1 | -2 | 0 |
| Induktionskonstante | | $\mu_0$ | $4\pi \cdot 10^{-7}$ | 1 | 1 | -2 | -2 |
| Ladung | Coulomb | C | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Kapazität | Farad | F | 1 | -2 | -1 | 4 | 2 |
| Dosis, Energie pro Masse | Gray | Gy | 1 | 2 | 0 | -2 | 0 |
| Frequenz, Rate | Hertz | Hz | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| Induktivität | Henry | H | 1 | 2 | 1 | -2 | -2 |
| Energie | Joule | J | 1 | 2 | 1 | -2 | 0 |
| Kraft | Newton | N | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 |
| Widerstand | Ohm | Ω | 1 | 2 | 1 | -3 | -2 |
| Druck, Energiedichte | Pascal | Pa | 1 | -1 | 1 | -2 | 0 |
| Leitfähigkeit | Siemens | S | 1 | -2 | -1 | 3 | 2 |
| Magnetfeldstärke (SI) | Tesla | T | 1 | 0 | 1 | -2 | -1 |
| Spannung | Volt | V | 1 | 2 | 1 | -3 | -1 |
| Leistung | Watt | W | 1 | 2 | 1 | -3 | 0 |
| magnetischer Fluß (SI) | Weber | Wb | 1 | 2 | 1 | -2 | -1 |

Becquerel und Hertz ist dieselbe Einheit, Bq = Hz. Zerfälle oder Schwingungen pro Sekunde sind eine Anzahl pro Sekunde.

Die Einheit Candela für Lichtstärke war nur solange von den übrigen Einheiten unabhängig, wie man die Leistung einer Lichtquelle nicht mit anderen Energieströmen vergleichen konnte. Nachdem man Lichtstärke genügend genau messen kann, ist eine Candela als der Energiestrom cd = 1/683 Watt pro Raumwinkel festgelegt. Eine in alle

Richtungen mit einer Lichtstärke von einer Candela strahlende Kerze strahlt insgesamt $4\pi/683$ Watt Lichtleistung ab. Candela und Watt sind nicht verschiedener als Fuß und nautische Meile.

Solange man Lichtstärken miteinander genauer vergleichen als ihren absoluten Wert bestimmen konnte, rechtfertigte dies eine eigene Maßeinheit für Lichtstärke. Entsprechend müßte man aber für die Massen der Planeten und Monde eine eigene Einheit einführen, denn aus der Beobachtung ihrer Bahn kann man ihren Schwarzschildradius

$$r_{\text{Schwarzschild}} = \frac{2\,G_N m}{c^2} \tag{25.3}$$

mit größerer Genauigkeit als die Newtonsche Gravitationskonstante bestimmen. Daher sind die Verhältnisse des Massen $m$, die man aus den beobachteten Schwarzschildradien berechnet, genauer als die Massen selbst.

Gefühlte Temperatur, empfundene Helligkeit (Lux, Lumen) und äquivalente Energiedosis (Sievert) sind biologische Einheiten, weil in ihre Definition die Auswirkung auf den Menschen, beispielsweise die Empfindlichkeit des Auges, eingehen.

Besteht zwischen zwei Maßeinheiten ein universeller Zusammenhang, so kann man ihre Dimension identifizieren und sie ineinander umrechnen. Dies vereinfacht viele Gleichungen der Physik und legt ihren wesentlichen Kern frei.

So kann man mit Hilfe der Boltzmann-Konstanten

$$k_B = 8{,}617\,342(15)\ 10^{-5}\ \text{eV}\,\text{K}^{-1} \tag{25.4}$$

die Temperatureinheit als Energieeinheit auffassen und Kelvin (K) in Elektronvolt (eV) umrechnen,[1]

$$k_B = 1 \ \Leftrightarrow\ 1\ \text{K} = 8{,}617\,342(15)10^{-5}\ \text{eV}\ ,\ 11\,600\ \text{K} = 1\ \text{eV}\ , \tag{25.5}$$

genau so, wie man Elektronvolt (eV) in Joule (J) umrechnet,

$$1\ \text{eV} = 1{,}602\,176\,462(63)\ 10^{-19}\ \text{J}\ . \tag{25.6}$$

Faßt man Temperaturen als Energien auf, so hat die Boltzmann-Konstante $k_B$ den Wert 1, nicht anders als die Einheiten Radiant oder Steradiant.

Alle Grundeinheiten sind im Laufe der Geschichte zunächst willkürlich festgesetzt worden, weil man in einem Kontinuum möglicher Werte keine physikalisch ausgezeichneten Einheiten kannte. Das hat sich mit dem Fortschritt der Physik geändert.

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, $c$, das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$, die elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0$ und Newtons Gravitationskonstante $G_N$ können statt der SI-Einheiten als Grundeinheiten verwendet werden.

Mit welchem Zahlenfaktor $\varepsilon_0$ und $G_N$ als Grundeinheiten verwendet werden, ist allerdings willkürlich: in Heaviside-Lorentz-Einheiten ($\varepsilon_0$) werden die Maxwellgleichungen einfach, dafür ist das Coulomb-Potential komplizierter als in Gauß-Einheiten ($4\pi\,\varepsilon_0$).

[1] Zur Oberflächentemperatur der Sonne, 5 780 K, gehört also beim Sonnenlicht eine mittlere Photonenergie von etwa 0,5 eV, mehr als eine Größenordnung kleiner als die Rydbergenergie (25.10).

Die Gravitationskonstante $G_N$ zeichnet zusammen mit der Lichtgeschwindigkeit $c$ und dem Planckschen Wirkungsquantum $\hbar$ die Energieskala der Planckmasse

$$m_{\text{Planck}} c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N}} = 1{,}220\,9\ 10^{19}\,\text{GeV} \tag{25.7}$$

aus. Untersucht man aber theoretisch Abläufe, in denen die Quantenmechanik, die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht und die Gravitation gemeinsam wichtig sind, nämlich die gravitative Streuung von hochenergetischen, neutralen Teilchen, so zeigt sich, daß die Gravitation schon bei einer Energie, die um $\sqrt{32\pi} \approx 10$ kleiner ist, so stark wird, daß unser bislang erfolgreiches Verfahren zur Auswertung der Theorie (Störungstheorie, Feynmangraphen) versagt. Daher ist die Energieskala, bei der Gravitation stark wird, wohl etwa um einen Faktor 10 kleiner als $10^{19}$ GeV.

Bei $c$ und $\hbar$ liegen auch die Zahlenfaktoren fest, mit denen sie als Einheit verwendet werden sollten: die Lichtgeschwindigkeit $c$, nicht ein Vielfaches, ist die Grenzgeschwindigkeit für jeden je beobachteten Transport von Energie oder Impuls. Ebenso ist $\hbar$, nicht ein Vielfaches, der Drehimpuls eines Photons und die kleinstmögliche Drehimpulsänderung.

Welche der Naturkonstanten man zweckmäßigerweise als Einheit verwendet, hängt von dem Bereich der Physik ab, den man betrachtet: die Elektrostatik vereinfacht sich in Einheiten von $\varepsilon_0$ oder $4\pi\varepsilon_0$ statt der Stromeinheit Ampere (A). Relativistische Physik enthüllt die Gemeinsamkeiten von Zeit und Raum, wenn man in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit $c$ rechnet, und Meter (m), ursprünglich als das 40 000 000-stel des äquatorialen Erdumfangs definiert, in Sekunden (s) umrechnet (1.52)

$$c = 1 \ \Leftrightarrow\ 1\ \text{s} = 299\,792\,458\ \text{m}\ . \tag{25.8}$$

In der Quantenmechanik ist es vorteilhaft, $\hbar$ als Einheit zu verwenden.

Die Größe $\varepsilon_0$ kommt im Potential des Wasserstoffatoms als $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ zusammen mit der Ladung $e$ des Elektrons vor. Diese Einheitenkombination hat die Dimension Energie mal Länge, denn durch den Abstand vom Schwerpunkt geteilt, ergibt sich die potentielle Energie im Wasserstoffatom. Ebenfalls die Dimension Energie mal Länge hat $\hbar c$, denn $\hbar$ hat die Dimension einer Wirkung, also von Energie mal Zeit oder von Impuls mal Länge. Folglich ist die Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{25.9}$$

eine dimensionslose, maßsystemunabhängige Zahl, die die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung nicht nur des Elektrons charakterisiert. Die Feinstrukturkonstante ist universell, da alle anderen Ladungen ganze (bei Quarks drittelzahlige) Vielfache der Elektronladung sind.

Zur Elektronmasse $m$ gehört die Ruhenergie des Elektrons, $m\,c^2 \approx 511$ keV. Aber die Schrödinger-Gleichung, aus der man die Energien des Wasserstoffatoms ausrechnet, enthält kein $c$ und die Elektronmasse nur im Verhältnis $m/\hbar^2$. Also ist die Energieskala des Wasserstoffatoms die Rydbergenergie (der Faktor 1/2 ergibt sich aus der Schrödingergleichung)

$$\text{Ry} = \frac{1}{2}\,\alpha^2\, m\, c^2 \approx 13{,}6\ \text{eV}\ . \tag{25.10}$$

Die Wirkung $\hbar$ hat die Dimension von Länge mal Impuls. Durch den Impuls $m\,c$ geteilt erhält man daher eine Länge, die um den Faktor $2\pi$ reduzierte Comptonwellenlänge des Elektrons,

$$\lambdabar = \frac{\hbar}{m\,c} = 3{,}861\,592\,642(28)\ 10^{-13}\ \mathrm{m}\ . \tag{25.11}$$

Die Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms enthält kein $c$ und enthält die Masse $m$ nur im Verhältnis zu $\hbar^2$. Folglich ist der Bohrsche Radius

$$a = \frac{\hbar}{\alpha\,m\,c} \approx 0{,}529\ 10^{-10}\ \mathrm{m} \tag{25.12}$$

die Längenskala des Wasserstoffatoms.

Die Naturkonstanten oder andere Einheiten $Q_1, Q_2, \ldots$ sind durch Maßzahlen $Z_i \in \mathbb{R}_+$, $Z_i > 0$, und Potenzen der SI-Einheiten $q_1, q_2, \ldots$ gegeben,

$$Q_i = Z_i q_1^{e_{1i}} q_2^{e_{2i}} \ldots q_n^{e_{ni}} = Z_i \prod_{k=1}^{n} (q_k)^{e_{ki}}\ . \tag{25.13}$$

Wenn die Vektoren $e_i = (e_{1i}, e_{2i}, \ldots e_{ni}) \in \mathbb{R}^n$, zu denen wir die Exponenten zusammenfassen, linear abhängig sind, $\sum_i e_i \lambda_i = 0$, so kombinieren sich die entsprechenden Potenzen der Naturkonstanten zu maßsystemunabhängigen Zahlen $Z(\lambda)$, beispielsweise zur Feinstrukturkonstanten,

$$Q_1^{\lambda_1} Q_2^{\lambda_2} \ldots = \Big(\prod_i Z_i^{\lambda_i}\Big)\, q_1^{\sum_i e_{1i}\lambda_i} q_2^{\sum_i e_{2i}\lambda_i} \ldots = \prod_i Z_i^{\lambda_i} = Z(\lambda)\ . \tag{25.14}$$

Sind hingegen $n$ Exponentenvektoren $e_1, e_2, \ldots e_n$ in (25.13) linear unabhängig, also eine Basis, so kann man die reskalierten Größen

$$\hat{Q}_i = \frac{Q_i}{Z_i} = \prod_{k=1}^{n} (q_k)^{e_{ki}}\ , \tag{25.15}$$

nach den Einheiten $q_j$ auflösen

$$q_j = \prod_{i=1}^{n} \hat{Q}_i^{E_{ij}}\ ,\ \sum_i e_{ki} E_{ij} = \delta_{kj} \tag{25.16}$$

und daher geeignete Wurzeln der Größen $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ als Einheiten verwenden. Wurzeln entstehen bei solch einem Basiswechsel, weil die Matrixelemente der inversen Matrix $E$ einer ganzzahligen Matrix $e$ normalerweise rationale Zahlen sind.

Die Formel zeigt, daß die triviale Aufgabe, eine Maßeinheit $q$ zugunsten einer Naturkonstanten $Q$ zu eliminieren, für mehrere Naturkonstanten das Invertieren von Matrizen erfordert und nur noch von wenigen im Kopf gelöst werden kann.

Nach m und A aufgelöst erhält man aus $c/z_c = \mathrm{m\,s^{-1}}$ und $4\pi z_c^2\, 10^{-7} \epsilon_0 = \mathrm{m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2}$

$$\mathrm{m} = \frac{1}{z_c}\, \mathrm{s}^1 \mathrm{kg}^0 c^1 {\epsilon_0}^0\ ,\ \mathrm{A} = \left(\frac{4\pi}{10^7\, z_c}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{s}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{kg}^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} {\epsilon_0}^{\frac{1}{2}} \tag{25.17}$$

und kann alle Größen der Tabelle (25.1) durch die Einheiten s, kg, $c$ und $\epsilon_0$ ausdrücken.

Tabelle 25.2: Umrechnung in s kg c $\epsilon_0$

| Zeichen | Wert(m kg s A) | m | kg | s | A | Wert(s kg c $\epsilon_0$) | s | kg | c | $\epsilon_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $z_c^{-1}$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| kg | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| s | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| A | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $(4\pi/(10^7 z_c))^{\frac{1}{2}}$ | -1/2 | 1/2 | 3/2 | 1/2 |
| $\mathsf{c}$ | $z_c$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\epsilon_0$ | $10^7/(4\pi z_c^2)$ | -3 | -1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\hbar$ | $1{,}054\,571\,6 \cdot 10^{-34}$ | 2 | 1 | -1 | 0 | $1{,}054\,571\,6 \cdot 10^{-34}\, z_c^{-2}$ | 1 | 1 | 2 | 0 |
| $\mathsf{G}_\mathsf{N}$ | $6{,}673 \cdot 10^{-11}$ | 3 | -1 | -2 | 0 | $6{,}673 \cdot 10^{-11}\, z_c^{-3}$ | 1 | -1 | 3 | 0 |
| $\mu_0$ | $4\pi \cdot 10^{-7}$ | 1 | 1 | -2 | -2 | 1 | 0 | 0 | -2 | -1 |
| C | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | $(4\pi\, 10^{-7}/z_c)^{\frac{1}{2}}$ | 1/2 | 1/2 | 3/2 | 1/2 |
| F | 1 | -2 | -1 | 4 | 2 | $4\pi\, 10^{-7}\, z_c$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Gy | 1 | 2 | 0 | -2 | 0 | $z_c^{-2}$ | 0 | 0 | 2 | 0 |
| Hz | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| H | 1 | 2 | 1 | -2 | -2 | $10^7/(4\pi z_c)$ | 1 | 0 | -1 | -1 |
| J | 1 | 2 | 1 | -2 | 0 | $z_c^{-2}$ | 0 | 1 | 2 | 0 |
| N | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 | $z_c^{-1}$ | -1 | 1 | 1 | 0 |
| $\Omega$ | 1 | 2 | 1 | -3 | -2 | $10^7/(4\pi z_c)$ | 0 | 0 | -1 | -1 |
| Pa | 1 | -1 | 1 | -2 | 0 | $z_c$ | -3 | 1 | -1 | 0 |
| S | 1 | -2 | -1 | 3 | 2 | $4\pi\, 10^{-7}\, z_c$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| T | 1 | 0 | 1 | -2 | -1 | $(10^7 z_c/(4\pi))^{\frac{1}{2}}$ | -3/2 | 1/2 | -3/2 | -1/2 |
| V | 1 | 2 | 1 | -3 | -1 | $(4\pi\, z_c^3\, 10^{-7})^{-\frac{1}{2}}$ | -1/2 | 1/2 | 1/2 | -1/2 |
| W | 1 | 2 | 1 | -3 | 0 | $z_c^{-2}$ | -1 | 1 | 2 | 0 |
| Wb | 1 | 2 | 1 | -2 | -1 | $(4\pi\, z_c^3\, 10^{-7})^{-\frac{1}{2}}$ | 1/2 | 1/2 | 1/2 | -1/2 |

Im relativistischen Heaviside-System vernachlässigt man einfach die Potenzen von $\mathsf{c}$ und $\epsilon_0$ und liest beispielsweise 1 Henry $= 10^7/(299\,792\,458 \cdot 4\pi)$ s.

Gleichungen zwischen physikalischen Größen gelten ja genau dann, wenn die Größen in ihrer Maßzahl und der Potenz der Einheiten übereinstimmen. Sie gelten daher auch, wenn man einige der Einheiten durch 1 ersetzt, genauso wie die Gleichheit von Funktionen $\mathsf{P}(z) = \mathsf{Q}(z)$ die Gleichung $\mathsf{P}(1) = \mathsf{Q}(1)$ zur Folge hat. Gilt eine Gleichung im SI-System m, kg, s, A, so gilt sie auch in den Einheiten s, kg, $\mathsf{c}$, $\epsilon_0$. Denn die einen Einheiten können umkehrbar in die anderen umgerechnet werden. Die Gleichungen gelten unverändert, wenn man $\mathsf{c}$ und $\epsilon_0$ durch 1 ersetzt, also alle Faktoren $\mathsf{c}$ und $\epsilon_0$ wegläßt.

Zwar kann man dann den physikalischen Größen nicht mehr die weggelassenen Einheiten ansehen, aber man kann sie jederzeit wieder hinzufügen, wenn man weiß, welcher physikalischen Größe, beispielsweise einer Kraft oder einer Leistung, diese Maßzahl zukommt. Das ist in der Geometrie nicht anders. Dort verwenden Mathematiker Einheitsvektoren, statt Vektoren, die eine Längeneinheit lang sind. Am Ende jeder einheitenlosen Rechnung kann man die Einheit rekonstruieren, wenn man weiß, ob das Ergebnis eine Länge, eine Fläche oder ein Volumen ist.

Wie die Tabelle 25.2 bei der Widerstandseinheit Ohm zeigt, ist $c^{-1}\epsilon_0^{-1}$ ein elektrischer Widerstand. Die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/(4\pi\,\epsilon_0\,\hbar\,c)$ (25.9) ist dimensionslos. Folglich ist

$$\frac{1}{R_{\text{Klitzing}}} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} = \frac{e^2}{h} \tag{25.18}$$

eine Leitfähigkeit, die, da sie von $\hbar$, nicht aber von $c$ abhängt, für Experimente wichtig sein sollte, die Quanteneigenschaften von langsam bewegten Elektronen betreffen. Tatsächlich treten im Kontinuum denkbarer Leitfähigkeiten beim Quantenhalleffekt die diskreten, ganzzahligen Vielfache dieser Leitfähigkeit auf. Da sie hochgenau und mit vergleichsweise geringem Aufwand gemessen werden kann, wird erwogen, ihr Inverses, die von Klitzing-Konstante

$$R_{\text{Klitzing}} = 25\,812{,}807\ \Omega \tag{25.19}$$

statt der Stromeinheit Ampere als Basiseinheit des SI-Systems zu definieren.

Mit $\mathrm{m} = 10^2\mathrm{cm}$, $\mathrm{kg} = 10^3\,\mathrm{g}$ und $A = 10\,z_c\,\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\mathrm{s}^{-2}(4\pi\,\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}$ kann man die Größen der Tabelle 25.1 leicht in Gaußeinheiten, cm, g, s und $4\pi\epsilon_0$ umrechnen.

Tabelle 25.3: Umrechnung in cm g s $4\pi\epsilon_0$

| Zeichen | Wert(m kg s A) | m | kg | s | A | Wert(cm g s $4\pi\epsilon_0$) | cm | g | s | $4\pi\epsilon_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $10^2$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| kg | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $10^3$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| s | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| A | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $10\,z_c$ | 3/2 | 1/2 | -2 | 1/2 |
| $c$ | $z_c$ | 1 | 0 | -1 | 0 | $10^2 z_c$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $\epsilon_0$ | $10^7/(4\pi\,z_c^2)$ | -3 | -1 | 4 | 2 | $(4\pi)^{-1}$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\hbar$ | $1{,}054\,571\,6\cdot 10^{-34}$ | 2 | 1 | -1 | 0 | $1{,}054\,571\,6\cdot 10^{-27}$ | 2 | 1 | -1 | 0 |
| $G_N$ | $6{,}673\cdot 10^{-11}$ | 3 | -1 | -2 | 0 | $6{,}673\cdot 10^{-8}$ | 3 | -1 | -2 | 0 |
| $c\,\mu_0$ | $4\pi\cdot 10^{-5}\,z_c$ | 2 | 1 | -3 | -2 | $4\pi\,10^{-2}z_c^{-1}$ | -1 | 0 | 1 | -1 |
| C | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | $10\,z_c$ | 3/2 | 1/2 | -1 | 1/2 |
| F | 1 | -2 | -1 | 4 | 2 | $10^{-5}\,z_c^2$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Gy | 1 | 2 | 0 | -2 | 0 | $10^4$ | 2 | 0 | -2 | 0 |
| Hz | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| H | 1 | 2 | 1 | -2 | -2 | $10^5/z_c^2$ | -1 | 0 | 2 | -1 |
| J | 1 | 2 | 1 | -2 | 0 | $10^7$ | 2 | 1 | -2 | 0 |
| N | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 | $10^5$ | 1 | 1 | -2 | 0 |
| $\Omega$ | 1 | 2 | 1 | -3 | -2 | $10^5/z_c^2$ | -1 | 0 | 1 | -1 |
| Pa | 1 | -1 | 1 | -2 | 0 | 10 | -1 | 1 | -2 | 0 |
| S | 1 | -2 | -1 | 3 | 2 | $10^{-5}\,z_c^2$ | 1 | 0 | -1 | 1 |
| c T | $z_c$ | 1 | 1 | -3 | -1 | $10^4$ | -1/2 | 1/2 | -1 | -1/2 |
| V | 1 | 2 | 1 | -3 | -1 | $10^6/z_c$ | 1/2 | 1/2 | -1 | -1/2 |
| W | 1 | 2 | 1 | -3 | 0 | $10^7$ | 2 | 1 | -3 | 0 |
| c Wb | $z_c$ | 3 | 1 | -3 | -1 | $10^8$ | 3/2 | 1/2 | -1/2 | -1/2 |

Allerdings verwendet man im Gaußschen System die Bezeichnung Magnetfeld für das mit $c$ multiplizierte Magnetfeld des SI-Systems

$$B_{\text{Gauß}} = c\, B_{\text{SI}} \ . \tag{25.20}$$

Dann ist die Lorentzkraft $q(E+v\times B_{\text{SI}}) = q(E+\frac{v}{c}\times B_{\text{Gauß}})$. Das scheint komplizierter, aber so definiert haben das elektrische Feld $E$ und das Magnetfeld $B_{\text{Gauß}}$ dieselbe Maßeinheit und können der Größe nach verglichen werden,

$$10^{-4}\, c\, \mathrm{T} = \mathrm{Gs} = \mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{s}^{-1}\, (4\pi\epsilon_0)^{-\frac{1}{2}} \ . \tag{25.21}$$

Tabelle 25.4: Maßeinheiten und Naturkonstante im Gaußschen System

| Größe | Maßeinheit | Zeichen | Wert | cm | g | s | $4\pi\epsilon_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Länge | Zentimeter | cm | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Masse | Gramm | g | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Zeit | Sekunde | s | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Strom | | | 1 | 3/2 | 1/2 | -2 | 1/2 |
| Lichtgeschwindigkeit | | $c$ | $10^2\, z_c$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| elektrische Feldkonstante | | $\epsilon_0$ | $(4\pi)^{-1}$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Wirkungsquantum | | $\hbar$ | $1{,}054\,571\,6\cdot 10^{-27}$ | 2 | 1 | -1 | 0 |
| Gravitationskonstante | | $G_N$ | $6{,}673\cdot 10^{-8}$ | 3 | -1 | -2 | 0 |
| $c$ Induktionskonstante | | $c\,\mu_0$ | $4\pi\, 10^{-2} z_c^{-1}$ | -1 | 0 | 1 | -1 |
| Ladung | Franklin | Fr | 1 | 3/2 | 1/2 | -1 | 1/2 |
| Kapazität | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Dosis, Energie pro Masse | | | 1 | 2 | 0 | -2 | 0 |
| Frequenz, Rate | Hertz | Hz | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| Induktivität | | | 1 | -1 | 0 | 2 | -1 |
| Energie | Erg | erg | 1 | 2 | 1 | -2 | 0 |
| Kraft | Dyn | dyn | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 |
| Widerstand | | | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 |
| Druck, Energiedichte | Barye | Ba | 1 | -1 | 1 | -2 | 0 |
| Leitfähigkeit | | | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 |
| Magnetfeldstärke (Gauß) | Gauß | Gs | 1 | -1/2 | 1/2 | -1 | -1/2 |
| Spannung | Gilbert | Gb | 1 | 1/2 | 1/2 | -1 | -1/2 |
| Leistung | | | 1 | 2 | 1 | -3 | 0 |
| magnetischer Fluß (Gauß) | Maxwell | Mx | 1 | 3/2 | 1/2 | -1 | -1/2 |

Die Potenzen von $4\pi\epsilon_0$ werden im Gaußschen System nicht angegeben, sondern durch Eins ersetzt. Zudem erspart man sich oft die Angabe der Einheit und ersetzt sie durch das Symbol [esu] (elektrostatische Einheiten) als Platzhalter für die jeweils zutreffende Maßeinheit in (halbzahligen) Potenzen von cm, g und s.

Man rechnet so nur mit den Maßzahlen.

# Literaturverzeichnis


[1] Tom Apostol, Mathematical Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1957

[2] Vladimir I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1980

[3] Michael Victor Berry, Regular and Irregular Motion, in S. Jorna (ed.), Topics in Nonlinear Dynamics, Amer. Inst. Phys. Conf. Proceedings Nr.46 (1978) 16

[4] Hermann Bondi, Relativity and Common Sense, Heinemann, London, 1965
Hermann Bondi, Einsteins Einmaleins, Droemersche Verlagsanstalt, München, 1971

[5] Bronstein und Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, 2000

[6] Richard Courant und David Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik II, Springer-Verlag, Berlin, 1968

[7] Norbert Dragon, Geometrie der Relativitätstheorie, www.itp.uni-hannover.de/~dragon

[8] Gert Eilenberger, Reguläres und chaotisches Verhalten Hamiltonscher Systeme, 14. Ferienkurs Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, Kernforschungsanlage Jülich, 1983

[9] Friedhelm Erwe, Differential- und Integralrechnung, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967

[10] S. Eidelman et al., The Review of Particle Physics, Phys. Lett. B 592 (2004) 1 http://pdg.lbl.gov

[11] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York, 1965

[12] John David Jackson and Lev Borisovich Okun, Historical roots of gauge invariance, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 663 – 680

[13] Dierk-Ekkehard Liebscher, Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig und Stuttgart, 1999

[14] Ludvig Valentin Lorenz, On the Identity of the Vibrations of Light with Electrical Currents, Phil. Mag. ser. 4, 34 (1867) 287 – 301

[15] Jürgen Moser, Stable and Random Motion in Dynamical Systems, Princeton University Press, Princeton, 1973

[16] Peter Nemec, http://www.ohg-sb.de/lehrer/nemec/relativ.htm

[17] Tristan Needham, Visual Complex Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1997

[18] John O'Connor and Edmund Robertson, The MacTutor History of Mathematics archive, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/BiogIndex.html

[19] Hermann Schulz, Physik mit Bleistift, Verlag Harri Deutsch, 2004

[20] Wolfgang Walter, Einführung in die Potentialtheorie, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971

[21] Wolfgang Walter, Einführung in die Theorie der Distributionen, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1974

[22] Edmund Taylor Whittaker and George Neville Watson, A Course of MODERN ANALYSIS, Cambridge At the University Press, 1927

# Index