Geometrie der Relativitätstheorie

Norbert Dragon

Der Artikel hat zur Zeit noch nicht seine endgültige Form, die jeweils neueste Fassung befindet sich im Internet bei http://www.itp.uni-hannover.de/˜dragon. Für Hinweise an dragon@itp.uni-hannover.de auf Unverständliches oder Falsches, insbesondere auch auf Tippfehler, bin ich dankbar.

Dieser Text wurde mit LaTeX 2$_\varepsilon$ und der KOMA-Script-Klasse scrbook, am 1. Mai 2019 gesetzt.

Überblick

So einfach wie möglich, aber nicht einfacher.

So einfach wie möglich, aber nicht einfacher. Diese Forderung von Albert Einstein gilt insbesondere für jede Darstellung relativistischer Physik, ein Gebiet, das Laien rätseln läßt, ihre Phantasie erregt und ihr Vorstellungsvermögen quält, unnötigerweise, denn relativistische Physik beruht auf einfachen geometrischen Tatsachen.

Um die Grundlagen der Relativitätstheorie zu begreifen, braucht man weder Koordinaten noch gedachte Systeme von Uhren, die das Universum füllen, sowenig wie Millimeterpapier oder Koordinatenachsen für Euklidische Geometrie erforderlich sind. Es reicht, sich klar zu machen, was Beobachter sehen, statt darüber zu streiten, ob dieser oder jener Beobachter recht hat. Relativitätstheorie ist eine physikalische Theorie, nicht eine juristische.

Aus dem einfachen Befund, daß sich im Vakuum Ruhe nicht von gleichförmiger Bewegung unterscheiden läßt, ergeben sich die Verlangsamung bewegter Uhren und die Verkürzung bewegter Maßstäbe ebenso natürlich, wie eine geneigte Leiter weniger hoch ragt als eine aufrecht stehende. Uhren sind nicht rätselhafter als Kilometerzähler und zeigen zwischen Start und Ziel eine Zeit an, die vom Weg abhängt, der dazwischen zurückgelegt wurde. Dies ist die unspektakuläre Erklärung des scheinbar paradoxen Alterns von Zwillingen. So wie niemand darüber verwundert ist, daß in einem Dreieck die Verbindung über Eck länger ist als die gerade Verbindungslinie zweier Ecken, sowenig sollte man von der theoretischen Folgerung und experimentellen Bestätigung schockiert sein, daß auf einer Uhr eines Stubenhockers mehr Zeit vergeht als auf der Uhr eines Reisenden, der sich zwischen Abfahrt und Wiederkehr bewegt.

Die ersten beiden Kapitel sollten im Wesentlichen auch Nichtphysikern mit geringen Mathematikkenntnissen verständlich sein. Dabei kann die Einfachheit der Darstellung täuschen. Wirkliches Verstehen erfordert das sorgfältige Durchdenken der Begründungen, der Gleichungen und der Diagramme. Ich empfehle, mit bereitliegendem Papier und Bleistift zu lesen.

Die weiteren Kapitel setzen mathematische Kenntnisse voraus, wie sie Physiker und Mathematiker während des Grundstudiums erwerben. Um verwickeltere Fragen zu untersuchen, führen wir Koordinaten als Funktionen der gemessenen Uhrzeiten und Richtungen von Lichtstrahlen ein und bestimmen die Lorentztransformationen, die diese Meßwerte auf diejenigen abbilden, die bewegte Beobachter messen. Damit bestimmen wir, wie sich Geschwindigkeiten kombinieren, welche Bilder bewegte Beobachter sehen und wie die Energie und der Impuls eines Teilchens von seiner Geschwindigkeit abhängen.

Im vierten Kapitel stellen wir die Grundlagen der Mechanik zusammen und verwenden sie für relativistische Teilchen. Wichtig ist dabei der Zusammenhang von Physik und Geometrie, von Erhaltungsgrößen wie Energie, Impuls und Drehimpuls und Symmetrien wie Verschiebungen in Raum und Zeit oder Drehungen oder Lorentztransformationen. Jet-Räume, die wir einführen und für unsere Betrachtungen verwenden, mögen dem Leser auf den ersten Blick als vermeidbare Komplikation erscheinen; aber in ihnen wird der Zusammenhang von Erhaltungsgrößen und Symmetrien klar und einfach.

Das fünfte Kapitel stellt die Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie dar und zeigt insbesondere, daß Abänderungen der elektrischen Ladungsverteilung mit Lichtgeschwindigkeit Änderungen der elektromagnetischen Felder bewirken. Die elektrodynamischen Wechselwirkungen bleiben bei Vergrößerung oder Verkleinerung der Anordnungen ungeändert, daher kann man nicht aus der Elektrodynamik ableiten, warum die elementaren Teilchen ihre und keine andere Masse haben und warum Atome diese und nicht jene Größe haben.

In Kapitel 6 betrachten wir Bahnen, Beobachter und Uhren im Gravitationsfeld der Sonne oder eines schwarzen Lochs.

Das Äquivalenzprinzip faßt die Beobachtung zusammen, daß alle Testteilchen, egal woraus sie bestehen, gleich fallen und bei gleicher anfänglicher Lage und Geschwindigkeit dieselben Weltlinien durchlaufen. Diese Tatsache, die ursprünglich als Geodätenhypothese gefordert wurde und die grundlegend für die Deutung der Allgemeinen Relativitätstheorie ist, folgern wir in Kapitel 7 aus der Koordinateninvarianz der Wirkung.

Daran schließt sich die Herleitung der Einsteingleichungen, die den gravitativen Einfluß von Energie- und Impulsdichten beschreiben. Wir lösen die Einsteingleichungen in einfachen Fällen und berechnen, wie man Gravitationswellen nachweist.

Geometrische Strukturen von gekrümmten Räumen wie Tangentialraum, Differentialformen, Metrik und Parallelverschiebung werden im Anhang erklärt. Insbesondere werden die geometrische Bedeutung von Torsion und Krümmung vorgeführt. Mit ausgesendetem und zurückgestreutem Licht definieren wir drehungsfreie Richtungen.

Bei Uhren auf Meereshöhe, die mit der Erddrehung mitgeführt werden, bewirken ihre unterschiedlichen Geschwindigkeiten und die wegen der Erdabplattung unterschiedliche Gravitation gerade, daß sie alle gleich schnell laufen.

Aberration, die Lorentztransformation der Richtungen von Lichtstrahlen, wirkt wie eine Möbiustransformation, die man von der Riemannschen Zahlenkugel kennt. Daß Aberration konform ist, motiviert die genauere Untersuchung konformer Transformationen. Umgekehrt zeigt sich, daß die größtmögliche Gruppe konformer Transformationen wie Aberration auf die Richtungen von Lichtstrahlen wirkt.

Die beiden Noethertheoreme verknüpfen Geometrie und Physik: zu Symmetrien der Wirkung gehören Erhaltungsgrößen und umgekehrt und zu Eichsymmetrien der Wirkung gehören Identitäten der Bewegungsgleichungen und umgekehrt. Hieraus folgt, daß auch bei wechselwirkenden Teilchen das Quadrat des Viererimpulses konstant ist, wenn die Wirkung unter Reparametrisierung der Weltlinie des Teilchens invariant ist. Ebenso ist bei eichinvarianter Wirkung die elektrische Ladung erhalten. In Anhang G erklären wir so physikalische Grundtatsachen durch Symmetrien.

Der Text ist aus einem Vorlesungsskript in dem Bemühen entstanden, für die immer wieder in der news-group de.sci.physik gestellten Fragen zur Relativitätstheorie stimmige und vollständige Antworten zu geben – so einfach wie möglich, aber nicht einfacher.

Für hilfreiche Hinweise und geduldiges Zuhören bedanke ich mich insbesondere bei Frédéric Arenou, Werner Benger, Christian Böhmer, Christoph Dehne, Jürgen Ehlers, Christopher Eltschka, Chris Hillman, Olaf Lechtenfeld, Volker Perlick, Markus Pössel und Bernd Schmidt. Ulla und Hermann Nicolai danke ich für ihre Gastfreundschaft während meines Aufenthalts am Albert-Einstein-Institut der Max-Planck-Gesellschaft.

Hannover, im November 2012 *Norbert Dragon*

Inhaltsverzeichnis

1 Die Raumzeit

Einfache geometrische Eigenschaften der Raumzeit und freier Teilchen liegen der Relativitätstheorie zugrunde so wie Euklidische Geometrie aus einfachen Eigenschaften von Punkten und Geraden folgt. Das Vakuum, die leere, vierdimensionale Raumzeit, bestimmt gerade Linien und die Ausbreitung von Licht. Vernachlässigt man die Gravitation, dann ist das Vakuum isotrop und homogen und erlaubt nicht, zwischen Ruhe und gradlinig gleichförmiger Bewegung zu unterscheiden. Anders als Newton dachte kann es daher in der leeren Raumzeit keine meßbare universelle Zeit geben, die den Ereignissen an sich zukommt. Ob zwei verschiedene Ereignisse gleichzeitig stattfinden, hängt vom Beobachter ab; ebenso wie es in Euklidischer Geometrie von einer gegebenen Richtung abhängt, ob zwei Punkte auf einer dazu senkrechten Geraden liegen.

Die vierdimensionale Raumzeit

Einen Punkt im Raum können wir dadurch bezeichnen, daß wir angeben, wie weit er nach rechts, nach vorn und nach oben von einem gewählten Bezugspunkt entfernt ist. Diese Angaben heißen Koordinaten des Punktes. Man braucht drei Koordinaten, um einen jeden Punkt zu bezeichnen. Der Raum ist dreidimensional. Die Koordinaten eines Punktes hängen natürlich davon ab, welchen Bezugspunkt der Beobachter gewählt hat und welche Richtungen er als rechts, vorn oder oben wählt.

Für physikalische Abläufe ist, wie im täglichen Leben bei Verabredungen, nicht nur der Ort wichtig, an dem ein Ereignis stattfindet, sondern auch die Zeit, zu der es stattfindet. Die Menge aller Ereignisse, die Raumzeit, ist vierdimensional, denn um ein einzelnes Ereignis zu bezeichnen, werden vier Angaben benötigt, der Ort, an dem es stattfindet, und die Zeit, zu der es sich ereignet.

Die vierdimensionale Raumzeit fasziniert und übersteigt unser Vorstellungsvermögen, das wir im Alltagsleben entwickelt haben. Dabei ist es ganz einfach. Wer sich bei der Raumzeit einen Stapel von Bildern vorstellt, wie sie zum Beispiel auf Filmrollen gespeichert werden und die eine Abfolge von dreidimensionalen Situationen zeigen, hat die vierdimensionale Raumzeit genauso erfaßt, wie ein Architekt, der von einem dreidimensionalen Gebäude etliche zweidimensionale Baupläne, die Grundrisse der verschiedenen Stockwerke und Quer- und Längsschnitte, zeichnet.

Dem entsprechend stellen wir die zeitliche Abfolge von Ereignissen in zweidimensionalen Raumzeitdiagrammen dar. In ihnen gehört beispielsweise zum physikalischen Vorgang, daß sich zwei Teilchen gleichförmig bewegen und in einem Ereignis zusammenstoßen, einfach die geometrische Figur, daß sich zwei Geraden schneiden. Einer Darstellung, die nur die Orte zeigte, könnte man nicht entnehmen, ob beide Teilchen denselben Ort zu verschiedenen Zeiten durchlaufen und sich verfehlen.

Die physikalischen Befunde fügen die unserer Intuition fremde Erkenntnis hinzu, daß die vierdimensionale Raumzeit ein Ganzes ist, das erst vom Beobachter in Schichten gleicher Zeit zerlegt wird. Anders als es Newton für selbstverständlich hielt, stimmen diese Schichten gleicher Zeit nicht für Beobachter überein, die sich gegeneinander bewegen.

Daß diese Schichten bei gegeneinander bewegten Beobachtern verschieden sind, ist die größte Hürde für das Begreifen relativistischer Physik. Nicht nur die drei Koordinaten des Ortes, sondern auch die Zeit, die zusammen ein Ereignis bezeichnen, hängen vom Beobachter ab: es gibt keine meßbare Weltzeit, die unabhängig vom Beobachter jedem Ereignis zukommt.

Jedes Ereignis E bestimmt die späteren Ereignisse, die von E durch Licht oder andere elektromagnetische Effekte beeinflußt werden können und umgekehrt bestimmt E alle frühere Ereignisse, von denen es hat beeinflußt werden können. Diese Ereignisse bilden den Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel von E, der als geometrische Eigenschaft zu jedem Ereignis der Raumzeit gehört.

Eine Uhr, auf die keine Kraft wirkt und die Ereignisse durchläuft, zeigt die Zeit an, die zwischen ihnen vergeht. Diese Zeit hängt nicht von den konstruktiven Einzelheiten der Uhr ab, sondern ist eine geometrische Eigenschaft von Ereignispaaren, ihr zeitlicher Abstand. Von diesem zeitlichen Abstand leiten sich alle anderen Abstände ab, insbesondere ist der räumliche Abstand zweier Punkte die Laufzeit, die Licht von einem zum anderen Punkt braucht (1.6). Der zeitliche Abstand zweier Ereignisse verleiht der Raumzeit eine geometrische Struktur, die Euklidischer Geometrie ähnelt aber auch von ihr verschieden ist. Wir werden noch sehen, daß Ereignisse, die von einem gewählten Ereignis zeitlich gleich weit entfernt sind, auf einer Hyperbel liegen und nicht, wie in Euklidischer Geometrie, auf einem Kreis. Die Geometrie der Raumzeit ist normale Schulgeometrie, in der Zirkel durch Vorrichtungen ersetzt sind, die Hyperbeln zeichnen.

Um die Vielzahl möglicher Verwicklungen zu vermeiden, untersuchen wir Vorgänge in einem leeren Bereich der Raumzeit, dem Vakuum, von dem alle Teilchen entfernt und alle Einwirkungen von außen, wie elektrische und magnetische Felder, abgeschirmt sind. Es ist die Bühne, auf der wir das Verhalten von Licht und Teilchen studieren, die von Beobachtern gesehen und mit Uhren und Maßstäben gemessen werden.

So einfach der Zustand Vakuum scheint, er ist eine Idealisierung und kann nur ungefähr realisiert werden. So werden wir dauernd von Neutrinos durchströmt, die aus der Sonne kommen und eine Richtung im ansonsten isotropen Raum auszeichnen. Wir können sie nicht abschirmen, weil sie nicht genügend gut wechselwirken. Aber weil die Neutrinos alles durchdringen, stören sie auch nicht und wirken sich nur aus, wenn wir mit Absicht nach ihnen suchen.

Der von Hintergrundstrahlung erfüllte Weltraum ist kein Vakuum. Diese Strahlung ist von der Frühzeit der Entwicklung des Universums zurückgeblieben und zeichnet ein Ruhsystem aus, durch das sich die Sonne mit einer Geschwindigkeit von etwa 370 km/s bewegt [23]. Diese Hintergrundstrahlung kann man mit Wänden abschirmen, allerdings muß man dann die Wände kühlen, damit nicht die Wärmestrahlung der Wände den Raum füllt.

Allgegenwärtige Gravitation

Selbst nachdem man alle Teilchen entfernt hat und alle äußeren Einflüsse abgeschirmt hat, behält das Vakuum Struktur.

Gravitation kann man nicht abschirmen oder absaugen. Sie gehört daher mit zur leeren Raumzeit. Was immer man zur Abschirmung verwendet, es wirkt sich gravitativ durch zusätzliche Gravitation aus. Zwar kann man in speziellen Anordnungen die gravitative Anziehung durch Zusatzmassen in einem beschränkten Gebiet aufheben. Wenn man zum Beispiel einen Teil einer Kugelschale, der Gravitation hervorruft, zu einer vollständigen, kugelsymmetrischen Schale ergänzt, so ist im Inneren der Kugelschale das Gravitationsfeld des Segments aufgehoben. Man kann aber nicht wie in einem Faradaykäfig durch Teilchen, die im Leiter frei verschiebbar sind und deren Trägheit vernachlässigbar ist, von außen einwirkende, unvorhersehbare Störungen abschirmen. Bei frei verschiebbaren Teilchen ist nicht ein verschwindendes Gravitationsfeld im abgeschirmten Bereich der Zustand niedrigster Energie, sondern, weil Gravitation anziehend wirkt, die möglichst dichte Packung der Teilchen. Sie schirmen nicht Gravitation ab, sondern verstärken sie. Es gibt auch nicht Körper, die, weil sie besonders träge sind, fast unempfindlich für Gravitation sind. Unabhängig von ihrer Masse fallen alle Testteilchen gleich.

Man kann Gravitation auch nicht vollständig wegtransformieren, indem man in einem frei fallenden Labor experimentiert. In einem Labor, das im freien Fall die Erde umkreist, kann man an Eigenschaften der Gravitation ohne Blick auf die Erde oder die Laborwände drei Richtungen, nämlich hintereinander, nebeneinander und untereinander physikalisch unterscheiden. Testteilchen in solch einem Labor umrunden die Erde auf Ellipsen, im einfachsten Fall auf Kreisen um den Erdmittelpunkt. Laufen sie hintereinander auf demselben Kreis, so ist ihr Abstand zu allen Zeiten unverändert. Laufen sie zunächst nebeneinander auf verschiedenen Kreisen mit gleichem Radius um den Erdmittelpunkt, dann schneiden sich die Bahnebenen, in denen die Kreise verlaufen, und die Kreisbahnen schneiden sich zweimal pro Erdumlauf: nebeneinander laufende Testteilchen pendeln mit der Umlauffrequenz umeinander. Laufen die Testteilchen untereinander in derselben Bahnebene auf Kreisen mit verschiedenen Radien, so läuft das erdnähere Teilchen schneller als das obere und beide Teilchen entfernen sich voneinander.

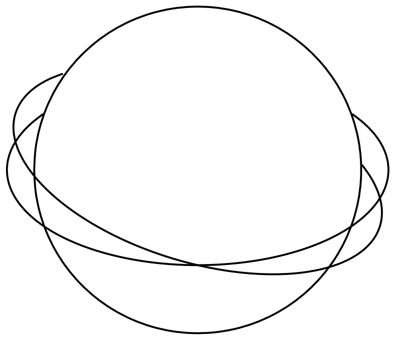

Abbildung 1.1: Bahnen um die Erde

Gerade Weltlinien in der gekrümmten Raumzeit

Für jeden Beobachter steht ohne Bezug auf andere Körper auch im Vakuum fest, ob er frei fällt oder beschleunigt ist. Das kann er zum Beispiel an einer Sanduhr oder an mitgeführten Pendeln ablesen. Pendeln sie hin und her, so wirkt eine Beschleunigung senkrecht zur Drehachse, ansonsten kreisen Pendel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Ein Beobachter durchläuft im Laufe der Zeit eine Menge von Ereignissen. Diese von der Vergangenheit in die Zukunft durchlaufene Linie in der Raumzeit ist seine Weltlinie. Für jedes frei fallende Teilchen liegt diese Weltlinie fest, wenn man ein Ereignis angibt, das es durchläuft, und die Geschwindigkeit, mit der es durchlaufen wird. Dem entsprechen ein Punkt auf der Weltlinie und die Richtung, mit der die Weltlinie diesen Punkt durchläuft. Da diese Weltlinien nicht davon abhängen, welche Teilchen sie durchlaufen, denn alle Teilchen fallen gleich, definieren die Weltlinien frei fallender Teilchen eine geometrische Struktur, die Geraden der Raumzeit.

Wohlgemerkt, die Weltlinien freifallender Teilchen und von Licht sind Geraden der vierdimensionalen Raumzeit, aber die dabei räumlich durchlaufenen Bahnen sind nicht Geraden des dreidimensionalen Raumes. Durch jeden Punkt des Raumes gehen ja in jeder Richtung mit unterschiedlicher Geschwindigkeit unterschiedliche Wurfparabeln. Sie sind, anders als von Geraden zu fordern, nicht durch einen Punkt und eine Richtung festgelegt.

Unter diesen räumlichen Fallkurven kann man bei gleichbleibender Gravitation wiederum eine Klasse von Linien als Geraden auswählen und tut dies. Räumlich gerade sind die Bahnen von Licht. Ob eine Kante gerade ist, prüft man durch Vergleich mit Licht: man peilt an ihr entlang. Da Lichtstrahlen gravitativ abgelenkt werden, können sie sich mehrfach schneiden und genügen nicht dem Parallelenaxiom. Sie sind Geraden eines durch Gravitation gekrümmten Raumes. Wenn sich die Gravitation durch Bewegung der Massen mit der Zeit ändert, dann definieren die Lichtstrahlen keine Geraden mehr, denn dann durchläuft Licht auf dem Hinweg eine andere Bahn als auf dem Rückweg.

Zwar ist denkbar, in der Raumzeit andere Linien als Gerade zu bezeichnen, zum Beispiel solche Weltlinien, die in irgendeinem Koordinatendiagramm mit dem Lineal gezeichnet werden können. Aber solche Linien gehören nicht zu den geometrischen Eigenschaften der Raumzeit, denn Testteilchen durchlaufen solche andere Weltlinien nur, wenn man sie durch Kräfte dazu zwingt, die sich für verschiedene Teilchen unterscheiden. Die einzigen von der Natur allgemein ausgezeichneten Weltlinien sind die Weltlinien frei fallender Teilchen, dazu gehören auch die Weltlinien von Lichtpulsen im Vakuum.

Wer die Weltlinien frei fallender Teilchen gedanklich verfolgt, die in Abbildung 1.1 auf verschiedenen Großkreisen die Erde umlaufen, erkennt, daß die Raumzeit gekrümmt ist. Bezieht man, wie in Abbildung 1.2, in einem Diagramm der Raumzeit die Orte, die von den Teilchen im Laufe der Zeit durchlaufen werden, auf eines der Teilchen, so pendelt die ebenso gerade Weltlinie des zweiten Teilchens um die erste Weltlinie herum. Dies zeigt, daß die Raumzeit gekrümmt ist, denn gerade Weltlinien können sich wiederholt schneiden.

Grund für die Krümmung der Raumzeit und die relative Bewegung frei fallender Teilchen ist, daß die Gravitation nicht überall gleich ist: die Erdanziehung wirkt auf erdnähere Teilchen stärker und bei gleichem Abstand wirkt sie auf nebeneinander laufende

Teilchen in verschiedene Richtung. An der unterschiedlichen Gravitation kann man Orte und Richtungen physikalisch unterscheiden. Beschränkt man sich aber auf so kurze Zeiten und so kleine räumliche Abstände, daß die Ungleichmäßigkeit der Gravitation sich bei gegebener Meßgenauigkeit nicht auswirkt, so wird in einem mitfallenden Bezugssystem die Gravitation unmerklich. In genügend kleinen Raumzeitgebieten ist die Raumzeit nicht merklich gekrümmt und hat die geometrischen Eigenschaften eines flachen Raumes.

Da man Gravitation nicht abschirmen kann, wir aber zunächst die damit zusammenhängenden Verwicklungen vermeiden möchten, beschränken wir uns in den ersten fünf Kapiteln auf so kleine Zeitspannen und Raumgebiete, daß gravitative Effekte nicht meßbar sind, oder wir berücksichtigen gedanklich die bekannten Auswirkungen der Gravitation und ziehen sie vom Verhalten physikalischer Systeme ab.

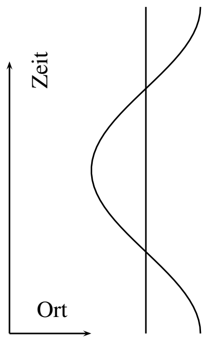

Abbildung 1.2: Geraden in der gekrümmten Raumzeit

Wenn man alle äußeren Einflüsse abschirmt und gravitative Effekte vernachlässigt, dann kann man für ein Ereignis im Vakuum nicht seine Zeit und nicht seinen Ort ohne Bezug auf andere Ereignisse messen – sowenig man auf See geographische Länge ohne Bezug auf Sonnenstand und Uhrzeit in Greenwich oder ohne GPS bestimmen kann. Denn physikalische Vorgänge laufen überall und jederzeit gleich ab. Die Raumzeit ist homogen. Ebenso sind alle räumlichen Richtungen gleich. Die Raumzeit ist isotrop.

Drehbewegung

Drehbewegung, die zeitliche Änderung von Richtungen, kann man, anders als gradlinige Bewegung, ohne Bezug auf andere Körper, wie etwa die Fixsterne, messen. Sendet man Licht in eine Richtung aus, dann sieht man das reflektierte Licht, wenn man sich inzwischen gedreht hat, aus einer anderen Richtung zurückkommen, und man muß bei einer Filmvorführung in eine Richtung projizieren und in eine andere Richtung schauen. Nur wenn man sich nicht dreht und keine Kraft die Geschwindigkeit ändert, kommt reflektiertes Licht jeweils aus der Richtung zurück, in die man es ausgesendet hatte. In drehenden Bezugssystemen sind Lichtstrahlen nicht umkehrbar. Darauf beruhen Interferometer, die zum Beispiel in Flugzeugen oder Raketen Drehbewegung mit einer Genauigkeit von 10^{-8} Grad pro Sekunde messen [17, 57].

Die Situation, bei der man von einem Objekt umkreist wird, ist von eigener Drehung physikalisch verschieden. Es kommt zwar in beiden Fällen das Licht vom Objekt aus Richtungen, die sich im Laufe der Zeit ändern, aber wenn man sich nicht selbst dreht, sieht man jeden einzelnen, vom Objekt reflektierten Lichtpuls aus der Richtung zurückkommen, in die man ihn ausgesendet hatte.

Erstaunlicherweise stimmen diese durch lokale Eigenschaften festgelegten, drehungsfreien Bezugssysteme mit großer Genauigkeit überein mit den Systemen, in denen das

Licht von Sternen aus Richtungen einfällt, die sich im Laufe der Zeit nicht ändern, wenn man von Sternbewegung, Parallaxe und Aberration absieht. Dies ist nicht selbstverständlich und ist meßbar falsch [25], wenn man dies mit höchster Genauigkeit in einem Satelliten überprüft, der die sich drehenden Erde umkreist (6.103, 8.133).

Lichtkegel

Man hielt es lange für selbstverständlich, daß sich gleichmäßige, gradlinige Bewegung, die wir kurz gleichförmige Bewegung nennen, am Verhalten von Licht nachweisen lassen müsse. Zwar war lange vor Einsteins Relativitätstheorie bekannt, daß sich bei einem unbeschleunigten Beobachter durch keinen auf der Newtonschen Mechanik beruhenden Effekt entscheiden läßt, ob er ruht oder sich bewegt.

Aber 1676 hatte Ole Rømer aus periodischen Unregelmäßigkeiten der Umlaufzeiten der vier großen Jupitermonde Jo, Europa, Ganymed und Kallisto geschlossen, daß c, die Geschwindigkeit von Licht im Vakuum, endlich ist. Demnach sollte Licht ein Bezugssystem auszeichnen, in dem es sich in alle Richtungen gleich schnell als Welle ausbreitet und in dem sein Trägermedium, der Äther, ruht. Für Beobachter, die sich demgegenüber mit Geschwindigkeit v bewegen, sollte sich Licht je nach Richtung mit Geschwindigkeiten zwischen $c + v$ und $c - v$ ausbreiten.

Diese scheinbar selbstverständliche Folgerung ist widerlegt: In keinen Experiment hat sich die Bewegung der Lichtquelle je daran gezeigt,[1] daß sich Licht im Vakuum in verschiedene Richtungen verschieden schnell ausbreitete. Ebensowenig hat sich die Bewegung des Nachweisgerätes je so ausgewirkt, daß es in verschiedenen Richtungen verschiedene Lichtgeschwindigkeiten registrierte. Die erstaunlichste Eigenschaft des Äthers, des Trägermediums der Lichtwellen, ist, daß man nie eine nachweisbare Spur von ihm gefunden hat. Da der Äther alle Eigenschaften des Vakuums hat, ist er das Vakuum. Licht breitet sich im Vakuum aus.

Relativitätsprinzip: *Die Geschwindigkeit c von Licht im Vakuum ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle. Die Geschwindigkeit des Lichts gestattet es nicht, einen gleichförmig bewegten Beobachter von einem ruhenden Beobachter zu unterscheiden.*

Im Vakuum gibt es kein schnelleres oder langsameres Licht. Licht überholt nicht Licht!

So hat man 1987 in der Großen Magellanschen Wolke eine Supernova, SN 1987 a, beobachtet, die vor 160 000 Jahren stattgefunden hat und bei der das explodierende, leuchtende Plasma mit einer Geschwindigkeit von zunächst 25 000 km/s ausgestoßen wurde. Hätte sich die Geschwindigkeit v des leuchtenden Plasmas zur Lichtgeschwindigkeit zu $c' = c + v$ addiert, so wäre das Licht vom Plasma, das sich auf uns zu bewegte, 12 000 Jahre vor Licht von dem Plasma angekommen, das sich quer zur Sichtlinie bewegte, als es Licht in unsere Richtung abstrahlte.

Zwar hat niemand den Stern beobachtet, als das erste Licht von der Explosion hier eintraf. Aber bei der Explosion wurden auch Neutrinos erzeugt, deren Ankunftszeit man nachträglich den Meßaufzeichnungen entnehmen konnte. Als man eine Stunde nach dem

[1] Experimentelle Befunde werden in [28, 45, 69] ausführlicher diskutiert.

Zeitpunkt, zu dem die Neutrinos die Detektoren haben ansprechen lassen, zum explodierten Stern hinsah, war die Explosion vollständig zu sehen. Demnach können schlimmstenfalls Laufzeitunterschiede von einer Stunde für die verschiedenen Lichtstrahlen aufgetreten sein. Ein Jahr hat etwa $365 \cdot 24$ Stunden. Bei einer Laufzeit von 160 000 Jahren waren daher die Geschwindigkeiten der Lichtstrahlen bis auf $1/(160\,000 \cdot 365 \cdot 24) \approx 0{,}7 \cdot 10^{-9}$, also in den ersten neun Stellen, gleich.

Weil Neutrinos und Licht innerhalb einer Stunde gleichzeitig eintrafen, folgt übrigens auch [60], daß die Neutrinos sich auf neun Stellen genau mit Lichtgeschwindigkeit bewegt haben müssen und daß ihre Masse weniger als 10 eV/c^2 beträgt.

Daß die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle ist, folgt aus den Maxwellgleichungen (5.3, 5.4). Aus ihnen erschließen wir (Seite 84), daß sich eine Ladung, die zur Zeit t' am Ort $\vec{x}'$ ist, auf die elektrischen und magnetischen Felder am Ort $\vec{x}$ zu derjenigen Zeit t auswirkt, die um die Lichtlaufzeit $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ später als t' ist (5.143).

$$c\,(t - t') = |\vec{x} - \vec{x}'| \tag{1.1}$$

Dies gilt unabhängig davon, ob sich die Ladung bewegt. Die Ereignisse $(t, \vec{x})$ bilden den Vorwärtslichtkegel von $(t', \vec{x}')$; elektromagnetische Ursachen wirken sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit c aus.

Die Unabhängigkeit der Ausbreitung des Lichtes von der Geschwindigkeit der Quelle bedeutet nicht, daß nicht andere Eigenschaften, nämlich die Farbe des Lichtes, seine Richtung und Helligkeit, von der Geschwindigkeit des Beobachters gegenüber der Quelle abhängen. Die Intensität elektromagnetischer Abstrahlung hängt von der Beschleunigung der Ladungen ab, die die Strahlung aussenden.

Die Unabhängigkeit der Lichtausbreitung von der Geschwindigkeit der Quelle ist im Raumzeitdiagramm 1.3 dargestellt: Ein ruhender Beobachter durchläuft die gerade Weltlinie $\mathcal{B}_0$, sein Ort x ist zu allen Zeiten t unverändert. Ein zweiter Beobachter durchläuft die Weltlinie $\mathcal{B}_v$ und bewegt sich gleichförmig in x-Richtung.

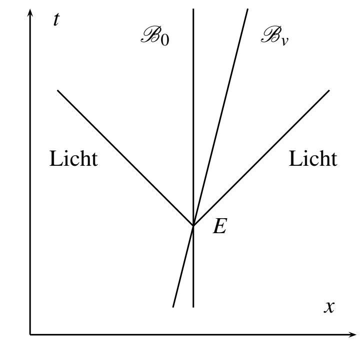

Abbildung 1.3: Beobachter mit auslaufenden Lichtstrahlen

Wenn die Beobachter zu einem Zeitpunkt am selben Ort sind und einen Lichtblitz aussenden, so breitet sich das Licht von diesem Ereignis E gleich schnell in alle Richtungen[2] aus, unabhängig davon, ob sich die Lichtquelle bewegt.

Die Weltlinie solch eines Lichtpulses nennen wir Lichtstrahl. Unsere Diagramme der Raumzeit sind so gedreht, daß die von E nach vorn und nach hinten auslaufenden Lichtstrahlen mit der Zeit von unten nach oben und spiegelbildlich zur vertikalen Achse durchlaufen werden. Die Einheiten sind so gewählt, daß die Lichtstrahlen einen Winkel

[2] Da unsere zweidimensionalen Diagramme nur eine Raumdimension zeigen, gibt es nur die zwei räumlichen Richtungen nach vorn oder nach hinten.

von ±45° mit den Achsen einschließen. Die Lichtstrahlen durch andere Ereignisse E' sind parallel zu den Lichtstrahlen durch E. Denn Licht überholt nicht Licht. Die Weltlinien von Lichtpulsen in gleicher Richtung schneiden sich nicht, sondern sind einander parallel.

Für jedes Ereignis E liegt fest, welche späteren Ereignisse von ihm mit Lichtpulsen beeinflußt werden können und umgekehrt, von welchen früheren Ereignissen es durch Lichtpulse hat beeinflußt werden können. Diese Ereignisse bilden den Vorwärts- und den Rückwärtslichtkegel von E. Beide gehören wie Einkerbungen zur geometrischen Struktur der Raumzeit, so wie die Rille zur Schallplatte gehört.

Außer den Lichtstrahlen sind in der leeren Raumzeit keine anderen Geraden physikalisch ausgezeichnet. Es gibt keinen nachweisbaren Äther, der Weltlinien gleichen Ortes durchliefe, und es gibt keine meßbare Weltzeit, die Schichten gleicher Zeit definierte. Die Zeit- und Ortsachsen sind, anders als die Lichtkegel, keine geometrische Strukturen der Raumzeit, sondern hängen vom Beobachter ab. Daher und der Übersichtlichkeit wegen lassen wir die Achsen in den weiteren Raumzeitdiagrammen weg.

Wären Licht und elektromagnetische Wellen die Schwingungen eines auch im Vakuum vorhandenen Trägermediums Äther, so wie Schall Schwingungen der Luft und anderer Materie ist, und wären die Weltlinien, die von den Bestandteilen des Äthers durchlaufen werden, meßbar, so könnte man Bewegung gegenüber dem Äther messen und von Ruhe unterscheiden.

Könnte man für jedes Ereignis eine Weltzeit messen, deren Meßergebnis für alle Beobachter gleich ist und die demnach dem Ereignis an sich zukäme, dann könnte man einen ruhenden von einem gleichförmig bewegten Beobachter dadurch physikalisch unterscheiden, daß Lichtpulse, die er in einem Ereignis in entgegengesetzte Richtungen ausstrahlt und die zu gleicher Weltzeit reflektiert werden, zum ruhenden, nicht aber zum bewegten Beobachter jeweils wieder im gleichen Augenblick zurückkommen.

Der experimentelle Befund, daß man im Vakuum gleichförmige Bewegung nicht von Ruhe unterscheiden kann, besagt also, daß physikalisch ein Äther nicht nachweisbar und eine Weltzeit nicht meßbar ist. Dies widerlegt Newtonsche Vorstellungen und scheint unserer Alltagserfahrung, dem gesunden Menschenverstand, zu widersprechen. Aber unsere Alltagserfahrung ist auf kleine Geschwindigkeiten beschränkt und weiß nichts vom Vakuum. Wie sich die Natur jenseits unserer Alltagserfahrung verhält, klären Physiker mit Experimenten.

Maßstäbe

Maßstäbe sind vielen Einflüssen unterworfen, die ihre Meßgenauigkeit beschränken. Die Länge von Maßstäben hängt von der Temperatur und streng genommen vom Druck ab. Wenn man Maßstäbe im Schwerefeld der Erde anlegt, so muß man schauen, also durch Licht überprüfen, ob sie verbogen sind. Wegen ihres Gewichts sind Maßstäbe verkürzt, wenn sie stehen, und verlängert, wenn sie hängen, denn es gibt keine wirklich starren Körper. Über größere Längen stehen überhaupt keine Maßstäbe zur Verfügung. An der Ausfahrt Echte der Autobahn Hannover Kassel verkündet zwar ein Schild stolz „Echte 1000 m“, aber durch Hintereinanderlegen von Maßstäben kann man Längen, die wenige Meter überschreiten, nur noch ungenau bestimmen. Man mißt sie optisch mit Licht.

Michelsons Messungen besagen, daß Maßstäbe wie Meßlatten und starre Körper unabhängig von der Geschwindigkeit des Beobachters dieselben Längenmaße ergeben wie Apparate, die Lichtlaufzeiten messen.

Da c, die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, konstant ist und wegen der Unvollkommenheiten fester Körper als Maßstäbe, mißt man räumliche Entfernung mit der Laufzeit, die Licht für den Hin- und Rückweg braucht. Diese Entfernung stimmt innerhalb der Meßgenauigkeit, die durch ungenaue Maßstäbe begrenzt wird, mit denjenigen Abständen überein, die man bestmöglich mit Maßstäben ermittelt. Seit 1983 ist definitionsgemäß 299 792 458 Meter die Entfernung, die Licht im Vakuum in einer Sekunde zurücklegt.

Wir geben Länge einfach in Flugzeit von Licht an. Dann ist ein Lichtjahr einfach ein Jahr und eine Lichtsekunde ist einfach eine Sekunde und hat die Länge

$$1 \text{ Sekunde } = 299\,792\,458 \text{ Meter} \,. \tag{1.2}$$

Geschwindigkeiten sind dann einheitenlose Zahlen, nämlich ihr Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit, und c hat den natürlichen Wert $c = 1$. Meter pro Sekunde ist ein Zahlenfaktor wie Kilo oder Milli und bedeutet etwa 3,3 Nano

$$\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = \frac{1}{299\,792\,458} \quad , \quad c = 299\,792\,458 \,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = 1 \,. \tag{1.3}$$

In Maßsystemen mit $c = 1$ vereinfachen sich die Formeln der relativistischen Physik. Dieser Einfachheit wegen fügen die Faktoren c nur in einige Ergebnisse ein.

Daß man Abstände durch Laufzeiten bezeichnen kann, ist kinderleicht. In Grimms Rotkäppchen liegt Großmutters Haus eine halbe Stunde vom Dorf. Von einer Lichtsekunde als einer Sekunde zu reden, ist nicht frivoler oder revolutionärer als eine halbe Wegstunde kurz eine halbe Stunde zu nennen.

Der Einwand, Länge und Zeit seien grundlegend verschieden, ist nicht stichhaltig. In der Luftfahrt sind Höhe und Entfernung ebenfalls grundverschieden und werden in Fuß und nautischen Meilen angegeben. Andererseits wandeln Holzfäller Höhe mit dem Umrechnungsfaktor 1 Fuß $= 1{,}646 \cdot 10^{-4}$ nautische Meilen in Länge.

Auch wenn Abstände definitionsgemäß mit Lichtlaufzeiten gemessen werden und demnach die Lichtgeschwindigkeit den konstanten Wert $c = 1$ hat, so könnte dennoch diese Definition experimentell widerlegt werden. Wählt man zunächst vier Punkte O, X, Y und Z, die nicht in einer Ebene liegen, und bestimmt ihre Abstände, und betrachtet man dann die Abstandsmessungen eines fünften Punktes A zu den vier Bezugspunkten, dann fixiert das Ergebnis der Abstandsmessung zum Ursprung O die Lage von A auf eine Kugel um den Ursprung, der gemessene Abstand von X schränkt diesen Ort auf den Schnitt zweier Kugelflächen, einen Kreis, ein und der gemessen Abstand von Y auf den Schnitt dieses Kreises mit einer Kugelfläche, also auf zwei Punkte, die durch Spiegelung auseinander hervorgehen. Beim Abstand von A zum Punkt Z kann es sich daher nur um einen von zwei Werten handeln. Er muß mit dem gemessenen Abstand übereinstimmen, falls die Lichtgeschwindigkeit, wie bei all den Längenmessungen unterstellt, überall und jederzeit konstant ist. Zwischen den $n(n-1)/2$ Abständen von $n \geq 5$ Teilchen gibt es, wenn die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, $n(n-1)/2 - 3n + 6$ Beziehungen. Sie gelten nicht definitionsgemäß, sondern stimmen mit aller bisherigen Erfahrung überein.

Gleichortig und Gleichzeitig

Ein Reisender, der im Zug an einem festen Platz sitzt, durchläuft eine Menge von Ereignissen. Bezogen auf einen Punkt im Zug finden alle Ereignisse auf der Weltlinie des Reisenden an einem unveränderlichen Ort nacheinander statt. Für einen Beobachter am Bahndamm hingegen durchläuft der Reisende unterschiedliche Orte. Gleichortigkeit, die Eigenschaft nacheinander stattfindender Ereignisse, sich am gleichen Ort zu ereignen, hängt vom Beobachter $\mathcal{B}$ ab.

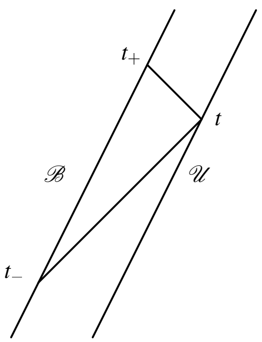

Abbildung 1.4: Gleichortig

In den folgenden Diagrammen geben wir bei den Ereignissen auf den Weltlinien der Beobachter die Zeit an, die ihre mitgeführte Uhr anzeigt.

Wenn ein Punkt $\mathcal{U}$ sich gegenüber dem Beobachter $\mathcal{B}$ nicht bewegt, dann ändert sich nicht die Richtung und nicht die Laufdauer $t_+ - t_-$ des Lichts von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{U}$ und zurück. Die Differenz der Zeit t_+, zu der $\mathcal{B}$ reflektiertes Licht von $\mathcal{U}$ empfängt, und der Zeit t_-, die ihm seine Uhr beim Aussenden des Lichts zu $\mathcal{U}$ zeigt, hängt nicht von t_- ab.

Folglich durchläuft ein gegenüber $\mathcal{B}$ ruhender Ort eine zur Weltlinie von $\mathcal{B}$ parallele Weltlinie, denn die Lichtstrahlen zu späterer oder früherer Zeit ergeben sich durch Parallelverschiebung des Dreiecks $t_-\,t\,t_+$ längs der Weltlinie des Beobachters $\mathcal{B}$. Ereignisse, die für $\mathcal{B}$ am gleichen Ort stattfinden, liegen auf einer Parallelen zu seiner Weltlinie.

Daher stimmen zwei Beobachter genau dann, wenn sie zueinander ruhen, darin überein, ob zwei nacheinander stattfindende Ereignisse gleichortig sind.

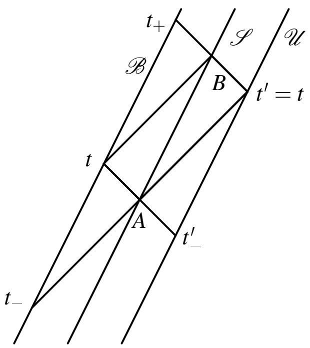

Abbildung 1.5: Gleiche ruhende Uhren

Ebenso hängt bei nebeneinander stattfindenden Ereignissen vom Beobachter ab, ob sie gleichzeitig sind: in der Raumzeit gibt es keine vom Beobachter unabhängige, meßbare Weltzeit.

Welche nebeneinander stattfindenden Ereignisse für einen Beobachter gleichzeitig sind, klären wir mit dem Diagramm 1.5. Es zeigt die Weltlinien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{U}$ zweier zueinander ruhender Beobachter mit ihren Uhren und eines Schiedsrichters $\mathcal{S}$ mitten zwischen ihnen.

Der Schiedsrichter ist von $\mathcal{B}$ und von $\mathcal{U}$ gleich weit entfernt, denn er sieht Lichtpulse, die er im Ereignis A aussendet und die von $\mathcal{B}$ und von $\mathcal{U}$ reflektiert werden, jeweils zusammen in einem Ereignis B zurückkommen.

Mit dem Licht von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{U}$, das der Schiedsrichter $\mathcal{S}$ bei A empfängt, kann er die Uhrzeiten t_- und t'_- der beiden ablesen; bei B sieht er die Uhren t und t'

anzeigen. Beide Uhren gehen gleich schnell, wenn sie dem Schiedsrichter gleiche Zeitdifferenzen $t - t_- = t' - t'_-$ anzeigen. Die Uhren gehen gleich, wenn sie dem Schiedsrichter, der sie in gleicher Entfernung in entgegengesetzter Richtung sieht, stets gleiche Zeiten anzeigen,

$$t = t' \ . \tag{1.4}$$

Die Ereignisse, in denen die beiden Uhren die gleiche Zeit anzeigen, sind für den Schiedsrichter $\mathcal{S}$ und für jeden anderen Beobachter, der ihm gegenüber ruht, gleichzeitig.

Daß Licht von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{U}$ gleich viel Zeit braucht wie von $\mathcal{U}$ zu $\mathcal{B}$ ist keine Konvention, sondern eine Beobachtung des Schiedsrichters. Wenn er im Ereignis A Licht sieht, das von $\mathcal{B}$ und von $\mathcal{U}$ zur gleichen Zeit $t_- = t'_-$ startet, dann sieht er im Ereignis B, daß dieses Licht bei $\mathcal{U}$ und bei $\mathcal{B}$ zur gleichen Zeit $t = t'$ eintrifft.

Sendet $\mathcal{B}$, wenn seine Uhr die Zeit t_- anzeigt, Licht zu $\mathcal{U}$ aus, das dort im Ereignis E reflektiert wird, und kommt es zurück, wenn ihm seine Uhr die Zeit t_+ anzeigt, dann findet das Ereignis E, wie der Schiedsrichter bestätigt, zu der Zeit t statt, die mitten zwischen t_+ und t_- liegt, denn die Gleichheit der Lichtlaufzeiten $t - t_- = t_+ - t$ für den Hin- und Rückweg bedeutet

$$t = \frac{t_+ + t_-}{2} \ . \tag{1.5}$$

Die Differenz von Sende- und Empfangszeit, die Laufzeit, die Licht vom Beobachter zum Ereignis hin und zurück braucht, ist definitionsgemäß (in Maßsystemen mit $c = 1$) die doppelte Entfernung r vom Ereignis E zum Beobachter,

$$r = \frac{t_+ - t_-}{2} \ . \tag{1.6}$$

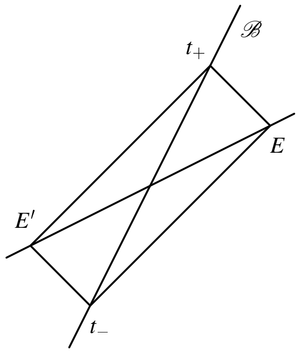

Abbildung 1.6: Gleichortig und gleichzeitig im Lichteck

Dann gilt umgekehrt und rechtfertigt nachträglich die Bezeichnungen t_+ und t_-,

$$t_+ = t + r \ , \quad t_- = t - r \ . \tag{1.7}$$

Geometrisch konstruiert man in einem zweidimensionalen Raumzeitdiagramm bei gegebener Weltlinie des Beobachters $\mathcal{B}$ die zu einem Ereignis E gleichzeitigen Ereignisse als Diagonale in einem Rechteck von Lichtstrahlen, das wir Lichteck nennen. Dazu zeichnen wir Lichtstrahlen durch E bis zu den Schnittpunkten t_- und t_+ mit der Weltlinie des Beobachters [47].

Die von t_- auslaufenden Lichtstrahlen bilden mit den bei t_+ einlaufenden Lichtstrahlen ein Lichteck $t_- E t_+ E'$. Da für die Ereignisse E und E' die Zeiten t_- und t_+ übereinstimmen, finden E und E' für diesen Beobachter gleichzeitig, in gleicher Entfernung und in entgegengesetzter Richtung statt. Wie man durch Vergrößern und Verkleinern des Lichtecks bei festgehaltenem Schnittpunkt der Diagonalen bestätigt, sind alle Ereignisse auf der Geraden $E'E$ für den Beobachter gleichzeitig.

Ist für einen Beobachter $\mathcal{B}$ das Ereignis E gleichzeitig zu E' und ist E' gleichzeitig zu E'', so sind auch E' und E'' gleichzeitig zu E. Zudem sind sie für jeden Beobachter, der gegenüber $\mathcal{B}$ ruht, gleichzeitig.

Wie man durch Verschieben des Lichtecks t_-Et_+E' längs der Weltlinie des Beobachters sieht, sind für ihn die Ereignisse, die auf einer Parallelen zur Geraden durch E' und E liegen, einander gleichzeitig.

Die Weltlinie des Beobachters und die für ihn zu einer Zeit stattfindenden Ereignisse bilden in Raumzeitdiagrammen die Diagonalen eines Lichtecks. Die eine Diagonale besteht aus gleichortigen Ereignissen, die andere aus gleichzeitigen.

Gleichortigkeit oder Gleichzeitigkeit ist keine geometrische Eigenschaft, die Paaren von Ereignissen an sich unabhängig von einem Beobachter zukommt. Denn die Weltlinien gegeneinander bewegter Beobachter sind nicht parallel und die Beobachter stimmen nicht darin überein, welche Ereignisse am gleichen Ort stattfinden. Da bei nicht parallelen Weltlinien auch die anderen Diagonalen in den Lichtecken beider Beobachter nicht einander parallel sind, stimmen gegeneinander bewegte Beobachter auch nicht darin überein, welche verschiedenen Ereignisse zur gleichen Zeit stattfinden.

Grenzgeschwindigkeit

Könnte sich wie in Diagramm 1.6 eine Ursache E' im Vakuum mit einer Grenzgeschwindigkeit, die höher als die Lichtgeschwindigkeit ist, auf ein Ereignis E auswirken, so gäbe es einen Beobachter $\mathcal{S}$, für den beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden. Eine Grenzgeschwindigkeit, die die Lichtgeschwindigkeit übersteigt, würde so einen Beobachter $\mathcal{S}$ auszeichnen. Relativ zu ihm könnte man im Vakuum Ruhe von gleichförmiger Bewegung unterscheiden, was gegen das Relativitätsprinzip verstößt.

In einem Medium, etwa in einer Flüssigkeit, wäre eine Schallgeschwindigkeit denkbar, die die Vakuumlichtgeschwindigkeit übersteigt. Auch wenn man nie solch ein wundersames Medium beobachtet hat, logisch wiedersprüchlich wäre es nicht. Selbst wenn man eine Abfolge von Ereignissen auf einer kreisförmigen Weltlinie konstruieren könnte, auf der jedes das nachfolgende verursacht. Man könnte also – so wird argumentiert – seinen eigenen Großvater in dessen Kindheit erschießen. Was sich selbst widerspricht, denn ohne Großvater existiert nicht sein Mörder. Aber dieser Widerspruch unterstellt, daß man auf geschlossenen Weltlinien frei ist, zu tun, was man will. Wie der Widerspruch zeigt, ist diese Unterstellung falsch. Auf geschlossene Weltlinien kann man nur solche Änderungen vornehmen, die damit verträglich sind, daß man wieder bei der Ausgangssituation anlangt. Man ist dort auf das Rad nie endender Wiedergeburt geflochten.

Daß die Lichtgeschwindigkeit Grenzgeschwindigkeit aller Wechselwirkungen ist, kann man durch Beobachtungen bestätigen oder widerlegen. Solange man von Neutrinos, die keine elektromagnetischen Wechselwirkungen haben, nicht wußte, wie schnell sie sich ausbreiten, nahm man an, daß ihre Grenzgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit sei. Mittlerweile weiß man es: die Grenzgeschwindigkeit von Neutrinos stimmt mit der Lichtgeschwindigkeit mindestens in den ersten neun Dezimalen überein [60]. Denn bei der Supernova SN 1987 a im Februar 1987 hat man Neutrinos und Licht nachgewiesen, die auch nach 160 000 Jahren Laufzeit gleichzeitig eintrafen.

Empfangen wir eine Nachricht, so ist die Information vom Sender verursacht. Sie kann höchstens mit Lichtgeschwindigkeit übermittelt werden.

Die Ereignisse E', die von E beeinflußt werden können, bilden die Zukunft von E und finden um mindestens die Lichtlaufzeit später als E statt.

Die Vergangenheit von E besteht aus denjenigen Ereignissen E', die sich auf E haben auswirken können, die also um mindestens die Lichtlaufzeit früher als E stattgefunden haben.

Die Ereignisse E', die so früh stattfinden, daß man sie von E aus nicht mehr beeinflussen kann, und die noch nicht so lange her sind, daß man schon bei E von ihnen erfahren hätte, nennen wir raumartig zu E. Ist E' raumartig zu E, so ist umgekehrt E raumartig zu E'. Zueinander raumartige Ereignisse können einander nicht beeinflussen. Anders als Gleichzeitigkeit ist die Eigenschaft von Paaren von Ereignissen, raumartig zu sein, unabhängig vom Beobachter. Allerdings ist sie nicht transitiv: ist A raumartig zu B und B raumartig zu C, so folgt daraus nichts darüber, ob A raumartig zu C ist.

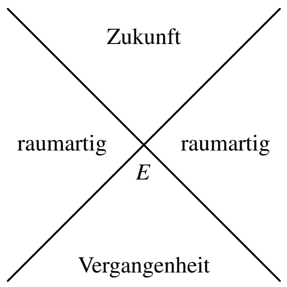

Abbildung 1.7: Zukunft und Vergangenheit von E

Die Zukunft und Vergangenheit von E werden durch die bei E aus- und einlaufenden Lichtstrahlen, dem Vorwärts- und den Rückwärtslichtkegel von E, von den zu E raumartigen Ereignissen getrennt.

Tachyon und starre Körper

Weil ein Teilchen deshalb an einem Ort ist, weil es vorher an einem benachbarten Ort war, und da sich diese Ursache höchstens mit Lichtgeschwindigkeit auswirkt, kommt die Weltlinie des Teilchens in jedem Ereignis aus der Vergangenheit und verläuft in die Zukunft: sie liegt überall innerhalb des Lichtkegels. Es gibt nichts schnelleres als Licht. Nichts überholt Licht.

Als Tachyon bezeichnet man ein Teilchen, das sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt und etwa in Diagramm 1.6 die Weltlinie durch E' und E durchläuft. Wenn Tachyonen existierten und Licht streuen könnten, wären sie für einen Beobachter $\mathcal{B}$, dessen Weltlinie sie kreuzen, zunächst unsichtbar, denn ihre Weltlinie schneidet nicht den Rückwärtslichtkegel von frühen Ereignissen auf der Weltlinie des Beobachters $\mathcal{B}$. Die Rückwärtslichtkegel der späteren Ereignisse auf der Weltlinie von $\mathcal{B}$ hingegen haben zwei Schnittpunkte mit der Weltlinie des Tachyons Diese beiden Schnittpunkte entfernen sich im Laufe der Zeit in entgegengesetzte Richtungen, wenn $\mathcal{B}$ seine Weltlinie durchläuft. Das Tachyon erschiene also einem Beobachter als ein Paar von Teilchen, das aus dem Nichts an einer Stelle entsteht und in entgegengesetzte Richtungen wegläuft. Es gibt nicht eine ernstzunehmende Beobachtung, die die Existenz von Tachyonen nahelegt.

Man kann ohne großen Aufwand Ereignisse verursachen, die eine tachyonische Weltlinie bilden, etwa indem man bei einer Landebahn eines Flughafens alle Lampen mit getrennten, gleichlangen Leitungen anschließt, so daß die Lampen nach dem Einschalten gleichzeitig aufflammen. Ein Beobachter auf der Landebahn sieht dann zuerst die nächstgelegene Lampe aufleuchten, danach die beiden benachbarten Lampen, so als würde sich von der nächstgelegenen Lampe nach beiden Seiten überlichtschnell ein Signal ausbreiten. Aber das Aufflammen von Lampen verursacht nicht, daß die Nachbarlampen aufleuchten: zwischen die Lampen gestellte Wände unterbrechen nicht das Signal. Ursache des Aufleuchten ist die Flugleitung, die das Licht eingeschaltet hat. Dieses Einschalten wirkt sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Weil sich Ursachen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit auswirken, gibt es keinen wirklich starren Körper. Zum Beispiel wirkt sich ein Stoß auf das Ende eines Balkens zunächst nicht auf das andere Ende aus. Mit Schallgeschwindigkeit breitet sich im Balken die vom Stoß hervorgerufene Kompression als Welle aus und erst nachdem sie den Körper durchlaufen hat und Schwingungen abgeklungen sind, hat der Balken wieder seine ursprünglichen Abmessungen. Der Erkenntnis, daß es keinen ideal starren Körper gibt, kann man nicht dadurch ausweichen, daß man sich einen sehr harten Körper vorstellt, der mit starken inneren Kräften einer Verformung widersteht. Harte Körper haben hohe Schallgeschwindigkeiten, aber die Schallgeschwindigkeit ist bei allen Materialien viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c.

Quantenteleportation und Bellsche Ungleichung

Die revolutionäre Erkenntnis der Quantenphysik ist, daß es auch bei ideal präparierten Teilchen immer Messungen gibt, deren Ergebnisse man im Einzelfall nicht vorhersagen kann, sondern bei denen man nur die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse angeben kann. Wir widerlegen hier am Beispiel von Polarisationsmessungen an Photonpaaren die Unterstellung, man könne die Einzelergebnisse nur deshalb nicht vorhersagen, weil wir die Ursachen nicht genügend genau kennen. Wir müssen hinnehmen, daß eine Messung nicht eine vorhandene Eigenschaft abliest, sondern erst das Ergebnis feststellt, das vorher nicht feststand.

Fällt Licht durch einen Polarisationsfilter, so ist es dahinter polarisiert: es durchläuft ungehindert einen nächsten Polarisationsfilter, wenn er in derselben Richtung a polarisiert, und die Lichtintensität verringert sich um den Faktor

$$w_a(c) = \cos^2\gamma \ , \tag{1.8}$$

wenn man den zweiten Polarisationsfilter in der Ebene senkrecht zum Licht um einen Winkel γ in Richtung c dreht. Durch zwei gekreuzte Filter, wenn $c = a_\perp$ senkrecht auf a steht, kommt kein Licht. Im folgenden bezeichnen wir den Filter, der in Richtung a polarisiert, kurz als Filter a.

Erstaunlicherweise enthüllt Licht bei geringer Intensität Teilcheneigenschaften. Der photoelektrische Effekt, bei dem Licht Elektronen aus einem Metall auslöst, wird mit abnehmender Lichtintensität nicht kleiner, sondern seltener. Man muß daher die Lichtintensität als Wahrscheinlichkeit deuten, Photonen vorzufinden, und den Unterdrückungsfaktor $w_a(c)$ als Wahrscheinlichkeit, daß das Photon, das in Richtung a polarisiert worden ist, den Filter c durchdringt.

Mit der Restwahrscheinlichkeit $1 - \cos^2\gamma = \sin^2\gamma$ wird das Photon absorbiert. Das ist dieselbe Wahrscheinlichkeit, mit der es den zu c gekreuzten Filter $c_\perp$ durchdringt,

$$w_a(c_\perp) = 1 - w_a(c) \ . \tag{1.9}$$

Beim Übergang von angeregten Kalzium-Atomen in den Grundzustand entstehen Paare von entgegengesetzt auslaufenden Photonen mit solcher Polarisation, daß mit Wahrscheinlichkeit [3]

$$w(a,c) = \frac{1}{2}\cos^2\gamma \tag{1.10}$$

das eine Photon einen Filter a und das zweite einen zweiten Filter c durchdringt, wobei γ der Winkel zwischen den Richtungen a und c ist.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das erste Photon des Paares durchkommt und das zweite absorbiert wird, ist dieselbe wie die Wahrscheinlichkeit $w(a, c_\perp)$ dafür, daß das erste Photon durchkommt und das zweite Photon durch den gekreuzten Filter $c_\perp$. Ebenso sind $w(a_\perp, c)$ und $w(a_\perp, c_\perp)$ die Wahrscheinlichkeiten, daß das erste Photon absorbiert wird und das zweite durchkommt und dafür, daß beide Photonen absorbiert werden,

$$w(a,c_\perp) = \frac{1}{2}\sin^2\gamma \ , \quad w(a_\perp,c) = \frac{1}{2}\sin^2\gamma \ , \quad w(a_\perp,c_\perp) = \frac{1}{2}\cos^2\gamma \ . \tag{1.11}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten sind, wie wir sehen werden, weltbilderschütternd: es kann nicht sein, daß jedes Photon über eine Eigenschaft verfügt, die für alle Filter in jedem Fall festlegt, ob es sie durchdringt. Ob es durchkommt, ist wirklich zufällig.

Durch Zusammenfassen der beiden möglichen Fälle, daß das zweite Photon durchkommt oder nicht, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$w_1(a) = w(a,c) + w(a,c_\perp) = \frac{1}{2} \tag{1.12}$$

dafür, daß das erste Photon durch den Filter a kommt, egal was dem anderen Photon des Paares geschieht. Sie ist so groß wie die Wahrscheinlichkeit $w_1(a_\perp)$ dafür, daß es absorbiert wird, und sie ist unabhängig von a und c. Ebenso wird das zweite Photon mit gleicher Wahrscheinlichkeit absorbiert oder nicht, $w_2(c) = w_2(c_\perp) = 1/2$. Beide Photonen des Paares sind, was Messungen am einzelnen Photon betrifft, unpolarisiert.

Beschränkt man sich aber auf die Fälle, in denen das erste Photon durch den Filter a kommt, so kommt das zweite Photon mit der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$\frac{w(a,c)}{w_1(a)} = \cos^2\gamma \tag{1.13}$$

durch den Filter c. Dies ist dieselbe Wahrscheinlichkeit (1.8) wie bei Photonen, die durch einen Filter a polarisiert worden sind. Falls das erste Photon durch den Filter a kommt, ist das zweite Photon des Paares in Richtung a polarisiert. Insbesondere kommt es dann mit Sicherheit durch einen zweiten Polarisationsfilter in Richtung a.

Für diesen Sachverhalt gibt es die Sprechweise, daß die Messung der Polarisation des einen Photons augenblicklich das andere Photon des Paares, egal wie weit es entfernt sein mag, in den Zustand gleicher Polarisation versetze. Der Zustand des Paares „kollabiere“ oder werde reduziert, und das Ergebnis der Messung am ersten Photon werde auf das zweite Photon übertragen oder, beeindruckender, quantenteleportiert. Die Zustandsreduktion erfolge augenblicklich und daher mit Überlichtgeschwindigkeit.

Wer von diesen Behauptungen ungerührt bleibt, stellt nüchtern fest, daß die Messung am einen Photon nichts am anderen Photon bewirkt. Dort werden Photonen vom Filter mit gleicher Wahrscheinlichkeit absorbiert oder nicht, egal in welche Richtung der Filter polarisiert. Durch keine Messung kann man an einem Photon feststellen, ob am anderen Photon gemessen wurde, gemessen wird oder gemessen werden wird, geschweige denn, in welche Richtung und mit welchem Ergebnis.

Daß das zweite Photon in Richtung a polarisiert ist, wenn das erste Photon durch seinen Filter a kommt, kann man erst bestätigen, wenn man beim zweiten Filter weiß, ob und in welcher Polarisationsrichtung das erste Photon durchgekommen ist. Diese Information ist höchstens mit Lichtgeschwindigkeit zu bekommen.

Die offensichtliche Ursache für die Zusammenhänge der Ergebnisse bei beiden Polarisationsfiltern ist die gemeinsame Präparation beider Photonen als Paar. Sie gelingt nur, wenn beide Photonen am selben Ort sind. Da sie sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, wirkt sich die Präparation in späteren Messungen nicht schneller als Licht aus.

Wenn man wiederholt eine Münze wirft und jeweils an einen Empfänger einen Brief mit dem Bild der Oberseite und an einen zweiten einen Brief mit dem Bild der Unterseite schickt, dann erhält jeder Empfänger mit gleicher Wahrscheinlichkeit Bilder der Kopf- oder Zahlseite. Jeder Empfänger weiß augenblicklich, wenn er seinen Brief öffnet, welches Bild der andere erhalten hat. Bei Kenntnis des Ergebnisses kollabiert die Wahrscheinlichkeit zur bedingten Wahrscheinlichkeit, in diesem Beispiel zu Gewißheit.

Ebenso ersetzt Zustandsreduktion bei Auftreten eines Meßwertes den vorherigen Zustand durch den bedingten Zustand, der zur bedingten Wahrscheinlichkeit derjenigen Ereignisse gehört, in denen dieser Meßwert auftritt.

Vor Öffnen des Briefes ist der Empfänger unsicher, welches Bild er enthält, aber der Inhalt ist eigentlich nicht unsicher, sondern nur unbekannt. Der Inhalt des Briefes liegt fest, ob man ihn nun öffnet oder nicht. Bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung (1.10) hingegen ist ausgeschlossen, daß die Ergebnisse der Polarisationsmessungen in allen Richtungen in jedem Einzelfall vor der Messung feststehen und daß man das Ergebnis nur deshalb nicht vorher weiß, weil die jeweiligen Ursachen im einzelnen unbekannt sind.

Diese Unterstellung, daß die Meßergebnisse vorher festliegen, wir aber die Ursachen nicht genügend gut kennen, scheint unwiderlegtbar, aber sie führt zu einer Ungleichung, die experimentell überprüfbar ist.

Die Meßergebnisse verletzen die Ungleichung und widerlegen die Unterstellung.

Die Ungleichung ergibt sich aus folgender Betrachtung. Wir bedenken wiederholte Messungen, die wir durch i, $i = 1, 2, \dots, N$, numerieren, und unterstellen, daß in jedem Versuch Nummer i feststehe, ob das erste Photon durch einen Filter a kommt. Wir werten das Ergebnis als $a_{1\,i} = 1$, falls das Photon durchkommt, wenn nicht als $a_{1\,i} = -1$. Mit $b_{1\,i}$ bezeichnen wir das Ergebnis, das sich im Versuch Nummer i ergäbe, wenn wir das erste Photon mit einem Filter b mäßen. Entsprechend bezeichnen wir mit $c_{2\,i}$ und $d_{2\,i}$ das Ergebnis im Versuch mit Nummer i, wenn wir mit einem Filter in Richtung c oder d

messen, ob das zweite Photon durchkommt.

Weil die Ergebnisse $c_{2\,i}$ und $d_{2\,i}$ entweder verschieden oder gleich sind, verschwindet $a_{1\,i}(c_{2\,i} + d_{2\,i})$ genau dann, wenn $b_{1\,i}(c_{2\,i} - d_{2\,i})$ den Wert ± 2 hat und umgekehrt. Daher ist ihre Summe in keinem Fall größer als zwei [18]

$$a_{1\,i}c_{2\,i} + a_{1\,i}d_{2\,i} + b_{1\,i}c_{2\,i} - b_{1\,i}d_{2\,i} \leq 2\ . \tag{1.14}$$

Der Mittelwert $\langle a_1 c_2 \rangle$ der Produkte $a_{1\,i}c_{2\,i}$ der Meßergebnisse in N Versuchen ist die Summe der einzelnen Produkte, geteilt durch N,

$$\langle a_1 b_2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_{1\,i} b_{2\,i}\ . \tag{1.15}$$

Entsprechend erhalten wir die Mittelwerte der Meßergebnisse $\langle a_1 d_2 \rangle$, $\langle b_1 c_2 \rangle$ und $\langle b_1 d_2 \rangle$. Summieren wir die Ungleichungen (1.14), und teilen wir durch N, so erhalten wir eine Bellsche Ungleichung [5] für Mittelwerte von Produkten der Meßwerte

$$\langle a_1 c_2 \rangle + \langle a_1 d_2 \rangle + \langle b_1 c_2 \rangle - \langle b_1 d_2 \rangle \leq 2\ . \tag{1.16}$$

Den Mittelwert von $a_{1\,i}c_{2\,i}$ können wir auch ausrechnen, indem wir für jeden möglichen Wert, den dieses Produkt haben kann, nämlich $+1$ oder -1, die Häufigkeit N_+ und N_- zählen, mit der er auftritt. Dann ist $N_+ - N_- = \sum_{i=1}^{N} a_{1\,i}c_{2\,i}$ und $\langle a_1 c_2 \rangle = (N_+ - N_-)/N$.

Es ist aber, wenn N genügend groß ist, die relative Häufigkeit N_+/N die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $a_{1\,i}c_{2\,i}$ den Wert $+1$ hat und N_-/N die Wahrscheinlichkeit für den Wert -1. Die Wahrscheinlichkeit, mit der $a_{1\,i}c_{2\,i}$ den Wert $+1$ hat, ist $w(a, c) + w(a_\perp, c_\perp)$, mit Wahrscheinlichkeit $w(a, c_\perp) + w(a_\perp, c)$ hat das Produkt den Wert -1. Demnach gehört zur quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsverteilung (1.10) der Mittelwert

$$\langle a_1 c_2 \rangle = \cos^2\gamma - \sin^2\gamma = \cos(2\gamma)\ . \tag{1.17}$$

Er ist also durch das Skalarprodukt von Einheitsvektoren $\vec{A}$ und $\vec{C}$ gegeben, die den doppelten Winkel wie a und c einschließen, $\cos(2\gamma) = \vec{A}\cdot\vec{C}$. Ebenso sind $\langle a_1 d_2 \rangle = \vec{A}\cdot\vec{D}$, $\langle b_1 c_2 \rangle = \vec{B}\cdot\vec{C}$ und $\langle b_1 d_2 \rangle = \vec{B}\cdot\vec{D}$ Skalarprodukte von winkelverdoppelten Einheitsvektoren.

Als Funktion der Richtungsvektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ wird die Summe

$$\langle a_1 c_2 \rangle + \langle a_1 d_2 \rangle + \langle b_1 c_2 \rangle - \langle b_1 d_2 \rangle = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{A}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{C} - \vec{B}\cdot\vec{D} \tag{1.18}$$

maximal, falls $\vec{A}$ in Richtung von $\vec{C} + \vec{D}$ zeigt und $\vec{B}$ in Richtung von $\vec{C} - \vec{D}$. Dann hat die Summe den Wert von $|\vec{C} + \vec{D}| + |\vec{C} - \vec{D}|$ und nimmt ihren maximalen Wert $2\sqrt{2}$ an, falls die Einheitsvektoren $\vec{C}$ und $\vec{D}$ aufeinander senkrecht stehen.

Wählt man also c mit einem Winkel von $\pi/8 = 22.5°$ zu b, a mit einem Winkel von $\pi/4 = 45°$ und d mit einem Winkel von $3\,\pi/8 = 67.5°$ dann wird die Summe der Mittelwerte maximal und hat den Wert $2\sqrt{2}$. Da Messungen diesen Wert bestätigen, widerlegen sie die Bellsche Ungleichung (1.16).

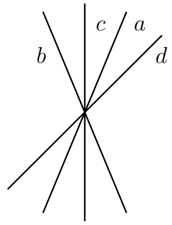

Abbildung 1.8: Polarisationsrichtungen

Zur Herleitung der Bellschen Ungleichung haben wir nur angenommen, daß in den Richtungen a, b, c und d für jede Messung Nummer i die Ergebnisse $a_{1\,i}, b_{1\,i}, c_{2\,i}$ und $d_{2\,i}$ feststehen und nicht davon abhängen, in welcher Richtung am anderen Photon gemessen wird.

Tatsächlich kann man aber in jedem einzelnen Versuch an jedem Photon nur in jeweils einer Richtung a oder b und c oder d messen. Man muß $a_{1\,i}$ und $b_{1\,j}$ oder $c_{2\,i}$ und $d_{2\,j}$ in verschiedenen Versuchen $i \neq j$ ermitteln. Im Experiment [3] entscheidet für jedes Photon ein Zufallsgenerator, in welcher Richtung es gemessen wird. Die Richtung wird erst so spät gewählt, daß sie auch mit lichtschnellen Signalen zum Zeitpunkt der Messung beim anderen Photon noch nicht bekannt sein kann.

Daß die gemessenen Polarisationswerte nicht den Bellschen Ungleichungen genügen, ist weltbilderschütternd. Messungen lesen nicht etwa vorhandene Eigenschaften ab; dann lägen die Ergebnisse aller Messungen fest und unterlägen den Bellschen Ungleichungen. Sondern Messungen stellen die Ergebnisse erst fest, die vorher nicht feststanden.

Die Verletzung der Bellschen Ungleichung verbaut die gedankliche Ausflucht, jeder Meßwert stünde in jedem Einzelfall fest, nur die Ursache jedes Meßwertes sei unbekannt.

In der Quantenphysik gibt es nicht für jedes Meßergebnis eine Ursache, sondern lediglich Ursachen für Wahrscheinlichkeiten von Meßergebnissen.

2 Zeit und Länge

2.1 Satz des Minkowski

Die Entfernung zweier Punkte ist in gewöhnlicher Geometrie die Länge der geraden Verbindungsstrecke. In der Raumzeit definiert die Zeit, die auf einer gleichförmig bewegten Uhr zwischen zwei Ereignissen vergeht, die zeitliche Entfernung dieser Ereignisse.

Um zu bestimmen, welche Zeit auf einer gleichförmig bewegten Uhr $\mathcal{U}$ vergeht, liest sie ein Beobachter $\mathcal{B}$ wie in Diagramm 2.1 ab und vergleicht dabei mit der eigenen Uhr [47].

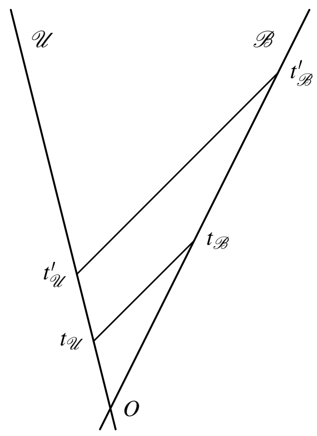

Abbildung 2.1: Strahlensatz

Einfachheitshalber mögen die Uhr und der Beobachter zu einem Zeitpunkt denselben Ort durchlaufen. Ihre Weltlinien schneiden sich in diesem Ereignis O, dem Ursprung. Dabei stellen wir beide Uhren auf Null, dann zeigen die Uhren in jedem Ereignis die zeitliche Entfernung zum Ursprung.

Wenn der Beobachter auf die Uhr $\mathcal{U}$ schaut, die sich gleichmäßig in Sichtlinie von ihm entfernt, und eine Zeit $t_{\mathcal{U}}$ abliest, so ist dies die Zeit, die auf $\mathcal{U}$ bis zum Aussenden des Lichtes vergangen war, das der Beobachter gerade sieht. Dabei zeige ihm seine eigene Uhr die Empfangszeit $t_{\mathcal{B}}$ an. Sie ist der Sendezeit proportional[1]

$$t_{\mathcal{B}} = \kappa(\mathcal{B},\mathcal{U})\, t_{\mathcal{U}} \quad \text{für } t_{\mathcal{U}} > 0 \ , \tag{2.1}$$

mit einem Faktor $\kappa(\mathcal{B},\mathcal{U})$, der nicht von der Sendezeit abhängt [10]. Denn wenn der Beobachter später auf der bewegten Uhr die Zeit $t'_{\mathcal{U}}$ abliest, so ist das Dreieck $Ot'_{\mathcal{U}}t'_{\mathcal{B}}$ dem Dreieck $Ot_{\mathcal{U}}t_{\mathcal{B}}$ ähnlich und in allen Abmessungen um denselben Faktor vergrößert. Daher sind die Verhältnisse $t_{\mathcal{B}}/t_{\mathcal{U}}$ und $t'_{\mathcal{B}}/t'_{\mathcal{U}}$ gleich.

Schwingt in der Zeit $t_{\mathcal{U}}$ ein von der Uhr mitgeführter Quarz n-mal mit einer Frequenz $\nu_{\mathcal{U}} = n/t_{\mathcal{U}}$, so sieht der Beobachter diese n Schwingungen, während auf seiner Uhr die Zeit $t_{\mathcal{B}}$ vergeht. Er beobachtet also die Frequenz

$$\nu_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\kappa(\mathcal{B},\mathcal{U})}\, \nu_{\mathcal{U}} \ . \tag{2.2}$$

Die sichtbare Frequenzänderung der Uhr, die sich in Sichtlinie entfernt, ist der longi-

[1] κ, ν und τ sind die griechischen Buchstaben kappa, nü und tau. τ ist von r zu unterscheiden.

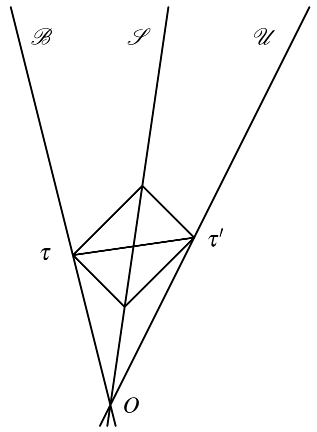

Abbildung 2.2: Uhrenvergleich

tudinale Dopplereffekt. Er ist dem akustischen Dopplereffekt verwandt, den man als jaulendes Abfallen der Tonhöhe vorbeifahrender Polizeisirenen oder Rennwagen hört.

Da sich gleichförmige Bewegung nicht von Ruhe unterscheiden läßt, hängt κ nur von der Relativgeschwindigkeit von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{B}$ ab und nicht wie bei Schall auch von ihrer Geschwindigkeit gegenüber einem Medium. Zudem hängt κ davon ab, ob die verwendeten Uhren gleich gehen. Das kann man einfach ablesen, wenn sie ruhen. Bewegen sie sich, so muß man die Laufzeiten berücksichtigen, die das Licht von beiden Uhren bis zu demjenigen braucht, der sie abliest. Solch eine Laufzeitkorrektur erübrigt sich aber für einen Schiedsrichter $\mathcal{S}$, der wie in Abbildung 2.2 stets mitten zwischen den Uhren ist. Lichtpulse, die er zu einer Zeit zu $\mathcal{B}$ und $\mathcal{U}$ aussendet, und die jeweils zurückgestreut werden, treffen beide immer zur gleichen Zeit wieder bei ihm ein. Da er stets gleich weit von beiden Uhren entfernt ist, sind die Lichtlaufzeiten von beiden Uhren zum Schiedsrichter gleich.

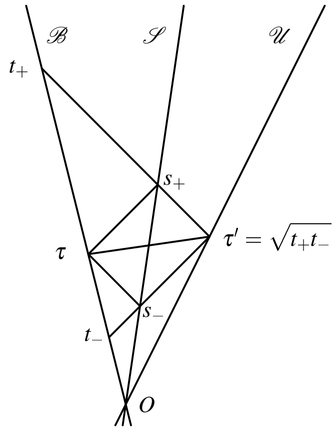

Abbildung 2.3: Satz des Minkowski

Beide Uhren gehen gleich, wenn sie dem Schiedsrichter gleiche Zeiten anzeigen:

$$\tau = \tau' \ . \tag{2.3}$$

Dies definiert geometrisch, welche Längen auf geraden Weltlinien gegeneinander bewegter Beobachter und Uhren gleich sind, und stimmt ausnahmslos in allen Beobachtungen mit dem physikalischen Verhalten gleicher, realer Uhren überein.

Wir verlängern die Weltlinien des Lichtpulses, der von der Uhr $\mathcal{U}$ empfangen und reflektiert wird, wenn sie die Zeit τ' anzeigt, bis zur Weltlinie des Beobachters $\mathcal{B}$ und bezeichnen in Abbildung 2.3 mit t_- und t_+ die Zeiten, die die Uhr von $\mathcal{B}$ anzeigt, wenn er den Lichtpuls zu $\mathcal{U}$ aussendet und wieder empfängt. Wegen (2.1) zeigt die Uhr von $\mathcal{B}$ die Zeit

$$\tau = \kappa(\mathcal{B},\mathcal{S})\kappa(\mathcal{S},\mathcal{B})\, t_- \tag{2.4}$$

an, wenn der Lichtpuls wieder einläuft, der zur Zeit t_- ausgesendet wurde und der von $\mathcal{S}$ bei s_- reflektiert wurde. Denn $\tau = \kappa(\mathcal{B},\mathcal{S})\, s_-$ ist ein Vielfaches der Zeit s_-, zu der der Lichtpuls von $\mathcal{S}$ reflektiert wird, und $s_- = \kappa(\mathcal{S},\mathcal{B})\, t_-$

ist ein Vielfaches der Zeit t_-, zu der der Lichtpuls von $\mathcal{B}$ ausgesendet wurde. Ebenso folgt

$$t_+ = \kappa(\mathcal{B},\mathcal{S})\kappa(\mathcal{S},\mathcal{B})\, \tau \ . \tag{2.5}$$

Also ist τ das geometrische Mittel von t_- und t_+

$$\frac{\tau}{t_-} = \frac{t_+}{\tau} \ , \quad \tau^2 = t_+ t_- \ , \tag{2.6}$$

und wegen $\tau = \tau'$ (2.3) gilt der

Satz des Minkowski: *Durchlaufen zwei gleichförmig bewegte Beobachter $\mathcal{B}$ und $\mathcal{U}$ ein Ereignis O und stellen sie dabei ihre gleichen Uhren auf Null, so ist die Zeit τ, die auf der Uhr von $\mathcal{U}$ bis zum Durchlaufen eines späteren Ereignisses E vergeht, das geometrische Mittel derjenigen Zeit t_-, die die Uhr des Beobachters $\mathcal{B}$ anzeigt, wenn er einen Lichtpuls zu E aussendet, und der Zeit t_+, die sie anzeigt, wenn er den Lichtpuls von E empfängt,*

$$\tau^2 = t_+ t_- = t^2 - r^2 \ . \tag{2.7}$$

Dieser Zusammenhang ist für die Geometrie der Raumzeit so wichtig wie der Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ für die Euklidische Geometrie. Nach dem Satz des Pythagoras sind in der Ebene alle Punkte auf einem Kreis gleich weit vom Mittelpunkt entfernt. Die Gleichung $\tau^2 = t_+ t_-$ für das Quadrat des zeitlichen Abstandes besagt, daß in Raumzeitdiagrammen Punkte gleicher zeitlicher Entfernung vom Ursprung O auf Hyperbeln liegen.

Drei gleiche Uhren

Das Raumzeitdiagramm 2.4 zeigt, daß die Definition gleicher Uhren stimmig ist: die Uhr des Beobachters $\mathcal{B}_3$ ist der Uhr von $\mathcal{B}_1$ gleich, wenn sie der Uhr von $\mathcal{B}_2$ gleich ist und wenn die Uhr von $\mathcal{B}_2$ der Uhr von $\mathcal{B}_1$ gleich ist. Denn dann gilt $t^4 = t_+^2 t_-^2 = t_{++} t_{+-} t_{-+} t_{--}$. Wie in (2.4) gilt $t_{-+} = \kappa(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)\kappa(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) t_{--}$ und $\kappa(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)\kappa(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) t_{+-} = t_{++}$. Also gilt $t^4 = t_{++}^2 t_{--}^2$, und die Uhr von $\mathcal{B}_3$ ist der Uhr von $\mathcal{B}_1$ gleich. Sind zwei Uhren einer dritten gleich, so sind sie einander gleich.

Dies gilt auch, wenn die Weltlinie von $\mathcal{B}_1$ nicht in der Ebene verläuft, die von $\mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_3$ aufgespannt wird. Denn die Weltlinie von $\mathcal{B}_1$ kann in diese Ebene gedreht werden, ohne den Gang der Uhr zu ändern.

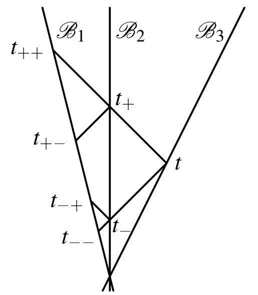

Abbildung 2.4: Drei gleiche Uhren

Konstruktion des Schiedsrichters

Um die Weltlinie des Schiedsrichters zwischen zwei Beobachtern $\mathcal{U}$ und $\mathcal{B}$ zu konstruieren, zeichnet man durch einen Punkt τ' auf einer ihrer Weltlinie die Lichtstrahlen und bestimmt ihre Schnittpunkte t_+ und t_- mit der anderen Weltlinie. Auf ihr trägt man vom Schnittpunkt von $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{U}$, dem Punkt O, das geometrische Mittel τ der Strecken Ot_+ und Ot_- ab. Die Weltlinie des Schiedsrichters ist die Gerade durch die Schnittpunkte der Lichtstrahlen durch τ und τ'. Diese Gerade geht auch durch O, weil τ das geometrische Mittel der Längen t_+ und t_- ist.

Das geometrische Mittel der Längen t_- und t_+ bestimmt man mit Zirkel und Lineal in einer Hilfskonstruktion der Euklidischen Geometrie, indem man beide Strecken auf einer Geraden hintereinander abträgt und einen Kreis um den Mittelpunkt durch die Endpunkte schlägt. Sein Radius ist der Mittelwert $t = (t_+ + t_-)/2$; die Strecke t_+ ist um $r = (t_+ - t_-)/2$ länger, $t_+ = t + r$; t_- ist um r kürzer, $t_- = t - r$. Durch den Punkt, in dem die Strecke t_+ an t_- grenzt, zeichnet man die Senkrechte zur Geraden bis zum Kreis. Sie ist eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse t und anderer Kathete r, hat also die Länge des geometrischen Mittels, $\tau^2 = t^2 - r^2 = t_+ t_-$.

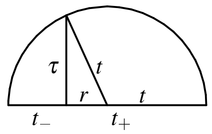

Abbildung 2.5: Geometrisches Mittel

2.2 Dopplerfaktor und Geschwindigkeit

Im Raumzeitdiagramm 2.3 ist $\tau/t_- = t_+/\tau$ und $\tau = \tau'$. Daher ist $\tau/t_- = \kappa(\mathcal{U},\mathcal{B})$ das Verhältnis von Empfangs- zu Sendezeit (2.1) von Lichtpulsen, die von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{U}$ ausgesendet werden, und es ist dem Verhältnis $t_+/\tau = \kappa(\mathcal{B},\mathcal{U})$ für den Rückweg gleich. Der Dopplerfaktor $\kappa(\mathcal{B},\mathcal{U})$, mit dem $\mathcal{B}$ Frequenzen von $\mathcal{U}$ verschoben sieht, stimmt mit dem Dopplerfaktor $\kappa(\mathcal{U},\mathcal{B})$ überein, mit dem $\mathcal{U}$ Frequenzen von $\mathcal{B}$ verschoben wahrnimmt,

$$\kappa(\mathcal{U},\mathcal{B}) = \kappa(\mathcal{B},\mathcal{U}) \ . \tag{2.8}$$

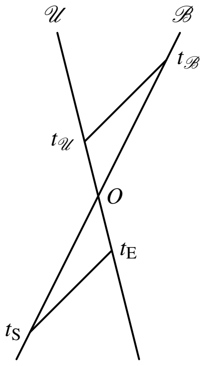

Abbildung 2.6: Aufeinander zu und voneinander weg

Bei Bewegung in Sichtlinie ist Dopplerverschiebung wechselseitig.

Allein aus der Wechselseitigkeit der Dopplerverschiebung, $t_+ = \kappa\tau$, $\tau = \kappa t_-$, ergeben sich die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Dopplerverschiebung und der Satz des Minkowski

$$\kappa^2 = \frac{t_+}{t_-} \ , \quad \tau^2 = t_+ t_- \ . \tag{2.9}$$

Wegen $t_+ = t + r$ und $t_- = t - r$ (1.7) gelten

$$\kappa^2 = \frac{t+r}{t-r} = \frac{1+r/t}{1-r/t} \ , \ \tau^2 = t^2 - r^2 = (1 - \frac{r^2}{t^2})\, t^2 \ , \tag{2.10}$$

und, weil $v = r/t$ die Geschwindigkeit ist, mit der sich die Uhr $\mathcal{U}$ vom Beobachter $\mathcal{B}$ entfernt, folgen

$$\kappa(v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \ , \quad \tau = \sqrt{1-v^2}\, t \ . \tag{2.11}$$

Sendet der Beobachter $\mathcal{B}$ vor dem Treffen zur Zeit $t_\mathrm{S} < 0$ einen Lichtpuls aus, während die Uhr $\mathcal{U}$ auf ihn zufliegt und sich also mit negativer Geschwindigkeit entfernt, so ist, wie das Diagramm 2.6 zeigt, das Verhältnis $\kappa(-v) = t_\mathrm{E}/t_\mathrm{S}$ der Kehrwert des Verhältnisses der Zeiten, die die Uhren später anzeigen, wenn sie sich entfernen

$$\kappa(-v) = \frac{t_\mathrm{E}}{t_\mathrm{S}} = \frac{t_\mathcal{U}}{t_\mathcal{B}} = \frac{1}{\kappa(v)} \ . \tag{2.12}$$

Eine Uhr, die sich gleichförmig von einem Beobachter entfernt, erscheint langsamer, denn er sieht auf ihr die Zeit $t_\mathcal{U} = t_\mathcal{B}/\kappa$, wenn ihm seine eigene, gleiche Uhr $t_\mathcal{B}$ anzeigt, und $\kappa(v)$ ist für $v > 0$ größer als Eins. Wenn sich die Uhr einem Beobachter gleichförmig nähert, erscheint sie ihm schneller, denn der Dopplerfaktor während der Annäherung ist bei Bewegung in Sichtlinie der Kehrwert des Dopplerfaktors beim Wegfliegen.

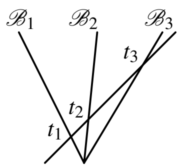

Abbildung 2.7: Addition von Geschwindigkeiten

Mit (2.11) kann man die Geschwindigkeit v bestimmen, indem man, wie alltäglich in der Verkehrsüberwachung, den Dopplerfaktor κ mißt. Da er gleich bleibt, wenn man Beobachter und beobachtete Uhr vertauscht (2.8), messen zwei in Sichtlinie gegeneinander bewegte Beobachter dieselbe Relativgeschwindigkeit. Wir bestimmen aus (2.11), wie sich Relativgeschwindigkeiten mehrerer Beobachter verhalten: Die Zeiten, zu denen drei in gleiche Richtung bewegte Beobachter $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_3$ einen Lichtpuls registrieren, sind einander proportional

$$t_2 = \kappa_{21} t_1 \ , \ t_3 = \kappa_{32} t_2 \ , \ t_3 = \kappa_{31} t_1 \ . \tag{2.13}$$

Aus $\kappa_{31} t_1 = \kappa_{32}\kappa_{21} t_1$ liest man unmittelbar ab

$$\kappa_{31} = \kappa_{32}\, \kappa_{21} \ . \tag{2.14}$$

Der Dopplerfaktor κ_{31}, um den $\mathcal{B}_3$ die eigene Uhr schneller als die von $\mathcal{B}_1$ gehen sieht, ist das Produkt des Dopplerfaktors κ_{32}, um den $\mathcal{B}_3$ seine Uhr schneller als die Uhr von $\mathcal{B}_2$ gehen sieht, mit dem Dopplerfaktor κ_{21}, um den $\mathcal{B}_2$ seine Uhr schneller als die Uhr von $\mathcal{B}_1$ gehen sieht.

Durch die Geschwindigkeiten ausgedrückt (2.11) und quadriert heißt dies (im Maßsystem mit $c = 1$)

$$\frac{1+v_{31}}{1-v_{31}} = \frac{1+v_{32}}{1-v_{32}}\,\frac{1+v_{21}}{1-v_{21}} \tag{2.15}$$

und, nach v_{31} aufgelöst,

$$v_{31} = \frac{v_{32} + v_{21}}{1 + v_{32} v_{21}} \ . \tag{2.16}$$

Die Geschwindigkeit v_{31}, mit der $\mathcal{B}_3$ den Beobachter $\mathcal{B}_1$ sich entfernen sieht, ist nicht die Summe $v_{32}+v_{21}$ der Geschwindigkeit v_{32}, mit der $\mathcal{B}_3$ den Beobachter $\mathcal{B}_2$ sich entfernen sieht, und der Geschwindigkeit v_{21}, mit der $\mathcal{B}_2$ den Beobachter $\mathcal{B}_1$ sich entfernen sieht. Die naive Geschwindigkeitsaddition ist nur ungefähr richtig, solange, wie im täglichen Leben, v_{32} und v_{21} klein gegen die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ sind.

Geschwindigkeiten addieren sich bis auf das Vorzeichen im Nenner wie Steigungen: Ist die Ladefläche eines Lastwagens um einen Winkel α gekippt, so hat sie die Steigung $m_1 = \tan\alpha$. Befährt dieser Lastwagen eine Straße mit Neigungswinkel β und Steigung $m_2 = \tan\beta$, so ist die Ladefläche gegenüber der Horizontalen um $\alpha+\beta$ gekippt und hat die Gesamtsteigung

$$m_3 = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{m_1+m_2}{1-m_1m_2}\ . \tag{2.17}$$

Definieren wir die Schnelligkeit σ als Logarithmus des Dopplerfaktors κ,

$$\sigma = \ln\kappa = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}\ ,\quad v = \frac{\mathrm{e}^{\sigma}-\mathrm{e}^{-\sigma}}{\mathrm{e}^{\sigma}+\mathrm{e}^{-\sigma}} = \tanh\sigma\ , \tag{2.18}$$

so entspricht der Multiplikation der Dopplerfaktoren $\kappa = \mathrm{e}^{\sigma}$ die Addition der zugehörigen Schnelligkeiten. Es sind die Schnelligkeiten σ, nicht die Geschwindigkeiten $\tanh\sigma$, die sich bei Bewegung in einer Richtung von Beobachter zu Beobachter addieren.

2.3 Zeitdehnung

Vergeht auf einer Uhr zwischen zwei Ereignissen die Zeit t, so vergeht auf einer zweiten, gleichen Uhr, die sich mit Geschwindigkeit v relativ zur ersten bewegt, zwischen den entsprechenden, gleichzeitigen Ereignissen weniger Zeit, nämlich (2.11)

$$\tau = \sqrt{1-v^2}\,t\ . \tag{2.19}$$

Zeitdehnung ist wechselseitig. Dies zeigt das Diagramm 2.8, in dem wir die Lichtstrahlen des Diagramms 2.3 bis zu beiden Beobachtern $\mathcal{B}$ und $\mathcal{U}$ verlängert haben. Bei den Ereignissen auf ihren Weltlinien geben wir die Zeiten an, die ihre mitgeführten Uhren anzeigen.

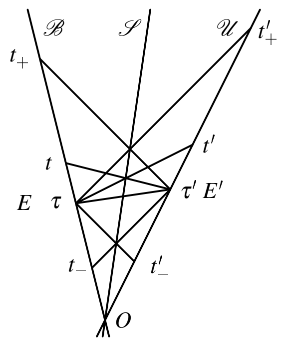

Abbildung 2.8: Wechselseitige Zeitdehnung

Der Schiedsrichter $\mathcal{S}$, der stets zwischen den Beobachtern $\mathcal{B}$ und $\mathcal{U}$ ist, sieht beide Uhren gleich gehen. Daher stimmen die Zeiten t_- und t'_-, sowie τ und τ' ebenso wie t_+ und t'_+ überein, denn Licht von den Ereignissen, in denen die Uhren diese Zeiten anzeigen, erreicht den Schiedsrichter jeweils im gleichen Augenblick.

Für den Beobachter $\mathcal{B}$ findet das Ereignis E', in dem die bewegte Uhr die Zeit τ' anzeigt, gleichzeitig mit dem Ereignis statt, in dem seine Uhr das arithmetische Mittel $t = (t_+ + t_-)/2$ der Zeit t_- anzeigt, zu dem Licht zu E' startet, und der Zeit t_+, zu der er das reflektierte Licht sieht. Dabei zeigt die bewegte Uhr weniger an, nämlich nach dem Satz des Minkowski (2.7) das geometrische Mittel $\tau = \sqrt{t_+t_-} = \sqrt{1-v^2}\,t$ (2.11).

Für den Beobachter $\mathcal{U}$ ist das Ereignis, in dem seine Uhr die Zeit $t' = (t'_+ + t'_-)/2 = t$ anzeigt, gleichzeitig zu

dem Ereignis E, in dem die ihm gegenüber bewegte Uhr von $\mathcal{B}$ die Zeit $\tau = \sqrt{t'_+t'_-} = \sqrt{1-v^2}\,t$ anzeigt. Für $\mathcal{U}$ geht die Uhr von $\mathcal{B}$ ebenso langsamer wie umgekehrt.

Daß die Uhren wechselseitig langsamer gehen, rührt daher, daß sich die Beobachter darin unterscheiden, welche Ereignisse gleichzeitig sind. In Euklidischer Geometrie ist der entsprechende Sachverhalt wohlbekannt: Peilt man waagerecht von einem Leuchtturm auf Meereshöhe zu einem zweiten, baugleichen Turm, der ebenfalls auf Meereshöhe steht, dann erscheint wechselseitig wegen der Erdkrümmung jeweils der andere Turm weniger hoch. Denn Höhe hängt davon ab, welche Richtung waagerecht ist, und bei den beiden Türmen sind diese Richtungen nicht gleich.

Zwillingsparadoxon

Wechselseitige Zeitdehnung scheint widersprüchlich, wenn wir beispielsweise Zwillinge bedenken. Der eine Zwilling, der Reisende, starte zu Anfang im Ereignis A zum Mars, kehre bei Marsankunft im Ereignis M wieder um und reise zurück. Der andere Zwilling, der Stubenhocker $\mathcal{S}$, warte ruhig die Zeit $t + t'$ bis zur Rückkehr ab. Welcher Zwilling, wenn überhaupt einer, ist am Ende im Ereignis E jünger? Für jeden der Zwillinge ist der andere bewegt. Altert nicht widersprüchlicherweise jeder weniger als der andere?

Anders als oft stillschweigend unterstellt, sind die Wahrnehmungen der Zwillinge nicht bis auf die kurze Beschleunigungsphase beim Mars gleich. Beide sehen[2] übereinstimmend, daß der Stubenhocker zwischen dem Anfang und Ende der Reise mehr altert als der Reisende.

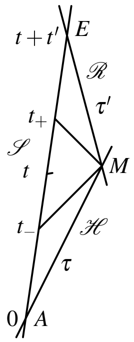

Abbildung 2.9: Zwillinge

Bei Marsankunft M trifft ein Lichtstrahl vom Stubenhocker $\mathcal{S}$ ein. Mit diesem Licht sieht der Hinreisende $\mathcal{H}$, daß auf der rotverschobenen Uhr von $\mathcal{S}$, die sich von ihm entfernt, zwischen dem Start A bis zum Aussenden des Lichtpulses eine Zeit t_- vergangen ist.

Die Hinreisedauer τ, die dem Hinreisenden die eigene Uhr bei M anzeigt, ist um einen Faktor κ größer als t_- (2.1).

Um denselben Faktor κ ist die Zeit t_+ größer, die ab Beginn A auf der Uhr des Stubenhockers vergeht, bis er mit dem Lichtstrahl von der Marsankunft M die Uhr des Hinreisenden die Zeit τ anzeigen sieht,

$$\tau = \kappa\, t_-\ ,\quad t_+ = \kappa\,\tau\ . \tag{2.20}$$

Denn bei gleichförmiger Bewegung in Sichtlinie ist der Dopplerfaktor, anders als bei Schall, wechselseitig (2.8), und die Uhr des Hinreisenden erscheint dem Stubenhocker, von dem sie sich entfernt, genauso rotverschoben wie umgekehrt die Uhr des Stubenhockers dem Hinreisenden.

[2] Beide Zwillinge sehen, wer von ihnen beschleunigt, wenn die Rotverschiebung, mit der sie den anderen wahrnehmen, in Blauverschiebung übergeht. Für den Reisenden ändert sich mit seiner Geschwindigkeit durch Aberration (3.21) auch die Einfallsrichtung der Lichtstrahlen, die er sieht. Dadurch verkleinert sich die Größe, mit der ihm der Stubenhocker erscheint. Hingegen ändert sich für den Stubenhocker nicht die sichtbare Größe des Reisenden, wenn sich seine Farbe ändert.

Schon aus dieser Wechselseitigkeit des Dopplereffektes folgen die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Dopplerfaktors und der Zeitdilatation (2.11), insbesondere ist die Reisedauer τ, die auf der Uhr des Reisenden bis zur Marsankunft vergeht, um den Faktor $\sqrt{1-v^2}$ kleiner als die Zeit $t = (t_+ + t_-)/2$, die gleichzeitig beim Stubenhocker abläuft.

Entsprechend gilt für die Rückreise

$$\tau' = \sqrt{1-v'^2}\, t' \ . \tag{2.21}$$

Die Wartedauer zwischen A und E ist größer als die summierten Reisezeiten

$$t + t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\tau'}{\sqrt{1-v'^2}} > \tau + \tau' \ . \tag{2.22}$$

Sie ist größer als die Lichtlaufdauer $t_+ - t_- = 2r$ für den Hin- und Rückweg, während die Reisezeiten $\tau = \sqrt{1-v^2}\, r/v$ und $\tau' = \sqrt{1-v'^2}\, r/v'$ beliebig kurz sein können.

Wer rastet, der rostet; Reisen hält jung.

Die Weltlinie des Reisenden unterscheidet sich von der des Stubenhockers durch die Beschleunigung bei der Marsankunft M. Solch eine Beschleunigung ist notwendig, damit sich eine zweite Weltlinie durch zwei Punkte von der geraden Weltlinie unterscheidet, denn in einer nicht gekrümmten Raumzeit gibt es nur eine Gerade durch zwei verschiedene Punkte.

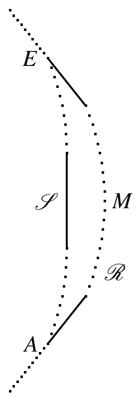

Abbildung 2.10: Gleiche Beschleunigungsphasen

Aber der Reisende wird nicht während der Beschleunigung jünger. Auch bei gleichen Beschleunigungsphasen können Zwillinge unterschiedlich altern, wie das Diagramm 2.10 zeigt. Beide Zwillinge fliegen hier zunächst bis A miteinander. Der Stubenhocker $\mathcal{S}$ bremst dort, der Reisende $\mathcal{R}$ fliegt weiter und bremst ebenso bei M. Danach beschleunigt er zum Rückflug.

Nach passender Wartedauer beschleunigt der Stubenhocker genauso wie der Reisende zur Rückreise, erreicht ihn bei E, von wo ab beide gemeinsam weiterfliegen. Dabei altern beide trotz gleicher Beschleunigungsphasen unterschiedlich, denn bevor sich ihre Wege trennen und nach dem Wiedersehen altern sie gleich, ebenso während der Beschleunigungsphasen zwischen A und E. Die restlichen Strecken der Weltlinien sind die Seiten eines Dreiecks wie AME im Diagramm 2.9, das den Grenzfall von Abbildung 2.10 darstellt, wenn die Beschleunigung augenblicklich erfolgt.

Da die Uhren beider Zwillinge bei der Rückkehr verschiedene Zeiten anzeigen, hängt die Zeit, die auf einer Uhr zwischen zwei Ereignissen abläuft, nicht nur von diesen Ereignissen ab, sondern von der Weltlinie, die die Uhr dazwischen durchläuft; so wie in euklidischer Geometrie die Weglänge zwischen zwei Punkten von der Kurve abhängt, die beide Punkte verbindet. Uhren sind wie Kilometerzähler, die Weglänge messen.

Das unterschiedliche Altern der Zwillinge ist so paradox wie in Euklidischer Geometrie die Tatsache, daß im Dreieck jede Seite kürzer als die Summe der beiden anderen Seitenlängen ist. Um Dreiecke zu verstehen, braucht man nicht Differentialgeometrie gekrümmter Räume, selbst wenn man mit Kreisen und Ecken, mit gekrümmten Kurven also, zu tun hat. Ebenso wird die Allgemeine Relativitätstheorie zur Klärung des Zwillingsparadoxons nicht benötigt. Sie kann verwendet werden, gibt aber dieselbe Erklärung und dieselbe Antwort wie die Spezielle Relativitätstheorie: zwischen je zwei genügend benachbarten Ereignissen auf der Weltlinie jedes frei fallenden Beobachters vergeht mehr Zeit als auf allen anderen zeitartigen Weltlinien, die diese beiden Ereignisse verbinden.

Sind die beiden Ereignisse nicht genügend benachbart, sondern weiter voneinander entfernt, kann Gravitation in der gekrümmten Raumzeit die Komplikation bewirken, daß verschiedene Weltlinien frei fallender Beobachter diese Ereignisse verbinden und daß auf diesen Weltlinien verschieden viel Zeit vergeht, obwohl keiner der Beobachter eine fühlbare Beschleunigung erfahren hat. Es kann etwa eine Raumstation die Erde im freien Fall umkreisen und eine zweite senkrecht von der Erde abgeschossen in freiem Fall während der Aufwärtsbewegung an der ersten vorbeifliegen. Ist die Gipfelhöhe der zweiten Raumstation passend gewählt, so kann sie die erste Raumstation in der Abwärtsbewegung erneut treffen, nachdem diese die Erde umkreist hat. Im senkrechten Fall vergeht dazwischen mehr Zeit als in der Umlaufbahn (Seite 139).

Das unterschiedliche Altern der Zwillinge kann man mit Atomuhren messen [29], die in Flugzeugen die Erde so umfliegen, daß sich für den einen Zwilling die Reisegeschwindigkeit zur Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde addiert und sich für den anderen subtrahiert. Dabei wirkt sich zudem, wie beim Ortungssystem GPS, die in Flughöhe und auf der Erde unterschiedliche Gravitation auf die Uhren aus.

Uhren, die auf Meereshöhe mit der Erddrehung mitgeführt werden, laufen gleich schnell. Denn die Erddrehung verursacht nicht nur je nach geographischer Breite unterschiedliche Geschwindigkeiten der Uhren, sondern auch eine Abplattung des Erdballs, aufgrund derer die schneller mitbewegten Uhren weiter vom Erdmittelpunkt entfernt sind. Die unterschiedliche Gravitation und die unterschiedliche Geschwindigkeit führen insgesamt dazu, daß auf Meereshöhe mitgeführte Uhren gleich schnell laufen (E.52).

2.4 Verkürzung bewegter Maßstäbe

Zwei bewegte Maßstäbe sind gleich lang, wenn sie für einem Schiedsrichter gleich lang sind, der wie im ersten der Raumzeitdiagramme 2.11 stets mitten zwischen ihnen ist. Der Anfang des Maßstabs durchläuft die Weltlinie des jeweiligen Beobachters $\mathcal{B}_0$ oder $\mathcal{B}_v$ und das Ende eine dazu parallele Weltlinie. Die eingezeichneten Maßstäbe sind, wie der Schiedsrichter bestätigt, gleich lang, denn in den Ereignissen τ und τ', die für den Schiedsrichter gleichzeitig, in gleicher Entfernung und in entgegengesetzter Richtung stattfinden, stimmen die Enden beider Maßstäbe überein [47].

Ein bewegter Maßstab ist um denselben Faktor $\sqrt{1-v^2}$ kürzer, um den bewegte Uhren langsamer gehen, als ein gleicher, ruhender Maßstab. Dies zeigt das mittlere der Raumzeitdiagramme 2.11, in dem Hilfslinien weggelassen worden sind und in dem die Strecke von t zu τ' eingezeichnet ist, die aus Ereignissen besteht, die für den Beobachter $\mathcal{B}_0$ gleichzeitig sind. Zu dieser Zeit reicht sein Maßstab von t bis τ' und die rechten Enden

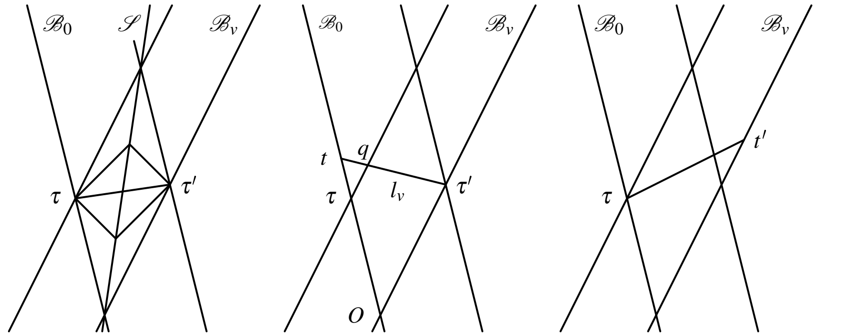

Abbildung 2.11: Verkürzung bewegter Maßstäbe

beider Maßstäbe stimmen zu diesem Zeitpunkt überein. Der bewegte Maßstab ist kürzer, denn die Weltlinie seines linken Endes schneidet die Strecke von t zu τ' im Punkt q.

Da die Dreiecke $t\,O\,\tau'$ und $t\,\tau\,q$ ähnlich sind, verhält sich die Länge l_v der Strecke $\tau'\,q$ zur Länge l der Strecke $\tau'\,t$ wie die Länge der Strecke $O\,\tau$ zur Länge der Strecke $O\,t$. Es ist aber $\tau = \sqrt{1-v^2}\,t$ die Länge der Strecke $O\,\tau$ und t die Länge der Strecke $O\,t$. Also hat ein mit Geschwindigkeit v bewegter Maßstab die Länge

$$l_v = \sqrt{1-v^2}\,l\ , \tag{2.23}$$

wenn ihn ein Beobachter mit seinem gleichen, ruhenden Maßstab der Länge l vergleicht.

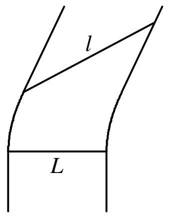

Abbildung 2.12: Beschleunigte Raketen

Wie das rechte Raumzeitdiagramm 2.11 zeigt, ist die Verkürzung bewegter Maßstäbe wechselseitig. Für den Beobachter $\mathcal{B}_v$ sind die Ereignisse τ und t' gleichzeitig und der Maßstab von $\mathcal{B}_0$ kürzer.

Werden zwei Raumschiffe, die wir als Punkte idealisieren, und die zunächst in einem Abstand L ruhen, einige Zeit auf gleiche Art beschleunigt, so daß ihre Weltlinien wie im Diagramm 2.12 durch eine Verschiebung um L auseinander hervorgehen, so haben sie für einen ruhenden Beobachter jederzeit diesen Abstand L. Nach Ende der Beschleunigung durchlaufen sie mit einer Geschwindigkeit v gerade Weltlinien. Messen die Raumschiffe dann ihren Abstand mit einem mitbewegten Maßstab, so erhalten sie einen Wert l. Für den ruhenden Beobachter ist dieser Maßstab bewegt und hat die kontrahierte Länge $\sqrt{1-v^2}\,l$. Dabei ist $\sqrt{1-v^2}\,l = L$, da der Maßstab von einem Raumschiff zum anderen reicht. Es ist also $l = L/\sqrt{1-v^2}$ und größer als L.

Ein zwischen die Raumschiffe gespanntes Seil, wie es in [6, Kapitel 9] bedacht wird, das ursprünglich zum Zerreißen gespannt ist, reißt daher augenblicklich, wenn beide Raumschiffe und das Seil gleich beschleunigt werden.

Dies sehen auch die Besatzungen beider Raumschiffe. Für sie erreicht die vordere Rakete schneller die Endgeschwindigkeit und entfernt sich dabei von der hinteren.

Um die Bestandteile eines Seils, die bis zur Zeit $t = 0$ ruhen, auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen, so daß von ihnen gesehen die Abstände gleich bleiben, muß man die in Richtung der Beschleunigung hinteren Teile stärker und kürzer beschleunigen als die vorderen, so daß alle Punkte bei r, $0 \le r \le L$, in der Zeit $0 \le t \le v\,(r+R)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ die konzentrischen, hyperbelförmige Weltlinien $x(t) = \sqrt{(r+R)^2 + c^2t^2} - R$ durchlaufen und sich danach gleichförmig weiterbewegen. Dabei ist c^2/R die Beschleunigung des hintersten Punktes.

Längenparadoxon

So wie Zeitdehnung zum Zwillingsparadoxon führt, so ergibt Längenverkürzung einen scheinbaren Widerspruch, wenn man durchdenkt, ob ein Auto in eine gleich große Garage paßt, in die es schnell hinein fährt. Für den Garagenbesitzer ruht die Garage und das bewegte Auto ist kürzer und paßt in die Garage. Aber aus Sicht des Autofahrers ist die Garage kürzer und das Auto paßt nicht hinein.

Das zeigen die Raumzeitdiagramme 2.11, in denen $\mathcal{B}_0$ und die dazu parallele Linie den Garagenbesitzer am Garagentor und die Garagenwand markieren und die Weltlinie $\mathcal{B}_v$ und die dazu parallele Linie den Autofahrer an der vordere Stoßstange und die hintere Stoßstange des Autos.

Denken wir uns einen roten Lichtblitz, der von einer Lichtschranke im Ereignis τ' ausgesendet wird, wenn die vordere Stoßstange die Garagenwand erreicht, und einen grünen Lichtblitz, der im Ereignis τ ausgesendet wird, wenn die hintere Stoßstange das Garagentor erreicht. Der Schiedsrichter sieht diese Lichtblitze gleichzeitig und da auch die Lichtlaufzeiten von τ und τ' zu ihm gleich sind, bestätigt er, daß Garage und Auto gleich lang sind.

Der Garagenbesitzer $\mathcal{B}_0$ sieht den roten Lichtblitz von τ' später als den grünen. Berücksichtigt er die Lichtlaufzeit, so stellt er fest, daß die vordere Stoßstange die Garagenwand im Ereignis τ' zur Zeit t erreicht hat, also nach dem Ereignis τ, in dem die hintere Stoßstange das Garagentor durchfuhr. Für ihn hat zur Zeit t das Auto in die Garage gepaßt, es ist kürzer.

Der Autofahrer $\mathcal{B}_v$ sieht den grünen Lichtblitz τ vom Heck des Autos später als den roten. Berücksichtigt er die Lichtlaufzeit, so stellt er fest, daß der grüne Lichtblitz τ zur Zeit t' ausgelöst wurde, also nach dem roten Lichtblitz bei τ. Für ihn hat erst die vordere Stoßstange die Garagenwand erreicht und danach die hintere das Tor, also ist für ihn die Garage kürzer.

Daran ist nichts paradox. Gegeneinander bewegte Beobachter brauchen nicht darin übereinzustimmen, in welcher Reihenfolge zwei Ereignisse stattfinden, wenn es sich bei den Ereignissen nicht um Ursache und Wirkung handelt, wie in diesem Beispiel die Durchfahrt des Hecks durch das Garagentor und der Aufprall der Stoßstange auf die Garagenwand.

2.5 Orts- und Zeitkoordinaten von Ereignissen

Die Ereignisse E in der Raumzeit kann man einfach mit den Werten $(t_+, t_-, \theta, \varphi)$ benennen,[3] die ein gleichförmig bewegter Beobachter $\mathcal{B}$ mißt, indem er einen Lichtpuls zu E aussendet und von E empfängt und dabei die zugehörigen Zeiten t_- und t_+ mit seiner Uhr mißt und die Richtungswinkel θ und φ des auslaufenden Lichtpulses bestimmt.

An solchen Koordinaten ist zunächst nur wichtig, daß sie die Ereignisse in der Raumzeit eindeutig bezeichnen; andere Koordinaten, die mit den Lichtkoordinaten $(t_+, t_-, \theta, \varphi)$ umkehrbar eindeutig zusammenhängen, sind ebenso denkbar. Insbesondere hängen die Lichtkoordinaten einfach mit inertialen Koordinaten (t, x, y, z) zusammen, in denen gleichförmig bewegte Teilchen gerade Koordinatenlinien durchlaufen.

Die Zeit t und der Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, in dem das Ereignis E stattgefunden hat, ist der Mittelwert und die halbe Differenz der Lichtkoordinaten t_+ und t_- (1.5,1.6),

$$t = \frac{t_+ + t_-}{2} , \quad r = \frac{t_+ - t_-}{2} . \tag{2.24}$$

Der Lichtpuls von $\mathcal{B}$ zum Ereignis E kommt aus derselben Richtung zurück, in die er ausgesendet war. Denn der Beobachter dreht sich nicht und verwendet Bezugsrichtungen, die sich im Laufe der Zeit nicht ändern. Die Winkel θ und φ des zum Ereignis E auslaufenden Lichtpulses sowie der Abstand r sind die Kugelkoordinaten des Ortes

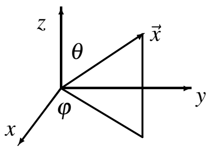

Abbildung 2.13: Kugelkoordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\,\vec{e}_{\theta\,\varphi} , \quad \vec{e}_{\theta\,\varphi} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{2.25}$$

Für Ereignisse auf der Weltlinie des Beobachters gilt $t_+ = t_-$, also $\vec{x} = 0$, insbesondere hat der Ursprung O die inertialen Koordinaten $(0, 0, 0, 0)$.

Sendet $\mathcal{B}$ zur Zeit t_0 einen Lichtpuls in Richtung $\vec{e}_{\theta\,\varphi}$ aus, so durchläuft der Lichtpuls Ereignisse, für die t_-, θ und φ konstant sind,

$$t = \frac{t_+ + t_0}{2} , \quad \vec{x}(t) = \frac{t_+ - t_0}{2}\,\vec{e}_{\theta,\varphi} , \tag{2.26}$$

oder, wenn wir die Variable t_+ durch t ausdrücken,

$$\vec{x}(t) = \vec{e}_{\theta\,\varphi} \cdot (t - t_0) . \tag{2.27}$$

Dies ist eine durch t parametrisierte Weltlinie, die zur Zeit t_0 die Weltlinie des Beobachters schneidet. In den Koordinaten (t, x, y, z) ist sie eine gerade Weltlinie, die mit Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ durchlaufen wird, denn die Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ ist ein Einheitsvektor. Die Gleichung gilt auch für $t < t_0$ für einen Lichtpuls, der aus der Gegenrichtung $-\vec{e}_{\theta\,\varphi}$ einläuft. Denn für ihn ist $t_+ = t_0$ konstant und $t = (t_0 + t_-)/2$ sowie

[3] θ und φ sind die griechischen Buchstaben theta und phi.

$\vec{x} = -\vec{e}_{\theta\,\varphi}(t_0 - t_-)/2$. Während die Lichtkoordinaten $(t_+, t_-, \theta, \varphi)$ eines durchlaufenden Lichtpulses in dem Ereignis unstetig sind, in dem er die Weltlinie des Beobachters kreuzt, sind die kartesischen Koordinaten (t, x, y, z) stetig.

Durch Verschieben der Weltlinie um einen Vektor $\vec{x}_0 + \vec{e}_{\theta\,\varphi}t_0$ erhält man allgemeiner die Weltlinien von Lichtpulsen, die zur Zeit $t = 0$ den Ort $\vec{x}_0$ durchlaufen.

$$\vec{x}(t) = \vec{e}_{\theta\,\varphi} \cdot t + \vec{x}_0 \tag{2.28}$$

Durchläuft ein gleichförmig bewegtes Teilchen $\mathcal{T}$ zur Zeit $t = 0$ den Ort $\vec{x} = 0$, und entfernt es sich in Richtung $\vec{e}_{\theta\,\varphi}$, so gilt für Ereignisse auf seiner Weltlinie $t_+ = \kappa^2 t_-$ (2.9), also

$$t = (\kappa^2 + 1)\frac{t_-}{2} , \quad \vec{x} = (\kappa^2 - 1)\frac{t_-}{2}\,\vec{e}_{\theta\,\varphi} , \tag{2.29}$$

oder, wenn wir t_- durch t ausdrücken,

$$\vec{x}(t) = \vec{v}\,t \ \text{ mit } \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1}\,\vec{e}_{\theta\,\varphi} . \tag{2.30}$$

Das Teilchen $\mathcal{T}$ durchläuft also gleichförmig mit Geschwindigkeit (2.11)

$$v = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1} \tag{2.31}$$

Ereignisse, die in (t, x, y, z)-Koordinaten auf einer geraden Weltlinie liegen. Die Gleichung $\vec{x} = \vec{v}t$ gilt auch mit unveränderter Geschwindigkeit $\vec{v}$ für $t < 0$, während sich $\mathcal{T}$ aus Gegenrichtung $-\vec{e}_{\theta,\varphi}$ nähert. Denn während es sich nähert, gilt $t_+ = \kappa^{-2} t_-$ (2.12).

Durch Verschieben der Weltlinie (2.30) um $\vec{x}_0$ erhält man allgemeiner die Weltlinie eines gleichförmig mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten Teilchens, das zur Zeit $t = 0$ den Ort $\vec{x}_0$ durchläuft,

$$\vec{x}(t) = \vec{v} \cdot t + \vec{x}_0 . \tag{2.32}$$

Es sind also die Koordinaten (t, x, y, z), die wir aus den Zeiten t_+ und t_- sowie den Winkeln θ und φ berechnen, Koordinaten eines Inertialsystems, in dem gleichförmig bewegte Teilchen gerade Koordinatenlinien durchlaufen.

Uhrzeit

Auf einer gleichförmig mit Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ bewegten Uhr $\mathcal{U}$, die den Ursprung O mit Koordinaten $(0, 0, 0, 0)$ und ein Ereignis $(t, x, y, z) = t\,(1, v_x, v_y, v_z)$ durchläuft, vergeht zwischen beiden Ereignissen die Zeit τ, $\tau^2 = t_+ t_-$ (2.7). Wegen (2.24) gilt

$$t_+ = t + r , \quad t_- = t - r , \ \text{ und } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \tag{2.33}$$

und demnach

$$\begin{aligned} \tau^2 &= (t + r)\,(t - r) = t^2 - r^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= t^2\,(1 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = t^2\,(1 - v^2) . \end{aligned} \tag{2.34}$$

Folglich vergeht auf $\mathcal{U}$ zwischen den Ereignissen $(0,0,0,0)$ und (t,x,y,z) die Zeit

$$\tau = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2} = \sqrt{1-v^2}\, t\ . \tag{2.35}$$

Insbesondere würden lichtschnelle Uhren, wenn es sie gäbe, stehen. Dazu paßt, daß die elektromagnetische Welle eines Lichtpulses auf seiner Weltlinie nicht schwingt, sondern konstante Phase hat (7.96), und daß lichtschnelle Teilchen nicht zerfallen können (3.57).

Die Zeit zwischen zwei Ereignissen hängt nicht von Einzelheiten der Uhr ab, mit der sie gemessen wird. Die Zeit ist ein Maß für Entfernung, also eine geometrische Struktur, in der Raumzeit. Zeitlich gleich weit vom Ursprung entfernte Ereignisse findet man nicht wie in der nichtrelativistischen Physik in einer Ebene mit konstantem t und auch nicht wie in der Euklidischen Geometrie auf einer Kugelschale mit konstantem $t^2+x^2+y^2+z^2$, sondern auf einem Hyperboloid mit konstantem $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \tau^2$. Das Quadrat der zeitlichen Entfernung zweier Ereignisse unterliegt nicht dem Satz des Pythagoras, sondern dem Satz des Minkowski.

Die Uhrzeit hängt nicht davon ab, welcher Beobachter Koordinaten für das Ereignis ermittelt, in dem die Uhr $\mathcal{U}$ die Zeit τ anzeigt. Wenn ein anderer Beobachter den Ursprung durchläuft und die Zeiten t'_+ und t'_- und die Winkel θ' und φ' mißt und in Raumzeitkoordinaten (t',x',y',z') umrechnet, so muß $\tau^2 = t_+t_-$ und $\tau^2 = t'_+t'_-$ gelten

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2\ . \tag{2.36}$$

2.6 Dopplereffekt

Wenn sich eine Uhr $\mathcal{U}$ mit Geschwindigkeit v in Richtung $\vec{e}$ mit einem Winkel θ zur Sichtlinie bewegt, dann vergrößert sich während eines kurzen Augenblicks $\mathrm{d}t$ ihr Abstand zum Beobachter $\mathcal{B}$, dessen Koordinaten t, r und θ wir verwenden, um $\mathrm{d}r = v\cos\theta\,\mathrm{d}t$. Damit vergrößert sich die Laufzeit des Lichtes zu ihm, und Lichtpulse $\underline{l}$ und $\bar{l}$ von zwei Ereignissen auf der Uhr, die um $\mathrm{d}t$ zeitlich versetzt starten, erreichen den Beobachter (im Maßsystem $c=1$) mit einer Zeitdifferenz von $\tau_{\mathcal{B}} = \mathrm{d}t + v\cos\theta\,\mathrm{d}t$.

Auf der bewegten Uhr $\mathcal{U}$ vergeht zwischen dem Aussenden der beiden Lichtpulse die Zeit $\tau_{\mathcal{U}} = \sqrt{1-v^2}\,\mathrm{d}t$ (2.35). Der Beobachter $\mathcal{B}$ sieht folglich auf der Uhr $\mathcal{U}$ die Zeit

$$\tau_{\mathcal{U}} = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v\cos\theta}\,\tau_{\mathcal{B}} \tag{2.37}$$

ablaufen, während auf seiner eigenen, gleichen Uhr die Zeit $\tau_{\mathcal{B}}$ vergeht. Gleichung (2.11), $\tau_{\mathcal{B}} = \kappa\tau_{\mathcal{U}}$, ist der Spezialfall, in dem sich die Uhr in Sichtlinie mit $\cos\theta = 1$ entfernt.[4]

Schwingt in dieser Zeit ein mit der Uhr mitgeführter Sender n-mal mit einer Frequenz

[4] In der Abbildung 2.14 liegen die Weltlinien des Beobachter $\mathcal{B}$ und der Uhr $\mathcal{U}$ einfachheitshalber in der Zeichenebene. Wir untersuchen aber den allgemeineren Fall, daß die Weltlinie des Beobachters $\mathcal{B}$ parallel zu dieser Ebene verläuft und die Weltlinie der Uhr nicht schneidet.

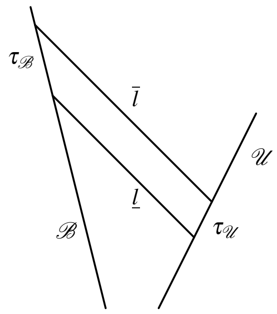

Abbildung 2.14: Dopplereffekt

$\nu_{\mathcal{U}} = n/\tau_{\mathcal{U}}$, so sieht der Beobachter diese n Schwingungen, während auf seiner Uhr die Zeit $\tau_{\mathcal{B}}$ vergeht. Er beobachtet die Frequenz $\nu_{\mathcal{B}} = n/\tau_{\mathcal{B}}$,

$$\nu_{\mathcal{B}} = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v\cos\theta}\,\nu_{\mathcal{U}}\ . \tag{2.38}$$

Ist $v\cos\theta > \sqrt{1-v^2} - 1$, so erscheint die Uhr langsamer und die Frequenz des Lichtes der Uhr ist zu geringeren Werten in den roten Bereich verschoben.

Bewegt sich die Uhr mit $v\cos\theta < \sqrt{1-v^2} - 1$ auf den Beobachter zu, so erscheint sie schneller und ihr Licht ist blauverschoben. Diese Änderung der wahrgenommenen Frequenz durch Bewegung der Quelle gegenüber dem Empfänger ist der Dopplereffekt. Er wird zur Geschwindigkeitsmessung alltäglich verwendet.

Bei Bewegung quer zur Sichtlinie mit $\cos\theta = 0$ zeigt der transversale Dopplereffekt, $\tau_{\mathcal{U}} = \sqrt{1-v^2}\,\tau_{\mathcal{B}}$, unmittelbar die Verlangsamung bewegter Uhren, denn die Länge der Laufstrecke zum Beobachter verändert sich gerade nicht.

Dopplerverschiebung ist nur bei Bewegung in Sichtlinie wechselseitig gleich. Sendet $\mathcal{B}$ zwei um $\mathrm{d}t = \hat{\tau}_{\mathcal{B}}$ versetzte Lichtpulse zur Uhr $\mathcal{U}$, so erreicht der zweite die Uhr um $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t + v\cos\theta\,\mathrm{d}t'$, also um $\mathrm{d}t' = \hat{\tau}_{\mathcal{B}}/(1 - v\cos\theta)$, später, da sich die Laufstrecke um $v\cos\theta\,\mathrm{d}t'$ verlängert hat. Dabei vergeht auf der Uhr $\mathcal{U}$ die Zeit $\hat{\tau}_{\mathcal{U}} = \sqrt{1-v^2}\,\mathrm{d}t'$. Die Uhr $\mathcal{U}$ sieht also von $\mathcal{B}$ Frequenzen

$$\hat{\nu}_{\mathcal{U}} = \frac{1 - v\cos\theta}{\sqrt{1-v^2}}\,\hat{\nu}_{\mathcal{B}}\ . \tag{2.39}$$

Dies stimmt mit $\hat{\nu}_{\mathcal{U}} = \sqrt{1-v^2}/(1+v\cos\theta')\,\hat{\nu}_{\mathcal{B}}$ (2.38) überein, wobei θ' den durch Aberration (3.21) geänderten Winkel zur Sichtlinie mit der Richtung bezeichnet, in die $\mathcal{U}$ den Beobachter $\mathcal{B}$ sich entfernen sieht.

Scheinbare Überlichtgeschwindigkeit

Aus dem Quasar 3C273 strömt Gas, dessen Bewegung quer zur Sichtlinie zu einer auf der Erde meßbaren Winkelgeschwindigkeit führt [34, Kapitel 11]. Multipliziert man die beobachtete Winkelgeschwindigkeit mit der bekannten Entfernung, so erhält man als Geschwindigkeit quer zur Sichtlinie die siebenfache Lichtgeschwindigkeit. Der Quasar scheint also Teilchen mit Überlichtgeschwindigkeit zu emittieren.

Diese Schlußfolgerung ist falsch, denn das Produkt von Abstand und beobachteter Winkelgeschwindigkeit ist nicht die Geschwindigkeit quer zur Sichtlinie.

Die Uhr $\mathcal{U}$ in Abbildung 2.14 bewegt sich in der Zeit $\mathrm{d}t$ um $v\sin\theta\,\mathrm{d}t = r\,\mathrm{d}\theta$ quer zur Sichtlinie, wobei r ihren augenblicklichen Abstand bezeichnet. Die Lichtpulse $\underline{l}$ und $\bar{l}$ mit der Winkeldifferenz $\mathrm{d}\theta$ treffen beim Beobachter mit Zeitdifferenz $\tau_{\mathcal{B}} = \mathrm{d}t + v\cos\theta\,\mathrm{d}t$

beim Beobachter ein, da $\bar{l}$ um $\mathrm{d}t$ versetzt startet und einen um $\mathrm{d}r = v\cos\theta\,\mathrm{d}t$ größeren (bei negativen $\cos\theta$ kleineren) Abstand durchlaufen muß. Also ist die beobachtete Winkelgeschwindigkeit, $\omega_{\mathcal{B}} = \mathrm{d}\theta/\tau_{\mathcal{B}}$,

$$\omega_{\mathcal{B}} = \frac{v\sin\theta}{r\,(1+v\cos\theta)}\ . \tag{2.40}$$

Wenn wir diese beobachtete Winkelgeschwindigkeit mit dem Abstand r multipliziert, erhalten wir die scheinbare Geschwindigkeit quer zur Sichtlinie

$$u = \frac{v\sin\theta}{1+v\cos\theta}\ . \tag{2.41}$$

Sie wird maximal für den Winkel $\cos\theta = -v$ und beträgt dann $v/\sqrt{1-v^2}$. Sie kann beliebig groß werden, obwohl v kleiner als die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist.

2.7 Skalarprodukt und Längenquadrat

Die bei der Uhrzeit (2.35) auftretende Differenz von Quadraten spielt eine zentrale Rolle in der relativistischen Physik. Um sie kürzer schreiben zu können, führen wir folgendes Skalarprodukt von Vierervektoren wie $v = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ und $w = (w^0, w^1, w^2, w^3)$ ein[5]

$$v\cdot w := v^0w^0 - v^1w^1 - v^2w^2 - v^3w^3\ . \tag{2.42}$$

Als Längenquadrat eines Vierervektors w definieren wir

$$w^2 = w\cdot w = (w^0)^2 - (w^1)^2 - (w^2)^2 - (w^3)^2\ . \tag{2.43}$$

Das Skalarprodukt (2.42) ist reell, symmetrisch und linear

$$v\cdot w = w\cdot v\,, \tag{2.44}$$

$$u\cdot(v+w) = u\cdot v + u\cdot w\ ,\quad v\cdot(a\,w) = a\,(v\cdot w)\quad \forall a\in\mathbb{R}\,, \tag{2.45}$$

aber nicht definit. Lichtartige Vektoren haben Längenquadrat 0, ohne daß alle Komponenten verschwinden. Das Skalarprodukt ist nichtentartet: es verschwindet das Skalarprodukt eines Vektors v nur dann mit allen anderen Vektoren, wenn er selbst verschwindet.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren u und v ist eine Differenz von Längenquadraten

$$u\cdot v = \frac{1}{4}\big((u+v)^2 - (u-v)^2\big)\ . \tag{2.46}$$

Da verschiedene Beobachter zwar unterschiedliche Koordinaten, aber dieselben Längenquadrate von Vierervektoren ermitteln (2.36), hängen auch Skalarprodukte nicht vom Koordinatensystem des jeweiligen Beobachters ab.

[5] Die obenstehenden Indizes sind keine Exponenten, sondern zählen die Komponenten ab. Dem Leser bleibt überlassen, aus dem Zusammenhang zu erschließen, ob die y-Komponente eines Vektors oder sein Längenquadrat gemeint ist.

Ist das Längenquadrat w^2 positiv, nennen wir w zeitartig; ist es negativ, so nennen wir w raumartig; ist $w^2 = 0\,, w \neq 0\,,$ so heißt w lichtartig.

Ein zeit- oder lichtartiger Vektor w heißt zukunftsgerichtet, wenn die Komponente w^0 positiv ist, ansonsten vergangenheitsgerichtet.

Zwei Ereignisse U und W sind zueinander raumartig, wenn der entsprechende Differenzvektor, dessen Komponenten die Koordinatendifferenzen der Ereignisse enthält

$$w_{WU} = (t_W - t_U, x_W - x_U, y_W - y_U, z_W - z_U) \tag{2.47}$$

und der in unseren Diagrammen von U nach W zeigt, raumartig ist. Entsprechend sind zueinander lichtartige oder zeitartige Ereignispaare definiert. Eine Ursache U kann nur dann ein Ergebnis W bewirken, wenn w_{WU} zukunftsgerichtet zeit- oder lichtartig ist.

Ereignisse auf der Weltlinie eines Lichtpulses sind zueinander lichtartig.

Die Ereignisse auf der Weltlinie eines Beobachters sind zueinander zeitartig, da Beobachter langsamer als Licht sind. Auf solch einer geraden Weltlinie gibt das Längenquadrat des Differenzvektors zweier zueinander zeitartiger Ereignisse das Quadrat der Zeit an, die auf einer mitgeführten Uhr zwischen den beiden Ereignissen vergeht.

Senkrecht

Die Senkrechte $\mathcal{B}_\perp$, die eine Gerade $\mathcal{B}$ in einem Punkt t schneidet, konstruiert man, indem man auf $\mathcal{B}$ zwei Punkte, t_+ und t_-, gleichen Abstandes zu t wählt und dann einen weiteren Punkt E bestimmt, der von t_+ und t_- gleich weit entfernt liegt. Die Senkrechte $\mathcal{B}_\perp$ ist die Verbindungsgerade von t und E.

Dies gilt in Euklidischer Geometrie wie in der Raumzeit, allerdings ist in der Raumzeit der Abstand durch τ (2.35) gegeben. Sind t_- und t_+ zwei Ereignisse auf der Weltlinie eines Beobachters $\mathcal{B}$ und liegt t mitten zwischen ihnen, dann liegen die Schnittpunkte E und E' der Lichtstrahlen durch t_- und t_+ auf der Senkrechten durch t, denn E und E' sind von t_- genauso weit wie von t_+ entfernt, nämlich um $\tau = 0$, da τ für lichtartige Abstände verschwindet.

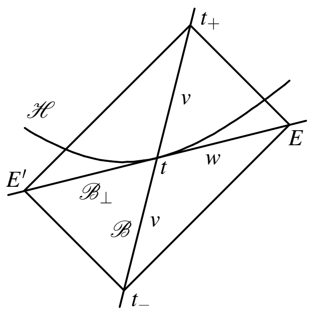

Abbildung 2.15: Senkrechte Vektoren mit Hyperbel

Die Weltlinie $\mathcal{B}$ besteht für den Beobachter aus gleichortigen Ereignissen. Die Ereignisse auf $\mathcal{B}_\perp$ sind für ihn gleichzeitig (Abbildung 1.6). Es stehen daher die Linien gleichortiger Ereignisse senkrecht auf den Linien gleichzeitiger Ereignisse.

Mit dem Vektor v von t_- zu t und von t zu t_+ und dem Vektor w von t zu E schreibt sich der Lichtstrahl von t_- zu E als $v+w$. Der Vektor $v-w$ ist der Lichtstrahl zurück von E zu t_+. Da die Längenquadrate der lichtartigen Vektoren $v+w$ und $v-w$ verschwinden,

$$\begin{aligned} 0 =& (v+w)^2 = v^2 + 2v\cdot w + w^2\ ,\\ 0 =& (v-w)^2 = v^2 - 2v\cdot w + w^2\ , \end{aligned} \tag{2.48}$$

gilt $v^2 = -w^2$, und das Skalarprodukt

$$v\cdot w = 0 \tag{2.49}$$

der zueinander senkrechten Vektoren verschwindet.

Das Längenquadrat v^2 ist das Quadrat der Zeit, die zwischen den Ereignissen t_- und t auf der Weltlinie des Beobachters vergeht, und diese Zeit ist die Lichtlaufzeit und demnach die Entfernung vom Beobachter zum Ereignis E. Wegen $v^2 = -w^2$ ist daher $-w^2$ das Quadrat der Entfernung von E zum Beobachter.

Senkrecht: *Der Vektor w_{ET} von einem Ereignis t auf der Weltlinie eines gleichförmig bewegten Beobachter zu einem für ihn gleichzeitigen Ereignis E steht senkrecht im Sinne des Skalarproduktes (2.42) auf der Weltlinie des Beobachters. Das negative Längenquadrat $-{w_{ET}}^2$ ist das Quadrat der Entfernung zwischen E und dem Beobachter.*

Die Hyperbel $\mathcal{H}$ durch t mit Ursprung t_- ist dadurch definiert, daß man zu ihren Punkten von t_- durch gleichlange Verschiebungen $u(s)$ gelangt,

$$u(s) = \sqrt{1+s^2}\, v + s\, w \ , \quad u(s)^2 = v^2 \ , \tag{2.50}$$

wobei s die reellen Zahlen durchläuft. Insbesondere gehört der Punkt t auf der Hyperbel zu $s = 0$. Da u^2 nicht von s abhängt, sind alle Punkte auf $\mathcal{H}$ gleich weit von t_- entfernt.

Jeder Vektor von t_- zu einem Punkt A auf der Senkrechten $\mathcal{B}_\perp$ ist von der Form $x(s) = v + sw$, wobei s eine reelle Zahl ist. Er ist wegen $v \cdot w = 0$ gleich lang wie der Vektor $-v + sw$ von t_+ zu A.

Da $\sqrt{1+s^2}$ für $s \neq 0$ größer als 1 ist, liegen außer t alle Punkte von $\mathcal{H}$ auf der von t_- abgewandten Seite von $\mathcal{B}_\perp$, denn es ist $u(s) = x(s) + a(s)v$ mit positivem $a(s)$. Da zudem $\mathcal{B}_\perp$ und $\mathcal{H}$ den Punkt t durchlaufen, berühren sie sich dort und $\mathcal{B}_\perp$ ist die Tangente an die Hyperbel $\mathcal{H}$ im Punkt t. Sie steht senkrecht auf dem Ortsvektor von t_- nach t.

Dies folgt auch, wenn man $u(s)^2$ nach s differenziert. Für den Tangentialvektor $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}$ erhält man

$$u(s) \cdot u(s) = \text{konstant} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} \cdot u = 0 \ . \tag{2.51}$$

Perspektiven

Peilt man waagerecht von einem Turm auf Meereshöhe zu einem zweiten, baugleichen Turm, der ebenfalls auf Meereshöhe steht, dann erscheint wechselseitig wegen der Erdkrümmung jeweils der andere Turm weniger hoch. Denn Höhe ist eine perspektivische Abmessung. Sie hängt davon ab, welche Richtung waagerecht ist, und bei den beiden Türmen sind diese Richtungen nicht gleich.

Perspektivische Verkürzung ist nicht nur scheinbar. Sie ist physikalisch wichtig. Weil man die Höhe einer Leiter durch Drehen verändern kann, kann eine gedrehte Leiter durch eine niedrige Tür passen, auch wenn die Länge der Leiter größer ist als die Höhe der Tür, und obwohl Drehungen weder die Maße der Tür noch der Leiter ändern.

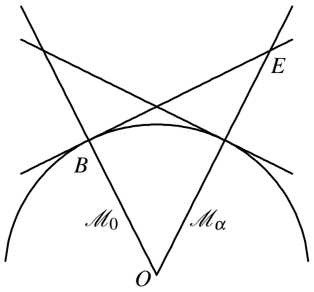

Abbildung 2.16: Gedrehte Maßstäbe

Die Abbildung 2.16 stellt die perspektivische Höhe zweier zueinander gedrehter Maßstäbe $\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}_\alpha$ in der Euklidischen Geometrie dar. Ein Kreis markiert Punkte gleichen Abstandes vom Mittelpunkt; die Tangente an den Kreis steht senkrecht auf dem Ortsvektor vom Mittelpunkt zum Kreis.

Die beiden Maßstäbe schneiden sich im Punkt O. Für einen Beobachter, der Höhe mit $\mathcal{M}_0$ mißt, sind Punkte gleich hoch wie B, wenn sie auf der Geraden durch B liegen, die einen rechten Winkel mit dem Maßstab bildet. Insbesondere ist für ihn der Punkt E gleich hoch wie der Punkt B. Die mit dem gedrehten Maßstab $\mathcal{M}_\alpha$ gemessene Länge zwischen O und E ist größer als die Länge zwischen den dazu gleich hohen Punkten O und B, denn der Kreis durch B schneidet den gedrehten Maßstab zwischen O und E. Bezieht ein Beobachter Höhe auf die Richtung von $\mathcal{M}_\alpha$, so gilt ebenfalls, daß zwei Punkte auf dem dazu gedrehten Maßstab $\mathcal{M}_0$ weiter voneinander entfernt sind als zwei dazu gleichhohe Punkte auf dem Maßstab $\mathcal{M}_\alpha$. Die perspektivische Höhenverringerung ist wechselseitig.

Wenn man in Abbildung 2.16 den Kreis durch eine Hyperbel ersetzt, so ergeben sich die geometrischen Verhältnisse der Raumzeit. Im Raumzeitdiagramm 2.17 markiert die Hyperbel $t^2 - x^2 = \tau^2$ für ein festes, positives τ^2 und mit $t > 0$ Ereignisse gleichen zeitlichen Abstandes zum Ursprung (2.35). Gleichförmig bewegte Uhren, die gleich gehen und auf geraden Weltlinien von Beobachtern $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$ den Ursprung $t = 0$, $x = 0$ durchlaufen, zeigen bei Durchlaufen des Ereignisses, in dem ihre Weltlinie die Hyperbel schneidet, eine um τ spätere Zeit an.

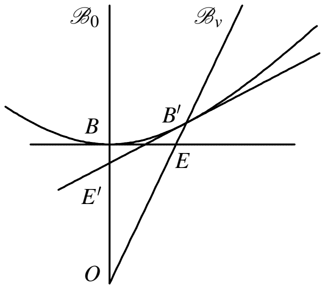

Abbildung 2.17: Zeitdehnung

Die Tangenten im Punkt B und B' stehen senkrecht im Sinne des Skalarproduktes auf der Weltlinie von O zu B beziehungsweise von O zu B' (2.51). Sie bestehen daher aus Ereignissen, die für den Beobachter $\mathcal{B}_0$ beziehungsweise $\mathcal{B}_v$ gleichzeitig stattfinden. Sie schneiden die Weltlinie des anderen Beobachters, bevor auf dessen Uhr die Zeit τ vergeht.

Vergeht auf einer Uhr zwischen zwei Ereignissen die Zeit τ, so vergeht auf jeder bewegten Uhr zwischen den dazu gleichzeitigen Ereignissen die kürzere Zeit (2.35)

$$\tau_{EO} = \tau_{E'O} = \sqrt{1-v^2}\,\tau \ , \tag{2.52}$$

so wie zwei Punkten auf einer senkrechten Leiter einen kleineren Abstand haben als die gleichhohen Punkten auf einer geneigten Leiter. Die perspektivischen Verhältnisse in der Raumzeit sind, wie in der Euklidischen Geometrie, wechselseitig.

Die verkürzte Zusammenfassung „bewegte Uhren gehen langsamer“ unterschlägt die umständliche Angabe von Strecken OE und OB beziehungsweise OE' und OB', deren Dauer zu vergleichen ist, und ist Anlaß von Mißverständnissen. Denn „langsamer gehen“ ist eine Ordnungsrelation und es kann nicht die Uhr $\mathcal{B}_0$ langsamer als die Uhr $\mathcal{B}_v$ und ebenfalls die Uhr $\mathcal{B}_v$ langsamer als die Uhr $\mathcal{B}_0$ gehen. Tatsächlich gehen beide Uhren gleich, dies kann ein Schiedsrichter wie in Abbildung 2.2 überprüfen.

Verkürzung bewegter Maßstäbe kann man dem nebenstehenden Diagramm ablesen, das sich durch Spiegelung des Diagramms 2.17 ergibt [47]. Hier durchlaufen Anfang und Ende gleichförmig bewegter Maßstäbe von Beobachtern $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$ je ein Paar paralleler, gerader Weltlinien. Beide Maßstäbe haben die Länge l, denn B und B' liegen auf der hilfsweise eingezeichneten Hyperbel mit Ursprung in O, die von Punkten P mit $-w_{PO}{}^2 = l^2$ gebildet wird.

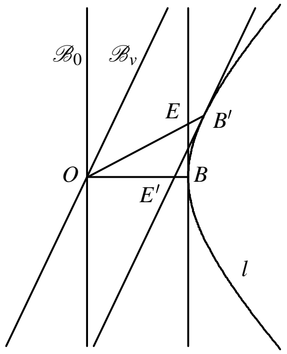

Abbildung 2.18: Verkürzung bewegter Maßstäbe

Die Geraden durch O und B sowie O und B' sind senkrecht im Sinne des Skalarproduktes zu den Weltlinien der Beobachter $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_v$, denn es handelt sich jeweils um Orts- und (Parallele zu) Tangentialvektoren an eine Hyperbel (Seite 36).

Daher sind für $\mathcal{B}_0$ die Ereignisse O und B gleichzeitig. In O stimmen die linken Enden beider Maßstäbe überein. Aber der gegenüber $\mathcal{B}_0$ bewegte Maßstab ragt nur bis E', ist also kürzer als der eigene, der bis B reicht.

Ebenso sind für $\mathcal{B}_v$ die Ereignisse O und B' gleichzeitig. In O stimmen die linken Enden beider Maßstäbe überein. Aber der gegenüber $\mathcal{B}_v$ bewegte Maßstab ragt nur bis E, ist also kürzer als der eigene, der bis B' reicht.

Im Diagramm 2.19 werden die Reisezeiten beim Zwillingsparadoxon nicht mit Schiedsrichtern wie im Raumzeitdiagramm 2.9, sondern mit der hilfsweise eingezeichneten Hyperbel von M nach τ' mit Ursprung bei A und der Hyperbel von M nach τ'' mit Ursprung bei E mit der Wartedauer verglichen.

Die Abschnitte von A nach τ' und von τ'' nach E auf der Weltlinie des Stubenhockers $\mathcal{S}$ dauern so lang, wie die Hin- und die Rückreise für den Reisenden $\mathcal{R}$. Der Stubenhocker ist zudem um die Zeit gealtert, die zwischen τ' und τ'' vergangen ist. Auf der geraden Weltlinie des Stubenhockers ist also mehr Zeit vergangen als auf der Weltlinie des Reisenden mit einen Knick.

Die Tangenten Mt' und Mt'' an die Hyperbeln bestehen aus Ereignissen, die für einen Beobachter $\mathcal{B}_{\text{hin}}$, der mit zum Mars fliegt, beziehungsweise für einen Beobachter $\mathcal{B}_{\text{her}}$, der zurück fliegt, gleichzeitig zur Ankunft M sind. Sie schneiden die Weltlinie des Stubenhockers bei t' und t'' und belegen, daß für den hin- und den herfliegende Beobachter auf der Uhr des Stubenhockers weniger Zeit vergeht als gleichzeitig auf der eigenen Uhr. Es stimmen aber die Ereignisse t' und t'' nicht überein, sie sind für verschiedene Beobachter gleichzeitig zur Marsankunft. Zwischen t' und t'' vergeht soviel Zeit, daß der Stubenhocker am Ende bei E insgesamt mehr gealtert ist als der Reisende.

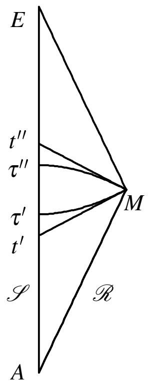

Abbildung 2.19: Zwillingsparadoxon

3 Transformationen

3.1 Lorentztransformation von Koordinaten

Wie hängen die Koordinaten (t, x, y, z), die ein Beobachter $\mathcal{B}$ einem Ereignis E zuschreibt, mit den Koordinaten (t', x', y', z') zusammen, die ein ihm gegenüber mit Geschwindigkeit v bewegter Beobachter $\mathcal{B}'$ für dasselbe Ereignis mißt?

Wir untersuchen zunächst den Fall, daß sich die Weltlinien beider Beobachter schneiden und daß sie dabei ihre Uhren auf $t' = t = 0$ stellen. Einfachheitshalber wählen beide Beobachter ihre x-Achse in Richtung der Relativbewegung, sodaß sich $\mathcal{B}'$ für $\mathcal{B}$ in x-Richtung und umgekehrt $\mathcal{B}$ für $\mathcal{B}'$ in $-x'$-Richtung bewegt. Der Betrag der Relativgeschwindigkeit ist für beide Beobachter gleich, jeder sieht den anderen mit dem gleichen Dopplerfaktor $\kappa(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \kappa(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ verlangsamt (2.8).

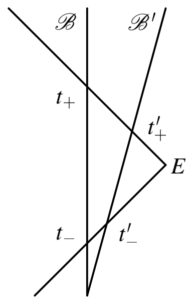

Abbildung 3.1: Lorentztransformation

Für Ereignisse E in der Ebene, die von den Weltlinien der Beobachter aufgespannt wird, gilt dann $y = z = 0$ und $y' = z' = 0$. Aus dem Diagramm 3.1 liest man ab, wie die Koordinaten t' und x' mit t und x zusammenhängen. Wenn die Lichtstrahlen, die das Ereignis E durchlaufen, die Weltlinien der Beobachter schneiden, so zeigen deren mitgeführte Uhren die Zeiten t_- und t_+ sowie t'_- und t'_+ an. Dabei sind t'_- und t_- sowie t_+ und t'_+ einander mit dem Dopplerfaktor

$$\kappa(v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \tag{3.1}$$

proportional, denn es sind Zeiten, die gleiche Uhren bei Aussenden und Empfangen eines Lichtpulses zeigen (2.11). Also mißt der Beobachter $\mathcal{B}'$ für das Ereignis E die Lichtkoordinaten

$$t'_+ = \kappa^{-1}\, t_+ \ , \quad t'_- = \kappa\, t_- \ . \tag{3.2}$$

Die Transformation der zwei Lichtkoordinaten zerfällt in zwei Transformationen je einer Koordinate, denn t'_+ hängt nur von t_+ und t'_- nur von t_- ab. In den Koordinaten $t' = (t'_+ + t'_-)/2$ und $x' = (t'_+ - t'_-)/2$ entkoppeln die Transformationen nicht

$$t' = \ \frac{1}{2}(\kappa + \kappa^{-1})\, t - \frac{1}{2}(\kappa - \kappa^{-1})\, x \ , \quad x' = -\frac{1}{2}(\kappa - \kappa^{-1})\, t + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa^{-1})\, x \ . \tag{3.3}$$

Setzen wir hier $\kappa(v)$ und $1/\kappa(v) = \kappa(-v) = (1-v)/\sqrt{1-v^2}$ (2.12) ein, so heißt dies

$$t' = \frac{t - v\, x}{\sqrt{1-v^2}} \ , \quad x' = \frac{-v\, t + x}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \ . \tag{3.4}$$

Dies ist im Maßsystem $c = 1$ die Lorentztransformation der Koordinaten eines Ereignisses E in der t-x-Ebene auf die t'-x'-Koordinaten, die ein in x-Richtung mit Geschwindigkeit v bewegter Beobachter demselben Ereignis zuschreibt.

Aus (3.2) sieht man, daß κ^{-1} und daher $-v$ zur Umkehrtransformation gehört: für $\mathcal{B}'$ bewegt sich $\mathcal{B}$ mit Geschwindigkeit v in $-x'$-Richtung.

Lorentztransformation in vier Dimensionen

Auch wenn allgemeiner das Ereignis E nicht in der t-x-Ebene liegt, muß die Lorentztransformation L der (t,x,y,z)-Koordinaten auf (t',x',y',z')-Koordinaten linear sein.

Denn die Weltlinien freier Teilchen sind für jeden Beobachter Geraden in der Raumzeit. Folglich werden Dreiecke, die von drei sich schneidenden Geraden gebildet werden, auf Dreiecke abgebildet. Da Dreiecke von Differenzvektoren u und v aufgespannt werden, wobei für die dritte Seite $w = u+v$ gilt, gilt $L(u+v) = L(u)+L(v)$ für die transformierten Seiten. Wegen $L(u+u) = L(u)+L(u)$ gilt $L(n\,u) = n\,L(u)$ für ganzzahlige n, aus $L(u) = L(n\,(1/n\,u)) = n\,L(1/n\,u)$ folgt $L(a\,u) = a\,L(u)$ für rationales a und, weil L stetig ist, für jedes reelle a. Also ist L linear.

Die Koordinaten y' und z' sind Linearkombination von t, x, y und z, die für beliebige t und x verschwinden, wenn das Ereignis E in der Ebene $y = z = 0$ liegt. Daher hängen sie nicht von t und x ab

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \ . \tag{3.5}$$

Ebenso sind $t' = (t - vx)/\sqrt{1-v^2} + ey + fz$ und $x' = (-v\,t + x)/\sqrt{1-v^2} + gy + hz$ Linearkombinationen, die für $y = z = 0$ mit (3.4) übereinstimmen.

Die Lorentztransformation muß Längenquadrate invariant lassen (2.36). Denn die Zeit, die auf einer gleichförmig bewegten Uhr zwischen O und E vergeht, hängt nicht vom Beobachter ab. Da sich das Skalarprodukt als Differenz von Längenquadraten schreiben läßt (2.46), müssen Lorentztransformationen alle Skalarprodukte invariant lassen.

Daher verschwinden die Koeffizienten e, f, g, h. Denn die Vektoren $(\sqrt{1-v^2}, 0, 0, 0)$, $(0, \sqrt{1-v^2}, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ und $(0, 0, 0, 1)$ stehen aufeinander senkrecht. Diese Vektoren haben für $\mathcal{B}'$ die Komponenten $(1, -v, 0, 0)$, $(-v, 1, 0, 0)$, (e, g, a, c) und (f, h, b, d) und die ersten beiden müssen auf den letzten beiden senkrecht stehen.

Also gelten (3.4) und (3.5) für beliebige (t,x,y,z), wobei (3.5) noch dadurch eingeschränkt ist, daß alle Längenquadrate invariant sind,

$$(ay+bz)^2 + (cy+dz)^2 = (a^2+c^2)y^2 + 2(ab+cd)yz + (b^2+d^2)z^2 = y^2 + z^2 \ . \tag{3.6}$$

Dies gilt genau dann für alle y und z, wenn $a^2+c^2 = 1$, $ab+cd = 0$ und $b^2+d^2 = 1$ erfüllt sind. Wegen $ab+cd = 0$ ist (b,d) ein Vielfaches von $(-c,a)$, wegen $a^2+c^2 = b^2+d^2$ kann nur $(b,d) = \pm(-c,a)$ gelten, und wegen $a^2+c^2 = 1$ lassen sich a und c als Kosinus und Sinus eines Winkels φ schreiben. Daher ist die Lorentztransformation in der zur Bewegungsrichtung senkrechten Ebene eine Drehspiegelung oder eine Drehung

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \ . \tag{3.7}$$

Falls $\varphi = 0$ ist, nennt man die Lorentztransformation drehungsfrei.

$$t' = \frac{t - v\,x}{\sqrt{1-v^2}} \ , \quad x' = \frac{-v\,t + x}{\sqrt{1-v^2}} \ , \quad y' = y \ , \quad z' = z \tag{3.8}$$

In Matrixschreibweise lautet sie einschließlich der konventionellen Faktoren c

$$\begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ . \tag{3.9}$$

Diese Lorentztransformation ist als passive Transformation zu lesen, die den Zusammenhang der Koordinaten beschreibt, die $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ für Ereignisse E verwenden. Sie verändert nicht die Ereignisse. Als aktiv bezeichnet man diejenigen Transformationen, die Ereignisse auf andere Ereignisse abbilden. Dreht man in (3.9) das Vorzeichen der Geschwindigkeit v um, so erhält man die Matrix der Lorentztransformation, die aktiv die Weltlinie eines ruhenden Teilchens im unveränderten Koordinatensystem auf die Weltlinie eines Teilchens abbildet, das sich mit Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt.

Wenn man bei einer Drehung um eine Achse den Drehwinkel α stetig von Null bis zu einem Wert $\overline{\alpha}$ vergrößert und dabei die Auswirkung auf einen Punkt x betrachtet, so durchläuft der Punkt $D_\alpha x = x(\alpha)$ einen Kreisbogen, denn Drehungen lassen den Abstand zur Achse ungeändert. Ebenso durchlaufen im Diagramm 3.2 Punkte in der Raumzeit Hyperbeln, wenn man auf die Punkte Lorentztransformationen L_v anwendet, deren Geschwindigkeiten Werte von Null bis $\overline{v}$, $|\overline{v}| < 1$, durchlaufen. Denn Lorentztransformationen lassen das Längenquadrat $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant. Insbesondere werden lichtartige Vektoren in der t-x-Ebene gestreckt oder gestaucht. Der Ursprung ist ein hyperbolischer Fixpunkt. Er wird nicht wie bei Drehungen als Wirbel von Nachbarpunkten umkreist, sondern wie ein Staupunkt umflossen.

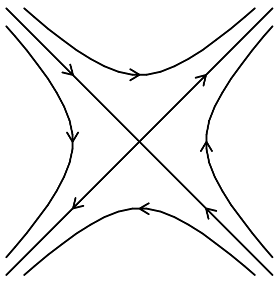

Abbildung 3.2: Lorentzfluß

Bezeichnen wir in (3.9) den Vierervektor $(c\,t, x, y, z)$ kurz mit x und die 4×4 Lorentzmatrix mit Λ, so schreibt sich die Lorentztransformation als

$$x' = \Lambda\,x \ . \tag{3.10}$$

Umgekehrt gilt $x = \Lambda^{-1}\,x'$, und wir erhalten die Koordinaten $(c\,t, x, y, z)$ aus den Koordinaten $(c\,t', x', y', z')$ durch Multiplikation mit der inversen Lorentzmatrix. Dies ist bei drehungsfreien Lorentztransformationen die ursprüngliche Lorentzmatrix, in der v durch $-v$ ersetzt ist.

Allgemeiner kann sich bei einer Lorentztransformation der Beobachter $\mathcal{B}'$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ in eine beliebige Richtung bewegen, und seine räumlichen Bezugsrichtungen können gegenüber $\mathcal{B}$ verdreht sein. Die Matrix solch einer Lorentztransformation ist von der Form $\Lambda = D_1 \Lambda_x D_2$ (D.34), wobei D_1 und D_2 Drehmatrizen sind und Λ_x die Matrix in (3.9) ist, die zu Bewegung in x-Richtung gehört.

Darüberhinaus müssen sich die Weltlinien beider Beobachter nicht im Ursprung schneiden, sondern können gegeneinander zeitlich und räumlich um $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ verschoben sein. Dann gehen die x'-Koordinaten durch die Poincaré-Transformation

$$x' = \Lambda x + a \tag{3.11}$$

aus den x-Koordinaten hervor.

Daß Poincaré-Transformationen die allgemeinsten Transformationen sind, die die zeitlichen Abstände von Ereignissen unverändert lassen (2.36), ergibt sich aus der Killing-Gleichung (E.29, E.31). Aber Lorentztransformationen und Verschiebungen sind nicht die allgemeinsten Transformationen, die die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen. Sie bleibt bei konformen Transformationen ungeändert, die eine größere Gruppe bilden, und zu denen insbesondere die Streckungen aller Koordinaten, die Dilatationen $x' = e^{\sigma} x$, gehören. Daher erscheint mir die Herleitung von Lorentztransformationen aus dem Verhalten einer Lichtuhr nicht zwingend, denn dabei wird unterstellt statt hergeleitet, daß sich die räumlichen Koordinaten senkrecht zur Bewegungsrichtung nicht ändern.

3.2 Transformation von Geschwindigkeiten

Die Weltlinie eines Teilchen sei in Koordinaten eines Beobachters $\mathcal{B}$, der beispielsweise im Labor ruht und arbeitet, durch $(t(s), x(s), y(s), z(s))$ als Funktion eines Bahnparameters s gegeben. Diese Koordinaten hängen mit den Koordinaten (t', x', y', z'), mit denen ein bewegter Beobachter $\mathcal{B}_u$ dieselbe Weltlinie beschreibt, wenn er sich mit Geschwindigkeit u, $|u| < 1$, in x-Richtung bewegt, durch (3.8) zusammen,

$$t = \frac{t' + u\,x'}{\sqrt{1-u^2}}\ ,\quad x = \frac{u\,t' + x'}{\sqrt{1-u^2}}\ ,\quad y = y'\ ,\quad z = z'\ . \tag{3.12}$$

Differenzieren ergibt, wie die Geschwindigkeit $\vec v = \frac{d\vec x}{dt}$ mit $\vec v' = \frac{d\vec x'}{dt'}$ zusammenhängt,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\Big(\frac{dt'}{ds} + u\frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{ds}\Big) = \frac{1+u\,v'_x}{\sqrt{1-u^2}}\frac{dt'}{ds}\ , \tag{3.13}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = v_x\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\Big(u\frac{dt'}{ds} + \frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{ds}\Big) = \frac{u+v'_x}{\sqrt{1-u^2}}\frac{dt'}{ds}\ , \tag{3.14}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = v_y\frac{dt}{ds} = \frac{dy'}{dt'}\frac{dt'}{ds} = v'_y\frac{dt'}{ds}\ ,\quad \frac{dz}{ds} = v_z\frac{dt}{ds} = v'_z\frac{dt'}{ds}\ , \tag{3.15}$$

also

$$v_x = \frac{u+v'_x}{1+uv'_x}\ ,\quad v_y = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+uv'_x}\,v'_y\ ,\quad v_z = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+uv'_x}\,v'_z\ . \tag{3.16}$$

Anders als die vier Koordinaten transformieren die drei Komponenten der Geschwindigkeit $\vec v$ nichtlinear. Falls sich das Teilchen in gleiche Richtung wie $\mathcal{B}_u$ bewegt, also $v_y = v_z = 0$ ist, vereinfacht sich die Geschwindigkeitsaddition zu (2.16).

Bezeichnen wir mit θ den Winkel, den die Geschwindigkeit $\vec v$ des Teilchens mit der Relativgeschwindigkeit $\vec u$ der Beobachter bildet, und mit v den Betrag der Geschwindigkeit, und wählen wir einfachheitshalber die y-Achse so, daß sich das Teilchen in der x-y-Ebene bewegt, so gilt

$$(v_x, v_y, v_z) = v\,(\cos\theta, \sin\theta, 0)\ ,\quad \text{sowie}\quad (v'_x, v'_y, v'_z) = v'\,(\cos\theta', \sin\theta', 0)\ . \tag{3.17}$$

Setzen wir dies in das Transformationsgesetz von $\vec v$ ein und lösen wir nach $\cos\theta$ und v auf, so folgt

$$\cos\theta = \frac{u + v'\cos\theta'}{\sqrt{(u+v'\cos\theta')^2 + (1-u^2)v'^2\sin^2\theta'}}\ , \tag{3.18}$$

$$v = \frac{\sqrt{(u+v'\cos\theta')^2 + (1-u^2)v'^2\sin^2\theta'}}{1+uv'\cos\theta'}\ . \tag{3.19}$$

Die Faktoren c, die in anderen Maßsystemen auftreten, ergeben sich einfach, wenn man alle Geschwindigkeiten u, v und v' durch u/c, v/c und v'/c ersetzt.

3.3 Augenschein

Sind zwei gegeneinander bewegte Beobachter zur gleichen Zeit am gleichen Ort, so stimmen ihre Rückwärtslichtkegel überein und jeder Lichtpuls, den der eine Beobachter sieht, wird auch vom anderen Beobachter registriert. Dennoch sehen sie etwas verschiedenes. Farbe, Richtung und Helligkeit des Lichtes hängen von der Geschwindigkeit des Beobachters ab.

Der Dopplereffekt ändert die Frequenz, also die Farbe, des Lichtes und ebenso die Zahl der Photonen, die pro Sekunde empfangen werden. Aberration ändert die Richtung, unter der das Licht einfällt, und daher auch die Dichte der Lichtstrahlen. Das Bild, das der bewegte Beobachter sieht, ist also eine verfärbte, verzerrte und in seiner Helligkeit geänderte Version des Bildes des ruhenden Beobachters [22]. Topologisch, das heißt in den Lagebeziehungen, stimmen beide Bilder überein, da sich das zweite Bild durch eine stetige, umkehrbare Abbildung aus dem ersten ergibt.

Um die Einfallsrichtung eines Lichtpulses für gegeneinander bewegte Beobachter $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ rechnerisch zu vergleichen, wählen wir als Koordinatenursprung das Ereignis, in dem sich beide Beobachter und der Lichtpuls treffen. Die Richtungen wählen wir so, daß sich $\mathcal{B}'$ für $\mathcal{B}$ in x-Richtung und $\mathcal{B}$ für $\mathcal{B}'$ in $-x'$-Richtung bewegt und daß für beide Beobachter der Lichtpuls in der x-y-Ebene beziehungsweise in der x'-y'-Ebene läuft.

Mit dieser Wahl gehen die Koordinaten $l'(t')$, die $\mathcal{B}'$ für die Weltlinie des Lichtes mißt, durch eine drehungsfreie Lorentztransformation $l'(t') = \Lambda\, l(t)$ aus den Koordinaten $l(t) = (t, -t\cos\theta, -t\sin\theta, 0)$ (2.28) hervor, die $\mathcal{B}$ ermittelt. Dabei ist $(-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$ die Richtung, in die sich der Lichtstrahl bewegt und $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ die Gegenrichtung, aus der $\mathcal{B}$ den Lichtstrahl einfallen sieht. Der Winkel θ ist der Winkel, den $\mathcal{B}$ zwischen der Einfallsrichtung des Lichtes und der Richtung sieht, in die sich $\mathcal{B}'$ von ihm entfernt.

Entsprechend ist θ' in $l'(t') = (t', -t'\cos\theta', -t'\sin\theta', 0)$ der Winkel, den $\mathcal{B}'$ zwischen der Einfallsrichtung des Lichts und der Gegenrichtung sieht, in die sich $\mathcal{B}$ entfernt.

Die drehungsfreie Lorentztransformation in x-Richtung läßt die y- und z-Koordinaten invariant und streckt die Differenz $t_- = t - x$ um den Faktor κ (2.8), $t_-{}' = \kappa t_-$ (3.2). Der Beobachter $\mathcal{B}'$ sieht folglich beim Lichtstrahl das Verhältnis $-l_y/l_- = \sin\theta/(1+\cos\theta)$ um κ verringert. Mit der trigonometrischen Identität

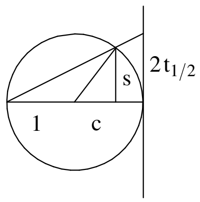

Abbildung 3.3: Kreis mit $\sin\theta$ und $1+\cos\theta$

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2} \tag{3.20}$$

ausgedrückt, hängt der Winkel θ', unter dem $\mathcal{B}'$ den Lichtstrahl einfallen sieht, durch

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\,\tan\frac{\theta}{2}\ . \tag{3.21}$$

mit dem Winkel θ zusammen, den $\mathcal{B}$ mißt [51].

Die Abänderung der Richtung, mit der Lichtstrahlen für bewegte Beobachter einfallen, heißt Aberration. Da der Tangens monoton mit dem Winkel wächst, ist θ' für $0 < v < 1$ kleiner als θ. Licht kommt einem bewegten Beobachter wie Regen mehr aus der Richtung entgegen, in die er sich bewegt.

In (3.21) ist die Abhängigkeit der transformierten Einfallsrichtung vom Transformationsparameter, der Geschwindigkeit v, und der ursprünglichen Richtung getrennt: $\tan\theta/2$ transformiert linear. In $\cos\theta$ ausgedrückt

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{1+\cos\theta} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \tag{3.22}$$

und quadriert, lautet das Transformationsgesetz wie die Geschwindigkeitsaddition (2.15)

$$\frac{1-\cos\theta'}{1+\cos\theta'} = \frac{1-v}{1+v}\,\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\ . \tag{3.23}$$

Dies kann man leicht nach $\cos\theta'$ auflösen und damit $\sin\theta' = \sqrt{1-\cos^2\theta'}$ berechnen

$$\cos\theta' = \frac{v+\cos\theta}{1+v\cos\theta}\quad ,\quad \sin\theta' = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v\cos\theta}\,\sin\theta\ . \tag{3.24}$$

Jährliche Aberration des Lichts der Sterne

Die Erde umläuft die Sonne im mittleren Abstand von $r = 1{,}50\cdot 10^{11}$m. Die dabei zurückgelegte Strecke $2\pi r$ im Verhältnis zu einem Lichtjahr, $9{,}46\cdot 10^{15}$m, ist die Geschwindigkeit $v = 1{,}00\cdot 10^{-4}$. Für solch kleine Geschwindigkeiten ist $\delta\theta = \theta' - \theta$ klein, und (3.21) lautet näherungsweise

$$\tan\frac{\theta}{2} + \delta\theta\,\frac{1}{2\cos^2(\theta/2)} \approx \tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\,\tan\frac{\theta}{2} \approx (1-v)\,\tan\frac{\theta}{2}\ ,$$
$$\delta\theta \approx -v\sin\theta\ . \tag{3.25}$$

Ein Stern, der sich für einen ruhenden Beobachter in einer Richtung $\theta = \frac{\pi}{2}$ senkrecht zur augenblicklichen Bewegungsrichtung der Erde befindet, wird von mitbewegten Astronomen in einer um $\delta\theta = 1{,}00\cdot 10^{-4} = 20{,}5''$ in Bewegungsrichtung der Erde verschobenen Richtung gesehen.[1]

Während im Jahr die Erde die Sonne umläuft, ändert sich die Geschwindigkeitsrichtung der irdischen Beobachter. Daher durchlaufen, wie James Bradley 1728 entdeckte [39], die Richtungen, in denen wir weit entfernte Sterne sehen, im Laufe des Jahres Ellipsen mit einer großen Achse von $41''$. Bradleys Beobachtung der Aberration war der erste direkte Beweis des Kopernikanischen Weltbildes, daß die Erde die Sonne umläuft.

Umrisse bewegter Kugeln

Aberration der Richtungen $\vec{e}_{\theta\,\varphi} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ von Lichtstrahlen auf Richtungen $\vec{e}_{\theta'\,\varphi'}$, aus denen der bewegte Beobachter die Lichtstrahlen sieht, ist eine Selbstabbildung der Menge aller Richtungen, der zweidimensionalen Kugeloberfläche S^2.

Der Umriß von Kugeln erscheint bewegten Beobachtern nicht längenkontrahiert als Pfannkuchen, sondern wieder als Kugelumriß [51, 63, 70]. Aberration bildet also auf S^2 Kreise auf Kreise ab.

Dies erschließt man folgendermaßen. Alle Richtungen $\vec{e}$, $\vec{e}^{\,2} = 1$, aus denen Lichtstrahlen vom Umriß einer Kugel beim Beobachter einfallen, bilden einen Kreiskegel und schließen mit der Richtung der Kegelachse, $\vec{n}$, $\vec{n}^{\,2} = 1$, den gleichen Öffnungswinkel δ ein

$$\cos\delta = \vec{e}\cdot\vec{n}\ . \tag{3.26}$$

Ein Photon, das ein Beobachter im Ursprung aus Richtung $\vec{e}$ einfallend sieht, durchläuft die Weltlinie

$$l(t) = t\,k\ ,\quad k = (1, -\vec{e})\ ,\quad k^2 = 0\ , \tag{3.27}$$

denn es bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit $v = 1$ entgegengesetzt zur Richtung, aus der es beim Beobachter einfällt. Der Tangentialvektor der Weltlinie, k, ist lichtartig. Sie gehört genau dann zum Kreiskegel (3.26), wenn k auf dem raumartigen Vierervektor

$$n = a\,(-\cos\delta, \vec{n})\ ,\quad n^2 < 0\ , \tag{3.28}$$

im Sinne des Skalarproduktes (2.42) senkrecht steht

$$k\cdot n = a\,(-\cos\delta + \vec{e}\cdot\vec{n}) = 0\ . \tag{3.29}$$

Da Lorentztransformationen Skalarprodukte invariant lassen, erfüllen der transformierte Vektor $n' = \Lambda n$ und alle transformierten Tangentialvektoren $k' = \Lambda k$ des Kreiskegels die Gleichungen $k'^2 = 0$, $n'^2 < 0$, und $k'\cdot n' = 0$. Da n' wie jeder raumartige Vektor von der Form (3.28) ist, definiert n' die Achse $\vec{n}\,'$ und den Öffnungswinkel δ' des Kreiskegels der Lichtstrahlen k'.

Den Öffnungswinkel δ' des transformierten Kugelumrisses und den Winkel θ', den die Achse des transformierten Kegels mit der Bewegungsrichtung des bewegten Beobachters

[1] Eine Bogensekunde ist $1'' = 2\pi/(360\cdot 60\cdot 60) \approx 4{,}848\cdot 10^{-6}$.

einschließt, entnimmt man einfach den durch Aberration (3.21) transformierten Richtungen derjenigen Lichtstrahlen des Kreiskegels, die mit der Bewegungsrichtung den größten und kleinsten Winkel, nämlich $\theta+\delta$ und $\theta-\delta$, einschließen

$$\tan\frac{\theta'+\delta'}{2}=\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\tan\frac{\theta+\delta}{2}\ ,\quad \tan\frac{\theta'-\delta'}{2}=\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\tan\frac{\theta-\delta}{2}\ . \tag{3.30}$$

Den Vergrößerungsfaktor D infinitesimaler Öffnungswinkel erhält man durch Differenzieren von $\theta'(\theta)$ (3.21) zusammen mit (3.24)

$$D=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta'}{\delta}=\frac{1}{\kappa}\frac{\cos^2(\theta'/2)}{\cos^2(\theta/2)}=\frac{2\cos(\theta'/2)\,\sin(\theta'/2)}{2\cos^2(\theta/2)\,\kappa\,\tan(\theta'/2)}=\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-v^2}}{1+v\cos\theta}\ . \tag{3.31}$$

Da ein kleiner Kreis um einen Faktor D vergrößert gesehen wird, erscheint jeder seiner Durchmesser richtungsunabhängig um diesen Faktor vergrößert. Zudem ist D bei zwei benachbarten, kleinen Objekten annähernd gleich.

Daher stimmen in den Bildern, die zwei gegeneinander bewegte Beobachter am gleichen Ort zur gleichen Zeit sehen, die Größenverhältnisse benachbarter, kleiner Objekte überein. Da Winkel das Längenverhältnis von kleinem Kreisbogen zu kleinem Kreisradius sind, werden sie durch Aberration nicht geändert. Ein bewegter Beobachter sieht eine winkeltreu verformte und in Größenverhältnissen kleiner, benachbarter Objekte ungeänderte Version des Bildes, das der ruhende Beobachter sieht: Aberration ist konform.

In Anhang D.5 zeigen wir, daß jede Lorentztransformation auf die komplexe Variable $z=\cot\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$, die umkehrbar eindeutig mit Richtungen von Lichtstrahlen zusammenhängt, als Möbiustransformation wirkt.

Bewegtes Lineal

Untersuchen wir, wie in Abbildung 3.4 in Aufsicht dargestellt, das eindimensionale Bild der Kanten eines flachen, kurzen Lineals mit Kantenlängen $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$, das in der x-y-Ebene parallel zu den Achsen liegt. Ein ruhender Beobachter, der das Lineal unter einem Winkel $\theta=\alpha+\pi/2$ zur x-Achse im Abstand $a=A/\cos\alpha$ mit einem Auge betrachtet, sieht von diesen Kanten das Bogenmaß $\mathrm{d}x\,\cos\alpha\,/a$ und $\mathrm{d}y\,\sin\alpha\,/a$.

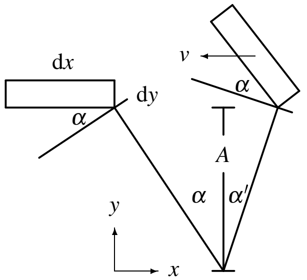

Abbildung 3.4: Bewegtes Lineal

Zur gleichen Zeit und am gleichen Ort sieht ein in x-Richtung mit Geschwindigkeit v bewegter Beobachter die Kanten eines an ihm vorbeifliegenden Lineals, dessen Bildpunkte im Vergleich zum ruhenden Beobachter durch Aberration versetzt sind und einen Winkel $\theta'=\alpha'+\pi/2$ mit der x-Achse bilden. Da Aberration konform ist, ist das Längenverhältnis der sichtbaren Kanten des Lineals für den bewegten Beobachter das gleiche wie für den

ruhenden Beobachter. Beide sehen also die Projektion eines um α senkrecht zur Blickrichtung gedrehten Lineals. Wenn man ein bewegtes Lineal unter einem Winkel θ' zur x-Achse sieht, erscheint es gegenüber einem dort ruhenden Lineal wie um $\theta'(v,\theta)-\theta$ gedreht.

Da Aberration die Größenverhältnisse kleiner, benachbarter Objekte bewahrt, ist das Bild des bewegten Lineals in keiner Richtung kontrahiert.

Der bewegte Beobachter sieht das Bild um den Faktor $\sin\theta'/\sin\theta=\cos\alpha'/\cos\alpha$ (3.31) vergrößert. Er sieht daher in Richtung α' die Kanten eines Lineals im Abstand $A/\cos\alpha'$. Das ist der Abstand, den es für den Beobachter hatte, als es das Licht aussandte, das er im Richtung α' sieht. Die sichtbare Größe des bewegten Lineals hängt nicht von seiner Geschwindigkeit, sondern nur vom retardierten Ort ab, an dem es für den Beobachter bei Aussenden des Lichtes war.

Ein Beobachter sieht ein ruhendes, unveränderliches Objekt, wo und wie es ist, auch wenn er die Lichtstrahlen um die Lichtlaufzeit später sieht. Ein bewegtes, kleines Objekt sieht er nicht, wo es ist, sondern *wo es war*, und mit der dazu gehörigen Größe. Aber er sieht es so, *wie es ist*, nämlich mit denselben Größenverhältnissen der sichtbaren Flächen wie zur gleichen Zeit am gleichen Ort der Beobachter, für den das Objekt ruht. [2]

Die verdeckte Kante des Lineals ist nicht zu sehen, bevor das Lineal am Beobachter vorbeigeflogen ist. Für den ruhenden Beobachter ist die rechte, kurze Kante des Lineals nur sichtbar, falls es in x-Richtung hinter ihm ist. Dann ist es auch hinter dem bewegten Beobachter. Denn wenn sich zwei gegeneinander bewegte Beobachter zu einer Zeit an einem Ort treffen, so stimmen sie darin überein, welche Ereignisse zur dieser Zeit in Richtung der Relativbewegung vor oder hinter ihnen stattfinden. Denn die Ereignisse $(0,0,y,z)$, die zur Zeit $t=0$ zwischen vor und hinter liegen, sind unter drehungsfreien Lorentztransformationen in x-Richtung invariant.

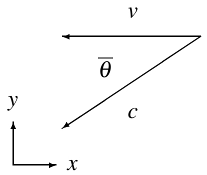

Abbildung 3.5: Januswinkel

Licht, das mit einem Winkel $\overline{\theta}$ mit

$$\cos\overline{\theta}=\frac{v}{c} \tag{3.32}$$

zur Bewegungsrichtung $\vec{v}$ eines Teilchens abgestrahlt wird, braucht vom Aussenden bis zum Beobachter genauso lang, wie das Teilchen braucht, um neben den Beobachter zu gelangen. Daher sind Teilchen, die gleichförmig mit Geschwindigkeit v an einem Beobachter vorbeifliegen, in dem Augenblick neben ihm, in dem er sie unter dem Winkel $\overline{\theta}$ zur Bewegungsrichtung sieht. Dabei ist von ihnen nur die Seitenfläche sichtbar; der mitbewegte Beobachter, für den sie ruhen, sieht sie unter rechtem Winkel, $\theta=\frac{\pi}{2}$ (3.24), neben, über oder unter sich.

Objekte, die ein Beobachter mit einem kleinerem Winkel als $\overline{\theta}$ sieht, sind vor ihm; die Objekte, die er mit größerem Winkel sieht, sind schon hinter ihm. Da dieser Winkel trennt, was vor und hinter dem Beobachter ist, nennen wir ihn nach dem römischen Gott

[2] Der beschleunigungsunabhängige Teil des elektrischen Feldes eines bewegten Elektrons zeigt beim Beobachter zu dem Bestimmungsort, den es mit gleichförmiger Geschwindigkeit in dem Augenblick erreichen würde, in dem der Lichtstrahl beim Beobachter eintrifft (5.248).

der Tore und Durchgänge Januswinkel, so wie der Januar zwischen dem alten Jahr und dem Rest des neuen Jahres liegt.

Leuchtstärke

Bewegte Beobachter sehen nicht nur verfärbte und verformte, sondern auch in der Leuchtstärke abgeänderte Bilder. Wir bezeichnen mit $n(\omega,\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega$ die Anzahl der Photonen im Frequenzintervall $\mathrm{d}\omega$, die ein Beobachter innerhalb der Zeit $\mathrm{d}t$ in Richtung (θ,φ) im Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ sieht. Der in Richtung $\theta = 0$ bewegte Beobachter sieht die Photonen im dopplerverschoben Frequenzintervall $\mathrm{d}\omega' = D^{-1}\,\mathrm{d}\omega$ (2.38) im durch Aberration geänderten Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega' = D^2\mathrm{d}\Omega$ (3.31). Das Zeitintervall $\mathrm{d}t'$, in dem der bewegte Beobachter am gleichen Ort und zur gleichen Zeit dieselbe Zahl von Photonen sieht, ist $\mathrm{d}t' = D\,\mathrm{d}t$. Dies macht man sich am einfachsten durch die Überlegung klar, daß bei einem gleichmäßigen Photonenzahlstrom die Zahl der Photonen pro Zeit genauso eine Frequenz definiert wie die Zahl der Schwingungen der Welle pro Zeit. Da beide Beobachter dieselbe Zahl von Photonen sehen, gilt

$$n'\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\Omega' = n'\,D^2\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega = n\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega\ , \tag{3.33}$$

und der bewegte Beobachter sieht die spektrale Photonenzahlstromdichte

$$n'(\omega',\theta',\varphi') = \frac{(1+v\cos\theta)^2}{1-v^2}\,n(\omega,\theta,\varphi)\ . \tag{3.34}$$

3.4 Energie und Impuls

Als Erhaltungsgrößen bezeichnen wir Funktionen $\phi(\vec{x},\vec{v},t)$ der Zeit t, der Orte $\vec{x}$ und der Geschwindigkeiten $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$ von Teilchen, deren Wert sich nicht ändert, wenn die Teilchen ihre Bahnen durchlaufen $\phi(\vec{x}(t),\vec{v}(t),t) = \phi(\vec{x}(0),\vec{v}(0),0)$. Beispielsweise sind bei einem kräftefreien Teilchen in der Newtonschen Physik wegen der Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0\ ,\quad \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\vec{p} \tag{3.35}$$

der Impuls $\vec{p}$ und die Energie E erhalten

$$\vec{p} = m\vec{v}\ ,\quad E = E_0 + \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}\ . \tag{3.36}$$

Welchen Wert die Energie für verschwindende Geschwindigkeit hat, ist in Newtonscher Physik belanglos, E_0 wird normalerweise einfach Null gesetzt.

Transformation additiver Erhaltungsgrößen

Natürlich sind bei einem freien Teilchen alle Funktionen der Geschwindigkeit Erhaltungsgrößen, denn die Geschwindigkeit ist bei kräftefreier Bewegung konstant. Die besondere Bedeutung von Energie und Impuls rührt daher, daß sie additive Erhaltungsgrößen sind, das heißt, die Summe der Impulse und der Energien mehrerer Teilchen sind auch dann noch Erhaltungsgrößen, wenn sich die einzelnen Impulse und Energien zum Beispiel durch elastische Stöße ändern.

Stellt ein gleichförmig bewegter Beobachter additive Erhaltungsgrößen ϕ fest, so liegen auch für jeden anderen Beobachter, der Poincaré-transformierte Koordinaten $x' = \Lambda\,x + a$ (3.11) verwendet, additive Erhaltungsgrößen ϕ' vor, und es gibt eine Transformation, die die Erhaltungsgrößen ineinander umzurechnen gestattet.

Bei $x' = \Lambda\,x + a$ ist Λ eine Lorentzmatrix, die zum Beispiel zu einer drehungsfreien Lorentztransformation (3.9) oder zu einer Drehung gehört, $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ gehört zu einer Verschiebung von Zeit und Ort.

Weil die Erhaltungsgrößen additiv sind, müssen sie linear transformieren

$$(\phi_{(1)} + \phi_{(2)})' = \phi'_{(1)} + \phi'_{(2)}\ ,\quad (c\phi)' = c\phi'\ , \tag{3.37}$$

denn für beide Beobachter sind die Erhaltungsgrößen Summen und Vielfache der einzelnen Teile. Die Transformation ist also wie eine Lorentztransformation von der Form

$$\phi' = M_{\Lambda,a}\phi\ . \tag{3.38}$$

Die in diesem Transformationsgesetz auftretenden Matrizen $M_{\Lambda,a}$ sind dadurch eingeschränkt, daß eine weitere Transformation $x'' = \Lambda_2 x' + a_2$, die einer ersten Transformation $x' = \Lambda_1 x + a_1$ folgt, auch gleich direkt ausgewertet werden kann

$$x'' = \Lambda_{2\circ 1}x + a_{2\circ 1}\ ,\quad \Lambda_{2\circ 1} = \Lambda_2\Lambda_1\ ,\quad a_{2\circ 1} = a_2 + \Lambda_2 a_1\ . \tag{3.39}$$

Für die additiven Erhaltungsgrößen muß daher

$$\phi'' = M_{\Lambda_{2\circ 1},\,a_{2\circ 1}}\phi = M_{\Lambda_2,\,a_2}M_{\Lambda_1,\,a_1}\phi \tag{3.40}$$

gelten, und zwar für beliebige Werte der Erhaltungsgrößen ϕ. Also müssen Produkte der Matrizen $M_{\Lambda,a}$ die Matrix ergeben, die zur hintereinander ausgeführten Transformation gehört

$$M_{\Lambda_{2\circ 1},\,a_{2\circ 1}} = M_{\Lambda_2,\,a_2}M_{\Lambda_1,\,a_1}\ . \tag{3.41}$$

Matrizen M_g, die zu Elementen g einer Gruppe G gehören, wobei ihrem Matrixprodukt $M_{g_2}M_{g_1} = M_{g_2\circ g_1}$ das Produkt $g_2\circ g_1$ entspricht, heißen Darstellungen der Gruppe G. Welche Darstellungen es gibt, ist mathematisch ausführlich untersucht.

Viererimpuls

Bei der einfachsten Darstellung von Poincarétransformationen sind die Matrizen $M_{\Lambda,a}$ durch Λ selbst gegeben. Andere Transformationen treten, wie wir später sehen werden, bei der Transformation des Drehimpulses und des Energieschwerpunktes (4.118) auf.

Im einfachsten Fall transformieren also vier Erhaltungsgrößen $p = (p^0, p^1, p^2, p^3)$, die wir im Vorgriff auf das Ergebnis unserer Betrachtung Viererimpuls nennen, gemäß

$$p' = \Lambda p \ . \tag{3.42}$$

Bei Transformationen $x' = x + a$ mit $\Lambda = \mathbf{1}$, die Zeit und Ort um $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ verschieben, behalten die Komponenten des Viererimpulses ihren Wert. Daher hängen sie nicht vom Ort oder der Zeit, sondern nur von der Geschwindigkeit des Teilchens ab.

Wenn sich ein Teilchen langsamer als Licht bewegt, dann gibt es das Bezugssystem eines mitfliegenden Beobachters, für den das Teilchen ruht. Da die Geschwindigkeit $\vec{v} = 0$ invariant unter Drehungen ist und da der Viererimpuls eine Funktion der Geschwindigkeit ist, ändern Drehungen nicht den Viererimpuls p eines ruhenden Teilchens. Folglich verschwindet im Ruhsystem eines Teilchens der räumliche Anteil $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$ des Viererimpulses, und er hat die Form

$$p_{\text{Ruhe}} = (m\,c, 0, 0, 0) \ . \tag{3.43}$$

Transformieren wir diesen Viererimpuls mit (3.9) in das Bezugssystem eines Beobachters, der sich mit $-v$ in x-Richtung bewegt und für den sich das Teilchen mit Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m\,c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m\,c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} , \tag{3.44}$$

und drehen wir die Bewegung in eine beliebige Richtung, so erhalten wir den Viererimpuls eines Teilchens mit Geschwindigkeit $\vec{v}$

$$p^0 = \frac{m\,c}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \ , \quad \vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \ . \tag{3.45}$$

Wir benennen die Komponenten des Viererimpulses so wie diejenigen Größen der Newtonschen Physik, mit denen sie im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten übereinstimmen. Bis auf höhere Potenzen von v/c gilt

$$p^0(\vec{v}) = m\,c + \frac{1}{2}\frac{m}{c}\vec{v}^2 + \dots \quad , \quad \vec{p}(\vec{v}) = m\,\vec{v} + \dots \quad . \tag{3.46}$$

Also ist $E = c\,p^0$ die Energie,

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ , \tag{3.47}$$

(p^1, p^2, p^3) sind die Komponenten des Impulses $\vec{p}$, und m ist die Masse des Teilchens. Sie ist positiv, und die Energie ist nach unten beschränkt.

Für ein Teilchen, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, wählen wir ein Bezugssystem mit $c = 1$, in dem es sich in x-Richtung bewegt. Der Tangentialvektor an die

Weltlinie $x(s)$ des Teilchens ist dann von der Form $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(1,1,0,0)$. Er ist invariant unter Drehungen um die x-Achse und invariant unter den Lorentztransformationen

$$\Lambda_a = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a^2}{2} & -\frac{a^2}{2} & -a & \\ \frac{a^2}{2} & 1 - \frac{a^2}{2} & -a & \\ -a & a & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{3.48}$$

Dies sind Lorentzmatrizen, denn die Spaltenvektoren haben Längenquadrat ± 1, und die Skalarprodukte verschiedener Spaltenvektoren verschwinden.[3]

Der Viererimpuls p dieses lichtschnellen Teilchens muß wie der Tangentialvektor an seine Weltlinie invariant unter Drehungen um die x-Achse sein, daher müssen die y- und z-Komponenten p^2 und p^3 verschwinden. Damit p auch invariant unter Λ_a ist und auch die y-Komponente von $\Lambda_a p$ verschwindet, muß zudem $p^0 = p^1$ sein.

Bewegt sich das Teilchen mit positiver Energie in beliebige Richtung, so gilt

$$p^0 = |\vec{p}| \ , \quad E = c|\vec{p}| \ . \tag{3.49}$$

Auch bei lichtschnellen Teilchen ist der Viererimpuls ein Vielfaches des Tangentialvektors ihrer Weltlinie. Allerdings legt die Weltlinie nicht die Energie fest, sie ist positiv und kann im übrigen beliebig sein: es gibt rote und blaue Lichtstrahlen.

Für massive und für lichtschnelle Teilchen ist die Geschwindigkeit $\vec{v}$ das Verhältnis

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}}{p^0} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}} \ . \tag{3.50}$$

Weil die Geschwindigkeit eine Funktion des Impulses ist und weil der Impuls erhalten ist, sind Teilchen träge. Man muß durch Kräfte Impuls übertragen, wenn man die Geschwindigkeit eines Teilchens ändern will.

Auch bei überlichtschnellen Teilchen, bei Tachyonen, erschließt man, daß der Viererimpuls ein Vielfaches des Tangentialvektors sein muß und mit einem Richtungsvektor $\vec{e}$ die Form

$$E = c\,p^0 \ , \quad \vec{p} = \vec{e}\,\sqrt{M^2c^2 + \frac{E^2}{c^2}} \tag{3.51}$$

hat. Dabei ist die denkbare Energie E des Tachyons ebenso wie die Energie eines hypothetischen Teilchens mit negativer Masse nicht nach unten beschränkt. Mit einem einzigen solchen Teilchen, dem man unbeschränkt Energie entzieht, könnte man ein Kraftwerk ohne anderen Brennstoff betreiben. Falls es Teilchen mit negativer Masse oder Tachyonen mit negativem Massenquadrat gäbe, wäre erklärungsbedürftig, warum sie nicht die Weltmeere zum Kochen bringen.

Das Vakuum ist für alle Beobachter gleich und hat daher einen Viererimpuls, der unter allen Transformationen $p' = \Lambda\,p$ invariant ist. Es muß daher verschwindende Energie und verschwindenden Impuls haben, $p_{\text{Vakuum}} = (0,0,0,0)$. Das gilt auch für den Beitrag der sogenannten Quantenfluktuationen zur Energie, die manchen Theoretikern Kopfzerbrechen bereiten.

[3] Die Matrizen Λ_a entstehen durch die wiederholte infinitesimale Transformation $\omega = \mathrm{d}\Lambda_a/\mathrm{d}a)_{|a=0}$. Dabei besteht die Reihe $\Lambda_a = \exp a\omega = 1 + a\omega + a^2\omega^2/2$ wegen $\omega^3 = 0$ nur aus drei Termen.

Masse

Die Masse m verknüpft die Komponenten des Viererimpulses eines freien Teilchens. Unabhängig von der Geschwindigkeit gilt wegen (3.45)

$$p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 , \quad E = c\,p^0 = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \,. \tag{3.52}$$

Dies ist die Gleichung für eine Schale eines Hyperboloids: die Viererimpulse eines freien Teilchens liegen auf der Massenschale.

Die Beziehung (3.52) von Energie und Impuls gilt auch für lichtschnelle Teilchen, zum Beispiel für Photonen. Sie sind masselos. Ihr Viererimpuls p ist lichtartig

$$p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = 0 , \quad p^0 = |\vec{p}| > 0 \,. \tag{3.53}$$

Photonen mit Viererimpuls p gehören als Quanten zu ebenen elektromagnetischen Wellen $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ mit Viererwellenvektor $k = (|\vec{k}|, \vec{k})$. Dabei ist der Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ein Vielfaches des Wellenvektors, die Konstante $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}$Js [23] ist das von Planck eingeführte Wirkungsquantum. Die Energie $E = \hbar\omega = \hbar c|\vec{k}|$ der Photonen ist ein Vielfaches der Frequenz $\nu = \omega/(2\pi)$ der elektromagnetischen Welle. Diese Beziehung liegt Plancks Herleitung der thermischen Strahlungsdichte und Einsteins Deutung des photoelektrischen Effektes zugrunde.

Gemäß (3.47) haben ruhende Teilchen die Energie

$$E_{\text{Ruhe}} = m\,c^2 \,. \tag{3.54}$$

Dies ist wohl die berühmteste Gleichung der Physik. Auf ihr beruht die Erkenntnis, daß bei Umwandlung von Atomkernen durch Spaltung oder Verschmelzung Energien freigesetzt werden können, denn die Gesamtmasse der Kerne ist meßbar verschieden von der Summe der Einzelmassen. Der Massenunterschied beruht auf Bindungsenergie, die militärisch oder friedlich, zerstörerisch oder nutzbringend verwendet werden kann. Gleichung (3.47) enthält auch die Aussage, daß es unendlich viel Energie kosten würde, ein massives Teilchen auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen. Massive Teilchen sind immer langsamer als Licht.

Die Masse m ist geschwindigkeitsunabhängig. Die mit dem geschwindigkeitsabhängigen Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ multiplizierte Größe $\gamma\,m$ Masse zu nennen, würde diesen Begriff vergeuden, denn für $E = \gamma\,m\,c^2$ haben wir schon den Namen Energie. Als Masse bezeichnen wir die Größe, die in veralteten Darstellungen umständlich Ruhemasse heißt.

Zudem verleitet die Bezeichnung Masse für $\gamma\,m$ dazu, sie in Formeln der Newtonschen Physik, die sich im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten aus relativistischer Physik ergeben, einzusetzen und zu glauben, so Gleichungen zu erhalten, die für alle Geschwindigkeiten gelten. Auch wenn dies im Einzelfall beim Impuls $\vec{p} = \gamma\,m\,\vec{v}$ zutrifft, so ergibt sich fast immer Unsinn: die kinetische Energie ist nicht $\gamma\,m\,\vec{v}^2/2$.

Ein Teilchen wird nicht mit zunehmender Geschwindigkeit schwerer: Gewicht hängt von der Beschleunigung im Vergleich zum freien Fall ab. Ein schnell bewegtes Teilchen bewirkt nicht die Gravitation einer um einen Faktor γ vergrößerten Masse. Es wird nicht durch seine Geschwindigkeit zu einem Schwarzen Loch. Wenn es nur des Faktors γ bedürfte, hätte Einstein zehn Minuten statt zehn Jahre gebraucht, in die relativistische Formulierung von Mechanik und Elektrodynamik die Gravitation einzubeziehen.

Kraft ist nicht Masse mal Beschleunigung. Die Bewegungsgleichung relativistischer, geladener Teilchen (5.2) besagt, wie wir in Abschnitt 5.3 zeigen, daß der Gesamtimpuls der wechselwirkenden Teilchen und Felder erhalten bleibt,

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{3.55}$$

Die Kraft $\vec{F}$ ist der Impuls $\mathrm{d}\vec{p}$, der pro Zeit $\mathrm{d}t$ auf das Teilchen übergeht.

Die Beschleunigung zeigt normalerweise nicht in Richtung der Kraft,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial\vec{v}}{\partial p^i}\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} \overset{3.50}{=} \frac{\vec{F}}{\sqrt{m^2+\vec{p}^2}} - \frac{(\vec{p}\cdot\vec{F})\,\vec{p}}{\sqrt{m^2+\vec{p}^2}^{\,3}} = \frac{1}{\sqrt{m^2+\vec{p}^2}}(\vec{F} - (\vec{v}\cdot\vec{F})\,\vec{v}\,) \,, \tag{3.56}$$

wobei wir einfachheitshalber im Maßsystem $c = 1$ rechnen.

Trägheit schneller Teilchen ist richtungsabhängig. Wirkt die Kraft quer zu $\vec{v}$, ist die Beschleunigung $\mathrm{d}\vec{v}_\perp/\mathrm{d}t = \sqrt{1-v^2}\,\vec{F}_\perp/m$; in Richtung der Geschwindigkeit ist das Teilchen um den Faktor $1/(1-v^2)$ träger. Auch masselose Teilchen sind träge, $\mathrm{d}\vec{v}_\perp/\mathrm{d}t = \vec{F}_\perp/|\vec{p}|$, in Bewegungsrichtung sogar unendlich träge, $\mathrm{d}\vec{v}_\parallel/\mathrm{d}t = 0$.

Bei der Bewegung mechanischer Anordnungen sind, lange bevor relativistische Auswirkungen meßbar werden, Korrekturen wichtig, die die endliche Schallgeschwindigkeit in den Körpern, die ja nicht ideal starr sind, berücksichtigen. Bei hohen Relativgeschwindigkeiten werden die Kräfte auf ein Teilchen durch Stöße mit anderen Teilchen bewirkt, die durch Energie- und Impulserhaltung eingeschränkt sind, und durch Wechselwirkung mit Feldern, wie dem elektromagnetischen Feld oder dem gravitativen Feld, der Metrik.

Zerfall in zwei Teilchen

Zerfällt ein ruhendes Teilchen der Masse M in zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2, so sind die Energien der Zerfallsprodukte durch die beteiligten Massen festgelegt. Wegen Impulserhaltung ist der Impuls $\vec{p}$ des ersten Zerfallsproduktes dem Impuls des zweiten Teilchens entgegengesetzt gleich. Ihre Energien sind $E_1 = \sqrt{{m_1}^2 + \vec{p}^2}$ und $E_2 = \sqrt{{m_2}^2 + \vec{p}^2}$, denn Energie und Impuls liegen auf der Massenschale (3.52). Die Energieerhaltung besagt, daß die Summe dieser Energien mit der Energie M des ruhenden, zerfallenden Teilchens übereinstimmt

$$M = \sqrt{{m_1}^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{{m_2}^2 + \vec{p}^2} \ > \ m_1 + m_2 \,. \tag{3.57}$$

Insbesondere ist die Masse M des zerfallenden Teilchens größer als die Summe der Massen der Zerfallsprodukte. Dies ist, wie beim Zwillingsparadoxon, der geometrische Sachverhalt, daß die Summe zweier zeitartiger Vierervektoren $p_1 + p_2$ länger als die Summe der Längen der einzelnen Summanden ist.

Wiederholtes Quadrieren und Umformen ergibt

$$\vec{p}^{\,2} = \frac{1}{4M^2}(M^4 + {m_1}^4 + {m_2}^4 - 2M^2{m_1}^2 - 2M^2{m_2}^2 - 2{m_1}^2{m_2}^2)\ , \tag{3.58}$$

$$E_1 = \frac{1}{2M}(M^2 - {m_2}^2 + {m_1}^2)\ . \tag{3.59}$$

Wenn es Tachyonen mit Viererimpuls p, $p^2 = -M^2$, gäbe, wäre ihre Energie nicht nach unten beschränkt. Wenn sie elektromagnetisch wechselwirkten, könnten sie Photonen beliebig großer Energie abstrahlen, denn der Viererimpuls k des Photons ist lichtartig, $k^2 = 0$, und der Viererimpuls $p + k$ von Tachyon und Photon liegt wieder auf der Tachyonmassenschale, $(p + k)^2 = -M^2$, falls $p \cdot k = 0$ gilt. Dies heißt (3.29), daß das Photon mit beliebiger Energie unter einem Winkel $\cos\theta = p^0/|\vec{p}|$ zum Impuls $\vec{p}$ des Tachyons ausgesendet wird.

Compton-Streuung

Energie- und Impulserhaltung legen bei elastischer Streuung zweier Teilchen, also bei einem Streuprozeß, bei dem die Zahl der Teilchen und ihre Massen unverändert bleiben, die Energien nach dem Stoß als Funktion des Streuwinkels und der anfänglichen Energien fest.

Betrachten wir beispielsweise ein Photon, das mit Energie E einfällt und elastisch an einem zunächst ruhenden Elektron gestreut wird. Dieser Prozeß heißt Compton-Streuung.

Seien $p_{(1)}$ und $p_{(2)}$ die Viererimpulse von Photon und Elektron vor der Streuung und $p'_{(1)}$ und $p'_{(2)}$ nachher. Viererimpulserhaltung besagt

$$p_{(1)} + p_{(2)} = p'_{(1)} + p'_{(2)}\ , \tag{3.60}$$

oder ausführlicher, wenn wir die x-Achse in Bewegungsrichtung des Photons vor dem Stoß wählen und die y-Achse so, daß sich das um den Winkel θ gestreute Photon in der x-y-Ebene bewegt, im Maßsystem $c = 1$,

$$\begin{pmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' \\ E'\cos\theta \\ E'\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m + E - E' \\ E - E'\cos\theta \\ -E'\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}\ . \tag{3.61}$$

Hierbei haben wir schon berücksichtigt, daß auch das gestreute Photon mit Energie E' masselos ist und $p'^{\,2}_{(1)} = 0$ erfüllt. Die Bedingung $p'^{\,2}_{(2)} = m^2$, daß nach der Streuung der Viererimpuls des Elektrons auf der Massenschale liegt, besagt

$$(m + E - E')^2 - (E - E'\cos\theta)^2 - (E'\sin\theta)^2 = m^2 \tag{3.62}$$

und nach Ausmultiplizieren, einfachem Umformen und Einfügen der konventionellen Faktoren c

$$\frac{m\,c^2}{E'} = \frac{m\,c^2}{E} + 1 - \cos\theta\ . \tag{3.63}$$

Die Energie E' des auslaufenden Photons ist also durch den Streuwinkel festgelegt. Sie ist kleiner als die Energie E des einlaufenden Photons. Dies widerspricht der Vorstellung, daß die zum Photon der Energie $E = \hbar\omega$ gehörige, einfallende elektromagnetische Welle das geladene Elektron beschleunigt, das dann seinerseits eine Welle mit den gestreuten Photonen abstrahlt. Bei solch einem Prozeß würde die Frequenz der abgestrahlten Welle mit der ursprünglichen Frequenz übereinstimmen. Gleichung (3.63) hingegen ergibt sich aus der Annahme, daß Elektronen Teilchen sind und daß elektromagnetische Wellen aus Teilchen, nämlich Photonen, bestehen.

Sie ist aber kein Beweis für die Teilcheneigenschaft elektromagnetischer Wellen. Man gelangt ebenfalls zu (3.63), wenn man – was wir nicht getan haben – sowohl das Elektron als auch das Photon als Welle behandelt. Daß je nach betrachtetem physikalischen Prozeß Wellen sich teilchenartig verhalten und Teilchen Welleneigenschaften haben, gehört zu den Grundlagen der Quantenphysik.

4 Relativistische Teilchen

4.1 Beschleunigte Uhren

Die Weltlinie einer Uhr $\Gamma : s \mapsto (t(s), x(s), y(s), z(s))$ ist zeitartig, das heißt, Ereignisse auf der Weltlinie liegen zeitartig zueinander[1]. Ist die Weltlinie nicht gerade, sondern beschleunigt, so nähern wir sie durch einen Streckenzug, der mit vielen kleinen, geraden, zeitartigen Strecken Zwischenpunkte verbindet, und setzen die Gesamtzeit additiv aus den Zeiten zusammen, die auf diesen Strecken vergehen.

Zwischen benachbarten Ereignissen mit Differenzvektor $\mathrm{d}s(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s})$ zeigt jede gleichförmig bewegte Uhr die Zeit $\Delta\tau$ an

$$\Delta\tau = \mathrm{d}s \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2} \ . \tag{4.1}$$

Ideale Uhren, die Weltlinien Γ durchlaufen, messen und addieren diese Zeiten.

Zeit: *Auf einer zeitartigen Weltlinie $\Gamma : s \mapsto x(s)$ zeigt eine ideale Uhr zwischen dem Ereignis $A = x(\underline{s})$ und dem späteren Ereignis $B = x(\overline{s})$ die Zeit $\tau(B, A\,; \Gamma)$ an.*

$$\tau(B, A\,; \Gamma) = \int\limits_{\Gamma : A \to B} \Delta\tau = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2} \tag{4.2}$$

Anders als in Newtonscher Physik ist τ keine Weltzeit, die allein von A und B abhängt, denn $\Delta\tau$ ist nicht die Ableitung $\mathrm{d}\tau$ einer Funktion τ der Raumzeit. Die Zeit ist die Weglänge in der Raumzeit und hängt von der Weltlinie Γ ab, die zwischen A und B durchlaufen wird.

Auf geraden Weltlinien stimmt τ^2 überein mit dem Längenquadrat (2.43) des Differenzvektors w_{BA} (2.47) von A nach B.

Zwischen A und B setzt sich die Zeit additiv aus Zeiten zusammen, die auf Teilstücken Γ_1 und Γ_2 der Weltlinie vergehen, das heißt für alle Ereignisse C, die auf der Weltlinie $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ zwischen A und B stattfinden, gilt

$$\int\limits_{\Gamma : A \to B} \Delta\tau \ = \int\limits_{\Gamma_1 : A \to C} \Delta\tau \ + \int\limits_{\Gamma_2 : C \to B} \Delta\tau \ . \tag{4.3}$$

Die Zeit $\tau(B, A\,; \Gamma)$ ist unabhängig von der Parametrisierung der Weltlinie.

[1] Die Funktion $t(s)$ ist monoton wachsend. Dann werden die Ereignisse auf der Weltlinie als Funktion des Bahnparameters s genau einmal und kausal geordnet durchlaufen.

Beim Beweis dieses Sachverhalts schreiben wir die Koordinaten der Weltlinie einfachheitshalber als Vierervektor $x(s) = (t(s),\, x(s),\, y(s),\, z(s))$. Es ist $\Delta\tau = \mathrm{d}s\,\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})^2}$, und der Radikand ist das Längenquadrat $(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})^2$ des Vierertangentialvektors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$. Jede andere Parametrisierung $x(s')$ der Weltlinie Γ mit monoton wachsendem x^0 ist durch $x(s(s'))$ mit monoton wachsendem $s(s')$, also mit $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}\right)^2}$, gegeben. Nach der Kettenregel gilt $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s'} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, und mit dem Integralsubstitutionssatz folgt die Behauptung:

$$\int_{\underline{s'}}^{\overline{s'}} \mathrm{d}s' \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s'}\right)^2} = \int_{\underline{s'}}^{\overline{s'}} \mathrm{d}s' \,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2} = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2}\ . \tag{4.4}$$

Parametrisiert man eine zeitartige Weltlinie durch die Zeit t, die ein ruhender Beobachter den Ereignissen zuschreibt, dann ist die Weltlinie durch $\Gamma : t \mapsto (t, x(t), y(t), z(t))$ gegeben und der Vierertangentialvektor hat die Komponenten $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}) = (1, v_x, v_y, v_z)$ und das Längenquadrat $1 - \vec{v}^2$. Auf einer Bahn $\vec{x}(t)$ vergeht also auf jeder mitgeführten, idealen Uhr zwischen $(t_1, \vec{x}(t_1))$ und $(t_2, \vec{x}(t_2))$ die Zeit

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \sqrt{1 - \vec{v}^2}\ . \tag{4.5}$$

Wählt man als Bahnparameter die Zeit $\tau(s)$ (4.2), die eine mitgeführte Uhr bei $x(s)$ anzeigt, dann hat wegen $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})^2}$ der Tangentialvektor Einheitslänge

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}\right)^{-2} = 1\ . \tag{4.6}$$

Hat umgekehrt der Tangentialvektor überall Einheitslänge, $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1$, dann stimmt der Bahnparameter s mit der Zeit $\tau(s)$ überein, die auf einer mitgeführten Uhr vergeht

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1 \ \Leftrightarrow \tau\big(x(\overline{s}), x(\underline{s}); \Gamma\big) = \overline{s} - \underline{s}\ . \tag{4.7}$$

Die Zeit, $\tau(B, A\,; \Gamma)$, die ideale Uhren anzeigen, ist unabhängig von der Beschleunigung in dem Sinne, daß der Integrand $\Delta\tau$ (4.1) nicht von zweiten Ableitungen $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}$ abhängt. Dennoch ist die Zeit $\tau(B, A\,; \Gamma)$ ein Funktional der Weltlinie Γ, das für gerade und gekrümmte Weltlinien, die A mit B verbinden, unterschiedliche Werte hat, obwohl die Uhr beschleunigungsunabhängig ist.

Daß Uhren beschleunigungsunabhängig die Weglänge der durchlaufenen Weltlinie anzeigen, gehört zur Definition idealer Uhren, mit denen man reale Uhren vergleichen muß.

Viele reale Uhren sind nicht ideal und weichen beträchtlich von idealen Uhren ab. Sonnenuhren zeigen den Winkel einer erdfesten Achse zur Sonne an. Pendeluhren und Sanduhren messen die Beschleunigung. Die Sanduhr läuft paradoxerweise, wenn man sie festhält, und bleibt stehen, wenn man sie fallen läßt, noch bevor sie aufschlägt; das Pendel kreist mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, wenn man die Pendeluhr fallen läßt. Quarzuhren verändern ihre Schwingungsfrequenz, wenn nach dem Hookschen Gesetz die Beschleunigung die Quarze verformt. Bei jedem quantenmechanischen System ist zu erwarten, daß die Abänderung des Hamiltonoperators, die die Beschleunigung bewirkt, auch die Energieniveaus ändert, mit der die Uhr betrieben wird. Werden zum Beispiel Atome in magnetischen Feldern abgelenkt, so verstimmen die Magnetfelder die Übergangsfrequenzen. In jedem Fall muß das Verhalten realer, beschleunigter Uhren physikalisch analysiert werden. Es ist nicht durch (4.2) axiomatisch festgelegt.

Uhren können durch völlig unterschiedliche physikalische Prozesse realisiert werden, wie zum Beispiel durch den Zerfall des Myons oder durch elektromagnetische Übergänge in Atomen. Nach Ausschluß der offensichtlich nichtidealen Uhren und nach Korrektur der bekannten Störeffekte, die bei realen Uhren auftreten, insbesondere nach Korrekturen (6.4), die gravitativ verursacht und in der Allgemeinen Relativitätstheorie verstanden werden, stimmt (4.2) ausnahmslos mit allen Beobachtungen überein. Darauf beruht zum Beispiel das Ortungssystem GPS (global positioning system) [59].

Myonen werden in Speicherringen mit Magnetfeldern auf ihrer Bahn gehalten und genauest möglich untersucht, weil wir am Verhalten ihres Spins im Magnetfeld unser Verständnis der Elementarteilchenphysik mit einer Genauigkeit von 9 Dezimalen überprüfen können. Alle Beobachtungen, die man an diesen Myonen gemacht hat, sind verträglich mit der einfachen Annahme, daß die innere Uhr der Myonen, die ihren Zerfall regiert, unabhängig von der Beschleunigung die Zeit (4.2) anzeigt. So zeigte sich [4] innerhalb der Meßgenauigkeit von 1% keine Abweichung von (4.2), obwohl bei hochenergetischen Myonen die Beschleunigung im Speicherring etwa das $4 \cdot 10^{16}$-fache der Erdbeschleunigung beträgt. Bezogen auf die Masse $m_\mu c^2 = 105\,\mathrm{MeV}$ [23] des Myons, auf das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$ und die Lichtgeschwindigkeit c, ist die Beschleunigung b allerdings immer noch klein $b\,\hbar/(m_\mu c^3) \sim 10^{-13}$. Diese Zahl ist die Geschwindigkeitsänderung des Myons im Speicherring relativ zur Lichtgeschwindigkeit während einer Schwingungsdauer seiner Wellenfunktion.

4.2 Freie Teilchen

Kräftefreie Teilchen bewegen sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Sie durchlaufen also gerade Weltlinien. Vergleichen wir verschiedene Weltlinien durch zwei zueinander zeitartige Ereignisse A und B, so ist die gerade Weltlinie dadurch ausgezeichnet, daß die in (4.2) definierte Zeit

$$\tau(B, A\,; \Gamma) := \frac{1}{c}\int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2} \tag{4.8}$$

größer als auf allen anderen Weltlinien Γ von A nach B ist. Zu diesem Schluß gelangt man, wenn man die Weltlinie variiert und die Zeit τ für eine Kurve $x(s) + \delta x(s)$ für kleine $\delta x(s)$ auswertet. Dann ändert sich τ in erster Ordnung um

$$\delta\tau = \frac{1}{c}\int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s \left(\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}(x+\delta x)}{\mathrm{d}s}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2}\,\right) = \frac{1}{c}\int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s\ \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\left(\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2}\,\right)^{-1}$$

und nach partieller Integration erhält man für die Differenz $\delta\tau$

$$\delta\tau = -\frac{1}{c}\int_{\underline{s}}^{\overline{s}} \mathrm{d}s\ \delta x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\Big(\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})^2}\Big)^{-1}\Big)\ . \tag{4.9}$$

Randterme treten bei der partiellen Integration nicht auf, da auch die variierte Weltlinie durch A und B geht und da demnach $\delta x(\underline{s}) = 0$ und $\delta x(\overline{s}) = 0$ ist. Für eine Weltlinie extremaler Zeitdauer verschwindet $\delta\tau$ für alle Funktionen δx, die diese Randbedingungen erfüllen. Die Funktionen $x(s)$ müssen daher die Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}}{\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})^2}} = 0 \tag{4.10}$$

erfüllen, die besagen, daß der Einheitsvektor in Richtung der Tangente konstant ist.

Die Länge des Tangentialvektors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ wird nicht festgelegt, da die Zeit τ, wie in (4.4) gezeigt, nicht von der Parametrisierung der Weltlinie abhängt.

Gleichung (4.10) ist notwendig dafür, daß die Zeit τ sich nicht in erster Ordnung in δx ändert, das heißt, daß die Zeit stationär ist: Wäre der Faktor bei δx^m zu einem Zeitpunkt größer Null, so wäre er in einer ganzen Umgebung dieses Punktes größer Null. Wählte man dann ein δx^m, das außerhalb dieser Umgebung verschwindet und innerhalb dieser Umgebung positiv ist, so wäre $\delta\tau$ negativ und die Zeit τ auf der Weltlinie nicht stationär.

Wählt man die Parametrisierung so, daß der Tangentialvektor konstante Länge c hat

$$\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\Big)^2 = c^2\ , \tag{4.11}$$

dann stimmt der Bahnparameter s bis auf Wahl des Nullpunktes mit der Uhrzeit τ auf der Weltlinie überein und Gleichung (4.10) besagt, daß die Beschleunigung $b = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}$ längs der Bahn verschwindet, daß der Tangentialvektor konstant ist

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} = 0 \tag{4.12}$$

und daß die Weltlinie extremaler Zeit durch

$$x(s) = \frac{s}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} c\\ \vec{v}\end{pmatrix} + x(0) \tag{4.13}$$

gegeben ist. $\vec{v}$ und $x(0)$ werden durch die Anfangs- oder Randbedingungen festgelegt.

Bei vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten ist die Gerade in der Raumzeit eindeutig festgelegt. Auf ihr ist die Zeit nicht nur stationär, sondern extremal. Die extremale Zeit $\tau(B, A; \Gamma)$ ist auf der geraden Weltlinie von A nach B größer als auf einer Weltlinie mit Knick. Die extremale Zeit ist also maximal.

Da freie Teilchen definitionsgemäß gerade Weltlinien durchlaufen, ist die Eigenzeit (4.8) bis auf einen Normierungsfaktor ihre Wirkung

$$W_{\text{Teilchen}}[x] = -m\,c\int \mathrm{d}s\sqrt{\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\Big)^2}\ . \tag{4.14}$$

Die physikalisch durchlaufenen Bahnen erfüllen die Bewegungsgleichung (4.10), auf ihnen ist bei festgehaltenen Randpunkten die Wirkung (4.14) minimal.

4.3 Wirkungsprinzip

Abbildungen von Funktionen in die reellen Zahlen nennt man Funktionale. Zum Beispiel ordnet die Weglänge den Funktionen $x^m(t)$ die Länge der Bahn zu.[2] Kann man ein Funktional durch eine Reihe in den Funktionen $x^m(t)$ darstellen, so ist es von der Form

$$\begin{aligned} W[x] = \sum_n \frac{1}{n!}\int \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n\, f_{m_1m_2\ldots m_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,\cdot \\ \cdot\ x^{m_1}(t_1)x^{m_2}(t_2)\ldots x^{m_n}(t_n) \end{aligned} \tag{4.15}$$

mit irgendwelchen Koeffizientenfunktionen $f_{m_1m_2\ldots m_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n)$. Die Koeffizientenfunktionen heißen auch n-Punkt-Funktionen. Sie sind total symmetrisch unter jeder Permutation $\pi : \big(1,2,\ldots,n\big) \mapsto \big(\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(n)\big)$ der Argumente

$$f_{m_1m_2\ldots m_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = f_{m_{\pi(1)}m_{\pi(2)}\ldots m_{\pi(n)}}(t_{\pi(1)},t_{\pi(2)},\ldots,t_{\pi(n)})\ . \tag{4.16}$$

Lokale Funktionale, wie zum Beispiel die Weglänge, sind spezieller von der Form

$$W[x] = \int \mathrm{d}t\, \mathscr{L}(t, x(t), \dot{x}(t))\ . \tag{4.17}$$

Der Wert solch eines lokalen Funktionals summiert sich aus Beiträgen von allen Zeiten und macht zu jedem Zeitpunkt t nur Gebrauch von einer Funktion $\mathscr{L}$ der Zeit t, des Ortes x, der Geschwindigkeit $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x$ und eventuell höherer, aber endlich hoher, Ableitungen von x.

Die Größen t, x, $x_{(n)} = (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^n x$, $n = 1, 2\ldots$ nennen wir Jet-Variable. Auf den Jet-Variablen wirkt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t = 1$, auf die n-te Ableitung $x_{(n)}$ angewendet, bewirkt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ die Erhöhung der Ableitungsbezeichnung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{(n)} = x_{(n+1)}$.

Die Funktion $\mathscr{L}(t, x, \dot{x})$, die im Integranden des lokalen Funktionals auftritt, heißt Lagrangefunktion. Sie ist eine Funktion der Jet-Variablen und ist zu unterscheiden von der verketteten Funktion $L(t) = \mathscr{L}(t, x(t), \dot{x}(t))$, die man erhält, wenn man die Variablen x und $\dot{x}$ auf einer Bahn $x(t)$ durch die Funktionen $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ ersetzt. Man kann zwar $\mathscr{L}(t, x, \dot{x})$ nach x, nicht aber $L(t)$ nach $x(t)$ ableiten.

Physikalische Systeme sind durch ein lokales Funktional, die Wirkung, charakterisiert. Mit der Wirkung lassen sich Bewegungsgleichungen unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem formulieren und der Zusammenhang von Symmetrie und Erhaltungsgrößen klären.

Wie (4.57) zeigen wird, setzt sich, falls die Energie erhalten ist, die Lagrangefunktion mit Koeffizienten $1/(n-1)$ aus den Anteilen E_n der Energie zusammen, die homogen vom Grad n in den Geschwindigkeiten $\dot{x}$ sind,

$$\mathscr{L} = \sum_n \frac{E_n}{n-1}\ . \tag{4.18}$$

[2] Wir benennen in den nächsten zwei Abschnitten den Bahnparameter nicht mit s, sondern mit t. $\dot{x}$ steht für die Ableitung von x nach dem Bahnparameter. Der Index m zählt die Freiheitsgrade ab und läuft von 1 bis zur Anzahl N der Freiheitsgrade. Wir verwenden die Einsteinsche Summationskonvention. Jeder in einem Term doppelt vorkommende Index enthält die Anweisung, über seinen Laufbereich zu summieren.

Besteht die Energie aus kinetischer Energie, die quadratisch in den Geschwindigkeiten ist, $E_{\mathrm{kin}} = E_2$, und aus einer geschwindigkeitsunabhängigen potentiellen Energie, $E_{\mathrm{pot}} = E_0$, so ist Lagrangefunktion die Differenz von kinetischer und potentieller Energie,

$$\mathscr{L}(t,x,\dot{x}) = E_{\mathrm{kin}} - E_{\mathrm{pot}} \ . \tag{4.19}$$

Beim harmonischen Oszillator, einem Teilchen der Masse m an einer Feder mit Federkonstante κ, ist sie

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Oszillator}}(t,x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\,\kappa\,x^2 \ . \tag{4.20}$$

Die Ableitung eines Funktionals $W[x+\lambda\delta x]$ nach λ bei $\lambda = 0$ mit beliebigem δx definiert (für t im Inneren des Integrationsbereiches) die Funktionalableitung $\frac{\delta W}{\delta x^m(t)}$

$$\delta W[x,\delta x] := \int \mathrm{d}t\, \delta x^m(t)\, \frac{\delta W}{\delta x^m(t)} + \text{Randterme} := \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\big(W[x+\lambda\,\delta x] - W[x]\big) \ . \tag{4.21}$$

Gilt diese Gleichung für alle Variationen δx^m und ist die Funktionalableitung $\frac{\delta W}{\delta x^m(t)}$ stetig, so ist sie auch eindeutig, denn aus

$$\int \mathrm{d}t\, \delta x^m(t)\, f_m(t) = \int \mathrm{d}t\, \delta x^m(t)\, g_m(t) \quad \forall \delta x^m \tag{4.22}$$

folgt $f_m(t) = g_m(t)$: Wäre nämlich zu einer Zeit t beispielsweise $f_1(t) - g_1(t)$ positiv, so wäre diese Differenz in einer ganzen Umgebung dieses Zeitpunktes positiv; wählte man dann ein δx^m, das für $m \neq 1$ verschwindet und das für $m = 1$ innerhalb der Umgebung positiv ist und außerhalb verschwindet, so wäre $\int \mathrm{d}t\, \delta x^m(t)\,(f_m(t) - g_m(t))$ positiv.

Für ein analytisches Funktional (4.15) ist die Funktionalableitung

$$\begin{aligned}\frac{\delta W}{\delta x^m(t)} = \sum_n \frac{1}{n!}\int \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n\, f_{m\,m_1m_2\ldots m_n}(t,t_1,t_2,\ldots,t_n)\,\cdot \\ \cdot\, x^{m_1}(t_1)x^{m_2}(t_2)\ldots x^{m_n}(t_n)\end{aligned} \tag{4.23}$$

ein Funktional, das erneut differenziert werden kann. Die n-fache Funktionalableitung bei $x^m(t) \equiv 0$ heißt auch n-Punkt-Funktion des Funktionals

$$f_{m_1m_2\ldots m_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \frac{\delta^n W}{\delta x^{m_1}(t_1)\delta x^{m_2}(t_2)\ldots\delta x^{m_n}(t_n)}\Big|_{x^m(t)\equiv 0} \ . \tag{4.24}$$

Um die Variationsableitung eines lokalen Funktionals zu bestimmen, betrachten wir, wie sich die Lagrangefunktion $\mathscr{L}(t,x_\lambda,\dot{x}_\lambda)$ als Funktion eines Parameters λ verhält, der eine Schar von Funktionen $x^m_\lambda(t) = x^m(t,\lambda)$ bezeichnet. Bei der Schar kann es sich beispielsweise um die Koordinaten einer Bahn x^m und beliebige Abweichungen δx^m handeln $x^m(t,\lambda) = x^m(t) + \lambda\,\delta x^m(t)$ oder um Bahnen, die durch kontinuierliche Transformationen mit Transformationsparameter λ auseinander hervorgehen. Die Funktion $x_{\lambda=0}$ nennen wir kürzer x, als $\delta\mathscr{L}$ und δx^m bezeichnen wir die Ableitung nach λ bei $\lambda = 0$. Da die

Reihenfolge der Ableitungen nach λ und nach dem Bahnparameter t vertauscht werden kann, gilt

$$\delta\dot{x}^m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x^m \ . \tag{4.25}$$

Daher besagt die Kettenregel für die Lagrangefunktion

$$\delta\mathscr{L} = \delta x^m \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^m} + \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x^m\big)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^m} \ . \tag{4.26}$$

Dies können wir mit der Produktregel als Summe einer vollständigen Ableitung und von Produkten mit undifferenzierten δx^m schreiben

$$\delta\mathscr{L} = \delta x^m\big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^m} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^m}\big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\delta x^m\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^m}\big) \ . \tag{4.27}$$

Die Funktion der Jet-Variablen, die δx^m nach Abwälzen der Ableitung multipliziert,

$$\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^m} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^m} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^m} \ , \tag{4.28}$$

heißt Eulerableitung der Lagrangefunktion.[3] Dabei wirkt die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ auf Funktionen $f(t,x,\dot{x})$ durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f = \partial_t f + \dot{x}^n\partial_{x^n}f + \ddot{x}^n\partial_{\dot{x}^n}f \ . \tag{4.29}$$

Die Lagrangefunktion $\mathscr{L}$ ändert sich gemäß (4.27) bei einer Änderung δx^m der Argumente um die vollständige Ableitung von $\delta x^m\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^m}$ und um δx^m mal der Eulerableitung $\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^m}$. Von dieser Gleichung machen wir wiederholt Gebrauch. Sie gilt unabhängig davon, welche Änderung δx^m wir betrachten, ob sie eine beliebige Abweichung von physikalisch durchlaufenen Bahnen $x(t)$ bezeichnet, für die δx^m an Randpunkten verschwindet, oder ob δx^m für die Änderung von x^m unter einer Transformationsgruppe steht.

Aus (4.27) folgt die Variationsableitung der lokalen Wirkung (4.17)

$$\delta W[x,\delta x] = \int \mathrm{d}t\,\delta\mathscr{L} = \int \mathrm{d}t\,\delta x^m\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^m} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^m\partial_{\dot{x}^m}\mathscr{L}) \ . \tag{4.30}$$

Das Integral über die vollständige Ableitung ergibt Randterme

$$\int \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x^m\partial_{\dot{x}^m}\mathscr{L}) = \Big|\ \delta x^m\partial_{\dot{x}^m}\mathscr{L} \ . \tag{4.31}$$

Diese Randterme verschwinden für Bahnkurven, die durch dieselben Randpunkte gehen wie $x(t)$, da dort die Funktionen δx^m verschwinden.

Die Funktionalableitung einer lokalen Wirkung (4.17) mit Lagrangefunktion $\mathscr{L}$ nach Variationen, die am Rand verschwinden, ist die Eulerableitung der Lagrangefunktion

$$\frac{\delta W}{\delta x^m} = \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^m} \ . \tag{4.32}$$

[3] Die Eulerableitung von Lagrangefunktionen, die von höheren Ableitungen von x abhängen, ist im Anhang G.1 gegeben.

Physikalisch durchlaufene Bahnkurven $x^m(t)$ sind bei Abwesenheit von Reibung und nichtholonomen Zwangsbedingungen durch das Prinzip der stationären Wirkung ausgezeichnet, daß die lokale Wirkung (4.17, 4.19) auf physikalischen Bahnen stationär ist bezüglich aller infinitesimalen Variationen der Bahn, die am Rand verschwinden. Es verschwindet also auf physikalischen Bahnen $x^m_{\text{phys}}(t)$ die Eulerableitung der Lagrangefunktion

$$\Bigl(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^m} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^m}\Bigr)_{\big|_{x_{\text{phys}}(t)}} = 0\ . \tag{4.33}$$

Dies sind die Euler-Lagrange-Gleichungen für physikalische Bahnen $x_{\text{phys}}(t)$. Sie sind die Bewegungsgleichungen, die physikalische Bahnen unter all denjenigen Bahnen aussondern, die zur Zeit $t = \underline{t}$ und $t = \bar{t}$ durch festgelegte Randpunkte gehen.[4]

Beim harmonischen Oszillator (4.20) ist die Eulerableitung $-m\,\ddot{x} - \kappa\,x$. Die Euler-Lagrange-Gleichung hat die Lösung $x(t) = a\cos(\omega\,t + \varphi)$. Dabei ist die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\kappa/m} = 2\pi\,\nu$ das 2π-fache der Frequenz ν. Die Amplitude a und die Phase φ sind Funktionen der frei wählbaren anfänglichen Lage und Geschwindigkeit, $x(0)$ und $\dot{x}(0)$.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen (4.33) gelten in allen Koordinatensystemen, denn das Prinzip der extremalen Wirkung macht nicht Gebrauch von der Wahl von Koordinaten zur Beschreibung der Bahn. Fassen wir die Koordinaten x als Funktionen $x(t,y)$ von anderen Koordinaten y auf und schreiben wir die Lagrangefunktion um

$$\mathscr{L}'(t,y,\dot{y}) = \mathscr{L}(t, x(t,y), \partial_t x + \frac{\partial x}{\partial y}\,\dot{y})\ , \tag{4.34}$$

so gelten, wenn $x(t,y)$ jederzeit invertierbar ist, in y-Koordinaten die Euler-Lagrange-Gleichungen genau dann, wenn sie in x-Koordinaten erfüllt sind

$$\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}'}{\hat{\partial} y^m} = \frac{\partial x^n}{\partial y^m}\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial} x^n}\ . \tag{4.35}$$

Eine Funktion $\mathscr{L}$ der Jet-Variablen läßt sich genau dann als vollständige Ableitung schreiben, wenn ihre Eulerableitung als Funktion der Jet-Variablen verschwindet. Es ist klar, daß die Eulerableitung von $\mathscr{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(t,x) = \partial_t K + \dot{x}\partial_x K$ verschwindet, denn dann ändert sich die Wirkung nur um Randterme $\delta\mathscr{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta K$. Um die Umkehrung zu zeigen, schreiben wir die Lagrangefunktion als Integral über ihre Ableitung

$$\mathscr{L}(t,x,\dot{x}) = \mathscr{L}(t,0,0) + \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathscr{L}(t,\lambda x,\lambda\dot{x})\ . \tag{4.36}$$

Die Ableitung der Lagrangefunktion nach λ ist gemäß (4.27)

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\lambda}(t,\lambda x,\lambda\dot{x}) = x^m\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^m}\Big|_{(t,\lambda x,\lambda\dot{x})} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigl(x^m\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^m}\Big|_{(t,\lambda x,\lambda\dot{x})}\Bigr)\ . \tag{4.37}$$

[4]Ob durch festgelegte Randpunkte eine Kurve geht, die die Wirkung stationär macht, bedarf genauerer Untersuchung des Einzelfalls. Beim harmonischen Oszillator existiert keine physikalische Bahn, die zu den Zeiten t und $t + \frac{2\pi}{\omega}$ durch verschiedene Punkte geht. Beim relativistischen Teilchen müssen die Randpunkte der Weltlinie zeitartig zueinander liegen.

Demnach schreibt sich die Lagrangefunktion als

$$\mathscr{L}(t,x,\dot{x}) = x^m\int_0^1\mathrm{d}\lambda\,\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}x^m}\Big|_{(t,\lambda x,\lambda\dot{x})} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigl(x^m\int_0^1\mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^m}\Big|_{(t,\lambda x,\lambda\dot{x})} + \int_0^t\mathrm{d}t'\mathscr{L}(t',0,0)\Bigr)\ . \tag{4.38}$$

Dies ist eine vollständige Zeitableitung, falls die Eulerableitung der Lagrangefunktion identisch in den Jet-Variablen für alle $(t,\lambda x,\lambda\dot{x})$ verschwindet.

4.4 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Das Relativitätsprinzip wird manchmal als Forderung „Alle physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen die gleichen" formuliert. Diese Forderung ist schlecht definiert. So sind alle Euler-Lagrange-Gleichungen (4.33) invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen, wenn man dabei die Lagrangefunktion $\mathscr{L}$ in $\mathscr{L}'$ transformiert (4.35).

Wohldefiniert ist hingegen die Forderung nach Symmetrie der Wirkung. Das Relativitätsprinzip besagt: „Die Wirkung physikalischer Systeme ist lokal und invariant unter Poincaré-Transformationen". Aus der Invarianz der Wirkung folgen Einschränkungen an die Lagrangefunktion und, wie das Noethertheorem zeigt, die Erhaltung von Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunktsgeschwindigkeit.

Um zu definieren, was eine Symmetrie oder Invarianz der Wirkung ist, betrachten wir kontinuierliche Transformationen von Kurven,

$$T_\alpha : x(t) \mapsto T_\alpha x(t)\ . \tag{4.39}$$

Zum Beispiel wird durch

$$T_\alpha x^m(t) = x^m(t) + \alpha\,c^m \tag{4.40}$$

eine Kurve räumlich in Richtung c^m verschoben oder durch

$$T_\alpha x^m(t) = x^m(t+\alpha) \tag{4.41}$$

zeitlich verschoben und durch

$$\begin{pmatrix} T_\alpha x(t) \\ T_\alpha y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix}\ . \tag{4.42}$$

um einen Winkel α gedreht. Der Transformationsparameter α sei so gewählt, daß $\alpha = 0$ zur identischen Abbildung gehört, $T_0 x(t) = x(t)$.

Bei kontinuierlichen Transformationen können wir, anders als zum Beispiel bei Spiegelungen, nach dem Transformationsparameter ableiten. Wir bezeichnen als infinitesimale Transformation oder als Änderung von x^m die Ableitung ∂_α der transformierten Bahn $T_\alpha x$ nach dem Transformationsparameter bei $\alpha = 0$

$$\delta x^m = \partial_\alpha T_\alpha x^m{}_{|_{\alpha=0}}\ . \tag{4.43}$$

Analog definieren wir die Änderung der Wirkung $W[T_\alpha x]$ als Ableitung nach dem Transformationsparameter α. Nach Definition der Variationsableitung ändert sich W um

$$\delta W = \int \mathrm{d}t \, \left(\partial_\alpha T_\alpha x^m{}_{|\alpha=0}\right) \frac{\delta W}{\delta x^m} + \text{Randterme} \ . \tag{4.44}$$

Die Transformation T_α heißt Symmetrie der Wirkung $W[x]$, wenn sich die Wirkung nur um Randterme ändert, das heißt genauer [13, 49], wenn sich der Integrand in (4.44) für *alle* Bahnen x^m als Ableitung einer Funktion Q der Jet-Variablen schreiben läßt

$$\delta x^m \frac{\delta W}{\delta x^m} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q = 0 \ . \tag{4.45}$$

Die physikalisch durchlaufenen Bahnen erfüllen die Bewegungsgleichungen $\frac{\delta W}{\delta x^m} = 0$, auf *physikalischen* Bahnen ist daher Q zeitunabhängig. Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie der Wirkung gehört eine Erhaltungsgröße Q !

Die Lagrangefunktion $\mathscr{L}$ einer lokalen Wirkung ändert sich bei infinitesimalen Symmetrietransformationen wegen (4.27) und (4.32) um eine Zeitableitung

$$\delta \mathscr{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K \ , \tag{4.46}$$

$$0 = \delta x^m \frac{\hat{\partial} \mathscr{L}}{\hat{\partial} x^m} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q = \delta \mathscr{L} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta x^m \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^m}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q = \delta \mathscr{L} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K \ , \tag{4.47}$$

mit $K = \delta x^m \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^m} - Q$. Die Erhaltungsgröße Q, die Noetherladung, ist also

$$Q = \delta x^m \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^m} - K \ . \tag{4.48}$$

Bei einer lokalen Wirkung kann man für jede gegebene infinitesimale Transformation δx^m nach Ausrechnen von $\delta \mathscr{L}$ leicht entscheiden, ob sie zu einer kontinuierlichen Symmetrie gehört. Die Funktion $\delta \mathscr{L}$ der Jet-Variablen läßt sich genau dann als Ableitung $\frac{d}{dt} K$ schreiben, wenn die Eulerableitung von $\delta \mathscr{L}$ verschwindet (4.38).

Umgekehrt gehört zu jeder Erhaltungsgröße eine kontinuierliche Symmetrie der Wirkung! Denn eine Funktion $\overline{Q}(t, x, \dot{x})$ der Jet-Variablen ist eine Erhaltungsgröße, wenn ihre Zeitableitung aufgrund der Bewegungsgleichungen verschwindet, also wenn sich ihre Zeitableitung als Vielfaches der Funktionalableitung der Wirkung und eventuell von den Ableitungen der Funktionalableitungen[5] schreiben läßt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overline{Q}(t, x, \dot{x}) + R_0^m \frac{\delta W}{\delta x^m} + R_1^m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\delta W}{\delta x^m} = 0 \ . \tag{4.49}$$

Die Größen R_0^m und R_1^m hängen auf nicht weiter festgelegte Art von den Jet-Variablen ab. Fassen wir die Terme mit der Produktregel zusammen, so ist die Definitionsgleichung einer Erhaltungsgröße die Definition einer infinitesimale Symmetrie (4.45)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overline{Q} + R_1^m \frac{\delta W}{\delta x^m}\right) + \left(R_0^m - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R_1^m\right) \frac{\delta W}{\delta x^m} = 0 \ . \tag{4.50}$$

[5] Falls höhere Ableitungen von $\frac{\delta W}{\delta x^m}$ auftreten, wälzt man sie wie in Anhang G.1 ab.

Die Wirkung ist also unter der infinitesimalen Transformation

$$\delta x^m = R_0^m - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R_1^m \tag{4.51}$$

bis auf Randterme invariant. Die Erhaltungsgröße Q stimmt auf physikalischen Bahnen mit $\overline{Q}$ überein

$$Q = \overline{Q}(t, x, \dot{x}) + R_1^m \frac{\delta W}{\delta x^m} \ . \tag{4.52}$$

Der Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungsgrößen (4.48) ist von Emmy Noether 1918 [48] formuliert worden.

Noethertheorem: *Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie der Wirkung gehört eine Erhaltungsgröße. Umgekehrt gehört zu jeder Erhaltungsgröße eine Symmetrie der Wirkung.*

Am Noethertheorem ist nichts zu beweisen, man muß nur erkennen, daß die Definition (4.45) einer Symmetrie der Wirkung eine Erhaltungsgröße definiert und daß umgekehrt die Definition einer Erhaltungsgröße eine Symmetrie definiert. Das Theorem ist deshalb wichtig, weil häufig Symmetrien der Wirkung offensichtlich sind und als geometrische Eigenschaft einfach durch Ansehen gefunden werden können.

Erhaltungsgrößen sind ausschlaggebend für die Frage, ob die Bewegungsgleichungen integrabel sind, das heißt, ob sich die Lösungen durch Rechenoperationen wie Integrieren gegebener Funktionen und Auflösen implizit gegebener Funktionen angeben lassen. Betreffen die Bewegungsgleichungen N Freiheitsgrade, so sind die Gleichungen genau dann integrabel, wenn es N unabhängige Erhaltungsgrößen Q_i, $i = 1, 2, \dots, N$ gibt, deren zugehörige infinitesimale Transformationen δ_i, hintereinander ausgeführt, wie Verschiebungen in ihrer Reihenfolge vertauscht werden dürfen, $\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i$.[6] Ändert man integrable Bewegungsgleichungen durch Zusatzterme ab, so führen solche Störungen integrabler Bewegung, selbst wenn sie klein sind, zu chaotischen Bahnen, die im Raum aller Bahnen zwar kleines Maß haben, aber dicht liegen. Die Herleitung und Diskussion dieser wichtigen Erkenntnisse füllt Bücher [2, 44, 7, 24], auf die hier nur verwiesen sei.

Über die Tatsache hinaus, daß Symmetrien der Wirkung mit Erhaltungsgrößen zusammenhängen, sind Symmetrien wichtig, weil man aus einer Lösung der Bewegungsgleichungen durch Symmetrietransformationen weitere Lösungen gewinnen kann. Zum Beispiel erhält man in der Allgemeinen Relativitätstheorie das Gravitationsfeld einer gleichförmig bewegten Masse aus demjenigen der ruhenden Masse durch eine Lorentztransformation.

Transformationen, die Lösungen von Bewegungsgleichungen auf Lösungen abbilden, sind nicht unbedingt Symmetrien der Wirkung. Zum Beispiel werden die Lösungen $x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0$ der Bewegungsgleichung $\ddot{x} = -g$ eines senkrecht fallenden Teilchens durch $T_\alpha x(t) = \mathrm{e}^{2\alpha} x(\mathrm{e}^{-\alpha} t)$ auf Lösungen abgebildet, aber die infinitesimale Transformation $\delta x = 2x - t\dot{x}$ läßt die Lagrangefunktion $\mathscr{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx$ nicht invariant, $\delta \mathscr{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-t\mathscr{L}) + 3\mathscr{L} \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K$.

Die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$ eines nichtrelativistischen Teilchens ist invariant unter Drehungen und Verschiebungen. Sie hängt nicht davon ab, wo und in welche Rich-

[6] Solche Q_i heißen „in Involution". Ihre gegenseitigen Poisson-Klammern verschwinden, $\{Q_i, Q_j\} = 0$.

tung sich das Teilchen bewegt. Besteht die Lagrangefunktion aus solch einer verschiebungsinvarianten kinetischen Energie und ist die potentielle Energie in einer Richtung c konstant $V(x) = V(x + \alpha\, c)$, so ist die Lagrangefunktion unter der Verschiebung (4.40) invariant, $\delta\mathscr{L} = 0$.

Die zur infinitesimalen Verschiebung $\delta x^k = c^k$ und Lagrangefunktion (4.19) gehörige Erhaltungsgröße (4.48)

$$c^k \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^k} = c^k p^k\ , \quad p^k = m\dot{x}^k \tag{4.53}$$

ist definitionsgemäß der nichtrelativistische Impuls $\vec{p}$ in Richtung des Vektors $\vec{c}$. Verschiebungsinvarianz ist die Ursache von Impulserhaltung.

Eine Variable x, die in der Lagrangefunktion nur mit ihrer Geschwindigkeit $\dot{x}$ auftritt, heißt zyklische Variable

$$x \text{ zyklisch} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0\ . \tag{4.54}$$

Ist x zyklisch, so ist die Lagrangefunktion invariant unter der infinitesimalen Translation $\delta x = 1$, $\delta\dot{x} = 0$, und die Noether-Ladung (4.48) stimmt mit dem zu x kanonisch konjugierten Impuls überein, $Q = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}$. Er ist wegen der Euler-Lagrange-Gleichungen (4.33) offensichtlich erhalten

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} = 0\ . \tag{4.55}$$

Ist die Wirkung invariant unter Drehungen um eine Achse $\vec{n}$ (4.42), so ist die zugehörige Noether-Ladung definitionsgemäß der Drehimpuls $\vec{n}\cdot\vec{L}$ in Richtung dieser Achse.

Zur Zeitverschiebung (4.41) gehört gemäß (4.43) die infinitesimale Transformation

$$\delta x^k = \dot{x}^k\ . \tag{4.56}$$

Dies ist eine infinitesimale Symmetrie der Wirkung, falls die Lagrangefunktion $\mathscr{L}(t, x, \dot{x})$ nicht von t abhängt, $\partial_t \mathscr{L} = 0$, denn dann gilt

$$\delta\mathscr{L} = \delta x^k\ \partial_{x^k}\mathscr{L} + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x^k)\partial_{\dot{x}^k}\mathscr{L} = \dot{x}^k\ \partial_{x^k}\mathscr{L} + \ddot{x}^k\partial_{\dot{x}^k}\mathscr{L} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}t} - \partial_t\mathscr{L} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}t}\ ,$$

also (4.47) mit $K = \mathscr{L}$.

Die zur Symmetrie unter Zeitverschiebung gehörige Noether-Ladung (4.48)

$$E = \dot{x}^k \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}\mathscr{L} - \mathscr{L} \tag{4.57}$$

ist definitionsgemäß die Energie E. Sie ist erhalten, wenn die Lagrangefunktion nicht von der Zeit abhängt.

Aus (4.57) folgt (4.18), wie sich die Lagrangefunktion aus den Anteilen E_n der Energie zusammensetzt, die homogen vom Grad n in den Geschwindigkeiten $\dot{x}$ sind. Der Operator $\dot{x}\partial_{\dot{x}}$ zählt den Homogenitätsgrad in Geschwindigkeiten ab: $\dot{x}\partial_{\dot{x}}(\dot{x})^n = n(\dot{x})^n$. Jeder Term E_n in der Energie, der n Faktoren $\dot{x}$ enthält, $n \neq 1$, muß in der Lagrangefunktion mit Vorfaktor $1/(n-1)$, erscheinen, damit (4.57) $E = \sum_n E_n$ lautet.

Die Definition (4.57) der Energie kann als Definition der Hamiltonfunktion gelesen werden

$$\mathscr{H}(x, p) = \dot{x}^k p_k - \mathscr{L}(x, \dot{x})\ , \quad p_k = \partial_{\dot{x}^k}\mathscr{L}\ . \tag{4.58}$$

Dabei werden statt des Ortes x^n und der Geschwindigkeit $\dot{x}^k$ die Phasenraumvariablen, der Ort x^n und der kanonisch konjugierte Impuls p_k, als unabhängig betrachtet und die Geschwindigkeiten $\dot{x}^k(x, p)$ als Umkehrfunktionen von $p_k = \partial_{\dot{x}^k}\mathscr{L}(x, \dot{x})$ aufgefaßt.

In Phasenraumvariablen lautet die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators

$$\mathscr{H}_{\text{Oszillator}} = \frac{p^2}{2m} + \kappa\frac{x^2}{2}\ . \tag{4.59}$$

Formuliert man die Bewegung von Teilchen im Phasenraum, so hat ihre Zeitentwicklung die Eigenschaft, flächentreu bezüglich des Flächenmaßes $\mathrm{d}p_i\mathrm{d}x^i - \mathrm{d}H\mathrm{d}t$ zu sein [2]. Auf dieser wichtigen geometrischen Eigenschaft beruht das Kolmogorov-Arnold-Moser-Theorem [44] und die daraus folgenden Schlüsse, daß schon kleine Störungen integrabler Bewegungen zu chaotischen Bahnen führen [7, 24], die im Raum aller Bahnen dicht liegen, aber geringes Maß haben.

Eindimensionale Bewegung

Gilt für eine eindimensionale Bewegung ein Energiesatz $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ und ist die Energie von der Form

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + V(x) \tag{4.60}$$

mit einem Potential V, so läßt sich die Zeit $t(x)$, zu der ein Bahnpunkt x durchlaufen wird, als Integral angeben und die Bahn $x(t)$ als Umkehrfunktion von $t(x)$ ermitteln, $x(t(\hat{x})) = \hat{x}$. Denn wenn wir nach $\dot{x}$ auflösen und das Vorzeichen von $\dot{x}$ nach Bahnabschnitt wählen, je nachdem, ob x zu- oder abnimmt, so erhalten wir für zunehmendes x

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x(t)))}\ . \tag{4.61}$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion ist wegen $1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{x}}\, x(t(\hat{x})) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}_{|t(\hat{x})} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\hat{x}}_{|\hat{x}}$ hierzu invers

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \Big(\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}\Big)^{-1}\ , \tag{4.62}$$

und die Zeit $t(\hat{x})$, zu der der Ort $\hat{x}$ durchlaufen wird, ergibt sich durch Integration[7]

$$t(\hat{x}) - t(\underline{x}) = \int_{\underline{x}}^{\hat{x}} \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \int_{\underline{x}}^{\hat{x}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}\ . \tag{4.63}$$

Alle lösbaren Bewegungsgleichungen sind deshalb lösbar, weil sie genügend viele Erhaltungsgrößen besitzen und weil sich mit den Erhaltungsgrößen die Lösungen wie bei eindimensionaler Bewegung als Umkehrfunktionen von Integralen über gegebene Funktionen ermitteln lassen.

[7] Integration von (4.61) ergäbe nur eine Integralgleichung, da der Integrand die unbekannte Funktion $x(t)$ enthält.

Keplerbahnen

Als Beispiel einer nichtrelativistischen Bewegung, die durch Erhaltungssätze festgelegt wird, bestimmen wir die Bahnen zweier Teilchen mit Massen m_1 und m_2, die sich gegenseitig durch ein Potential $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ beeinflussen, das nur von ihrem Abstand abhängt.

Die Lagrangefunktion ist die Differenz von kinetischer und potentieller Energie

$$\mathscr{L}_{\text{2-Teilchen}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \ . \tag{4.64}$$

In Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \ , \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \ , \tag{4.65}$$

schreiben sich die Koordinaten der Teilchen als

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \ , \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \ , \tag{4.66}$$

und die Lagrangefunktion $\mathscr{L}_{\text{2-Teilchen}} = \mathscr{L}_S + \mathscr{L}$ als Summe einer Lagrangefunktion für den Schwerpunkt und für die Relativbewegung,

$$\mathscr{L}_S = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 \ , \quad \mathscr{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - V(|\vec{r}|) \ . \tag{4.67}$$

Dabei ist $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse, $m = m_1 m_2 / M$ ist die reduzierte Masse.

Die Schwerpunktskoordinaten $\vec{R}$ sind zyklisch, der zugehörige Impuls $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$ ist erhalten, und der Schwerpunkt bewegt sich gradlinig mit gleichbleibender Geschwindigkeit

$$\vec{R}(t) = \vec{V}t + \vec{R}(0) \ . \tag{4.68}$$

Die Relativbewegung verläuft unabhängig von der Schwerpunktsbewegung wie die Bewegung eines Teilchens mit reduzierter Masse in einem drehinvarianten Potential. Insbesondere ist die Lagrangefunktion $\mathscr{L}$ invariant unter infinitesimalen Drehungen (D.12)

$$\delta\vec{r} = \vec{e} \times \vec{r} \tag{4.69}$$

um jede Achse $\vec{e}$. Dazu gehört die Erhaltungsgröße (4.48), der Drehimpuls in Richtung $\vec{e}$,

$$\vec{e} \cdot \vec{L} = (\vec{e} \times \vec{r}) \cdot (m\dot{\vec{r}}) = \vec{e} \cdot (\vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})) \ , \quad \vec{L} = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p} \ . \tag{4.70}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ steht senkrecht auf dem Ortsvektor des Teilchens, $\vec{L} \cdot \vec{r} = 0$. Daher verläuft die Bahn in der Ebene durch den Ursprung, die senkrecht auf $\vec{L}$ steht. Die Bahnebene ist zeitunabhängig, weil die Richtung des Drehimpulses $\vec{L}$ gleich bleibt.

Mit Kugelkoordinaten (2.25)

$$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \tag{4.71}$$

vereinfacht sich die weitere Untersuchung der Bahn. Man berechnet elementar die kinetische Energie der Relativbewegung und damit die Lagrangefunktion

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - V(r) \tag{4.72}$$

und bestätigt, daß die Bewegung in einer Ebene, die wir mit $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$, als z-Ebene wählen, die θ-Bewegungsgleichung löst

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}} = m\,r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \ . \tag{4.73}$$

Der Winkel φ ist eine zyklische Variable, sein konjugierter Impuls $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} = m\,r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$ ist zeitunabhängig und, bei Bewegung in der z-Ebene $\theta = \frac{\pi}{2}$, der Drehimpuls

$$L = mr^2\dot{\varphi} \ . \tag{4.74}$$

Ist sein Wert mit den Anfangsdaten der Bahn gegeben und ist die Radialbewegung $r(t)$ bekannt, dann auch $\varphi(t)$ als Integral von $L/(m\,r^2)$.

Da die Lagrangefunktion zeitunabhängig ist, ist die Energie (4.57) erhalten. Also ist

$$E = \frac{1}{2} m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m\,r^2\dot{\varphi}^2 + V(r) \ . \tag{4.75}$$

bei Bewegung in der z-Ebene zeitunabhängig. Ersetzen wir hier die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ durch $L/(m\,r^2)$, so erhalten wir effektiv einen Energiesatz für die Radialbewegung, zu dem die kinetische Energie der Drehbewegung die Drehimpulsbarriere $L^2/(2\,m\,r^2)$ beiträgt,

$$E = \frac{1}{2} m\,\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \ , \quad V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) \ . \tag{4.76}$$

Warnung: Wenn man Folgerungen aus den Bewegungsgleichungen wie $\dot{\varphi} = L/(m\,r^2)$ in die Lagrangefunktion einsetzt, erhält man nicht die Lagrangefunktion für die Bewegung der verbleibenden Freiheitsgrade. In die Lagrangefunktion $\mathscr{L} = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$ eingesetzt, trüge die Drehimpulsbarriere $L^2/(2\,m\,r^2)$ als Teil der kinetischen Energie mit falschem Vorzeichen zum effektiven Potential bei.

Wir betrachten spezieller das Gravitationspotential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \ . \tag{4.77}$$

Hierbei ist $\alpha = G\,m_1\,m_2$ und $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ [23, 54] die Newtonsche Gravitationskonstante.

Für nichtverschwindenden Drehimpuls $L \neq 0$ bestimmen wir die räumlich durchlaufene Bahn r als Funktion des Winkels φ, indem wir mit der Kettenregel die Zeitableitung von r als Ableitung nach dem Winkel φ umschreiben und die Drehimpulserhaltung berücksichtigen,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{L}{m}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Big(\frac{1}{r}\Big) \ . \tag{4.78}$$

Die Energieerhaltung (4.76) besagt für den inversen Abstand $1/r$ als Funktion von φ

$$E = \frac{L^2}{2\,m}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{1}{r}\Big)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{L^2}{2\,m}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{1}{r}\Big)^2 + \frac{L^2}{2\,m}\Big(\frac{1}{r} - \frac{\alpha\,m}{L^2}\Big)^2 - \frac{\alpha^2\,m}{2\,L^2}\ . \qquad (4.79)$$

Bringen wir den konstanten Term $\alpha^2\,m/(2\,L^2)$ nach links und teilen durch ihn, folgt

$$e^2 = \Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\Big)^2 + u^2\ ,\quad e = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,L^2}{\alpha^2\,m}}\ ,\quad u = \frac{p}{r} - 1\ ,\quad p = \frac{L^2}{\alpha\,m}\ . \qquad (4.80)$$

Der inverse Abstand u genügt also als Funktion des Winkels φ dem Energieerhaltungssatz eines harmonischen Oszillators, der mit Kreisfrequenz $\omega = 1$ mit Amplitude e schwingt. Wählen wir φ so, daß r für $\varphi = 0$ minimal wird, so lautet die Lösung $u(\varphi) = e\cos\varphi$,

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi\ . \qquad (4.81)$$

Dies ist für $0 < e < 1$, also für $E < 0$, eine Ellipse mit Exzentrizität e, mit großer Halbachse a und kleiner Halbachse b

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}\ ,\quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{L}{\sqrt{\alpha\,m}}\sqrt{a}\ . \qquad (4.82)$$

Denn schreibt man mit kartesischen Koordinaten $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ die Bahngleichung als $\sqrt{x^2+y^2} = p - ex$ und quadriert, so erhält man $(x+ea)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Die Brennpunkte der Ellipse sind der Ursprung $(x,y) = (0,0)$ und $(x,y) = (-2ea, 0)$: ihre Abstände r und $\sqrt{(x+2ea)^2+y^2}$ zu den Ellipsenpunkten summieren sich überall zu $2a$, denn $(x+2ea)^2 + y^2 = (2a-r)^2$ gilt wegen $e\cos\varphi + 1 = p/r$.

Für Planetenbahnen im Gravitationspotential $-\alpha/r$ gilt also das Keplersche Gesetz: sie sind Ellipsen, bei denen die Sonne, genauer der Schwerpunkt, in einem der Brennpunkte steht. Zwischen minimalem Abstand, maximalem Abstand und wieder minimalem Abstand zur Sonne durchlaufen die Planeten den Winkel $\Delta\varphi = 2\pi$.

Für $E > 0$, $e > 1$, ist die Bahn eine Hyperbel, auf der das Teilchen im Schwerpunktsystem um den Winkel $\delta = 2\arccos(-1/e) - \pi = 2\arcsin(1/e)$ gestreut wird. Läuft ein Teilchen mit hoher Geschwindigkeit v und einem Minimalabstand $r_{\min}$ an der Sonne vorbei, so wird es daher nach Newtonscher Theorie um $\delta \approx 2\,G\,M/(r_{\min}\,v^2)$ abgelenkt. Für Licht wird aber in Übereinstimmung mit der Allgemeinen Relativitätstheorie (6.57) der doppelte Wert gemessen.

Die Fläche F, die der Differenzvektor $\vec{r}(t)$ überstreicht, setzt sich aus Kreissegmenten der Größe $\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\varphi$ zusammen und ändert sich mit $\varphi(t)$ um

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi} = \dot{\varphi}\,\frac{1}{2}\,r^2 = \frac{L}{2\,m}\ . \qquad (4.83)$$

Daß der Drehimpuls konstant, also die Flächengeschwindigkeit konstant ist, ist Keplers zweites Gesetz: In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl zum Schwerpunkt, $m_2\vec{r}/M$ (4.66), gleich große Flächen. Insbesondere überstreicht $\vec{r}$ in der Umlaufzeit T die Fläche der Ellipse $LT/(2\,m) = \pi\,a\,b$. Mit $b = \sqrt{a}\,L/\sqrt{m\alpha}$ und $a' = m_2\,a/M$ folgt daraus das dritte Keplersche Gesetz

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{G\,m_2}}\,\frac{m_1+m_2}{m_2}\,a'^{\frac{3}{2}}\ , \qquad (4.84)$$

daß sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben der großen Halbachsen a' der Planetenbahnen verhalten. Damit läßt sich aus der Beobachtung der Planetenbahnen die gravitativ wirkende Masse der Sonne $G\,m_{\text{Sonne}}$ ermitteln. Durch irdische Messung der Newtonschen Gravitationskonstanten G schließlich bestimmt man die Sonnenmasse.

Mit Keplers drittem Gesetz beantwortet man ohne große Rechnung die Scherzfrage, wie lange die Erde in die Sonne fiele, wenn man ihr an Ort und Stelle den Bahndrehimpuls entzöge. Statt einer nahezu kreisförmigen Bahn wäre die Fallkurve eine zur Strecke entartete Ellipse mit einer Halbachse, die halb so groß wie der bisherige Kreisradius ist. Die Falldauer (4.91) ist die halbe Umlaufdauer, die ihrerseits nach Keplers drittem Gesetz $(1/2)^{3/2}$ mal einem Jahr ist. Demnach dauert der Fall ein Jahr, geteilt durch $4\sqrt{2}$, also etwa 65 Tage.

Senkrechter Fall

Falls der Drehimpuls verschwindet, $L = 0$, und es sich um einen senkrechten Fall mit Maximalabstand R handelt, lautet der Energiesatz

$$\frac{1}{2}\,m\,\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\Big)^2 - \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{R}\ . \qquad (4.85)$$

Mit R/α multipliziert besagt diese Gleichung für das dimensionslose Verhältnis $u = r/R$

$$\frac{mR^3}{2\alpha}\,\Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Big)^2 - \frac{1}{u} = -1\ . \qquad (4.86)$$

Wir lösen wie in (4.62) zu Zeiten, in denen r mit t zunimmt, nach $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$ auf

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \Big(\frac{2\alpha}{m\,R^3}\Big(\frac{1}{u} - 1\Big)\Big)^{-\frac{1}{2}}\ . \qquad (4.87)$$

Den Vorfaktor absorbieren wir in der reskalierten Zeit

$$f(u) = \sqrt{2\,\alpha/(m\,R^3)}\,t(u)\ . \qquad (4.88)$$

Sie muß

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \sqrt{\frac{u}{1-u}} \qquad (4.89)$$

erfüllen. Durch Ableiten bestätigt man, daß

$$f(u) = f(0) - \sqrt{u\,(1-u)} + \operatorname{arccot}\sqrt{\frac{1-u}{u}} \qquad (4.90)$$

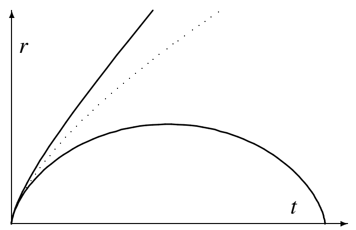

Abbildung 4.1: Senkrechter Fall

die Stammfunktion ist. Demnach löst $t = \sqrt{\frac{mR^3}{2\alpha}}f(r/R)$ die Bewegungsgleichung des senkrechten Falls. Ein Fall aus der Höhe $R_1 = m_2\,R/M$ (4.66) über dem Schwerpunkt dauert

$$t(1) - t(0) = \frac{\pi}{\sqrt{G\,(m_1 + m_2)}}\,(\frac{R}{2})^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{G\,m_2}}\,\frac{m_1 + m_2}{m_2}\,(\frac{R_1}{2})^{\frac{3}{2}}\ . \tag{4.91}$$

Der Funktionsgraph $\Gamma : u \mapsto (f(u), u)$ der Lösung (4.90) ist eine Zykloide, die Bahnkurve eines Punktes auf der Lauffläche eines rollendes Rades. Dies zeigt sich, wenn man u als Funktion

$$u(\varphi) = \frac{1}{2}\,(1 - \cos\varphi) \tag{4.92}$$

eines Winkels φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$, auffaßt. Dann vereinfacht sich wegen $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ und $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$

$$\sqrt{\frac{1-u}{u}} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \cot\frac{\varphi}{2}\ . \tag{4.93}$$

Also ist der letzte Term in (4.90) $\varphi/2$, der vorletzte Term ist $-\sqrt{u(1-u)} = -(1/2)\sin\varphi$, und, wenn wir einfachheitshalber $f(0) = 0$ wählen, gilt

$$f(u(\varphi)) = \frac{1}{2}\,(\varphi - \sin\varphi)\ . \tag{4.94}$$

Es sind aber die Kurvenpunkte

$$\begin{pmatrix} f(u(\varphi)) \\ u(\varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4.95}$$

die Summe des Ortsvektors $1/2\,(\varphi, 1)$ der Achse eines Rades mit Radius $1/2$, die sich in Höhe $1/2$ mit zunehmendem Winkel φ um die Kreisbogenlänge $\varphi/2$ nach rechts bewegt, und des Vektors $-1/2\,(\sin\varphi, \cos\varphi)$, der anfangs für $\varphi = 0$ von der Radachse zum untersten Punkt des Rades zeigt und mit zunehmendem φ im Uhrzeigersinn um den Winkel φ gedreht wird. Also ist beim senkrechten Fall im Keplerpotential die Weltlinie mit endlicher Gipfelhöhe R, wie in Abbildung (4.1) dargestellt, eine Zykloide.

Verschwindet die Energie, so lautet (4.86)

$$\frac{mR^3}{2\alpha}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})^2 - \frac{1}{u} = 0 \tag{4.96}$$

und die reskalierte Zeit f (4.88) erfüllt bei wachsendem $r = u\,R$ die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \sqrt{u} \quad \text{mit der Lösung} \quad f(u) = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + f(0)\ . \tag{4.97}$$

Ist die Energie positiv, so schreiben wir sie als α/R und erhalten für f statt (4.89)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \sqrt{\frac{u}{1+u}}\ . \tag{4.98}$$

Parametrisieren wir $u > 0$ analog zu (4.92) durch

$$u = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\varphi - 1) = \operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}\ , \quad u + 1 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\varphi + 1) = \operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2} \tag{4.99}$$

für $\varphi > 0$, so erfüllt $f(u(\varphi))$ die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2}}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\varphi - 1)\ , \tag{4.100}$$

und hat die Lösung

$$f(u(\varphi)) = f(u(0)) + \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\varphi - \varphi)\ . \tag{4.101}$$

Den Kurven $r(t)$ entspricht im expandierenden Universum bei verschwindendem Druck die Zeitentwicklung von Abständen zwischen frei fallenden Galaxien, wobei je nach Massendichte das Universum wieder zusammenstürzt oder sich für immer ausdehnt.

Energie, Impuls und Drehimpuls

Die Wirkung (4.14) des freien, relativistischen Teilchens ist invariant unter Translationen $x^m \mapsto x^m - \alpha^m$. Dazu gehören vier infinitesimale Translationen δ_n , $n = 0, \dots, 3$, die jeweils die zugehörige Koordinate verschieben[8]

$$\delta_n x^m = -\delta^m{}_n\ . \tag{4.102}$$

Die Lagrangefunktion in (4.14) $\mathscr{L} = -m\,c\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})^2}$ ist unter diesen Translationen invariant, die Größe K in den Noether-Ladungen (4.48) ist Null. Die zu Translationen δ_n gehörigen Erhaltungsgrößen sind die vier Komponenten des Viererimpulses[9]

$$p_n = -\frac{\partial}{\partial\dot{x}^n}\mathscr{L} = m\,c\,\frac{\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}s}}{\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})^2}}\ . \tag{4.103}$$

[8]Das Kronecker-Delta ist in (A.29) definiert.

[9]Komponenten mit oberen und unteren Indizes hängen durch $(p^0, p^1, p^2, p^3) = (p_0, -p_1, -p_2, -p_3)$ zusammen.

Der Viererimpuls hängt nicht von der Parametrisierung der Weltlinie ab. Wir wählen $s = t$, und erhalten wegen $x^0 = c\,t$ und $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$ den Viererimpuls (3.45)

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{m\,c}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \ , \quad E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \ , \\ \vec{p} &= \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \ . \end{aligned} \tag{4.104}$$

Die Nullkomponente des Viererimpulses, p^0, ist bis auf einen Faktor c die Energie $E = c\,p^0$. Es ist ja p^0 die Erhaltungsgröße zu Translationen von $x^0 = c\,t$ und E die Erhaltungsgröße, die zu Translationen von t gehört. $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$ ist der räumliche Impuls.

Die Wirkung für N freie Teilchen ist einfach die Summe von Wirkungen (4.14), wobei das i-te Teilchen die Bahnkurve $x_{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, N$, durchläuft

$$W[x_{(1)}, \dots, x_{(N)}] = \sum_{i=1}^{N} -m_i c \int \mathrm{d}s \sqrt{\Big(\frac{\mathrm{d}x_{(i)}}{\mathrm{d}s}\Big)^2} \ . \tag{4.105}$$

Selbstverständlich bleibt der Gesamtimpuls

$$p^m = \sum_{i=1}^{N} p^m_{(i)} \tag{4.106}$$

erhalten, denn schon jeder einzelne Viererimpuls ist wegen fehlender Wechselwirkung der Teilchen eine Erhaltungsgröße. Aber anders als die einzelnen Impulse bleibt der Gesamtimpuls auch bei Wechselwirkung eine Erhaltungsgröße, wenn die Wechselwirkung invariant unter Translationen von Raum und Zeit ist. Dies besagt das Noethertheorem (Seite 67). Wenn man den Beitrag der Wechselwirkung zum Impuls bei weit voneinander entfernten Teilchen vernachlässigen kann, so ist dieser erhaltene Impuls durch die Summe (4.106) der Impulse der einzelnen, genügend weit voneinander entfernten Teilchen gegeben. Daß bei wechselwirkenden Teilchen die Energie und der räumliche Impuls erhalten bleiben, ist in allen relevanten Experimenten und Beobachtungen bestätigt. Gemäß Noethertheorem besagt diese beobachtete Energie- und Impulserhaltung, daß die Wirkung unter Verschiebungen in der Raumzeit invariant ist oder, anschaulicher formuliert, daß kein physikalischer Effekt ein Ereignis als Ursprung in der Raumzeit auszeichnet.

Allerdings bedurfte es einer „verzweifelten Hypothese" von Pauli, der ein Neutrino als zusätzlichen Buchungsposten einführte, um die Energie-Impuls-Bilanz beim Betazerfall auszugleichen. Jahrzehnte später wurde das Neutrino, mittlerweile genauer 3 Arten von Neutrinos, nachgewiesen und seine postulierten Eigenschaften experimentell bestätigt.

Energie- und Impulserhaltung gilt nicht in der Allgemeinen Relativitätstheorie, wenn die Metrik nicht invariant unter Translationen ist. Zum Beispiel kühlt im expandierenden Universum, dessen Metrik zeitabhängig ist, die Hintergrundstrahlung ab, ohne daß die dabei abnehmende Energie woanders erscheint. Der fehlenden Energieerhaltung

entspricht die fehlende Invarianz unter Zeittranslationen: die Zeitentwicklung des Universums zeichnet den Urknall als besonderes Ereignis aus.

Weil Skalarprodukte $x \cdot y = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 = x^k y^l \eta_{kl}$ (2.42)

$$\eta_{kl} = \begin{cases} \ \ 0 & \text{falls} \quad k \neq l \ , \\ \ \ 1 & \text{falls} \quad k = l = 0 \ , \\ -1 & \text{falls} \quad k = l \in \{1,2,3\} \end{cases} \ , \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \ , \tag{4.107}$$

unter Lorentztransformationen $x^k \mapsto \Lambda^k{}_n x^n$ invariant sind, sind die Koeffizienten $\omega^k{}_n$ jeder infinitesimalen Lorentztransformation

$$\delta_\omega x^k = \omega^k{}_n x^n \tag{4.108}$$

multipliziert mit η_{mk} Matrixelemente einer antisymmetrischen Matrix

$$\omega_{mn} = \eta_{mk}\omega^k{}_n = -\omega_{nm} \ . \tag{4.109}$$

Denn für alle x^k und y^l gilt

$$0 = \delta_\omega(x^k y^l \eta_{kl}) = (\delta_\omega x^k y^l + x^k \delta_\omega y^l)\eta_{kl} = (\omega^n{}_k \eta_{nl} + \omega^n{}_l \eta_{kn}) x^k y^l = (\omega_{lk} + \omega_{kl}) x^k y^l \ . \tag{4.110}$$

Hierbei haben wir für die infinitesimalen Transformationen, die Ableitungen nach den Transformationsparametern sind, die Produktregel verwendet.

Weil Lorentztransformationen Skalarprodukte invariant lassen, ist auch die Lagrangefunktion $-m\,c\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})^2}$ (4.14) unter infinitesimalen Lorentztransformationen invariant. Nach dem Noethertheorem gehört zu dieser Invarianz die Erhaltungsgröße

$$Q_\omega = \delta_\omega x^n \frac{\partial}{\partial \dot{x}^n} \mathscr{L} = -\,\omega^n{}_m x^m p_n = \frac{1}{2}\,\omega_{mn}(x^m p^n - x^n p^m) \ . \tag{4.111}$$

Bei der letzten Umformung ist ausgenutzt worden, daß $\omega^n{}_m p_n = \omega_{nm} p^n$ gilt und daß aus (4.109) $\omega_{mn} x^m p^n = -\omega_{nm} x^m p^n = -\omega_{kl} x^l p^k = -\omega_{mn} x^n p^m$ folgt.

Da Q_ω für jedes antisymmetrische ω eine Erhaltungsgröße ist, sind insbesondere

$$M^{mn} = x^m p^n - x^n p^m \ , \quad m, n = 0, 1, 2, 3 \tag{4.112}$$

Erhaltungsgrößen. Es ist $M^{mn} = -M^{nm}$ antisymmetrisch und nur 6 dieser Größen sind unabhängig.

Für $m, n = 1, 2, 3$ handelt es sich um die drei Komponenten des Drehimpulses

$$L_x = x^2p^3 - x^3p^2 \ , \quad L_y = x^3p^1 - x^1p^3 \ , \quad L_z = x^1p^2 - x^2p^1 \ , \quad \vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \ . \tag{4.113}$$

Ebenso wie Translationsinvarianz die Erhaltung von Energie und Impuls von wechselwirkenden Teilchen sichert, so hat Lorentzinvarianz, spezieller Invarianz unter der Untergruppe der Drehungen, die Erhaltung des Drehimpulses zur Folge.

Die Erhaltungsgrößen M^{0j} für $j = 1, 2, 3$ sind die mit der Energie gewichteten Koordinaten des Startpunktes

$$M^{0j} = t\,p^j - x^j\,p^0 = -x^j(0)\,p^0 \ , \tag{4.114}$$

denn die Größen M^{0j} sind zeitunabhängig und können zur Zeit $t = 0$ ausgewertet werden. Summieren wir M^{0j} verschiedener Teilchen, $r = 1, 2\dots$ und verwenden wir, daß diese Summe auch bei wechselwirkenden Teilchen zeitunabhängig ist, so zeigt eine einfache algebraische Umformung den Schwerpunktsatz, daß sich der Energieschwerpunkt

$$\vec{X} = \frac{\sum_r \vec{x}_{(r)}\,p^0_{(r)}}{\sum_r p^0_{(r)}} \tag{4.115}$$

wegen der Energie- und Impulserhaltung gradlinig gleichförmig mit konstanter Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$\vec{V} = \frac{\sum_r \vec{p}_{(r)}}{\sum_r p^0_{(r)}} \tag{4.116}$$

bewegt,

$$\sum_r (t\,\vec{p}_{(r)} - \vec{x}_{(r)}\,p^0_{(r)}) = -\sum_r \vec{x}_{(r)}(0)\,p^0_{(r)} \Leftrightarrow \vec{X}(t) = \vec{V}t + \vec{X}(0) \ . \tag{4.117}$$

Unter Poincaré-Transformationen $x' = \Lambda x + a$ transformieren die Erhaltungsgrößen $M^{mn} = \sum_r (x^m_{(r)}\,p^n_{(r)} - x^n_{(r)}\,p^m_{(r)})$ und $p^k = \sum_r p^k_{(r)}$ reduzibel

$$\begin{aligned} M'^{\,mn} &= \Lambda^m{}_k\,\Lambda^n{}_l\,M^{kl} + (a^m\Lambda^n{}_l - a^n\Lambda^m{}_l)\,p^l \ , \\ p'^{\,k} &= \Lambda^k{}_l\,p^l \ , \end{aligned} \tag{4.118}$$

denn der Unterraum $p^k = 0$ wird auf sich abgebildet, aber nicht vollständig reduzibel, denn es gibt keinen komplementären Unterraum, der ebenfalls auf sich abgebildet wird.

Die Transformation des Drehimpulses unter Translationen, $\vec{L}' = \vec{L} + \vec{a} \times \vec{p}$, ist der Satz von Steiner.

5 Elektrodynamik

5.1 Kovariante Maxwellgleichungen

Elektrische und magnetische Felder $\vec{E}(x)$ und $\vec{B}(x)$ verändern durch die Lorentzkraft

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}}(x, \vec{v}) = q\big(\vec{E}(x) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(x)\big) \tag{5.1}$$

den Impuls $\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$ (4.104) und damit die Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Probeteilchens mit Ladung q, das zur Zeit t den Ort $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ durchläuft,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} \ . \tag{5.2}$$

In (5.1) faßt der Vierervektor $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ mit $x^0 = ct$ die Orts- und Zeitkoordinaten zusammen. Das Magnetfeld $\vec{B}$ hat dieselbe Dimension wie das elektrische Feld $\vec{E}$.

Die elektromagnetischen Felder hängen mit der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte $\vec{\jmath}$ durch die Maxwellgleichungen zusammen,

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \ , \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \ , \tag{5.3}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \ , \qquad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} \ . \tag{5.4}$$

Schreibt man für die partiellen Ableitungen nach den Raumzeitkoordinaten

$$\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0} \ , \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \ , \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} \ , \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} \ , \tag{5.5}$$

so lauten die homogenen Maxwellgleichungen (5.3)

$$\begin{aligned} \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 &= 0 \ , \\ \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \partial_0 B^1 &= 0 \ , \\ \partial_3 E^1 - \partial_1 E^3 + \partial_0 B^2 &= 0 \ , \\ \partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 + \partial_0 B^3 &= 0 \ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Wir deuten die Feldstärken als die sechs Komponenten eines antisymmetrischen Tensors, des Feldstärketensors [1]

$$F_{mn} = -F_{nm} \ , \quad m, n \in \{0, 1, 2, 3\} \ , \quad F_{0i} = E^i \ , \ F_{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k \ , \tag{5.7}$$

[1] Die Indizes i, j, k haben Werte aus $\{1, 2, 3\}$. ε^{ijk} ist total antisymmetrisch, $\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik} = -\varepsilon^{ikj}$. Es verschwindet also, wenn zwei der Indizes gleiche Werte annehmen. ε^{ijk} ist 1, falls i, j, k eine gerade Permutation von $1, 2, 3$ ist, und -1 bei einer ungeraden Permutation: $\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} = 1$, $\varepsilon^{213} = \varepsilon^{321} = \varepsilon^{132} = -1$. Wir verwenden die Einsteinsche Summationskonvention. Jeder in einem Term doppelt vorkommende Index enthält die Anweisung, über seinen Laufbereich zu summieren.

dessen Komponenten wir der Übersichtlichkeit wegen in einer Matrix angeben

$$\begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.8}$$

Dann haben die homogenen Maxwellgleichungen die Form

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} &= 0 , \\ \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} &= 0 , \\ \partial_3 F_{01} + \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} &= 0 , \\ \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} &= 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

und können in Indexschreibweise kurz als

$$\partial_l F_{mn} + \partial_m F_{nl} + \partial_n F_{lm} = 0 \tag{5.10}$$

geschrieben werden. Die linke Seite dieser Gleichungen ändert wegen $F_{mn} = -F_{nm}$ unter jeder Paarvertauschung von Indizes ihr Vorzeichen, sie ist also total antisymmetrisch unter Permutationen der Indizes. Die Gleichungen (5.10) bestehen nicht aus $4 \cdot 4 \cdot 4$ unabhängigen Komponentengleichungen, wie man bei drei Indizes l, m und n und einem Laufbereich über vier Werte vermuten könnte, sondern l, m und n müssen in einer nichttrivialen Gleichung paarweise verschieden sein und ihre Permutation führt nicht auf eine neue Gleichung. Daher enthält (5.10) $4 \cdot 3 \cdot 2 / 3! = 4$ unabhängige Gleichungen.

Die inhomogenen Maxwellgleichungen (5.4) lauten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 &= \frac{4\pi}{c} c\rho , \\ -\partial_0 E^1 + \partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 &= \frac{4\pi}{c} j^1 , \\ -\partial_0 E^2 + \partial_3 B^1 - \partial_1 B^3 &= \frac{4\pi}{c} j^2 , \\ -\partial_0 E^3 + \partial_1 B^2 - \partial_2 B^1 &= \frac{4\pi}{c} j^3 \end{aligned} \tag{5.11}$$

oder, wenn wir die elektrischen und magnetischen Felder als Komponenten des Feldstärketensors schreiben und zur Betonung der Struktur verschwindende Terme wie $\partial_0 F_{00}$ einfügen

$$\begin{aligned} \partial_0 F_{00} - \partial_1 F_{10} - \partial_2 F_{20} - \partial_3 F_{30} &= \frac{4\pi}{c} c\rho , \\ -\partial_0 F_{01} + \partial_1 F_{11} + \partial_2 F_{21} + \partial_3 F_{31} &= \frac{4\pi}{c} j^1 , \\ -\partial_0 F_{02} + \partial_1 F_{12} + \partial_2 F_{22} + \partial_3 F_{32} &= \frac{4\pi}{c} j^2 , \\ -\partial_0 F_{03} + \partial_1 F_{13} + \partial_2 F_{23} + \partial_3 F_{33} &= \frac{4\pi}{c} j^3 . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Das Minuszeichen bei den Komponenten F_{01}, F_{02} und F_{03} gehört zur Definition der Komponenten des Feldstärketensors mit oberen Indizes[2]

$$F^{mn} = \eta^{mk}\eta^{nl} F_{kl} , \quad F^{00} = F_{00} , \quad F^{0i} = -F_{0i} , \quad F^{i0} = -F_{i0} , \quad F^{ij} = F_{ij} , \tag{5.13}$$

$$\begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.14}$$

Damit haben die inhomogenen Maxwellgleichungen die Form

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \frac{4\pi}{c} c\rho , \\ \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \frac{4\pi}{c} j^1 , \\ \partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} &= \frac{4\pi}{c} j^2 , \\ \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} + \partial_3 F^{33} &= \frac{4\pi}{c} j^3 . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Lesen wir $j^0 = c\rho$ als Komponente der Viererstromdichte $j = (j^0, j^1, j^2, j^3)$, so lauten die inhomogenen Maxwellgleichungen in Indexschreibweise

$$\partial_m F^{mn} = \frac{4\pi}{c} j^n . \tag{5.16}$$

5.2 Lokale Ladungserhaltung

Weil $F^{mn} = -F^{nm}$ antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes ist und weil zweifache partielle Ableitung, wenn sie stetig ist, nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängt, $\partial_n \partial_m = \partial_m \partial_n$, verschwindet die Doppelsumme $\partial_n \partial_m F^{mn}$.

Denn es gilt allgemein, daß eine Doppelsumme über ein symmetrisches und ein antisymmetrisches Indexpaar verschwindet

$${T_{rs}}^{mn} = -{T_{rs}}^{nm} = {T_{sr}}^{mn} \ \Rightarrow \ {T_{kl}}^{kl} = 0 . \tag{5.17}$$

Der Sachverhalt gilt, egal ob ${T_{rs}}^{mn} = S_{rs} A^{mn}$ aus Produkten zusammengesetzt ist oder ob die Indizes Differentationen benennen ${T_{rs}}^{mn} = \partial_r \partial_s F^{mn}$ oder ob die Koeffizienten ${T_{rsa_3 \dots a_u}}^{mnb_3 \dots b_o}$ weitere Indizes haben. Die Doppelsumme verschwindet, weil sie nach Permutieren und Umbenennen der Summationsindizes ihrem Negativen gleich ist,

$${T_{kl}}^{kl} = {T_{lk}}^{kl} = -{T_{lk}}^{lk} = -{T_{lm}}^{lm} = -{T_{km}}^{km} = -{T_{kl}}^{kl} . \tag{5.18}$$

Eine einfache Folge dieser Überlegungen ist, daß die Doppelsumme $T_{mn} S^{mn}$ über ein symmetrischen Indexpaar $S^{mn} = S^{nm}$ in den Summationsindizes symmetrisiert,

$$T_{mn} S^{mn} = \frac{1}{2}(T_{mn} + T_{nm}) S^{mn} , \tag{5.19}$$

[2] η^{mn} sind die Matrixelemente der zu η inversen Matrix. Sie stimmen mit η_{mn} (4.107) überein.

denn $T_{mn} = (T_{mn} + T_{nm})/2 + (T_{mn} - T_{nm})/2$ kann als Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Teils $(T_{mn} - T_{nm})/2 = -(T_{nm} - T_{mn})/2$ geschrieben werden.

Beispielsweise ist $\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}$ symmetrisch unter Vertauschung von m und n. Zum Längenquadrat eines Tangentialvektors $\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda}g_{mn}$ trägt daher nur der symmetrische Teil von g_{mn} bei, weshalb man ohne Einschränkung $g_{mn} = g_{nm}$ voraussetzen kann.

Wenden wir ∂_n auf (5.16) an, so erhalten wir $\partial_n\partial_m F^{mn} = \frac{4\pi}{c}\partial_n j^n$. Die linke Seite ist eine Doppelsumme über ein symmetrisches und ein antisymmetrisches Indexpaar und verschwindet wegen (5.17). Sie ist der Viererdivergenz $\partial_n j^n = \partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3$ des Viererstroms gleich

$$\partial_n j^n = 0 \ . \tag{5.20}$$

In Ladungs- und Stromdichte ausgedrückt ist dies die Kontinuitätsgleichung

$$\dot\rho + \operatorname{div}\vec\jmath = 0 \ . \tag{5.21}$$

Die Kontinuitätsgleichung schränkt denkbare Quellen ρ und $\vec\jmath$ für elektromagnetische Felder ein. Es können in den Maxwellgleichungen nur solche Ladungs- und Stromdichten auftreten, die der Kontinuitätsgleichung und damit lokaler Ladungserhaltung genügen.

Lokale Ladungserhaltung besagt mehr, als daß die Gesamtladung erhalten ist. Mit Erhaltung der Gesamtladung wäre auch der nie beobachtete Vorgang verträglich, daß Ladung im Labor verschwindet und gleichzeitig am anderen Ende der Welt wieder erscheint. Lokale Ladungserhaltung besagt, daß sich die Ladung in jedem Volumen V, das man zeitlich unverändert abgegrenzt hat, nur dadurch im Laufe der Zeit ändert, daß durch die Oberfläche ∂V (lies „Rand von V") Ströme fließen, deren Bilanz nicht ausgeglichen ist. Dies folgert man aus der Kontinuitätsgleichung durch Integration über das Volumen V mit dem Gaußschen Integralsatz

$$Q_V(t) = \int_V \mathrm{d}^3x\, \rho(t,\vec x) \ , \tag{5.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_V(t) = \int_V \mathrm{d}^3x\, \dot\rho = -\int_V \mathrm{d}^3x\, \operatorname{div}\vec\jmath = -\oint_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec f\, \vec\jmath \ . \tag{5.23}$$

Insbesondere kann zu keiner Zeit eine einzelne Punktladung aus dem Vakuum entstehen.

5.3 Energie und Impuls

Zu elektromagnetischen Feldstärken gehören Energiedichte, Energieströme, Impulsdichten und Impulsströme, die sich zu Komponenten T^{kl} des Energie-Impulstensors zusammenfassen lassen[3]

$$T^{kl} = -\frac{1}{4\pi c}\big(F^k{}_n F^{ln} - \frac{1}{4}\eta^{kl}F_{mn}F^{mn}\big) \ . \tag{5.24}$$

Der Energie-Impulstensor ist symmetrisch und spurfrei

$$T^{kl} = T^{lk} \ , \quad \eta_{kl}T^{kl} = 0 \ . \tag{5.25}$$

[3] Wir ziehen mit η Indizes hoch und runter (B.55), zum Beispiel sind $F^k{}_n = \eta^{kr}F_{rn}$ und $T_k{}^l = \eta_{kn}T^{nl}$.

Für jeden Wert des Index k sind T^{kl} vier Komponenten eines Viererstromes, der in Abwesenheit von elektrischen Ladungs- und Stromdichten erhalten bleibt

$$\partial_l T^{kl} = -\frac{1}{c^2}F^k{}_n j^n \ . \tag{5.26}$$

Zur Bestätigung berechnen wir $-4\pi c\, \partial_l T_k{}^l$

$$\begin{aligned}\partial_l\big(F_{kn}F^{ln} - \frac{1}{4}\delta^l_k F_{mn}F^{mn}\big) &= (\partial_l F_{kn})F^{ln} + F_{kn}\partial_l F^{ln} - \frac{1}{2}(\partial_k F_{mn})F^{mn}\\ &= \frac{1}{2}\big(\partial_l F_{kn} - \partial_n F_{kl} - \partial_k F_{ln}\big)F^{ln} + F_{kn}\partial_l F^{ln} = \frac{4\pi}{c}F_{kn}j^n \ .\end{aligned} \tag{5.27}$$

Dabei haben wir $\eta_{kn}\eta^{nl} = \delta^l_k$ (A.108) verwendet und ausgenutzt, daß die Doppelsumme mit $F^{ln} = -F^{nl}$ in den Indizes l und n antisymmetrisiert, daß also

$$2F^{ln}\partial_l F_{kn} = F^{ln}\big(\partial_l F_{kn} - \partial_n F_{kl}\big) + F^{ln}\big(\partial_l F_{kn} + \partial_n F_{kl}\big) = F^{ln}\big(\partial_l F_{kn} - \partial_n F_{kl}\big)$$

gilt, weil die Doppelsumme über ein symmetrisches und ein antisymmetrisches Indexpaar verschwindet (5.17). Zudem haben wir die homogenen (5.10) und inhomogenen (5.16) Maxwellgleichungen eingesetzt.

Wenn die Ladungs- und Stromdichte verschwindet, dann besteht der Energie-Impulstensor aus Komponenten von vier erhaltenen Strömen (5.26). Die Nullkomponenten T^{k0} sind Dichten, deren räumliches Integral

$$P^k = \int \mathrm{d}^3x\, T^{k0}(x) \tag{5.28}$$

zeitunabhängig ist (5.22), wenn das Integrationsvolumen so groß gewählt ist, daß die Ströme T^{ki}, $i \in \{1,2,3\}$, durch den Rand verschwinden. Die Erhaltungsgrößen gehören, wie wir bei (5.220) sehen werden, zur Invarianz der Wirkung unter Translationen der Zeit und des Ortes und sind daher die Komponenten des Viererimpulses $P = (E/c, P^1, P^2, P^3)$. Also sind die Komponenten $T^{k0}(x)$ die durch c geteilte Energiedichte für $k = 0$ und die Impulsdichten für $k = 1, 2, 3$. Wir schreiben sie mit (5.8, 5.13) als quadratischen Ausdruck im elektrischen und magnetischen Feld[4]

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi c}\big(\vec E^2 + \vec B^2\big) \ , \quad E = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x\, \big(\vec E^2 + \vec B^2\big) \ , \tag{5.29}$$

$$T^{i0} = \frac{1}{4\pi c}\varepsilon^{ijk}E^jB^k \ , \quad P^i = \frac{1}{4\pi c}\int \mathrm{d}^3x\, \varepsilon^{ijk}E^jB^k \ . \tag{5.30}$$

Das elektromagnetische Feld hat die Energiedichte $u = \frac{1}{8\pi}\big(\vec E^2 + \vec B^2\big)$. Sie ist nicht negativ und verschwindet nur, wenn die Feldstärke verschwindet. Der Poyntingvektor

$$\vec S = \frac{c}{4\pi}\vec E \times \vec B \tag{5.31}$$

[4] Die Indizes i, j, k nehmen hier Werte aus $\{1,2,3\}$ an, E bezeichnet die Feldenergie und nicht den Betrag von $\vec E$.

ist die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes. Wegen $T^{0i} = T^{i0}$ (5.25) ist die Impulsdichte der durch c^2 geteilten Energiestromdichte gleich.

In Anwesenheit von elektrischer Ladungs- und Stromdichte sind Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes wegen (5.26) nicht erhalten,

$$\partial_t \frac{1}{8\pi}\big(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\big) + \operatorname{div}\vec{S} = -\vec{E}\cdot\vec{\jmath}\ , \tag{5.32}$$

$$\partial_t \frac{S^i}{c^2} + \partial_j T^{ij} = -E^i\rho - \frac{1}{c}\varepsilon^{ijk}B^k j^j\ , \tag{5.33}$$

$$\text{mit}\quad T^{ij} = -\frac{1}{4\pi}\big(E^iE^j + B^iB^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}\big(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\big)\big)\ , \tag{5.34}$$

sondern können mit geladenen Teilchen ausgetauscht werden. Wenn der Gesamtimpuls von Teilchen und elektromagnetischem Feld erhalten ist, muß $\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{\jmath}\times\vec{B}$ die zeitliche Zunahme der Impulsdichte der Ladungsträger sein, und $\vec{\jmath}\cdot\vec{E}$ ist die Zunahme ihrer Energiedichte.

Für den Impuls $\vec{p}$ und die Energie E_{Teilchen} eines Punktteilchens mit Ladung q, das die Kurve $\vec{x}(t)$ durchläuft und die Ladungsdichte $\rho(t,\vec{z}) = q\,\delta^3(\vec{z}-\vec{x}(t))$ und die Stromdichte $\vec{\jmath}(t,\vec{z}) = q\,\dot{\vec{x}}\,\delta^3(\vec{z}-\vec{x}(t))$ hat (5.235), gilt also

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\,\big(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\big)\ ,\quad \frac{\mathrm{d}E_{\text{Teilchen}}}{\mathrm{d}t} = q\,\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{E}\ . \tag{5.35}$$

Aus Energie- und Impulserhaltung und den Maxwellgleichungen folgen also die Lorentzkraft (5.1) und die relativistische Bewegungsgleichung geladener Punktteilchen (5.2). Die Energie des Teilchens ändert sich durch die Arbeit, die das elektrische Feld an ihm verrichtet, das Magnetfeld ändert die Teilchenenergie nicht.

Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet

Die elektrodynamischen Feldstärken zur Zeit $t > 0$ am Ort $\vec{x}$ hängen nur von den Ladungen und Strömen und Anfangswerten zur Zeit $t = 0$ im Abhängigkeitsgebiet G ab, das vom Rückwärtslichtkegel von $(t,\vec{x})$ und der raumartigen Anfangsfläche A berandet wird, die vom Rückwärtslichtkegel aus der Schicht $t = 0$ ausgeschnitten wird [20, Kapitel VI, §4],

$$G = \{(t',\vec{y}) : 0 \le t' \le t\ ,\ |\vec{x}-\vec{y}| \le t - t'\}\ ,\quad A = \{(0,\vec{y}) : |\vec{x}-\vec{y}| \le t\}\ . \tag{5.36}$$

Stimmen nämlich bei zwei Lösungen die Ladungen und Ströme in G überein und sind die anfänglichen Werte der Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bei beiden Lösungen auf der Anfangsfläche A gleich, so erfüllt die Differenz beider Lösungen die Maxwellgleichungen mit Ladungen und Strömen, die in G verschwinden und mit Anfangswerten, die ebenfalls verschwinden. Solch eine Lösung muß aber, wie wir jetzt zeigen, in G verschwinden.

Zum Beweis bemerken wir, daß in Maßsystemen mit $c = 1$ die Energiedichte u nirgends kleiner ist als der Betrag der Energiestromdichte $\vec{S}$,

$$u = \frac{1}{8\pi}\big(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\big) \ge \frac{1}{4\pi}|\vec{E}\times\vec{B}| = |\vec{S}|\ , \tag{5.37}$$

denn wegen $(|\vec{E}| - |\vec{B}|)^2 \ge 0$ gilt $(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) \ge 2|\vec{E}|\,|\vec{B}|$, zudem ist $|\vec{E}|\,|\vec{B}| \ge |\vec{E}\times\vec{B}|$.

Daher ist $w_m T^{m0}$ für alle zukunftsgerichtete, zeitartige Vektoren w,

$$w_0 > 0\ ,\ w^2 > 0\ , \tag{5.38}$$

nicht negativ und verschwindet nur, wenn die Feldstärken verschwinden,

$$w_m T^{m0} \ge 0\ ,\quad w_m T^{m0} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = 0 = \vec{B}\ . \tag{5.39}$$

Denn (w_0, w_1, w_2, w_3) hat die Form $w_0\,(1, a\,n_1, a\,n_2, a\,n_3)$, wobei $|a| < 1$ und (n_1, n_2, n_3) die Komponenten eines dreidimensionalen Einheitsvektors sind, und in der Abschätzung

$$w_m T^{m0} = w_0\,(u + a\,\vec{n}\cdot\vec{S}) \ge w_0\,(u - |a||\vec{S}|) \ge w_0\,(1-|a|)\,u \ge 0 \tag{5.40}$$

gilt wegen $|a| < 1$ Gleichheit nur für $u = (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)/(8\pi) = 0$.

Betrachten wir nun einen inneren Punkt $(t',\vec{y})$ des Abhängigkeitsgebietes G. Er liegt in einer raumartigen Schicht

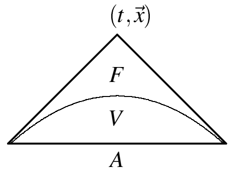

Abbildung 5.1: Abhängigkeitsgebiet G

$$F = \{(t(\vec{y}),\vec{y}) : t(\vec{y}) \ge 0\ , \vec{y}\in A\}\ , \tag{5.41}$$

die zusammen mit der Anfangsfläche A ein Gebiet $V \subset G$ berandet. Da F überall raumartig ist, gilt dort $\partial_i t\,\partial_i t < 1$. Integrieren wir $\partial_m T^{m0}$ über V, so verschwindet das Integral, weil der Integrand bei verschwindenden Stromdichten j^m Null ist (5.26),

$$\int_V \mathrm{d}^4x\,\partial_m T^{m0} = 0\ . \tag{5.42}$$

Das Integral ist nach dem Gaußschen Satz dem Integral über die Randflächen A und F gleich, wobei aber A nicht beiträgt, da die Anfangswerte verschwinden. Folglich verschwindet das Integral über F

$$\int_A \mathrm{d}^3y\,\big(T^{00}(t(\vec{y}),\vec{y}) - \partial_i t(\vec{y})\,T^{i0}(t(\vec{y}),\vec{y})\big) = 0\ . \tag{5.43}$$

Da aber $w = (1, -\partial_x t, -\partial_y t, -\partial_z t)$ [5] überall auf F zukunftsgerichtet und zeitartig ist, ist der Integrand nicht negativ und das Integral verschwindet nur, falls $\vec{E}$ und $\vec{B}$ überall auf F verschwinden. Demnach verschwinden die Feldstärken im betrachteten Punkt $(t',\vec{y})$, und, da er beliebig gewählt war, im Inneren des Abhängigkeitsgebietes G. Da sie stetig sind, verschwinden die Feldstärken dann in ganz G.

Zusammen genommen und leicht verallgemeinert zeigt dies: jede Lösung der Maxwellgleichungen ist bei Vorgabe der Ladungs- und Stromdichten eindeutig durch die Anfangswerte auf einer raumartigen Fläche A bestimmt. Für $t > 0$ hängen die Feldstärken am Punkt $(t,\vec{x})$ nur von den Anfangswerten auf dem Flächenstück von A ab, das

[5] Der duale Vektor w, angewendet auf Tangentialvektoren $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}$ an Kurven, die in F verlaufen, verschwindet, $w_m v^m = \frac{\mathrm{d}t(x(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda} - \partial_i t(x(\lambda))\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} = 0$. In diesem Sinn steht w senkrecht auf den Tangentialvektoren v an F.

im Rückwärtslichtkegel von $(t,\vec{x})$ liegt, und von den Ladungs- und Stromdichten in dem Gebiet G, das vom Rückwärtslichtkegel und dem Flächenstück berandet wird.

Für $t<0$ gilt Entsprechendes für den Vorwärtslichtkegel.

Räumlich beschränkte Änderungen der Anfangsbedingungen oder der Ladungs- und Stromdichten wirken sich daher höchstens mit Lichtgeschwindigkeit aus.

5.4 Die elektrodynamischen Potentiale

Das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen, statischen Ladungsverteilung folgt aus dem Gaußschen Integralsatz und dem naheliegenden Ansatz, daß das $\vec{E}$-Feld zeitunabhängig und radial gerichtet ist [6]

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}E(|\vec{x}|)\,. \tag{5.44}$$

Den Betrag $E(r)$ des elektrischen Feldes bestimmt man, indem man $\operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho$ (5.4) über eine Kugel K_r um den Ursprung mit Radius r integriert. Die linke Seite formt man mit dem Gaußschen Integralsatz in ein Integral über die Kugeloberfläche ∂K_r um. Auf der Kugeloberfläche ist die nach außen gerichtete Flächennormale $\mathrm{d}^2\vec{f}$ parallel zur Richtung des $\vec{E}$-Feldes, das Skalarprodukt $\mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\vec{E}$ ist also gleich dem Produkt der Beträge. Der Betrag des elektrischen Feldes ist auf der Kugeloberfläche konstant und kann vor das Integral gezogen werden, das die Größe $4\pi r^2$ der Kugeloberfläche ergibt. Das Integral auf der linken Seite hat also den Wert $4\pi r^2E(r)$,

$$\int_{K_r}\mathrm{d}^3x\ \operatorname{div}\vec{E}(x)=\oint_{\partial K_r}\mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\vec{E}(x)=\oint_{\partial K_r}\mathrm{d}^2f\,E(r)=4\pi\,r^2E(r)=4\pi\int_{K_r}\mathrm{d}^3x\,\rho(x)\,. \tag{5.45}$$

Auf der rechten Seite ergibt das Integral über ρ die Ladung $Q(r)$, die in der Kugel K_r eingeschlossen ist, daher gilt

$$E(r)=\frac{Q(r)}{r^2}\,. \tag{5.46}$$

Bei einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung wirken sich auf eine Probeladung am Ort $\vec{x}$ nur die Ladungen aus, die innerhalb der Kugel mit Radius $|\vec{x}|$ sind. Die Kraft $\vec{F}=q\vec{E}$ ist abstoßend, wenn die Ladungen q und $Q(r)$ gleiches Vorzeichen haben.

Innerhalb einer homogen geladenen Kugel mit Radius R verhält sich $Q(r)$ zur Gesamtladung Q wie das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ zum Gesamtvolumen $\frac{4}{3}\pi R^3$, $Q(r)=\frac{r^3}{R^3}Q$. Demnach gilt für eine homogen geladene Kugel

$$E(r)=\begin{cases}\frac{Q}{R^3}\,r\,, & \text{falls } r<R\\ Q\,\frac{1}{r^2}\,, & \text{falls } r\geq R\,.\end{cases} \tag{5.47}$$

Im Inneren einer homogen geladenen Kugel wirkt auf entgegengesetzt geladene Probeteilchen dieselbe mit dem Abstand linear anwachsende, anziehende Kraft wie auf einen

[6] Unglücklicherweise beginnen „Energie“ und „elektrische Feldstärke“ mit demselben Buchstaben. Wir bezeichnen hier den Betrag der elektrischen Feldstärke mit E und hoffen, daß dies nicht verwirrt.

kugelsymmetrischen harmonischen Oszillator. Ihre Bahnen sind Ellipsen, deren Mittelpunkt anders als bei Keplerellipsen im Ursprung liegt.

Das elektrostatische Feld läßt sich als Gradient eines Potentials $\phi(\vec{x})$ schreiben und erfüllt daher auch die restlichen Maxwell-Gleichungen mit $\vec{B}=0$ und $\vec{\jmath}=0$

$$\vec{E}=-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi\,,\quad \phi(\vec{x})=\begin{cases}-\frac{Q}{2R^3}\vec{x}^{\,2}+\frac{3Q}{2R}\,, & \text{falls } |\vec{x}|<R\\ Q\,\frac{1}{|\vec{x}|}\,, & \text{falls } |\vec{x}|\geq R\,.\end{cases} \tag{5.48}$$

Poisson-Gleichung

Insbesondere ist das Potential außerhalb eines Punktteilchens mit Ladung q, das im Ursprung ruht, das Coulomb-Potential $\phi(\vec{x})=\frac{q}{|\vec{x}|}$. Befindet sich das Teilchen bei $\vec{y}$, so gehört dazu das verschobene Potential $\phi(\vec{x})=\frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|}$, denn die Maxwellgleichungen sind verschiebungsinvariant und verschobene Felder gehören zu verschobenen Ladungen.

Das Potential mehrerer ruhender Punktladungen erhält man als Summe der Potentiale der einzelnen Ladungen, denn die Maxwellgleichungen sind linear inhomogen

$$\phi(\vec{x})=\sum_i\frac{q_i}{|\vec{x}-\vec{y}_i|}\,. \tag{5.49}$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{y})$ geht dies in die kontinuierliche Summe über, nämlich in das Integral über das ladungserfüllte Volumen V

$$\phi(\vec{x})=\int_V\mathrm{d}^3y\,\frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,. \tag{5.50}$$

Dieses Potential erfüllt wegen $\vec{E}=-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi$, $\operatorname{div}\vec{E}=4\pi\,\rho$, die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi=-4\pi\rho\,. \tag{5.51}$$

Hierbei ist Δ der Laplace-Operator

$$\Delta=\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}={\partial_1}^2+{\partial_2}^2+{\partial_3}^2\,. \tag{5.52}$$

Um zu zeigen, daß (5.50) die Poisson-Gleichung löst, schneiden wir [67] aus dem Integrationsgebiet V eine Kugel K_ε um $\vec{y}$ mit Radius ε heraus, $V_\varepsilon=V-K_\varepsilon$, und betrachten den Grenzfall $\varepsilon\to 0$. Da $1/|\vec{x}-\vec{y}|$ in V_ε differenzierbar ist und dort $\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}=0$ erfüllt, gilt in V_ε

$$I_\varepsilon(\vec{y})=\int_{V_\varepsilon}\mathrm{d}^3x\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\Delta\phi(\vec{x})=\int_{V_\varepsilon}\mathrm{d}^3x\,\Big(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\Delta\phi(\vec{x})-\big(\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\big)\,\phi(\vec{x})\Big)\,. \tag{5.53}$$

Der Integrand ist eine Summe von Ableitungstermen

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\Delta\phi(\vec{x})-\big(\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\big)\,\phi(\vec{x})=\partial_i\Big(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,\partial_i\phi(\vec{x})-\big(\partial_i\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\big)\,\phi(\vec{x})\Big)\,.$$

Daher ist nach dem Gaußschen Satz

$$\begin{aligned}I_\varepsilon(\vec y) &= \int_{\partial V_\varepsilon} \mathrm{d}^2\vec f \cdot \Bigl(\frac{1}{|\vec x - \vec y|}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(\vec x) - \bigl(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{1}{|\vec x - \vec y|}\bigr)\,\phi(\vec x)\Bigr)\\ &= \int_{\partial V_\varepsilon} \mathrm{d}^2\vec f \cdot \Bigl(\frac{1}{|\vec x - \vec y|}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(\vec x) + \frac{\vec x - \vec y}{|\vec x - \vec y|^3}\,\phi(\vec x)\Bigr)\ .\end{aligned}\tag{5.54}$$

Der Rand von V_ε besteht aus dem Rand von V und der Kugelfläche $\partial \mathrm{K}_\varepsilon$, $\partial V_\varepsilon = \partial V + \partial K_\varepsilon$. Dabei ist zu beachten, daß der Normalenvektor $\mathrm{d}^2\vec f = \mathrm{d}^2 f\,\vec n$ beim Flächenintegral (5.54) aus V_ε heraus in die Kugel K_ε um $\vec y$ hinein zeigt. Auf der Kugelfläche $\partial \mathrm{K}_\varepsilon$ gilt

$$\frac{1}{|\vec x - \vec y|} = \frac{1}{\varepsilon}\,,\quad \frac{\vec x - \vec y}{|\vec x - \vec y|^3} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\,\vec n\ .\tag{5.55}$$

Das Integral über den ersten Term verschwindet im Grenzfall $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \mathrm{d}^2\vec f \cdot \frac{1}{|\vec x - \vec y|}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(\vec x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial K_\varepsilon} \mathrm{d}^2\vec f \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(\vec x) \longrightarrow 0\ ,\tag{5.56}$$

denn nach dem Integralmittelwertsatz ist es gleich einem Wert von $(\vec n \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi)$ an einer Stelle der Kugelfläche mal der Größe der Kugeloberfläche $4\pi\varepsilon^2$ geteilt durch ε.

Im zweiten Term des Integranden ist das Skalarprodukt das Negative des Produkts der Beträge. Nach dem Mittelwertsatz gilt für eine Zwischenstelle $\vec z$ auf der Kugelfläche ∂K_ε

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \mathrm{d}^2\vec f\,\frac{\vec x - \vec y}{|\vec x - \vec y|^3}\,\phi(\vec x) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial K_\varepsilon} \mathrm{d}^2 f\,\phi(\vec x) = -\frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\phi(\vec z)\ .\tag{5.57}$$

Da $\vec z$ für ε gegen Null gegen den Mittelpunkt $\vec y$ von K_ε strebt, geht das Integral über ∂K_ε dabei gegen $-4\pi\phi(\vec y)$.

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{|\vec x - \vec y|}\,\Delta\phi(\vec x) = \int_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec f \cdot \Bigl(\frac{1}{|\vec x - \vec y|}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(\vec x) + \frac{\vec x - \vec y}{|\vec x - \vec y|^3}\,\phi(\vec x)\Bigr) - 4\pi\phi(\vec y)\tag{5.58}$$

und nach $\phi(\vec y)$ aufgelöst

$$\phi(\vec y) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3x\,\frac{\Delta\phi(\vec x)}{|\vec x - \vec y|} + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec f \cdot \Bigl(\frac{1}{|\vec x - \vec y|}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(\vec x) + \frac{\vec x - \vec y}{|\vec x - \vec y|^3}\,\phi(\vec x)\Bigr)\ .\tag{5.59}$$

Jede in V zweifach stetig differenzierbare Funktion ϕ ist durch $\Delta\phi$ und ihre Randwerte auf ∂V festgelegt.

Da für eine räumlich beschränkte Ladungsverteilung das elektrostatische Potential (5.50) für große Abstände verschwindet und sein Gradient schneller als $1/r$ gegen Null geht, verschwinden in (5.59), wenn man $V = \mathbb{R}^3$ wählt, die Randterme. Dann löst (5.50) für inselförmige Ladungsverteilungen die Poisson-Gleichung mit verschwindenden Randwerten.

Harmonische Funktionen

Harmonisch nennt man Funktionen φ eines Gebietes V, die die Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi = 0\tag{5.60}$$

erfüllen. Beispielsweise ist das elektrostatische Potential im ladungsfreien Raum harmonisch. Für harmonische Funktionen φ verschwindet nach Gaußschem Satz das Flächenintegral über die Randfläche von V über die Normalenableitung (es ergibt ja die in V enthaltene Ladung),

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec f \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi = \int_V \mathrm{d}^3x\,\partial_i\partial_i\varphi = 0\ .\tag{5.61}$$

Für einen inneren Punkt $\vec y$ im Gebiet V betrachten wir eine Kugel $K_{R,\vec y} \subset V$ um $\vec y$ mit einem Radius R. Die Darstellung (5.59) zweifach stetig differenzierbarer Funktionen gilt auch für $V = K_{R,\vec y}$. Dabei verschwindet, weil φ in $K_{R,\vec y}$ harmonisch ist, das Volumenintegral und nach (5.61) auch das Oberflächenintegral über die Normalenableitung von φ, denn sie wird mit einem konstanten Faktor $1/R$ integriert. Es verbleibt der Mittelwert $M_{R,\vec y}[\varphi]$ von φ auf der Kugelfläche um $\vec y$ mit Radius R

$$\varphi(\vec y) = M_{R,\vec y}[\varphi] = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{\partial K_{R,\vec y}} \mathrm{d}^2 f\,\varphi(\vec x)\ .\tag{5.62}$$

Da die harmonische Funktion $\varphi(\vec y)$ gleich ihrem Mittelwert auf umhüllenden Kugelflächen ist, nimmt sie ihr Minimum und Maximum auf dem Rand jedes Gebietes V an, in dem sie harmonisch ist. Insbesondere hat ein elektrostatisches Potential im ladungsfreien Gebiet keine Mulde, es gibt keine elektrostatische Falle für geladene Teilchen.

Eine leitende Oberfläche ist nach Abklingen aller Ströme eine Äquipotentialfläche. Umschließt sie ein ladungsfreies Gebiet, so ist das Potential auch im Inneren konstant, denn es hat Werte zwischen dem Minimum und Maximum, das auf dem Rand angenommen wird. Folglich verschwindet in einem Faraday-Käfig die elektrische Feldstärke.

Verschwindet auf ∂V die Normalenableitung $n^i\partial_i\varphi$ einer harmonischen Funktion,

$$0 = -\int_V \mathrm{d}^3x\,\varphi\,\Delta\varphi = \int_V \mathrm{d}^3x\,\partial_i\varphi\,\partial_i\varphi - \int_{\partial V} \mathrm{d}^2 f\,n^i\,\varphi\,\partial_i\varphi = \int_V \mathrm{d}^3x\,\sum(\partial_i\varphi)^2\ ,\tag{5.63}$$

so verschwindet $\partial_i\varphi$ in V und φ ist konstant.

Demnach ist jede Lösung ϕ der Poisson-Gleichung $-\Delta\phi = \rho$ durch ρ und ihre Werte auf dem Rand festgelegt. Denn die Differenz zweier Lösungen mit gleichem ρ und gleichen Randwerten ist eine Lösung der Laplace-Gleichung, die auf dem Rand verschwindet und folglich im Inneren verschwindet,

$$\begin{aligned}\Delta\phi = -4\pi\,\rho\ ,\quad \Delta\chi = -4\pi\,\rho\ ,\quad & \phi_{|\partial V} = \chi_{|\partial V} = f\ ,\\ \Delta(\phi - \chi) = 0\ ,\qquad & (\phi - \chi)_{|\partial V} = 0\ ,\ \Rightarrow \phi - \chi = 0\ .\end{aligned}\tag{5.64}$$

Durch ihre Normalenableitung auf dem Rand ist jede Lösung bis auf eine Konstante festgelegt, denn die Differenz zweier Lösungen mit gleichen Normalenableitungen hat verschwindende Normalenableitung und ist konstant.

Weil φ^2 und $(\partial_i\varphi)^2$ nicht negativ sind, zeigt (5.63) auch, daß auf Gebieten ohne Rand der Laplace-Operator keine positiven Eigenwerte hat, $\Delta\varphi = \lambda\varphi \Rightarrow \lambda \le 0$.

Greenfunktion

An der Darstellung (5.59) der zweifach stetig differenzierbaren Funktion ϕ ist unbefriedigend, daß sie von ϕ und $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ auf dem Rand Gebrauch macht, daß aber bei gegebenem $\Delta\phi$ schon die Angabe der Randwerte von ϕ oder der Randwerte von $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ die Funktion ϕ eindeutig oder bis auf eine Konstante festlegt.

Eine Darstellung von ϕ, in der nur die Randwerte von ϕ und $\Delta\phi$ auftreten, erhalten wir mit Hilfe des Potentials $G(\vec{x},\vec{y})$ am Ort $\vec{x}$, das von einer Einheitsladung am Ort $\vec{y}$ in einem Raum V erzeugt wird, dessen Randflächen geerdet sind, $G(\vec{x},\vec{y})_{|\vec{x}\in\partial V}=0$. Diese Funktion G ist nach George Green benannt. Auch bei anderen linearen, inhomogenen Differentialgleichungen gewinnt man die Lösung für beliebige Inhomogenität aus der zugehörigen Greenfunktion, das ist die Lösung für eine Inhomogenität, die auf einen Punkt beschränkt ist. Die Funktion ist für $\vec{x}\in V$ und $\vec{y}\in V$ durch

$$G(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}+g(\vec{x},\vec{y})\ ,\quad \Delta g(\vec{x},\vec{y})=0\ ,\quad g(\vec{x},\vec{y})_{|\vec{x}\in\partial V}=-\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ . \tag{5.65}$$

gegeben, wobei g in V harmonisch ist und für verschwindende Randwerte von G sorgt.

Auch wenn G nur in Ausnahmefällen explizit und normalerweise nur numerisch bestimmt werden kann, erlaubt die Greenfunktion wichtige Einsichten. Schneiden wir nämlich wie in (5.53) aus V eine Kugel um $\vec{y}$ mit Radius ε heraus und betrachten wir

$$\hat{I}_\varepsilon(\vec{y})=\int_{V_\varepsilon}\mathrm{d}^3x\,G(\vec{x},\vec{y})\,\Delta\phi(\vec{x})=\int_{V_\varepsilon}\mathrm{d}^3x\,\big(G(\vec{x},\vec{y})\,\Delta\phi(\vec{x})-\big(\Delta G(\vec{x},\vec{y})\big)\,\phi(\vec{x})\big)\ , \tag{5.66}$$

so läßt sich das Integral wie in (5.54) als Oberflächenintegral über $\partial V_\epsilon=\partial V+\partial K_\epsilon$ schreiben

$$\hat{I}_\varepsilon(\vec{y})=\int_{\partial V_\varepsilon}\mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\big(G(\vec{x},\vec{y})\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(\vec{x})-\big(\overrightarrow{\text{grad}}\,G(\vec{x},\vec{y})\big)\,\phi(\vec{x})\,\big)\ . \tag{5.67}$$

Auf der Kugeloberfläche ∂K_ε gilt bis auf Terme $O(\varepsilon^0)$, die für $\varepsilon\to 0$ endlich bleiben,

$$G(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{\varepsilon}+O(\varepsilon^0)\,,\quad -\overrightarrow{\text{grad}}\,G(\vec{x},\vec{y})=-\frac{1}{\varepsilon^2}\,\vec{n}+O(\varepsilon^0)\ . \tag{5.68}$$

Daher folgt, wenn wir ε gegen Null gehen lassen, aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung wie in (5.58)

$$\int_V\mathrm{d}^3x\,G(\vec{x},\vec{y})\,\Delta\phi(\vec{x})=\int_{\partial V}\mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\big(G(\vec{x},\vec{y})\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(\vec{x})-\overrightarrow{\text{grad}}\,G(\vec{x},\vec{y})\,\phi(\vec{x})\,\big)-4\pi\phi(\vec{y})\ . \tag{5.69}$$

Berücksichtigen wir, daß G auf ∂V verschwindet und lösen wir auf, so erhalten wir die Funktion $\phi(\vec{y})$ dargestellt durch $\Delta\phi$ und durch ihre Werte auf dem Rand

$$\phi(\vec{y})=-\frac{1}{4\pi}\int_V\mathrm{d}^3x\,G(\vec{x},\vec{y})\,\Delta\phi(\vec{x})+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,G(\vec{x},\vec{y})\,\phi(\vec{x})\ . \tag{5.70}$$

Ist ϕ insbesondere das elektrostatische Potential, das in einem Gebiet V zu einer Ladungsdichte ρ gehört, also $\Delta\phi=-4\pi\,\rho$ erfüllt, und besteht der Rand von V aus den

Oberflächen mehrerer Leiter ∂V_α, $\alpha=1,2\ldots$, so sind sie, wenn keine Ströme fließen, Äquipotentialflächen $\phi_{|\vec{x}\in\partial V_\alpha}=u_\alpha$ und das Potential ist

$$\phi(\vec{y})=\int_V\mathrm{d}^3x\,G(\vec{x},\vec{y})\,\rho(\vec{x})+\frac{1}{4\pi}\sum_\alpha u_\alpha\int_{\partial V_\alpha}\mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,G(\vec{x},\vec{y})\ . \tag{5.71}$$

An (5.71) verwundert, daß zum Potential am Ort $\vec{y}$ das Integral von $\rho(\vec{x})$ mit $G(\vec{x},\vec{y})$ über $\vec{x}$ beiträgt, wobei $\vec{y}$ den Ort bezeichnet, an dem sich die Einheitsladung befindet, die das Potential am Ort $\vec{x}$ verursacht. Man würde $G(\vec{y},\vec{x})\,\rho(\vec{x})$ integriert über $\vec{x}$ erwarten.

Die Erwartung ist richtig, denn die Arbeit $G(\vec{x},\vec{y})$, die man braucht, um eine Einheitsladung im Feld einer anderen Einheitsladung bei $\vec{y}$ von einem Ort mit Potentialwert 0 an den Ort $\vec{x}$ zu bringen, ist dieselbe, wie diejenige, die man verrichtet, wenn man im Feld einer Einheitsladung bei $\vec{x}$ eine andere Einheitsladung nach $\vec{y}$ bringt, Actio gleich Reactio,

$$G(\vec{x},\vec{y})=G(\vec{y},\vec{x})\ . \tag{5.72}$$

Diese Gleichung beweist man zunächst für innere Punkte $\vec{y}\in V$ und $\vec{z}\in V$ mit dem Integral

$$0=\int_{V_\epsilon}\mathrm{d}^3x\,\big(G(\vec{x},\vec{y})\,\Delta G(\vec{x},\vec{z})-\big(\Delta G(\vec{x},\vec{y})\big)\,G(\vec{x},\vec{z})\big) \tag{5.73}$$

Dabei ist V_ϵ das Volumen V, aus dem man eine Kugel K_ε um $\vec{y}$ und eine Kugel $\hat{K}_\varepsilon$ um $\vec{z}$ herausgeschnitten hat. Das Integral verschwindet, weil die Greenfunktion $G(\vec{x},\vec{y})$ und $G(\vec{x},\vec{z})$ in V_ϵ als Funktion von $\vec{x}$ harmonisch ist.

Der Integrand ist eine Summe von Ableitungen

$$G(\vec{x},\vec{y})\,\Delta G(\vec{x},\vec{z})-\big(\Delta G(\vec{x},\vec{y})\big)\,G(\vec{x},\vec{z})=\partial_i\big(G(\vec{x},\vec{y})\,\partial_iG(\vec{x},\vec{z})-\big(\partial_iG(\vec{x},\vec{y})\big)\,G(\vec{x},\vec{z})\big)\ . \tag{5.74}$$

Mit dem Satz von Gauß folgt daher

$$0=\int_{\partial V_\epsilon}\mathrm{d}^2f^i\big(G(\vec{x},\vec{y})\,\partial_iG(\vec{x},\vec{z})-\big(\partial_iG(\vec{x},\vec{y})\big)\,G(\vec{x},\vec{z})\big)\ . \tag{5.75}$$

Es trägt aber zum Oberflächenintegral über $\partial V_\varepsilon=\partial V+\partial K_\varepsilon+\partial\hat{K}_\varepsilon$ der Rand von V nicht bei, da dort die Greenfunktion verschwindet.

Auf der Kugelfläche ∂K_ε um $\vec{y}$ geht $G(\vec{x},\vec{z})$ im Grenzfall $\varepsilon\to 0$ stetig gegen $G(\vec{y},\vec{z})$. Die Funktion $G(\vec{x},\vec{y})$ verhält sich wie $1/\varepsilon$ und der Gradient von $G(\vec{x},\vec{y})$ wie $-\vec{n}/\varepsilon^2$ (5.68). Mit ε gegen Null geht daher nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung das Integral über ∂K_ε gegen $4\pi G(\vec{y},\vec{z})$.

Entsprechend geht das Integral über die Kugelfläche $\partial\hat{K}_\varepsilon$ um $\vec{z}$ gegen $-4\pi G(\vec{z},\vec{y})$. Das Ergebnis

$$0=4\pi\big(G(\vec{y},\vec{z})-G(\vec{z},\vec{y})\big) \tag{5.76}$$

zeigt, daß in der Greenfunktion der Ort der verursachenden Ladung bei $\vec{z}$ und der Auswirkung bei $\vec{y}$ vertauscht werden dürfen.

Komplex differenzierbare Funktionen

Komplexe Funktionen $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$ hängen komplex differenzierbar von $z = x + \mathrm{i}\, y$ ab, wenn sich ihre Änderung

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}x\, \partial_x u + \mathrm{d}y\, \partial_y u + \mathrm{i}\,(\mathrm{d}x\, \partial_x v + \mathrm{d}y\, \partial_y v) = \mathrm{d}x\,(\partial_x u + \mathrm{i}\,\partial_x v) + \mathrm{d}y\,(\partial_y u + \mathrm{i}\,\partial_y v) \quad (5.77)$$

linear in $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$ als $\mathrm{d}f = \mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ schreiben läßt. Wegen

$$\mathrm{d}f = (\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y)\,(\partial_x u + \mathrm{i}\,\partial_y v) - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y\,\big((\partial_x u - \partial_y v) + \mathrm{i}\,(\partial_y u + \partial_x v)\big) \quad (5.78)$$

erfordert komplexe Differenzierbarkeit die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v\ , \quad \partial_x v = -\partial_y u\ . \quad (5.79)$$

Folglich sind u wegen $\partial_x\partial_x u = \partial_x\partial_y v = \partial_y\partial_x v = -\partial_y\partial_y u$ und ebenso v harmonische Funktionen der zwei Variablen x und y. Umgekehrt gehört zu jeder reellen, harmonischen Funktion $u(x,y)$ eine komplex differenzierbare Funktion $f(z)$, die bis auf eine Konstante bestimmt ist. Darauf beruht die Bedeutung von Funktionentheorie für Potentialprobleme in zwei Raumdimensionen.

Eichtransformation

Die homogenen Maxwellgleichungen (5.10) besagen, daß die Feldstärken $F_{kl}(x)$ die antisymmetrisierten Ableitungen von vier Potentialfunktionen $A_l(x)$ sind

$$F_{kl}(x) = \partial_k A_l(x) - \partial_l A_k(x)\ . \quad (5.80)$$

Feldstärken von dieser Form lösen die homogenen Maxwellgleichungen, denn die linke Seite von (5.10) ist total antisymmetrisch unter Permutationen und die Reihenfolge von partiellen Ableitungen kann vertauscht werden, $\partial_k\partial_l A_m - \partial_l\partial_k A_m = 0$.

Umgekehrt überprüft man durch Differenzieren, daß in sternförmigen Gebieten, die mit jedem Punkt x auch die Verbindungsstrecke zum Ursprung enthalten, die antisymmetrisierten Ableitungen des folgenden Viererpotentials (A.99) die Feldstärken ergeben.

$$\begin{aligned} A_l(x) &= \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \lambda x^m F_{ml}(\lambda x) \\ \partial_k A_l - \partial_l A_k &= \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \big(\lambda \delta_k^m F_{ml}(\lambda x) + \lambda x^m \cdot \lambda (\partial_k F_{ml})_{|(\lambda x)}\big) - k \leftrightarrow l \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \big(2\lambda F_{kl}(\lambda x) + \lambda^2 x^m (\partial_k F_{ml} - \partial_l F_{mk})_{|(\lambda x)}\big) \end{aligned} \quad (5.81)$$

Verwenden wir im letzten Term $F_{ml} = -F_{lm}$ und die homogene Maxwellgleichung (5.10) $-\partial_k F_{lm} - \partial_l F_{mk} = \partial_m F_{kl}$, so folgt die Behauptung

$$\begin{aligned} \partial_k A_l - \partial_l A_k &= \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \Big(2\lambda F_{kl}(\lambda x) + \lambda^2 x^m \big(\partial_m F_{kl}\big)_{|(\lambda x)}\Big) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}\lambda\, \frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\lambda^2 F_{kl}(\lambda x)\big) = \lambda^2 F_{kl}(\lambda x)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1} = F_{kl}(x)\ . \end{aligned} \quad (5.82)$$

Die Komponente A_0 heißt skalares Potential ϕ. Die räumlichen Komponenten faßt man zum Vektorpotential $\vec{A} = (-A_1, -A_2, -A_3)$ zusammen. Mit diesen Bezeichnungen besagt (5.80) für das magnetische und das elektrische Feld

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}\ , \quad \vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\ . \quad (5.83)$$

Wegen $\partial_k\partial_l\chi = \partial_l\partial_k\chi$ folgt aus (5.80), daß sich die Feldstärken nicht ändern, wenn man zum Viererpotential A_l die Ableitung einer Funktion χ hinzufügt

$$A'_l = A_l + \partial_l\chi\ . \quad (5.84)$$

Diese Abänderung des Viererpotentials heißt Eichtransformation. Das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$ ändern sich unter einer Eichtransformation um

$$\phi' = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi\ , \quad \vec{A}' = \vec{A} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi\ . \quad (5.85)$$

Viererpotentiale, die sich nur um eine Eichtransformation unterscheiden, können nicht physikalisch voneinander unterschieden werden.

Relativistische Quantenfeldtheorie liefert einen tiefliegenden Grund für Eichinvarianz, der über den ästhetischen Reiz einer Symmetrie weit hinaus geht [21]. Ein quantisiertes Viererpotential A_m erzeugt Zustände mit negativer Norm. Sie machen sich nur dann nicht als negative und daher widersinnige Wahrscheinlichkeiten in physikalischen Prozessen bemerkbar, wenn die physikalischen Vorgänge eichinvariant sind.

Setzt man die Lösung $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ (5.80) der homogenen Maxwellgleichungen in die inhomogenen Maxwellgleichungen (5.16) ein und verwendet man zur Abkürzung die Schreibweise

$$\partial^m = \eta^{mk}\partial_k\ , \quad (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = (\partial_0, -\partial_1, -\partial_2, -\partial_3)\ , \quad (5.86)$$

$$A^n = \eta^{nl} A_l\ , \quad (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, \vec{A}) = (A_0, -A_1, -A_2, -A_3)\ , \quad (5.87)$$

so erhält man

$$\partial_m\partial^m A^n - \partial_m\partial^n A^m = \frac{4\pi}{c}\, j^n\ . \quad (5.88)$$

Im zweiten Term können die Ableitungen vertauscht werden $\partial_m\partial^n A^m = \partial^n\partial_m A^m$, und durch Wahl der Eichung kann man erreichen,[7] daß dieser Term verschwindet

$$\partial_m A^m = 0 \quad (5.89)$$

und jede der vier Potentialfunktionen A^n einer inhomogenen Wellengleichung

$$\Box A^n = \frac{4\pi}{c}\, j^n \quad (5.90)$$

[7] Diese Eichung geht schon auf den dänischen Physiker Ludvig Valentin Lorenz, nicht erst auf Hendrik Antoon Lorentz, zurück [43, 32].

genügt. Der hier auftretende Differentialoperator heißt Wellenoperator oder d'Alembert-Operator. Er wird kurz mit dem Symbol $\Box$ geschrieben und „Box“ ausgesprochen

$$\Box = \partial_m \partial^m = \eta^{ml} \partial_m \partial_l = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 \ . \tag{5.91}$$

Erfüllt ein Viererpotential A'^m noch nicht die Lorenzbedingung, sondern $\partial_m A'^m = f(x)$, so gilt wegen (5.84) die Lorenzeichung (5.89) für das Viererpotential A^n, falls die Funktion χ als Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\Box \chi(x) = f(x) \tag{5.92}$$

gewählt wird.

5.5 Wellengleichung

Eindeutigkeit und Abhängigkeitsbereich

Daß die Lösung u der inhomogenen Wellengleichung

$$\Box u = g \tag{5.93}$$

bei Vorgabe der Inhomogenität g und der Werte von u und $\partial_t u$ zur Zeit $t = 0$ eindeutig ist und im Punkt $(t, \vec{x})$ nur von der Inhomogenität im Abhängigkeitsgebiet G und den Anfangswerten im Bereich A (5.36) abhängt, folgt so wie der entsprechende Sachverhalt für die elektromagnetischen Feldstärken mit den Argumenten von Seite 84.

Denn der zur Wellengleichung gehörige Energie-Impulstensor

$$T_{mn} = \partial_m u \, \partial_n u - \frac{1}{2} \eta_{mn} \partial_r u \, \partial^r u \tag{5.94}$$

ist erhalten, $\partial_m T^{mn} = 0$, wenn u die homogene Wellengleichung $\Box u = 0$ löst, und genügt für jeden zukunftsgerichteten, zeitartigen Vektor $w = (1, w_1, w_2, w_3)$, $w_i \, w_i < 1$, der Ungleichung

$$\begin{aligned} 2 w_m T^{m0} &= \dot{u}^2 + \partial_i u \, \partial_i u - 2 w_i \, \partial_i u \, \dot{u} = (\dot{u} - w_i \, \partial_i u)^2 + (\partial_i u \, \partial_i u) - (w_i \partial_i u)^2 \\ &\geq (\dot{u} - w_i \, \partial_i u)^2 + (\partial_i u \, \partial_i u)(1 - w_j w_j) \geq 0 \ . \end{aligned} \tag{5.95}$$

Die Summe $w_m T^{m0}$ verschwindet nur, falls $\partial_i u$ und $\dot{u}$ verschwinden. Nach den Argumenten auf Seite 84 ist daher die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Wellengleichung mit gleicher Inhomogenität und gleichen Anfangsbedingungen auf jeder raumartigen Fläche F im Abhängigkeitsgebiet G konstant, und verschwindet, weil F und die Anfangsfläche A gemeinsame Punkte haben.

Ebene Wellen

Jede Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit gegebener Inhomogenität g läßt sich als Summe einer speziellen Lösung und einer Lösung der homogenen Wellengleichung schreiben, denn die Differenz zweier Lösungen mit gleicher Inhomogenität erfüllt die homogene Wellengleichung. Wir untersuchen zunächst die homogene Wellengleichung.

Da in der homogenen Wellengleichung alle Terme dieselbe Ableitungsordnung, zwei, haben, und da die zum Differentialoperator $\Box = \eta^{mn} \, \partial_m \, \partial_n$ gehörige quadratische Form $k \cdot k = \eta^{mn} \, k_m \, k_n = {k_0}^2 - {k_1}^2 - {k_2}^2 - {k_3}^2$ nichtverschwindende, lichtartige Vektoren k hat, $k^2 = 0$, besitzt die Wellengleichung die bemerkenswerte Eigenschaft, ebene Wellen $u(x) = f(k \cdot x)$ von beliebiger Form f zuzulassen, solange f zweifach differenzierbar ist,

$$\Box \, f(k \cdot x) = \eta^{mn} k_m \, k_n \, f''(k \cdot x) = k^2 f''(k \cdot x) = 0 \ . \tag{5.96}$$

Ebene Wellen der Form $u(t, \vec{x}) = f(t - \vec{n} \, \vec{x})$ mit beliebigem, zweifach differenzierbarem f, die sich in beliebige Richtung $\vec{n}$, $\vec{n}^2 = 1$, mit Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ bewegen, lösen die Wellengleichung der vierdimensionalen Raumzeit.

Eine ebene Welle verdient ihren Namen: sie ist auf Flächen senkrecht zu $\vec{n}$ konstant

$$u(t, \vec{x} + \vec{x}_0) = f(t - \vec{n} \, (\vec{x} + \vec{x}_0)) = f(t - \vec{n} \, \vec{x}) = u(t, \vec{x}) \quad \text{falls} \quad \vec{n} \, \vec{x}_0 = 0 \ . \tag{5.97}$$

Ebenso ist f auf der Weltlinie von Teilchen konstant, die sich mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung $\vec{n}$ bewegen,

$$u(t, \vec{x}(0) + t \, \vec{n}) = f(t - \vec{n} \, (\vec{x}(0) + t \, \vec{n})) = f(-\vec{n} \, \vec{x}(0)) = u(0, \vec{x}(0)) \ . \tag{5.98}$$

Monochromatische Wellen

Eine reelle, ebene, monochromatische Welle ψ ist spezieller von der Form

$$\psi(t, \vec{x}) = \Re \, a \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \, k \cdot x} = \Re \, a \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \, (\vec{k} \, \vec{x} - \omega \, t)} \ . \tag{5.99}$$

Dabei ist a konstant. Die Kreisfrequenz ω wegen $k^2 = \omega^2 - \vec{k}^2 = 0$ durch den Betrag des Wellenvektors $\vec{k}$ bis auf das Vorzeichen festgelegt. Wir wählen ω positiv,

$$\omega = |\vec{k}| \ , \tag{5.100}$$

einen Exponentialfaktor mit negativem k_0 schreiben wir als $\mathrm{e}^{\mathrm{i} \, k \cdot x}$. Die monochromatische, ebene Welle geht nach der Schwingungsdauer $T = (2\pi)/\omega$ in sich über und ist in Richtung $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ periodisch mit Wellenlänge $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$. Die Frequenz $\nu = 1/T$ ist der Wellenlänge λ invers.

$$\psi(t + T, \vec{x}) = \psi(t, \vec{x}) \ , \quad \psi(t, \vec{x} + \lambda \vec{n}) = \psi(t, \vec{x}) \ , \quad \nu \lambda = c = 1 \tag{5.101}$$

Da $\vec{k}$ beliebig ist und da mit der komplexen Konstanten $a = A \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \varphi}$ die Amplitude $A \geq 0$ und die Phase φ frei gewählt werden kann, bilden ebene, monochromatische Wellen eine 3+2-parametrige Schar von Lösungen der homogenen Wellengleichung.

Kugelwellen

Da die Wellengleichung linear ist, sind Linearkombinationen $u = a\,u_1 + b\,u_2$ von Lösungen wieder Lösungen. Ebenso sind, da die Koeffizienten der Wellengleichung konstant sind, verschobene Lösungen $(T_a u)(x) = u(x-a)$ und die Ableitungen $\partial_m u$ Lösungen.

Überlagern wir [20, Kapitel III, §6, 2] ebene Wellen derselben Form $f(t - \vec{n}\,\vec{x})$, indem wir über alle Richtungen $\vec{n}$ integrieren, so erhalten wir eine drehinvariante, nur von t und r abhängige Lösung der Wellengleichung

$$u(t,x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\, f(t - x\sin\theta\cos\varphi - y\sin\theta\sin\varphi - z\cos\theta)\ . \tag{5.102}$$

Die Auswertung des Integrals vereinfacht sich, wenn wir die Kugelkoordinaten von $\vec{n}$ auf eine z-Achse in Richtung von $\vec{x}$ beziehen. Dann ist $\vec{n}\,\vec{x} = |\vec{n}|\,|\vec{x}|\cos\theta = r\,\cos\theta$, die φ-Integration ergibt einen Faktor 2π und es verbleibt

$$u(t,x,y,z) = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\, f(t - r\,\cos\theta) = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\, f(t - r\,u)\ . \tag{5.103}$$

Wir benennen mit F die Stammfunktion der beliebigen Funktion f

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\ , \tag{5.104}$$

dann gilt nach Kettenregel

$$f(t - r\,u) = -\frac{\partial}{\partial u}\frac{F(t - r\,u)}{r}\ . \tag{5.105}$$

Damit können wir das Integral durch F ausdrücken

$$u(t,x,y,z) = -\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\,\frac{\partial}{\partial u}\frac{F(t - r\,u)}{r} = -\frac{F(t - r\,u)}{r}\Big|_{u=-1}^{u=1} = \frac{F(t+r) - F(t-r)}{r}\ . \tag{5.106}$$

Diese drehinvariante Lösung besteht aus einer einlaufenden Kugelwelle $F(t+r)/r$ und einer auslaufenden Kugelwelle $F(t-r)/r$ und ist bei $r = 0$ wiederholt differenzierbar, wenn F einmal mehr differenzierbar ist.

Die allgemeinste drehinvariante Funktion, die außerhalb $\vec{x} = 0$ die Wellengleichung in $3+1$-Dimensionen löst, ist die Summe einer ein- und einer auslaufenden Kugelwelle: man bestätigt leicht für den Laplace-Operator in drei Dimensionen, angewendet auf Funktionen f von $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, für $r > 0$,

$$\Delta f(r) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\frac{x^i}{r}\,f'\big)\big) = \frac{x^i}{r}\,\frac{x^i}{r}\,f'' + \big(\frac{3}{r} - \frac{x^i}{r^3}\,x^i\big)\,f' = f'' + \frac{2}{r}\,f' = \frac{1}{r}\,\big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,f)\big)\ . \tag{5.107}$$

Daher gilt für kugelsymmetrische Lösungen $u(t,\vec{x}) = f(t,r)$ der Wellengleichung

$$\Box u = \frac{1}{r}\,\big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\big)(r\,f) = 0\ , \tag{5.108}$$

also für $r > 0$ die zweidimensionale Wellengleichung für $r\,f$ mit der Lösung

$$r\,f = g(t-r) + h(t+r)\ , \quad u = \frac{g(t-r)}{r} + \frac{h(t+r)}{r}\ . \tag{5.109}$$

Die allgemeinste, drehinvariante Lösung der Wellengleichung ist also die Summe einer ein- und einer auslaufenden Kugelwelle. Für $g = -h$ (5.106) ist sie auch im Ursprung regulär und löst für dreifach differenzierbares g die Wellengleichung überall.

Das Prinzip von Huygens

Die Welle an einem Ort $\vec{x}$ zur Zeit $t > 0$ sollte sich, so die physikalisch motivierte Vermutung, aus der Überlagerung der früheren Welle zur Zeit $t = 0$ von all denjenigen Orten $\vec{x} + t\,\vec{n}$ mit $\vec{n}^2 = 1$ ergeben, die von $\vec{x}$ in der Laufzeit t erreicht werden. Zur Klärung dieser Vermutung betrachten wir den Mittelwert

$$M_{t,\vec{x}}[\phi] = \frac{1}{4\pi}\int_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=+1}\mathrm{d}\cos\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\phi\big(\vec{x} + t\,\vec{n}(\cos\theta,\varphi)\big) \tag{5.110}$$

einer Funktion ϕ auf Kugelschalen $K_{t,\vec{x}}$ um den Punkt $\vec{x}$ mit Radius t. Dabei bezeichnet

$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{5.111}$$

den Einheitsvektor mit Richtungswinkeln θ, φ (2.25).

Als Funktion von t ist $M_{t,\vec{x}}$ auch für negative t definiert. Da das Mittel über alle Richtungen mit dem Mittel über alle Gegenrichtungen übereinstimmt, ist $M_{t,\vec{x}}$ eine gerade Funktion von t,

$$M_{t,\vec{x}}[\phi] = M_{-t,\vec{x}}[\phi]\ , \quad M_{0,\vec{x}}[\phi] = \phi(\vec{x})\ . \tag{5.112}$$

Sie ist zweimal stetig differenzierbar, wenn ϕ zweimal stetig differenzierbar ist.

Differenzieren wir nach t, so erhalten wir ein Oberflächenintegral über den Rand der Kugel um $\vec{x}$ mit Radius $|t|$

$$K_{t,\vec{x}} = \{\vec{y} : |\vec{x} - \vec{y}| \leq |t|\}\ . \tag{5.113}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}M_{t,\vec{x}}[\phi] = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\, n^i\,\partial_i\phi(\vec{x} + t\,\vec{n}) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial K_{t,\vec{x}}}\mathrm{d}^2 f\, n^i\,\partial_i\phi(\vec{y}) \tag{5.114}$$

Dabei ist $\vec{n}$ für $t > 0$ der nach außen gerichtete Normalenvektor. Das Oberflächenintegral ist nach dem Satz von Gauß gleich dem Volumenintegral über die Divergenz [8]

$$\frac{\partial}{\partial t}M_{t,\vec{x}}[\phi] = \frac{1}{4\pi t^2}\int_0^t \mathrm{d}r\, r^2\int \mathrm{d}\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\Delta\phi\ . \tag{5.115}$$

Dies gilt auch für negative t, denn dann ist $\vec{n}$ der nach innen gerichtete Normalenvektor bei $\vec{y} = \vec{x} + t\,\vec{n}$.

[8] Gleichung (5.115) zeigt zusammen mit (5.112), daß harmonische Funktionen, $\Delta\phi = 0$, an jeder Stelle $\vec{x}$ ihrem Mittelwert auf Kugelschalen gleich sind, die $\vec{x}$ umhüllen, sofern der Radius der Kugelschale so klein ist, daß sie in dem Gebiet liegt, in dem ϕ harmonisch ist (5.62).

Differenzieren wir erneut nach t und wirkt die Ableitung nach der Produktregel auf $1/t^2$, so ergibt sich ein Term, der bis auf einen Faktor $-2/t$ mit $\partial_t M$ übereinstimmt. Die Ableitung des Volumenintegrals nach der oberen Grenze t ergibt den Integranden an der oberen Grenze, das ist der Mittelwert der Ableitung $\Delta\phi$ und gleich der Ableitung $\Delta M_{t,\vec{x}}[\phi]$ des Mittelwerts,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{t,\vec{x}}[\phi] = \frac{-2}{t}\frac{\partial}{\partial t} M_{t,\vec{x}}[\phi] + \Delta M_{t,\vec{x}}[\phi] \ . \tag{5.116}$$

Da der Mittelwert der Darbouxschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{t,\vec{x}}[\phi] + \frac{2}{t}\frac{\partial}{\partial t} M_{t,\vec{x}}[\phi] - \Delta M_{t,\vec{x}}[\phi] = 0 \tag{5.117}$$

genügt, löst $t\, M_{t,\vec{x}}[\phi]$ die homogene Wellengleichung

$$\Box \big(t\, M_{t,\vec{x}}[\phi]\big) = 0 \ . \tag{5.118}$$

Sie ist auch für $t = 0$ erfüllt, da die zweiten Ableitungen von $t\, M_{t,\vec{x}}[\phi]$ stetig sind.

Für $t = 0$ verschwindet die Lösung $t\, M_{t,\vec{x}}[\phi]$, ihre Zeitableitung hat zur Zeit $t = 0$ am Ort $\vec{x}$ den Wert $\phi(\vec{x})$.

Da die Koeffizienten η^{nm} der Wellengleichung $\eta^{mn}\partial_m\partial_n u = 0$ konstant sind (5.91), lösen auch die partiellen Ableitungen von Lösungen die Wellengleichung. Folglich ist $\partial_t(t\, M_{t,\vec{x}}[\psi])$ eine Lösung der Wellengleichung. Sie hat für $t = 0$ am Ort $\vec{x}$ den Wert $\psi(\vec{x})$ und verschwindende Zeitableitung, denn $\partial_t(t\, M_{t,\vec{x}}[\psi])$ ist eine gerade Funktion von t. Daher löst

$$u(t,\vec{x}) = t\, M_{t,\vec{x}}[\phi] + \frac{\partial}{\partial t}\big(t\, M_{t,\vec{x}}[\psi]\big) \tag{5.119}$$

in $3+1$-Dimensionen die Wellengleichung $\Box u = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(0,\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \ , \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0,\vec{x}) = \phi(\vec{x}) \ . \tag{5.120}$$

Jede Lösung der Wellengleichung ist eindeutig durch ihre Anfangswerte bestimmt (Seite 94). Demnach ist (5.119) *die* Lösung, die zu den Anfangswerten ψ und ϕ gehört. Da sie sich durch die Mittelwerte der Anfangswerte schreiben läßt, ändert sich die Lösung der Wellengleichung wenig, wenn man die Anfangsdaten ein wenig ändert. Das Anfangswertproblem der Wellengleichung ist sachgemäß.

Die Lösung (5.119) genügt dem Prinzip von Huygens: zur Zeit t am Ort $\vec{x}$ setzt sie sich additiv aus den Anfangswerten zur Zeit $t = 0$ von allen Orten $\vec{y}$ zusammen, von denen man in der Laufzeit t mit Lichtgeschwindigkeit $v = 1$ zu $\vec{x}$ gelangt. Dies gilt nicht in geraden Raumdimensionen und für eine Raumdimension. In ihnen tragen zur Lösung zur Zeit t am Ort $\vec{x}$ auch die Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ von den näheren Orten $\vec{y}$ bei, die mit weniger als Lichtgeschwindigkeit von $\vec{x}$ in der Laufzeit t erreichbar sind. In $1, 2, 4\ldots$ Raumdimensionen hallen die anfänglichen Werte nach.

Da Kugelwellen $F(t-r)/r$ in drei Raumdimensionen wie $1/r$ abfallen, tragen sie am Ort $\vec{x}$ mit einem Faktor $1/r = 1/t$ bei. Dies macht den Vorfaktor t bei $t\, M_{t,\vec{x}}[\phi]$ verständlich, denn beim Mittelwert $M_{t,\vec{x}}[\phi]$ wird das Integral über die Kugeloberfläche mit Radius $|t|$ durch t^2 geteilt (5.110) und nicht durch t.

Daß Kugelwellen in drei Raumdimensionen wie $1/r$ abfallen, hängt mit der Erhaltung der Energie zusammen und damit, daß die Energiestromdichte T^{00} (5.94) wie der Poynting-Vektor quadratisch in den Feldern ist: wenn die Energie erhalten ist, dann verdünnt sich mit zunehmendem r eine auslaufende Energiestromdichte so, wie die Kugeloberfläche $4\pi\, r^2$ zunimmt. Damit die Energiestromdichte wie $1/r^2$ abfällt, müssen die Felder, aus deren Produkten sie zusammengesetzt ist, wie $1/r$ abfallen.

Wellenpaket

Die Lösung (5.119) der homogenen Wellengleichung heißt Wellenpaket, denn sie ist eine Superposition von ebenen, monochromatischen Wellen $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$. Stellen wir nämlich eine zu jeder Zeit t räumlich fouriertransformierbare Lösung $u(t,\vec{x})$ der Wellengleichung durch ihr Fourierintegral dar,

$$u(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}}\, \tilde{u}(t,\vec{k}) \ , \tag{5.121}$$

so besagt die Wellengleichung $\Box u = 0$,

$$\Box u(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int \mathrm{d}^3k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}}\, \big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(t,\vec{k}) + \vec{k}^{\,2}\tilde{u}(t,\vec{k})\big) = 0 \ . \tag{5.122}$$

Dies ist, da die Fourierdarstellung eindeutig ist, genau dann der Fall, wenn der Integrand verschwindet, wenn also $\tilde{u}$ als Funktion von t ein harmonischer Oszillator mit Kreisfrequenz $\omega = |\vec{k}|$ ist,

$$\tilde{u}(t,\vec{k}) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\tilde{\psi}(\vec{k}) + \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\omega}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\tilde{\phi}(\vec{k}) \ , \quad \omega = |\vec{k}| \ . \tag{5.123}$$

Die Amplituden bei $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ haben wir so zusammengefaßt, daß $u(0,\vec{x})$ zur Zeit $t = 0$ mit der Fourierdarstellung von $\psi(\vec{x})$ übereinstimmt, und daß die Zeitableitung von u zur Zeit $t = 0$ mit der Fourierdarstellung von $\phi(\vec{x})$ übereinstimmt,

$$u(0,\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \ , \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0,\vec{x}) = \phi(\vec{x}) \ . \tag{5.124}$$

Die Fourierdarstellung von u stimmt mit der in der Feldtheorie wichtigen Darstellung des Wellenpakets überein,

$$u(t,\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3k\, \frac{1}{(2\pi)^3\, 2\,\omega}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\, a(\vec{k}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\, a^*(\vec{k})\big) \ , \quad \omega = |\vec{k}| \ , \tag{5.125}$$

allerdings ist der Zusammenhang von Anfangswerten ϕ und ψ mit der Lösung u in der Zerlegung (5.123) klarer zu überblicken als bei den Amplituden

$$a(\vec{k}) = \sqrt{2\pi}^3\,\big(\omega\,\tilde{\psi}(\vec{k}) - \mathrm{i}\,\tilde{\phi}(\vec{k})\big) \ , \quad a^*(\vec{k}) = \sqrt{2\pi}^3\,\big(\omega\,\tilde{\psi}(-\vec{k}) + \mathrm{i}\,\tilde{\phi}(-\vec{k})\big) \ . \tag{5.126}$$

Retardiertes Potential

Um einen Eindruck über die Lösung der inhomogenen Wellengleichung zu bekommen, integrieren wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta u = \hat{g} \tag{5.127}$$

über das Zeitintervall $\tau < t < \tau + \varepsilon$. Dabei mögen die Anfangswerte von u zur Zeit τ verschwinden, $u(\tau, \vec{x}) = 0$, $\partial_t u(\tau, \vec{x}) = 0$. Das Integral auf der linken Seite gibt $\partial_t u(\tau+\varepsilon)$, bis auf Terme, die wegen der Anfangsbedingung von zweiter Ordnung in ε sind, das Ergebnis der rechten Seite benennen wir

$$\partial_t u(\tau + \varepsilon) = \int_\tau^{\tau+\varepsilon} \mathrm{d}t \,\bigl(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta u\bigr) = \int_\tau^{\tau+\varepsilon} \mathrm{d}t\, \hat{g}(t, \vec{x}) = g(\tau + \varepsilon, \vec{x}) \ . \tag{5.128}$$

Wirkt die Störung $\hat{g}$ nur diese kurze Zeit, so liegt anschließend für $t > \tau$ eine Funktion $\varphi_\tau(t, \vec{x})$ vor, die bis auf Terme, die mit ε gegen Null verschwinden, die Wellengleichung mit Anfangsbedingung

$$\Box\varphi_\tau(t, \vec{x}) = 0 \ , \quad \varphi_\tau(\tau, \vec{x}) = 0 \ , \quad \partial_t\varphi_\tau(t, \vec{x})_{|t=\tau} = g_\tau(\vec{x}) \ , \quad g_\tau(\vec{x}) = g(\tau, \vec{x}) \ , \tag{5.129}$$

erfüllt. Die Lösung erhalten wir aus (5.119) durch Translation um die Zeit τ: $\varphi_\tau(t, \vec{x})$ ist $t - \tau$ mal dem Mittelwert der Funktion g_τ auf der Kugelfläche um $\vec{x}$ mit Radius $t - \tau$,

$$\varphi_\tau(t, \vec{x}) = (t - \tau)\, M_{(t-\tau),\vec{x}}[g_\tau] \ . \tag{5.130}$$

Wirkt die Störung g längere Zeit, so denken wir uns die Lösung zusammengesetzt aus Lösungen, die von den kurzzeitigen Störungen erzeugt worden sind, denn wenn u_1 die Lösung einer linear inhomogenen Gleichung $Lu_1 = g_1$ mit Inhomogenität g_1 ist und u_2 die Lösung zur Inhomogenität g_2, dann ist die Summe $u = u_1 + u_2$ eine Lösung der Gleichung mit der Summe der Inhomogenitäten $L(u_1 + u_2) = (g_1 + g_2)$.

Wir betrachten daher das Integral

$$u(t, \vec{x}) = \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \varphi_\tau(t, \vec{x}) \ . \tag{5.131}$$

Zur Anfangszeit $t = 0$ verschwindet es, da dann der Integrationsbereich verschwindet. Die Zeitableitung leitet nach der oberen Integrationsgrenze ab – und ergibt den Integranden an der Stelle $\tau = t$ – und nach dem ersten Argument von φ ab

$$\partial_t u(t, \vec{x}) = \varphi_t(t, \vec{x}) + \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \partial_t\varphi_\tau(t, \vec{x}) = \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \partial_t\varphi_\tau(t, \vec{x}) \ . \tag{5.132}$$

Sie verschwindet zur Anfangszeit $t = 0$, da dann der Integrationsbereich verschwindet. Die zweite Zeitableitung ergibt

$$(\partial_t)^2 u(t, \vec{x}) = \partial_t\varphi_\tau(t, \vec{x})_{|\tau=t} + \int_0^t \mathrm{d}\tau\, (\partial_t)^2\varphi_\tau(t, \vec{x}) = g(t, \vec{x}) + \int_0^t \mathrm{d}\tau\, (\partial_t)^2\varphi_\tau(t, \vec{x}) \ . \tag{5.133}$$

Addieren wir hierzu $-\Delta u = \int_0^t \mathrm{d}\tau\, (-\Delta\varphi_\tau(t, \vec{x}))$ und berücksichtigen wir, daß φ_τ die Wellengleichung löst, so verbleibt

$$\Box u(t, \vec{x}) = g(t, \vec{x}) \ . \tag{5.134}$$

Es ist also zu allen Zeiten t und für alle $\vec{x}$ das Integral

$$u(t, \vec{x}) = \int_0^t \mathrm{d}\tau\, (t - \tau)\, M_{(t-\tau),\vec{x}}[g_\tau] \tag{5.135}$$

die Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\Box u = g$ mit den Anfangswerten $u(0, \vec{x}) = 0$ und $\partial_t u(0, \vec{x}) = 0$.

Zur Auswertung des Integrals für $t > 0$ substituieren wir $\tau(r) = t - r$ und integrieren über r

$$u(t, \vec{x}) = \int_0^t \mathrm{d}r\, r\, M_{r,\vec{x}}[g_{t-r}] = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \mathrm{d}r\, r^2 \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \frac{1}{r}\, g(t - r, \vec{x} + r\,\vec{n}) \ . \tag{5.136}$$

Bei den drei Integralen handelt es sich, da $t > 0$ ist, um die Integration in Kugelkoordinaten über die Punkte $\vec{z}$ mit Betrag kleiner t

$$u(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\vec{z}|\le t} \mathrm{d}^3z\, \frac{g(t - |\vec{z}|, \vec{x} + \vec{z})}{|\vec{z}|} \ . \tag{5.137}$$

Wechseln wir hier zur Integrationsvariablen $\vec{y} = \vec{x} + \vec{z}$ und bezeichnen wir die Kugel um $\vec{x}$ mit Radius $|r|$ als

$$K_{r,\vec{x}} = \{\vec{y} : |\vec{x} - \vec{y}| \le |r|\} \ , \tag{5.138}$$

so lautet die Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\Box u = g$, die zur Zeit $t = 0$ zusammen mit ihrer ersten Zeitableitung verschwindet,

$$t \ge 0 : \qquad u(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{K_{t,\vec{x}}} \mathrm{d}^3y\, \frac{g(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \ . \tag{5.139}$$

Für $t < 0$ substituieren wir in (5.135) $\tau(r) = t + r$, dann erstreckt sich, nachdem wir die untere und obere Integrationsgrenze vertauscht haben, das r-Integral von 0 bis $-t = |t|$ und die drei Integrale können als Volumenintegral über eine Kugel mit Radius $|t|$ aufgefaßt werden. Wir erhalten so für $t < 0$

$$t \le 0 : \qquad u(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{K_{t,\vec{x}}} \mathrm{d}^3y\, \frac{g(t + |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \ . \tag{5.140}$$

Bei nichtverschwindenden Anfangswerten zur Zeit $t = 0$ setzt sich die Lösung des Anfangswertproblems aus dieser partikulären Lösung der inhomogenen Wellengleichung und einem Wellenpaket (5.119) zusammen, das die Anfangswerte hat,

$$u(t, \vec{x}) = t\, M_{t,\vec{x}}[\phi] + \frac{\partial}{\partial t}\bigl(t\, M_{t,\vec{x}}[\psi]\bigr) + \frac{1}{4\pi} \int_{K_{t,\vec{x}}} \mathrm{d}^3y\, \frac{g(t - \mathrm{sign}(t)\, |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \ . \tag{5.141}$$

Da die Lösung stetig von den Anfangswerten und der Inhomogenität abhängt, ist das Anfangswertproblem der inhomogenen Wellengleichung sachgemäß.

Da mit $\Box u(t,\vec{x}) = g(t,\vec{x})$ auch $\Box u(t+\underline{t},\vec{x}) = g(t+\underline{t},\vec{x})$ gilt, erfüllt für $t \geq -\underline{t}$ die zeitverschobene Lösung

$$u(t+\underline{t},\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{K_{(t+\underline{t}),\vec{x}}} \mathrm{d}^3y\, \frac{g(t+\underline{t}-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \ . \tag{5.142}$$

ebenfalls die inhomogene Wellengleichung. Falls nun die Inhomogenität g auf ein endliches Gebiet beschränkt ist, so können wir, wenn $\underline{t}$ groß ist, statt über $K_{(t+\underline{t}),\vec{x}}$ über $\mathbb{R}^3$ integrieren und das Argument $t+\underline{t}$ von u und von g wieder t nennen. Wir erhalten so das retardierte (verzögerte) Potential,

$$u_{\mathrm{ret}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3y\, \frac{g(t-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \ . \tag{5.143}$$

Es löst die inhomogene Wellengleichung $\Box u = g$ für Quellen g, die mit wachsendem räumlichen Abstand genügend schnell klein werden. Verschwindet g für frühe Zeiten, so hat auch u_{ret} zu frühen Zeiten verschwindende Anfangswerte.

Gaußbedingung

Die vier Potentialfunktionen der Elektrodynamik erfüllen in der Lorenz-Eichung vier inhomogene Wellengleichungen $\Box A^m = 4\pi\, j^m$ (5.90, $c=1$), wobei die Inhomogenität der Kontinuitätsgleichung $\partial_m j^m = 0$ (5.20) genügt. Dabei sind die Anfangswerte durch die Gaußbedingung eingeschränkt,

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = -\Delta A^0 - \mathrm{div}\,\partial_t\vec{A} = 4\pi\,\rho \ . \tag{5.144}$$

Wegen $\Box A^0 = 4\pi\,\rho$ besagt dies, daß die anfängliche Zeitableitung von $w = \partial_m A^m$ verschwindet, $\partial_t w(0,\vec{x}) = 0$. Wenn zudem anfänglich die Lorenzbedingung $w(0,\vec{x}) = 0$ erfüllt ist, dann gilt sie zu allen Zeiten, denn w erfüllt wegen $\partial_m j^m = 0$ die homogene Wellengleichung $\Box w = 0$ mit verschwindenden Anfangswerten.

Die anfängliche Lorenzbedingung legt den Anfangswert $\partial_t A^0(0,\vec{x})$ fest,

$$\partial_t A^0(0,\vec{x}) = -\,\mathrm{div}\,\vec{A}(0,\vec{x}) \ , \tag{5.145}$$

die Gaußbedingung ist eine Poisson-Gleichung für $A^0(0,\vec{x})$ mit der Lösung (5.50)

$$A^0(0,\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3y\,\frac{\hat{\rho}(0,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \ , \quad \hat{\rho} = \rho + \frac{1}{4\pi}\partial_t\,\mathrm{div}\,\vec{A} \ . \tag{5.146}$$

Es sind also nur die Anfangswerte von $\vec{A}$ frei wählbar, die, ohne die Feldstärken zu ändern, noch durch eine Eichtransformation (5.84) um den Gradienten einer Funktion χ, $\Box\chi = 0$, geändert werden können. Insbesondere kann man durch eine geeignete Eichtransformation anfänglich $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ und $\partial_t\,\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ erreichen.

Ändert man die Ladungsdichte in einem beschränkten Gebiet V um $\delta\rho$, so gibt es lokalisierte Lösungen δA^0 der Gaußbedingung, die ebenfalls außerhalb des Gebietes V verschwinden, nämlich die Lösung (5.70) mit der Greenfunktion G, die auf dem Rand von V und außerhalb von V verschwindet

$$\delta A^0(0,\vec{y}) = \int_V \mathrm{d}^3x\, G(\vec{x},\vec{y})\,\delta\rho(0,\vec{x}) \ . \tag{5.147}$$

Da die Normalenableitung der Greenfunktion G auf dem Rand des Gebietes V unstetig sind, gehört zu dieser lokalisierten Lösung eine Flächenladungsdichte auf der Oberfläche des Gebietes, ∂V, nämlich die Flächenladungsdichte, die von $\delta\rho$ in einer geerdeten, leitenden Fläche ∂V influenziert wird. Das Einflußgebiet solch einer Störung oder solch eines Signals ist der Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel von V. Ladungsverschiebungen und Änderungen der Anfangsbedingungen in einem beschränkten Gebiet V wirken sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Transformation von Skalarfeldern

Bildet eine Gruppe von invertierbaren Abbildungen T_g eine Mannigfaltigkeit auf sich ab wie beispielsweise Drehungen eine Kugelfläche, so definiert jedes T_g eine lineare Abbildung T_g^* von reellen oder komplexen Funktionen der Mannigfaltigkeit auf ebensolche Funktionen $\hat{\phi}$ durch die Forderung, daß die transformierte Funktion $T_g^*\phi = \hat{\phi}$ am transformierten Ort $x' = T_g x$ denselben Wert habe wie die ursprüngliche Funktion ϕ am ursprünglichen Ort x,

$$\hat{\phi}(x') = \phi(x) \ , \quad x = T_g^{-1}(x') \ , \quad T_g^* : \phi \mapsto T_g^*\phi = \phi\circ T_g^{-1} \ . \tag{5.148}$$

Da T_g^* jede Funktion ϕ mit der *inversen* Transformation T_g^{-1} von Punkten auf Punkte verkettet, genügen die Transformationen T_g^* und T_h^* von Funktionen auf Funktionen derselben Gruppenverknüpfung wie die Transformationen T_g und T_h,

$$T_h^*(T_g^*\phi) = (T_g^*\phi)\circ T_h^{-1} = (\phi\circ T_g^{-1})\circ T_h^{-1} = \phi\circ(T_g^{-1}\circ T_h^{-1}) = \phi\circ(T_hT_g)^{-1} = (T_hT_g)^*\phi \ . \tag{5.149}$$

Auch wenn die Transformationen T_g^* und T_g derselben Gruppenverknüpfung genügen, so sind sie dennoch verschieden, weil sie auf verschiedene Objekte wirken. Drehungen auf einer Kugeloberfläche beispielsweise wirken nicht auf einem Vektorraum und haben keinen gemeinsamen Fixpunkt, während alle linearen Abbildungen T_g^* die Funktion $\phi = 0$ invariant lassen. Die Funktionen, auf die T_g^* durch Verkettung mit T_g^{-1} wirkt, heißen, wenn man ihr Transformationsverhalten betonen will, Skalarfelder.

Poincaré-Kovarianz des retardierten Potentials

Die lineare Abbildung, die jeder Quelle g ihr retardiertes Potential u_{ret} (5.143) zuordnet, ist Poincaré-invariant: ist $x \mapsto x' = \Lambda x + a$ eine zeitrichtungstreue Poincaré-Transformation (3.11), so gehört zur transformierten Inhomogenität $\hat{g}(x) = g(\Lambda^{-1}(x-a))$ das transformierte retardierte Potential $\hat{u}_{\mathrm{ret}}(x) = u_{\mathrm{ret}}(\Lambda^{-1}(x-a))$.

Um den Sachverhalt leicht einzusehen, verschieben wir in (5.143) die Integrationsvariable und integrieren über $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$

$$4\pi\, u_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \int \mathrm{d}^3 z\, \frac{g(t - |\vec{z}|, \vec{x} - \vec{z})}{|\vec{z}|} \ . \tag{5.150}$$

Bezeichnen wir $(t, \vec{x})$ kurz als Vierervektor x und $(|\vec{z}|, \vec{z})$ als Vierervektor z, so schreibt sich $f = 4\pi\, u_{\text{ret}}$ als

$$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, g(x - z) \ , \quad z^0 = \sqrt{\vec{z}^{\,2}} \ . \tag{5.151}$$

Das Integral erstreckt sich über alle Punkte $x - z$ des Rückwärtslichtkegels von x, wie $z^2 = (z^0)^2 - \vec{z}^{\,2} = 0$, $z^0 > 0$ zeigt. Beim Integral handelt es sich um den Fall $m = 0$ eines Integrals über die Massenschale $z^2 = m^2 \geq 0$,

$$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, g(x - z) \ , \quad z^0 = \sqrt{m^2 + \vec{z}^{\,2}} \ . \tag{5.152}$$

Solche Integrale hängen, wie wir jetzt zeigen, Poincaré-invariant mit der Quelle g zusammen: $\hat{f}(x) = f(\Lambda^{-1}(x - a))$ gehört zu $\hat{g}(x) = g(\Lambda^{-1}(x - a))$.

Für Verschiebungen, $x' = x + a$, $\Lambda = 1$, liest man einfach ab,

$$\hat{f}(x) = f(x - a) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, g(x - a - z) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, \hat{g}(x - z) \ , \tag{5.153}$$

daß das verschobene retardierte Potential zur verschobenen Quelle gehört.

Da Lorentztransformationen linear sind, $\Lambda^{-1}x - z = \Lambda^{-1}(x - z')$ mit $z' = \Lambda z$, gilt

$$\hat{f}(x) = f(\Lambda^{-1}x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, g(\Lambda^{-1}x - z) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, g(\Lambda^{-1}(x - z')) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, \hat{g}(x - z') \ . \tag{5.154}$$

Ist die Lorentztransformation spezieller eine Drehung, $z'^0 = z^0, \vec{z}' = D\vec{z}$, dann können wir leicht zu den gedrehten Integrationsvariablen (z'^1, z'^2, z'^3) übergehen. Der Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix J ist Eins (D.3),

$$J^i{}_j = \frac{\partial z^i}{\partial z'^j} = D^{-1\,i}{}_j \ , \quad |\det J| = 1 \ , \tag{5.155}$$

und $z'^0 = \sqrt{m^2 + \vec{z}'^2}$ stimmt bei einer Drehung mit $z^0 = \sqrt{m^2 + \vec{z}^{\,2}}$ überein. Bei Drehungen gilt also

$$\hat{f}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z'}{z^0} \left|\det J\right| \hat{g}(x - z') = \int \frac{\mathrm{d}^3 z'}{z'^0}\, \hat{g}(x - z') = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, \hat{g}(x - z) \ . \tag{5.156}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Integrationsvariable wieder $\vec{z}$ genannt. Das gedrehte retardierte Potential $\hat{u}_{\text{ret}}$ gehört also zur gedrehten Quelle $\hat{g}$.

Unter beliebigen zeitrichtungstreuen Lorentztransformationen von Vektoren z auf der Massenschale, $z^2 = m^2 \geq 0$, ist weder $z^0 = \sqrt{m^2 + \vec{z}^{\,2}}$ noch $\mathrm{d}^3 z$ invariant, wohl aber $\mathrm{d}^3 z / z^0$.

Diesen Sachverhalt brauchen wir nur für drehungsfreie Lorentztransformationen in x-Richtung (3.9) überprüfen, denn jede Lorentztransformation läßt sich als solch eine Lorentztransformation schreiben, der eine Drehung vorangeht und eine Drehspiegelung folgt (D.34). Die drehungsfreie Lorentztransformation in x-Richtung (3.9), angewendet auf den Vierervektor $(\sqrt{m^2 + \vec{z}^{\,2}}, \vec{z})$, ergibt

$$\begin{aligned} \sqrt{m^2 + \vec{z}'^2} &= \frac{\sqrt{m^2 + \vec{z}^{\,2}} - v\, z_x}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \Bigl(1 - \frac{v\, z_x}{\sqrt{m^2 + \vec{z}^{\,2}}}\Bigr) \sqrt{m^2 + \vec{z}^{\,2}} \ , \\ z'_x &= \frac{z_x - v \sqrt{m^2 + \vec{z}^{\,2}}}{\sqrt{1 - v^2}} \ , \quad z'_y = z_y \ , \quad z'_z = z_z \ , \end{aligned} \tag{5.157}$$

die Determinante der 3×3-Jacobi-Matrix J, $J^i{}_j = \partial z'^i / \partial z^j$, ist

$$\det J = \frac{\partial z'_x}{\partial z_x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \Bigl(1 - \frac{v\, z_x}{\sqrt{m^2 + \vec{z}^{\,2}}}\Bigr) \ . \tag{5.158}$$

Insgesamt gilt für Integrale über Massenschalen von Vierervektoren z mit $z^2 = m^2 \geq 0$ bei Wechsel der Integrationsvariablen durch zeitrichtungstreue Lorentztransformationen

$$\frac{\mathrm{d}^3 z'}{\sqrt{m^2 + \vec{z}'^2}} = \frac{\mathrm{d}^3 z}{\sqrt{m^2 + \vec{z}'^2}} \left|\det J\right| = \frac{\mathrm{d}^3 z}{\sqrt{m^2 + \vec{z}^{\,2}}} \ . \tag{5.159}$$

In (5.154) können wir nun nach Wechsel und Umbenennen der Integrationsvariablen folgern

$$\hat{f}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, \hat{g}(x - z') = \int \frac{\mathrm{d}^3 z'}{z'^0}\, \hat{g}(x - z') = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{z^0}\, \hat{g}(x - z) \ . \tag{5.160}$$

Also gehört die Lorentztransformierte Funktion $\hat{f}$ zur Lorentztransformierten Quelle $\hat{g}$.

Transformation von Viererpotential und Viererstromdichte

Für das retardierte Viererpotential

$$A^m_{\text{ret}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 z}{|z^0|}\, j^m(x - z)_{|_{z^0 = \sqrt{\vec{z}^{\,2}}}} \ , \tag{5.161}$$

folgt, wenn wir wir mit $\Lambda^n{}_m$ multiplizieren, daß zur Poincaré-transformierten Viererstromdichte

$$\hat{\jmath}^{\,n}(x) = \Lambda^n{}_m j^m(\Lambda^{-1}(x - a)) \tag{5.162}$$

das lorentztransformierte retardierte Potential gehört,

$$\hat{A}^n_{\text{ret}}(x) = \Lambda^n{}_m A^m_{\text{ret}}(\Lambda^{-1}(x - a)) \ . \tag{5.163}$$

Die Strom- und Ladungsdichten transformieren nicht wie vier Skalarfelder, sondern, wie das Indexbild angibt, als Komponenten eines Vierervektorfeldes mit einem zusätzlichen Faktor Λ. Dann genügt der transformierte Viererstrom $\hat{\jmath}^{\,n}$ der Kontinuitätsgleichung, wenn j^m sie erfüllt,

$$\begin{aligned} \partial_{x^n} \hat{\jmath}^{\,n}(x) &= \Lambda^n{}_m\, \partial_{x^n} (\Lambda^{-1}(x - a))^r\, \partial_{z^r} j^m(z)_{|_{z = \Lambda^{-1}(x-a)}} \\ &= \Lambda^n{}_m\, \Lambda^{-1\,r}{}_n\, \partial_{z^r} j^m(z) = \delta^r{}_m\, \partial_{z^r} j^m(z) = \partial_{z^m} j^m(z) = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.164}$$

Transformation von Wellenpaketen und Amplituden

Schreibt man die allgemeinste, fouriertransformierbare, reelle Lösung der homogenen Wellengleichung $\Box A^n = 0$ als Wellenpaket (5.125),

$$A^n_{\text{hom}}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \left(a^{n\dagger}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\cdot x} + a^n(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot x}\right)_{|_{k^0=\sqrt{\vec{k}^2}}} , \qquad (5.165)$$

und spaltet man dabei das Lorentzinvariante Integrationsmaß $\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}$ (5.159) ab, dann wird das Transformationsverhalten der Amplituden $a^{n\dagger}$ und a^n einfach. Da das Viererpotential reell ist, ist $a^{n\dagger}(\vec{k})$ das komplex Konjugierte der Amplitude $a^n(\vec{k})$. Die Komponente k^0 im Nenner und im Exponenten in $k\cdot x = k^0x^0 - k^1x^1 - k^2x^2 - k^3x^3$ ist die Funktion $k^0 = |\vec{k}|$ der Integrationsvariablen.

Unter Translationen $x \mapsto x + b$ ändern sich die Amplituden um eine Phase,

$$\hat{A}^n(x) = A^n(x-b) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \left((a^{n\dagger}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot b})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\cdot x} + (a^n(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\cdot b})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot x}\right) . \qquad (5.166)$$

Unter Lorentztransformationen transformieren die Amplituden wie ein Vektorfeld auf der Massenschale des Impulsraumes. Für das Skalarprodukt $k\cdot(\Lambda^{-1}x)$, das in (5.165) auftritt, wenn wir das transformierte Feld $\hat{A}^n(x) = \Lambda^n{}_m A^m(\Lambda^{-1}x)$ auswerten, gilt nämlich $k\cdot(\Lambda^{-1}x) = (\Lambda^{-1}\Lambda k)\cdot(\Lambda^{-1}x) = k'\cdot x$ mit $k' = \Lambda k$, weil Skalarprodukte Lorentzinvariant sind. Integrieren wir über die drei räumlichen Komponenten von k' statt von k und verwenden wir $a^m(k) = a^m(\Lambda^{-1}k')$ und daß $\mathrm{d}^3k/k^0 = \mathrm{d}^3k'/k'^0$ ein Lorentzinvariantes Maß ist (5.159), so ergibt sich für das transformierte Wellenpaket

$$\hat{A}^n(x) = \Lambda^n{}_m A^m(\Lambda^{-1}x) = \Lambda^n{}_m \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2k'^0} \left(a^{m\dagger}(\Lambda^{-1}k')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k'\cdot x} + a^m(\Lambda^{-1}k')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k'\cdot x}\right) . \qquad (5.167)$$

Da die Bezeichnung der Integrationsvariablen, k' oder k, unwesentlich ist, zeigt dies, daß zum lorentztransformierten Wellenpaket die lorentztransformierten Amplituden gehören,

$$\hat{a}^n(k) = \Lambda^n{}_m a^m(\Lambda^{-1}k) . \qquad (5.168)$$

Die Komponenten des Wellenpakets sind durch die Lorenzeichung $\partial_m A^m = 0$ (5.89) verknüpft. Da das retardierte Potential der Lorenzbedingung genügt,

$$\partial_m \int \frac{\mathrm{d}^3z}{|\vec{z}|}\, j^m(x-z) = \int \frac{\mathrm{d}^3z}{|\vec{z}|}\, \partial_m j^m(x-z) = 0 , \qquad (5.169)$$

muß auch das Wellenpaket $\partial_m A^m_{\text{hom}} = 0$ erfüllen. Die vier Amplituden $a^{n\dagger}(\vec{k})$ sind daher eingeschränkt

$$k_n a^{n\dagger}(\vec{k}) = 0 . \qquad (5.170)$$

Zudem kann man noch, ohne die Lorenzbedingung zu verletzen und ohne die Potentiale meßbar abzuändern, mit Eichfunktionen χ umeichen (5.84), die die Wellengleichung erfüllen. Dies ändert die Amplituden um

$$a'^{n\dagger}(\vec{k}) = a^{n\dagger}(\vec{k}) + \mathrm{i}\,k^n\chi^\dagger(\vec{k}) . \qquad (5.171)$$

Dabei ist $\chi^\dagger(\vec{k})$ die Amplitude der Eichfunktion χ.

Gemäß (5.170) sind von den vier Amplituden des Viererpotentials nur drei unabhängig und die Amplitude in Richtung des Viererwellenvektors kann weggeeicht werden (5.171). Das Wellenpaket enthält also pro Wellenvektor $\vec{k}$ zwei Freiheitsgrade. Dies entspricht den zwei Polarisationsrichtungen von Lichtstrahlen.

5.6 Fernfeld räumlich begrenzter Ladungsdichten

Ist die Quelle j^m, die das retardierte Viererpotential erzeugt, räumlich auf ein Gebiet beschränkt, dessen Ausdehnung klein ist gegen den Abstand $r = |\vec{x}|$, so kann man den Integranden von (5.143) durch eine Entwicklung nach y^i/r nähern. Wir berücksichtigen beim Fernfeld A^m_{fern} des Potentials nur Anteile, die im Grenzfall $r \to \infty$ bei konstanter retardierter Zeit $t_- = t - r/c$ nicht stärker als $1/r$ abfallen, und nähern die unterschiedliche Retardierung der Beiträge von verschiedenen Orten $\vec{y}$ durch eine Taylorreihe. Die Richtung von der Quelle ist $\vec{n} = \vec{x}/r$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} &= \frac{1}{r} + O(\frac{1}{r^2}) \\ |\vec{x}-\vec{y}| &= r\big(1 - 2\frac{\vec{x}}{r^2}\cdot\vec{y} + \frac{\vec{y}^2}{r^2}\big)^{\frac{1}{2}} = r - \vec{n}\cdot\vec{y} + O(\frac{1}{r}) \end{aligned} \qquad (5.172)$$

$$j^m(t - r/c + \vec{n}\cdot\vec{y}/c - O(\frac{1}{r})) = j^m(t_-) + \frac{1}{c}\vec{n}\cdot\vec{y}\,\partial_t j^m(t_-) + \frac{1}{2c^2}(\vec{n}\cdot\vec{y})^2\,\partial_t{}^2 j^m(t_-) + \dots \qquad (5.173)$$

Dies gilt nur ungefähr, wenn sich während der Zeiten, um die sich die Lichtlaufzeiten verschiedener Teile der Quelle unterscheiden, die Quelle j^m nur wenig ändert.

In dieser Näherung ist das Fernfeld

$$A^m_{\text{fern}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{c\,r}\Big(\int \mathrm{d}^3y\, j^m + \frac{1}{c}n^i \int \mathrm{d}^3y\, y^i\, \partial_t j^m + \frac{1}{2c^2}n^i\, n^j \int \mathrm{d}^3y\, y^i\, y^j\, \partial_t{}^2 j^m\Big) , \qquad (5.174)$$

wobei j^m, $\partial_t j^m$ und $\partial_t{}^2 j^m$ die Argumente $(t_-, \vec{y})$ haben und $i, j \in \{1,2,3\}$ räumliche Komponenten abzählen. Terme mit höheren Zeitableitungen vernachlässigen wir.

Für das skalare Potential $A^0 = \phi$ erhalten wir, da $j^0/c = \rho$ die Ladungsdichte ist,

$$\phi_{\text{fern}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{r}\Big(\int \mathrm{d}^3y\,\rho + \frac{1}{c}n^i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3y\, y^i\,\rho + \frac{1}{2c^2}n^i\, n^j \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int \mathrm{d}^3y\, y^i\, y^j\,\rho\ \Big) , \qquad (5.175)$$

also die zeitunabhängige Ladung q und zur retardierten Zeit $t - r/c$ die Zeitableitung des elektrischen Dipolmoments $\vec{P}$ und die zweiten Zeitableitungen der Quadrupolmomente Q^{ij} , die wir als Matrixelemente einer symmetrischen, spurfreien Matrix Q auffassen,

$$q = \int \mathrm{d}^3y\,\rho\ ,\ P^i = \int \mathrm{d}^3y\, y^i\rho\ ,\ Q^{ij} = \int \mathrm{d}^3y\,\big(3y^iy^j - \delta^{ij}\vec{y}^2\big)\rho\ ,\ \delta_{ij}Q^{ij} = 0\ , \qquad (5.176)$$

$$\phi_{\text{fern}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{r}\big(q + \frac{1}{c}\vec{n}\dot{\vec{P}} + \frac{1}{6c^2}\vec{n}\cdot\ddot{Q}\vec{n} + \frac{1}{6c^2}\int \mathrm{d}^3y\,\vec{y}^2\ddot{\rho}\ \big) . \qquad (5.177)$$

Das Integral über die Stromdichte $\vec{\jmath}$, das beim Vektorpotential $\vec{A}$ auftritt, kann man mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, $\dot{\rho} + \partial_k j^k = 0$, als Zeitableitung von $\vec{P}$ schreiben,

$$\int \mathrm{d}^3x\, j^i(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3x \left(\partial_k(x^i j^k) - x^i\,(\partial_k j^k)\right) = \int \mathrm{d}^3x\, x^i\,\dot{\rho} = \dot{P}^i\ , \tag{5.178}$$

denn das Integral über die räumlichen Ableitungen $\partial_k(x^i j^k)$ gibt Randterme und verschwindet, weil nach Annahme die Ströme für große r verschwinden.

Ebenso kann man räumliche Momente der Stromdichte, genauer symmetrisierte Momente, als Zeitableitung des Quadrupolmomentes schreiben,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x\,(j^i x^j + j^j x^i) &= \int \mathrm{d}^3x \left(\partial_k(x^i x^j j^k) - x^i x^j\,\partial_k j^k\right) = \int \mathrm{d}^3x\, x^i x^j\,\dot{\rho} \\ &= \frac{1}{3}\,\dot{Q}^{ij} + \frac{1}{3}\,\delta^{ij}\int \mathrm{d}^3x\,\vec{x}^2\,\dot{\rho}\ .\end{aligned} \tag{5.179}$$

Das magnetisches Moment $\vec{M}$ einer Stromverteilung ist das antisymmetrisierte Moment

$$\frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^3x\,(x^j j^k - x^k j^j) = \varepsilon_{jki} M^i\ ,\quad \vec{M} = \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^3x\,\vec{x}\times\vec{\jmath}\ . \tag{5.180}$$

Damit erhalten wir

$$\int \mathrm{d}^3x\, x^i j^j = c\,\varepsilon_{ijk}M^k + \frac{1}{6}\,\dot{Q}^{ij} + \frac{1}{6}\,\delta^{ij}\int \mathrm{d}^3x\,\vec{x}^2\dot{\rho} \tag{5.181}$$

und können die ersten zwei Terme von (5.174) auswerten

$$\vec{A}_{\text{fern}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{c\,r}\big(\dot{\vec{P}} - \vec{n}\times\dot{\vec{M}} + \frac{1}{6c}\ddot{Q}\vec{n} + \frac{1}{6c}\vec{n}\int \mathrm{d}^3y\,\vec{y}^2\ddot{\rho}\big)\ . \tag{5.182}$$

Der dritte Term in (5.174) betrifft zweite Zeitableitungen von Integralen über $x^i x^j j^k$. Wir vernachlässigen sie so wie dritte Zeitableitungen von $x^i x^j x^k \rho$.

Die Feldstärken bestimmen wir ebenfalls nur bis zur Ordnung $1/r$. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{1}{r} = 0 + O(\frac{1}{r^2})\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x^k} f(t - r/c) = -\frac{x^k}{cr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\ , \tag{5.183}$$

wirkt in dieser Näherung $\partial/\partial x^i$ wie die Zeitableitung, multipliziert mit der Komponente $-n^i$ der Richtung zur Quelle. Daher ist das Magnetfeld $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = -\frac{\vec{n}}{c}\times\dot{\vec{A}}$,

$$\vec{B}_{\text{fern}}(t,\vec{x}) = -\frac{1}{c^2 r}\vec{n}\times\left(\ddot{\vec{P}} - \vec{n}\times\ddot{\vec{M}} + \frac{1}{6c}\dddot{Q}\vec{n}\right)\ , \tag{5.184}$$

und das elektrische Feld $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \frac{\vec{n}}{c}\dot{\phi} - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$,

$$E^i_{\text{fern}}(t,\vec{x}) = -\frac{1}{c^2 r}(\delta^{ij} - n^i n^j)\left(\ddot{\vec{P}} - \vec{n}\times\ddot{\vec{M}} + \frac{1}{6c}\dddot{Q}\vec{n}\right)^j\ . \tag{5.185}$$

Da $(\delta^{ij} - n^i n^j)$ Vektoren $\vec{v}$ auf ihren zu $\vec{n}$ senkrechten Teil $\vec{v}_\perp$ projiziert, ist $\vec{E} = -\dot{\vec{A}}_\perp/c$ und $\vec{B} = \vec{n}\times\vec{E}$. In der Fernzone bilden also $\vec{n}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ein orthogonales Rechtssystem, wobei $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gleich groß sind. Die Energiestromdichte $\vec{S}$ (5.31) ist nach außen gerichtet

$$\vec{S}_{\text{fern}} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}_{\text{fern}}\times\vec{B}_{\text{fern}} = c\,\vec{n}\,\frac{1}{8\pi}\,(\vec{E}^2_{\text{fern}} + \vec{B}^2_{\text{fern}})\ . \tag{5.186}$$

Beschleunigte Ladungen strahlen Energie ab.

5.7 Wirkungsprinzip

Die inhomogenen Maxwellgleichungen (5.16) sind die Feststellung, daß die Wirkung $W[A,\phi]$ des Viererpotentials $A_m(x)$ und weiterer Felder ϕ, die wir Materiefelder nennen, aber im folgenden nicht genauer angeben,

$$W[A,\phi] = W_{\text{Maxwell}}[A] + W_{\text{Materie}}[A,\phi]\ , \tag{5.187}$$

$$W[A]_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{16\pi c}\int \mathrm{d}^4x\,\eta^{km}\eta^{ln}\big(\partial_k A_l - \partial_l A_k\big)\big(\partial_m A_n - \partial_n A_m\big)\ , \tag{5.188}$$

für physikalische Felder stationär ist bezüglich aller Variationen $\delta A_m(x)$, die am Rand des Integrationsgebietes verschwinden. Die Variationsableitungen von W_{Materie} nach den Materiefeldern legt die Bewegungsgleichungen der Materie fest. Mit den Einzelheiten dieser Bewegungsgleichungen wollen wir uns allerdings nicht beschäftigen.

Die Variationsableitung $\frac{\delta W}{\delta A(x)}$ ergibt die Änderung des Funktionals W bis auf Randterme (4.21).

$$\delta W[A,\delta A] = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(W[A+\lambda\delta A] - W[A]) = \int \mathrm{d}^4x\,\delta A_l(x)\frac{\delta W}{\delta A_l(x)} + \text{ Randterme} \tag{5.189}$$

Setzen wir in W_{Maxwell} die variierten Felder $A + \lambda\delta A$ ein und leiten wir nach λ ab, so erhalten wir für die Änderung von W_{Maxwell} vier Terme mit δA von gleicher Form, die sich zu

$$\delta W_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4\pi c}\int \mathrm{d}^4x\,\eta^{km}\eta^{ln}\,(\partial_k\,\delta A_l)\big(\partial_m A_n - \partial_n A_m\big) \tag{5.190}$$

summieren. Formen wir den Integranden mit der Produktregel der Differentation um

$$\partial_k\big(\eta^{km}\eta^{ln}\,\delta A_l\big(\partial_m A_n - \partial_n A_m\big)\big) - \delta A_l\,\partial_k\left(\eta^{km}\eta^{ln}\left(\partial_m A_n - \partial_n A_m\right)\right)\ , \tag{5.191}$$

so können wir den ersten Term integrieren. Er trägt nur zu Randtermen bei und verschwindet für Variationen $\delta A_l(x)$, die am Rand verschwinden. Am zweiten Term lesen wir die Variationsableitung der Maxwellwirkung nach $A_l(x)$ für Variationen ab, die am Rand verschwinden

$$\frac{\delta W_{\text{Maxwell}}}{\delta A_l} = \frac{1}{4\pi c}\partial_k F^{kl}\ , \tag{5.192}$$

wobei $F^{kl} = \eta^{km}\eta^{ln}F_{mn}$ (5.13) und $F_{mn}(x) = \partial_m A_n(x) - \partial_n A_m(x)$ (5.80) ist.

Wir nennen die Variationsableitung der Materiewirkung den Strom j

$$\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_l} = -\frac{1}{c^2}j^l\ . \tag{5.193}$$

Mit dieser Notation sind die inhomogenen Maxwellgleichungen (5.16) die Bedingung, daß die Gesamtwirkung $W_{\text{Maxwell}} + W_{\text{Materie}}$ stationär ist und verschwindende Variationsableitungen hat

$$0 = 4\pi c\frac{\delta W}{\delta A_l} = \partial_k F^{kl} - \frac{4\pi}{c}j^l\ . \tag{5.194}$$

Die homogenen Maxwellgleichungen (5.10) sind wegen der Definition der Feldstärken $F_{mn}(x) = \partial_m A_n(x) - \partial_n A_m(x)$ (5.80) identisch erfüllt.

Eulerableitung

Die Maxwellwirkung (5.188) ist ein lokales Funktional der Felder $A_l(x)$, das heißt, sie läßt sich als Integral

$$W[A] = \int \mathrm{d}^4x\, \mathscr{L}(x, A(x), \partial A(x)) \tag{5.195}$$

über eine Lagrangedichte $\mathscr{L}(x, A, \partial A)$ schreiben, die von den Jet-Variablen x, A_l, $\partial_k A_l$ und eventuell von höheren Ableitungen der Felder abhängt.

Die Variationsableitung einer lokalen Wirkung ergibt sich aus der Ableitung der Lagrangedichte $\mathscr{L}(x, A + \lambda\delta A, \partial(A + \lambda\delta A))$ nach λ

$$\delta\mathscr{L} = \partial_\lambda \mathscr{L}(x, A + \lambda\delta A, \partial(A + \lambda\delta A))_{|\lambda=0} = \delta A_l \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_l} + (\partial_k\,\delta A_l)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)} \tag{5.196}$$

Dies können wir mit der Produktregel als Summe von vollständigen Ableitungen und von Produkten mit undifferenzierten δA_l schreiben

$$\delta\mathscr{L} = \delta A_l\big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_l} - \partial_k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)}\big) + \partial_k\big(\delta A_l\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)}\big) = \delta A_l\frac{\hat\partial\mathscr{L}}{\hat\partial A_l} + \partial_k\big(\delta A_l\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)}\big)\ . \tag{5.197}$$

Die Funktion $\frac{\hat\partial\mathscr{L}}{\hat\partial A_l}$ der Jet-Variablen, die δA_l nach Abwälzen der Ableitungen multipliziert,

$$\begin{aligned}\frac{\hat\partial\mathscr{L}}{\hat\partial A_l} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_l} - \partial_k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)} = \\ &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_l} - (\partial_k\partial_r A_s)\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)\partial(\partial_r A_s)} - (\partial_k A_s)\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)\partial A_s} - \frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)\partial x^k}\ ,\end{aligned} \tag{5.198}$$

heißt Eulerableitung der Lagrangedichte.

Die Lagrangedichte $\mathscr{L}$ ändert sich bei Änderung der Argumente um δA_l mal der Eulerableitung und um die vollständige Ableitung von $\delta A_l\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)}$. Diese Identität in den Jet-Variablen gilt unabhängig davon, welche Änderungen δA_l wir betrachten, ob sie eine beliebige Abweichung von physikalischen Feldern bezeichnet, die für große Raumzeitargumente verschwindet, oder ob sie für die Änderung der Felder unter einer Transformationsgruppe steht.

Aus (5.197) folgt die Variationsableitung der lokalen Wirkung

$$\delta W[A, \delta A] = \int \mathrm{d}^4x\, \left(\delta A_l\frac{\hat\partial\mathscr{L}}{\hat\partial A_l} + \partial_k\big(\delta A_l\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)}\big)\right)\ . \tag{5.199}$$

Die Ableitungsterme können für alle Funktionen $\delta A_l(x)$ und $A_l(x)$ integriert werden und tragen nur zu Randtermen bei. Betrachten wir Variationen $\delta A_l(x)$, die am Rand, das heißt für große Werte der räumlichen oder zeitlichen Koordinaten, verschwinden, so verschwinden diese Randterme. Daher ist die Variationsableitung jeder lokalen Wirkung für Variationen der Felder, die am Rand verschwinden, die Eulerableitung der Lagrangedichte

$$\frac{\delta W}{\delta A_l} = \frac{\hat\partial\mathscr{L}}{\hat\partial A_l}\ . \tag{5.200}$$

Physikalische Felder, wie das Viererpotential der Elektrodynamik, sind dadurch ausgezeichnet, daß sie eine lokale Wirkung (5.195) extremal machen. Sie erfüllen mit geeigneter Lagrangedichte $\mathscr{L}$ die Differentialgleichungen

$$\big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_l} - \partial_k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k A_l)}\big)\Big|_{A_{\text{physikalisch}}} = 0\ . \tag{5.201}$$

5.8 Symmetrien

Die homogenen Maxwellgleichungen behalten ihre Form in beliebigen Koordinatensystemen. Seien die Koordinaten $x(x')$ invertierbar als Funktion der Koordinaten x' gegeben und seien die Feldstärken $F_{kl}(x)$ als Lösungen der homogenen Maxwellgleichungen (5.10) durch antisymmetrisierte Ableitungen eines Viererpotentials (5.80) $A_l(x)$ gegeben, dann definiert

$$A'_s(x') = \frac{\partial x^l}{\partial x'^s}A_l(x(x')) \tag{5.202}$$

das zugehörige Viererpotential im gestrichenen Koordinatensystem.

Die Feldstärken im gestrichenen System

$$\begin{aligned}F'_{rs}(x') &= \partial'_r\big(\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}A_l(x(x'))\big) - \partial'_s\big(\frac{\partial x^l}{\partial x'^r}A_l(x(x'))\big) \\ &= \big(\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^r\partial x'^s} - \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^s\partial x'^r}\big)A_l + \big(\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s} - \frac{\partial x^k}{\partial x'^s}\frac{\partial x^l}{\partial x'^r}\big)\partial_k A_l\end{aligned} \tag{5.203}$$

hängen linear von den Feldstärken im anderen Koordinatensystem ab, denn jede in zwei Ableitungsindizes antisymmetrisierte Ableitung $\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^r\partial x'^s} - \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^s\partial x'^r}$ verschwindet und im letzten Term kann die Antisymmetrisierung durch Umbenennung der Summationsindizes in eine Antisymmetrisierung in k und l umgeschrieben werden

$$F'_{rs}(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}F_{kl}(x(x'))\ . \tag{5.204}$$

Die Transformationen (5.202, 5.204) sind Tensortransformationen (A.128). Die transformierten Komponenten als Funktion der Koordinaten x' sind linear in den ursprünglichen Komponenten am Ort $x(x')$. Zudem treten passend zum Indexbild Transformationsmatrizen $\frac{\partial x}{\partial x'}$ auf. Weil die Transformation linear ist, sind Summe und Vielfache von Tensoren gleichen Transformationsgesetzes wieder Tensoren und bilden Vektorräume.

Die Assoziativität des Tensortransformationsgesetzes folgt aus der Kettenregel der Differentation, denn sei x' durch eine weitere Koordinatentransformation als Funktion von x'' gegeben, so gilt für die verkettete Funktion $x(x'(x''))$

$$\frac{\partial x^k}{\partial x''^r} = \frac{\partial x'^m}{\partial x''^r}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\ . \tag{5.205}$$

Antisymmetrisierte Ableitungen von antisymmetrischen Tensorfeldern mit unteren Indizes, die wie (5.202) und (5.204) transformieren, transformieren ihrerseits wieder wie ein Tensorfeld mit einem zusätzlichen Index, denn störende zweite Ableitungen $\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^r \partial x'^s}$ verschwinden durch die Antisymmetrisierung. Völlig analog zur Herleitung von (5.204) aus dem Transformationsgesetz (5.202) folgt aus (5.204), daß die antisymmetrisierte Ableitung von $F_{kl} = -F_{lk}$ wie ein Tensor transformiert

$$\partial'_t F'_{rs} + \partial'_r F'_{st} + \partial'_s F'_{tr} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^t} \frac{\partial x^k}{\partial x'^r} \frac{\partial x^l}{\partial x'^s} \big(\partial_m F_{kl} + \partial_k F_{lm} + \partial_l F_{mk} \big) \ . \tag{5.206}$$

Sind also die homogenen Maxwellgleichungen in einem Koordinatensystem erfüllt, so auch in jedem anderen, denn der Sachverhalt, daß alle Komponenten eines Tensors verschwinden, ist invariant unter Tensortransformationen.

Auch die inhomogenen Maxwellgleichungen (5.16) sind invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen, wenn wir die inhomogenen Maxwellgleichungen als Definition der Ladungs- und Stromdichte lesen. Jedes Viererpotential $A_m(x)$ ist Lösung der Maxwellgleichungen für irgendeine Ladungs- und Stromverteilung.

Aber Elektrovakuum, das ist ein Raumzeitgebiet mit $j^n(x) = 0$, in dem zwar elektromagnetische Feldstärken, nicht aber Ladungs- und Stromdichten vorhanden sind, ist nicht unter allgemeinen Koordinatentransformationen invariant.

Um Invarianztransformationen von Elektrovakuum zu bestimmen, untersuchen wir eine infinitesimalen Transformation, $x'^m = x^m - \xi^m$, $x^m = x'^m + \xi^m$, und die zugehörige Änderung $\delta A_s(x) = A'_s(x) - A_s(x)$ des Vektorfeldes. Das Vektorfeld ξ^m hängt zunächst beliebig von x ab. Da wir nur in erster Ordnung in ξ^m rechnen, ist $\xi^m(x) = \xi^m(x')$, denn wenn man $\xi^m(x + \xi)$ entwickelt, ist die Differenz von höherer Ordnung in ξ. Für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}$ erhalten wir daher $\delta_s{}^l + \partial_s \xi^l$ und (5.202) lautet näherungsweise

$$A'_s(x - \xi) = A'_s(x) - \xi^n \partial_n A'_s(x) = A_s(x) + (\partial_s \xi^n) A_n \ . \tag{5.207}$$

Bis auf Terme höherer Ordnung ist $\xi^n \partial_n A'_s(x) = \xi^n \partial_n A_s(x)$. Also ändert sich A_s um

$$\delta A_s(x) = \xi^n \partial_n A_s + (\partial_s \xi^n) A_n \ . \tag{5.208}$$

Dies ist die Lieableitung $\mathscr{L}_\xi A_s$ des Vektorfeldes A längs des Vektorfeldes ξ (A.149). Die Feldstärken ändern sich um

$$\delta F_{rs}(x) = \partial_r \delta A_s - \partial_s \delta A_r = \xi^n \partial_n F_{rs} + (\partial_r \xi^n) F_{ns} + (\partial_s \xi^n) F_{rn} \ . \tag{5.209}$$

Jedes Elektrovakuum wird in Elektrovakuum transformiert, wenn für alle $F_{rs} = -F_{sr}$ und für alle $\partial_r F_{ks}$, deren total antisymmetrischer Anteil $\partial_{[r} F_{ks]} = 0$ verschwindet (A.66) und die zu Elektrovakuum $\partial^k F_{ks} = 0$ gehören, die Änderung der Strom- und Ladungsdichte

$$\partial^k \delta F_{kl} = \xi^r \partial_r \partial^k F_{kl} + (\partial^k \xi^r) \partial_r F_{kl} + (\partial_k \xi^r) \partial^k F_{rl} + (\partial_l \xi^r) \partial^k F_{kr} + (\partial^k \partial_k \xi^r) F_{rl} + (\partial^k \partial_l \xi^r) F_{kr} \tag{5.210}$$

verschwindet. Die Terme mit Ableitungen von F_{rs} haben im Elektrovakuum die Form

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}(\partial_k \xi_r \eta_{ls} + \partial_r \xi_k \eta_{ls} - \partial_s \xi_r \eta_{lk} - \partial_r \xi_s \eta_{lk} + \eta_{rk} X_{ls} - \eta_{rs} X_{lk}) \partial^r F^{ks} \ , \\ X_{ls} = \frac{1}{3}(\partial_s \xi_l + \partial_l \xi_s - 2\eta_{ls} \partial_t \xi^t) \ , \end{gathered} \tag{5.211}$$

denn nur der in k und s antisymmetrische Teil trägt bei und $\eta_{rk} \partial^r F^{ks}$ verschwindet. Die Terme müssen sogar für beliebige $\partial^r F^{ks}$ verschwinden, ein etwaiger in r, k und s total antisymmetrischer Anteil und ein Anteil proportional zu η^{rk} oder η^{rs} trägt nicht bei. Daher müssen die Koeffizienten bei $\partial^r F^{ks}$ verschwinden

$$0 = \partial_k \xi_r \eta_{ls} + \partial_r \xi_k \eta_{ls} - \partial_s \xi_r \eta_{lk} - \partial_r \xi_s \eta_{lk} + \eta_{rk} X_{ls} - \eta_{rs} X_{lk} \ . \tag{5.212}$$

Summieren mit η^{ls} ergibt die konforme Killinggleichung (E.74) der flachen, vierdimensionalen Raumzeit

$$0 = \partial_k \xi_r + \partial_r \xi_k - \frac{1}{2} \eta_{kr} \partial_t \xi^t \tag{5.213}$$

als notwendige Bedingung an die infinitesimale Koordinatentransformation, damit sie jedes Elektrovakuum auf Elektrovakuum abbildet.

Gemäß (E.85) folgt im flachen Raum aus der konformen Killinggleichung

$$\partial_s \partial_l \xi_r = \eta_{rs} b_l + \eta_{rl} b_s - \eta_{sl} b_r \ . \tag{5.214}$$

Damit bestätigt man leicht, daß die konforme Killinggleichung auch hinreichend für das Verschwinden von (5.210) ist. Die Symmetrien von Elektrovakuum, die man aus infinitesimalen Transformationen erzeugen kann, sind konforme Transformationen.

Damit auch die materieerfüllten Maxwellgleichungen unter konformen Transformationen invariant sind, muß der Strom j_l so wie $\partial^k F_{kl}$ (5.210, 5.213) transformieren

$$\delta j_l = \xi^r \partial_r j_l + (\partial_l \xi^r) j_r + \frac{1}{2}(\partial_r \xi^r) j_l \ . \tag{5.215}$$

Dies ist die infinitesimale Transformation einer Vektordichte (B.45) vom Gewicht 1/2

$$j'_l(x') = \sqrt{\det \frac{\partial x}{\partial x'}} \, \frac{\partial x^s}{\partial x'^l} \, j_s(x(x')) \ . \tag{5.216}$$

Die Eigenschaften der Materie sind nicht unter der Symmetriegruppe der Maxwellgleichungen invariant und können daher nicht nur aus den Maxwellgleichungen abgeleitet werden: Freie Teilchen bewegen sich auf geraden Weltlinien. Diese Geraden werden nicht von eigentlichen konformen Transformationen, sondern nur von Dilatationen (E.94) und Poincaré-Transformationen, auf gerade Weltlinien abgebildet.

Zudem hat die Strahlung, die von angeregten Atomen und Molekülen ausgesendet wird, charakteristische Frequenzen. Wenn man diese Frequenzen durch eine Dilatation mit einem willkürlichen Faktor vergrößert, erhält man nicht die charakteristischen Frequenzen von Atomen und Molekülen, die tatsächlich existieren.

Daß die Poincaré-Gruppe und nur die Poincaré-Gruppe als Untergruppe der konformen Gruppe physikalisch mögliche Abläufe aufeinander abbildet, kann man nicht logisch aus den Maxwellgleichungen ableiten, sondern nur aus Beobachtungen auch anderer physikalischer Sachverhalte erschließen, die nicht von den Maxwellgleichungen beschrieben werden.

Die Lagrangedichte der Maxwell-Wirkung (5.188) ändert sich unter einer infinitesimalen Koordinatentransformation (5.209) um

$$\begin{aligned}\delta\big(F_{rs}F^{rs}\big) &= 2(\xi^n\partial_n F_{rs} + \partial_r\xi^n F_{ns} + \partial_s\xi^n F_{rn})F^{rs}\\ &= \partial_n\big(\xi^n F_{rs}F^{rs}\big) + 2(-\frac{1}{2}\eta_{lr}\partial_n\xi^n + \partial_r\xi_l + \partial_l\xi_r)F^l{}_s F^{rs}\ .\end{aligned} \tag{5.217}$$

Solch eine Transformation ist eine Symmetrie der Wirkung, wenn sich die Änderung der Lagrangedichte identisch in den Jet-Variablen A_n und $\partial_m A_n$ als Ableitungen schreiben läßt, wenn also die Euler-Ableitung von $\delta(F_{rs}F^{rs})$ verschwindet (G.62). Dazu ist notwendig und hinreichend, daß der letzte Term in (5.217) verschwindet und ξ^m die konforme Killinggleichung (E.62) erfüllt. Die Maxwellwirkung ist unter konformen Transformationen, nicht aber unter allgemeinen Koordinatentransformationen, invariant.

Die Maxwell-Lagrangedichte ist invariant unter Eichtransformationen

$$\delta_\Lambda A_s = \partial_s\Lambda\ , \tag{5.218}$$

denn die Feldstärken $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$ ändern sich nicht, wenn man zum Viererpotential einen Vierergradienten hinzufügt. Ergänzen wir jede konforme Transformation um eine Eichtransformation mit $\Lambda = -\xi^n A_n$, so treten im Transformationsgesetz des Viererpotentials keine Ableitungen von ξ^m auf und das Viererpotential transformiert mit eichinvarianten Feldstärken

$$\delta_{\text{kombiniert}} A_s(x) = \xi^n\partial_n A_s + (\partial_s\xi^n)A_n - \partial_s\big(\xi^n A_n\big) = \xi^n F_{ns}\ . \tag{5.219}$$

Zu jedem konformen Killingfeld ξ^m gehört eine Symmetrie der Maxwellwirkung unter der kombinierten Transformation und nach dem Noethertheorem der erhaltene Strom (G.21)

$$j^k_{\text{kombiniert}} = -\frac{1}{4\pi c}\big((\xi^n F_{nl})F^{kl} - \frac{1}{4}\xi^k F_{rs}F^{rs}\big) = \xi_n T^{nk}\ , \tag{5.220}$$

$$T^{kl} = -\frac{1}{4\pi c}\big(F^k{}_n F^{ln} - \frac{1}{4}\eta^{kl}F_{mn}F^{mn}\big)\ . \tag{5.221}$$

Dabei sind T^{kl} die Komponenten des Energie-Impulstensors (5.24).

Die Komponenten des Energie-Impulstensors sind als Energiedichte T^{00}, Energiestrom T^{0i}, Impulsdichten T^{i0} und Impulsströme T^{ij}, $\quad i,j \in \{1,2,3\}$, der elektromagnetischen Felder zu deuten, denn per Definition ist die Energie die Erhaltungsgröße, die zur Invarianz der Wirkung unter Zeittranslationen $\xi^m = (1,0,0,0)$ gehört, und der Impuls gehört zur Invarianz unter räumlichen Translationen, zum Beispiel zu $\xi^m = (0,1,0,0)$.

Da die räumlichen Komponenten T^{ij} des Energie-Impulstensors Impulsstromdichten sind, ergeben sie, mit einem räumlichen Flächenelement $\mathrm{d}^2 f\, n^j$ kombiniert, den pro Zeit

durchfließenden Impuls $F^i = T^{ij}\, n^j\, \mathrm{d}^2 f$. Endet dieser Impulsstrom an einer Grenzfläche und gilt insgesamt Impulserhaltung, so nimmt die Grenzfläche pro Zeit diesen Impuls auf. Auf die Grenzfläche wirkt also die Kraft F. Insbesondere bewirkt der Anteil $T^{ij} = p\delta^{ij}$ des Energie-Impulstensors auf jede Grenzfläche eine Kraft pro Fläche in Normalenrichtung, das heißt: bei einem ruhenden Medium ist p der Druck.

Ein gleichförmig bewegter Beobachter, der das Ereignis mit den Poincaré-transformierten Koordinaten $x'^m = \Lambda^m{}_n x^n + a^m$ durchläuft, mißt dort elektromagnetische Feldstärken (5.204)

$$F'_{mn}(x') = \Lambda_m{}^k\Lambda_n{}^l F_{kl}(x)\ . \tag{5.222}$$

Es stimmen nämlich die Elemente $\Lambda^{-1\,k}{}_m$ der inversen Lorentzmatrix wegen $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$ (D.21) mit $\Lambda_m{}^k = \eta_{mn}\Lambda^n{}_l\,\eta^{lk}$ überein, $\Lambda^{T-1} = \eta\Lambda\eta^{-1}$.

Für die Komponenten $E^i = F_{0i}$ und $B^k = -\epsilon_{kij}F_{ij}/2$ des elektrischen und magnetischen Feldes besagt das Transformationsgesetz insbesondere, wenn wir die Summation aufspalten,

$$\begin{aligned}E'^{\,i} &= (\Lambda_0{}^0\Lambda_i{}^j - \Lambda_0{}^j\Lambda_i{}^0)E^j + \Lambda_0{}^j\Lambda_i{}^k(-\epsilon_{jkl}B^l)\ ,\\ B'^{\,n} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{nij}\big((\Lambda_i{}^0\Lambda_j{}^k - \Lambda_i{}^k\Lambda_j{}^0)E^k + \Lambda_i{}^k\Lambda_j{}^l(-\epsilon_{klm}B^m)\big)\ .\end{aligned} \tag{5.223}$$

Dabei sind, falls sich der Beobachter mit Geschwindigkeit v in Richtung $\vec n$ bewegt und unverdrehte Richtungen verwendet,

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma\ ,\quad \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = -\gamma v n^i\ ,\quad \Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + (\gamma-1)n^i n^j\ ,\quad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}\ , \tag{5.224}$$

die Komponenten der Lorentzmatrix (3.9). Der bewegte Beobachter mißt folglich

$$\begin{aligned}\vec E' &= \gamma\vec E + \vec n\cdot\vec E\,(1-\gamma)\,\vec n + \gamma v\,\vec n\times\vec B\ ,\\ \vec B' &= \gamma\vec B + \vec n\cdot\vec B\,(1-\gamma)\,\vec n - \gamma v\,\vec n\times\vec E\ ,\end{aligned} \tag{5.225}$$

oder, wenn wir die Felder in ihre Anteile parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung $\vec n$ zerlegen,

$$\begin{aligned}\vec E'_\parallel &= \vec E_\parallel\ ,\quad \vec E'_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\vec E_\perp + \vec v\times\vec B)\ ,\\ \vec B'_\parallel &= \vec B_\parallel\ ,\quad \vec B'_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\vec B_\perp - \vec v\times\vec E)\ .\end{aligned} \tag{5.226}$$

Es ist bemerkenswert, daß diese ungleiche Transformation der parallelen und senkrechten Anteile zur Folge hat, daß das elektrische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung jederzeit zu dem Ort zeigt, an dem es augenblicklich ist: Ein bei $\vec x = 0$ ruhendes Teilchen der Ladung q erzeugt bei (t,x,y,z) das elektrische Feld

$$\vec E(t,x,y,z) = \frac{q}{r^3}\vec r \tag{5.227}$$

Die y- und z-Komponenten des elektrischen Feldes erscheinen einem Beobachter, der sich mit Geschwindigkeit v entgegen der x-Achse bewegt, um $1/\sqrt{1-v^2}$ vergrößert,

$$\big(E'_x, E'_y, E'_z\big) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\big(\sqrt{1-v^2}x, y, z\big)\ , \tag{5.228}$$

und in eigenen Koordinaten $x = (x' - vt')/\sqrt{1-v^2}$, $y = y'$ und $z = z'$,

$$\begin{aligned}\vec{E}'(t',x',y',z') &= \frac{(1-v^2)\,q}{((x'-vt')^2 + (1-v^2)(y'^2+z'^2))^{3/2}}(x'-vt',y',z') \\ &= \frac{(1-v^2)\,q}{(1-v^2\sin^2\theta)^{3/2}}\frac{\vec{e}(t')}{r'^2}\ .\end{aligned} \tag{5.229}$$

Das elektrische Feld eines Teilchens, das die Weltlinie $\vec{w}(t) = \vec{w}(0) + \vec{v}t$ gleichförmig durchläuft, zeigt zur Zeit t am Ort $\vec{x}$ in Richtung $\vec{x} - \vec{w}(t) = r\vec{e}$ vom augenblicklichen Ort des Teilchens $\vec{w}(t)$ zu $\vec{x}$. Das Feld ist nicht radialsymmetrisch, sondern hängt vom Winkel θ zwischen der Geschwindigkeit und der Richtung $\vec{e}$ vom Teilchen ab. In Bewegungsrichtung ist es um $(1-\vec{v}^2)^{3/2}$ schwächer als quer dazu.

5.9 Geladenes Punktteilchen

Ein relativistisches, geladenes Punktteilchen, das eine Weltlinie $\Gamma : s \mapsto z(s)$ durchläuft, koppelt durch einen Zusatzterm zur Wirkung des freien Teilchens (4.14) und der Maxwellwirkung des freien elektromagnetischen Feldes (5.188) an die elektromagnetischen Felder $A_l(x)$. Die Wechselwirkung (in Maßsystemen mit $c = 1$) beträgt

$$W_{\text{Kopplung}}[A,\Gamma] = -q\int \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}z^m}{\mathrm{d}s}A_m(z(s))\ . \tag{5.230}$$

Die Wechselwirkung W_{Kopplung} ist bis auf Randterme invariant unter Reparametrisierung $s(s')$ der Weltlinie und unter Eichtransformationen $\delta A_m = \partial_m\Lambda$. Die Wechselwirkung ist auch invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen, allerdings ist die Maxwell-Wirkung nur unter der Untergruppe der konformen Transformationen invariant und die Wirkung der Punktteilchen nur unter der noch kleineren Gruppe der Poincaré-Transformationen. Wegen der Translationsinvarianz aller Beiträge zur Wirkung sind der Gesamtimpuls und die Gesamtenergie erhalten.

Wenn wir die Weltlinie $z(s)$ variieren, ändert sich der Integrand von W_{Kopplung} in erster Ordnung um

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}(z^m+\delta z^m)}{\mathrm{d}s}A_m(z+\delta z) - \frac{\mathrm{d}z^m}{\mathrm{d}s}A_m(z) = \frac{\mathrm{d}\delta z^m}{\mathrm{d}s}A_m(z) + \frac{\mathrm{d}z^m}{\mathrm{d}s}\delta z^n\partial_n A_m(z) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(\delta z^m A_m\big) - \delta z^m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A_m(z(s)) + \frac{\mathrm{d}z^m}{\mathrm{d}s}\delta z^n\partial_n A_m(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(\delta z^m A_m\big) + \delta z^n F_{nm}\frac{\mathrm{d}z^m}{\mathrm{d}s}\ .\end{aligned} \tag{5.231}$$

Der erste Term ist eine Ableitung, die zu $\delta W_{\text{Kopplung}}$ nur Randterme beiträgt und die verschwinden, wenn die Variation δz^m am Rand verschwindet. Kombiniert mit der Variation der Wirkung (4.14) des freien Teilchens ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}p^n}{\mathrm{d}s} = q\,F^n{}_m\,\frac{\mathrm{d}z^m}{\mathrm{d}s} \tag{5.232}$$

mit Teilchenimpulsen p^n, die durch (4.103) gegeben sind.

Die Bewegungsgleichungen sind invariant unter Reparametrisierungen $s(s')$. Wählen wir als Bahnparameter die Zeit $s = z^0(s)$, so stimmen sie überein mit den Gleichungen (5.35), die die Erhaltung der Gesamtenergie und des Gesamtimpulses garantieren und aus denen man die Lorentzkraft abliest.

Um die Auswirkung der Kopplung auf das elektromagnetische Feld zu bestimmen, schreiben wir sie (in Maßsystemen mit $c = 1$) als

$$W_{\text{Kopplung}}[A,\Gamma] = -q\int \mathrm{d}^4y\int \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}z^l}{\mathrm{d}s}\,\delta^4(y - z(s))A_l(y) \tag{5.233}$$

und lesen den elektromagnetischen Strom als Variationsableitung $-\frac{\delta W_{\text{Kopplung}}}{\delta A_l}$ (5.193) ab

$$j^l(y) = q\int \mathrm{d}s\,\delta^4(y - z(s))\,\frac{\mathrm{d}z^l}{\mathrm{d}s}\ . \tag{5.234}$$

Wählen wir in diesem reparametrisierungsinvarianten Ausdruck speziell die Parametrisierung $s = z^0(s)$, so können wir mit der δ-Funktion $\delta(y^0 - s)$ die Integration ausführen und erhalten für die elektrische Ladungs- und Stromdichte des Punktteilchens mit Bahnkurve $\vec{z}(t)$

$$\rho(t,\vec{y}) = q\,\delta^3(\vec{y} - \vec{z}(t))\ ,\quad \vec{j}(t,\vec{y}) = q\,\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t}\,\delta^3(\vec{y} - \vec{z}(t))\ . \tag{5.235}$$

Die Strom- und Ladungsdichte erzeugt gemäß (5.161) das skalare Potential

$$\phi(t,\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3y\,\frac{\rho(t_{\text{ret}},\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = q\int \mathrm{d}^3y\,\frac{\delta^3(\vec{y} - \vec{z}(t_{\text{ret}}))}{|\vec{x} - \vec{y}|}\ ,\quad t_{\text{ret}} = t - |\vec{x} - \vec{y}|\ . \tag{5.236}$$

Da die retardierte Zeit $t_{\text{ret}} = t - |\vec{x} - \vec{y}|$ von $\vec{y}$ abhängt, ist das Argument der δ-Funktion $\vec{y}' = \vec{y} - \vec{z}(t_{\text{ret}})$ eine verkettete Funktion der Integrationsvariablen $\vec{y}$. Solch eine verkettete δ-Funktion, angewendet auf eine Testfunktion f, ergibt nach Integralsubstitutionssatz

$$\int \mathrm{d}^3y\,\delta^3(y'(y))f(y) = \int \mathrm{d}^3y'\,\Big|\det\frac{\partial y}{\partial y'}\Big|\,\delta^3(y')f(y(y')) = \frac{1}{\big|\det\frac{\partial y'}{\partial y}\big|_{|\hat{y}}}\,f(\hat{y})\ ,\quad y'(\hat{y}) = 0\ . \tag{5.237}$$

Im vorliegenden Fall verschwindet $\vec{y}'$ bei $\vec{y} = \vec{z}(t_{\text{ret}})$, die Testfunktion f ist das Coulomb-Potential $1/|\vec{x} - \vec{z}(t_{\text{ret}})|$. Die Jacobi-Matrix hat die Komponenten

$$\frac{\partial y'^i}{\partial y^j} = \delta^i{}_j + N^i{}_j\ ,\quad N^i{}_j = -\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}t}\frac{x^j - z^j}{|\vec{x} - \vec{z}|}\ ,\quad \det\frac{\partial y'}{\partial y} = 1 - \frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{x} - \vec{z}}{|\vec{x} - \vec{z}|}\ . \tag{5.238}$$

und, weil N vom Rang 1 ist, die angegebene Determinante (I.10).

Damit ergibt sich das skalare Potential und mit gleicher Rechnung das Vektorpotential

$$\phi(t,\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x} - \vec{z}(t_{\text{ret}})| - \frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{x}-\vec{z}}{|\vec{x}-\vec{z}|}}\ ,\quad \vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x} - \vec{z}(t_{\text{ret}})| - \frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{x}-\vec{z}}{|\vec{x}-\vec{z}|}}\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t}\ . \tag{5.239}$$

Das Viererpotential ist nach Alfred-Marie Liénard und Emil Wiechert benannt, die es erstmalig angegeben haben. Schreibt man das Liénard-Wichert-Potential als

$$A^m(x) = q\,\frac{u^m}{y\cdot u}\ , \tag{5.240}$$

so lassen sich die zugehörigen Feldstärken mit erträglichem algebraischen Aufwand berechnen. Hierbei ist $u = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ der normierte Tangentialvektor an die Weltlinie des Teilchens im Schnittpunkt $z(s(x))$ mit dem Rückwärtslichtkegel von x, die wir durch die Eigenzeit s einer Uhr parametrisieren, die auf der Weltlinie mitgeführt wird,

$$u = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec v^{\,2}}}\begin{pmatrix}1\\ \vec v\end{pmatrix}\ ,\quad \vec v = \frac{\mathrm{d}\vec z}{\mathrm{d}t}\ ,\quad u^2 = 1\ . \tag{5.241}$$

Der lichtartige Vierervektor $y = x - z(s(x))$ zeigt von der Ursache zur Auswirkung: vom Ereignis $z(s(x))$, in dem die Weltlinie des Teilchens den Rückwärtslichtkegel von x durchläuft, zum Beobachter bei x im Abstand r und Richtung $\vec n$

$$y = \begin{pmatrix}|\vec x - \vec z(s(x))|\\ \vec x - \vec z(s(x))\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\ \vec n\end{pmatrix}\ ,\quad y^2 = 0\ ,\quad y\cdot u = \frac{r}{\sqrt{1-\vec v^{\,2}}}\,(1-\vec v\,\vec n)\ . \tag{5.242}$$

Die Eigenzeit s auf der Weltlinie definiert die Zeit $s(x)$, die ein Beobachter bei x mit Licht von $z(s)$ gerade auf der Uhr des Teilchens angezeigt sieht. Sie hat überall auf dem Vorwärtslichtkegel von $z(s)$ den Wert s.

Den Vierergradienten k_m von $s(x)$ bestimmen wir durch Ableiten von $y^2 = 0$,

$$0 = (\delta_m{}^n - u^n\,\partial_m s)\,y_n\ ,\quad k_m := \partial_m s = \frac{y_m}{y\cdot u}\ . \tag{5.243}$$

Er ist lichtartig, $k^2 = 0$, und hat die Zerlegung

$$k = \frac{\sqrt{1-\vec v^{\,2}}}{1-\vec v\vec n}\begin{pmatrix}1\\ \vec n\end{pmatrix}\ . \tag{5.244}$$

Damit können wir die Ableitungen von y und $y\cdot u$ durch die Viererbeschleunigung

$$\dot u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\vec v^{\,2}}}\begin{pmatrix}1\\ \vec v\end{pmatrix}\Big) = \frac{1}{(1-\vec v^{\,2})^2}\begin{pmatrix}\vec v\,\vec a\\ \vec a\,(1-\vec v^{\,2}) + \vec v\,(\vec v\,\vec a)\end{pmatrix}\ ,\quad \vec a = \frac{\mathrm{d}^2\vec z}{\mathrm{d}t^2} \tag{5.245}$$

und die bisher eingeführten Größen ausdrücken,

$$\begin{aligned}\partial_m y^n &= \delta_m{}^n - u^n k_m\ ,\\ \partial_m(y\cdot u) &= (\partial_m y^n)\,u_n + y\cdot\dot u\,k_m = u_m + (y\cdot\dot u - 1)\,k_m\ .\end{aligned} \tag{5.246}$$

Wir erhalten so die Feldstärken

$$\begin{aligned}F_{mn} &= \partial_m A_n - \partial_n A_m = -\frac{q}{(y\cdot u)^2}\partial_m(y\cdot u)\,u_n + \partial_m u_n\frac{q}{(y\cdot u)} - m\leftrightarrow n\\ &= k_m w_n - k_n w_m\ ,\quad w_m = \frac{q}{(y\cdot u)^2}u_m + \frac{q}{(y\cdot u)}(\dot u_m - u_m\,k\cdot\dot u)\ .\end{aligned} \tag{5.247}$$

Insbesondere besagt dies für das elektrische Feld, $E^i = F_{0i} = k_0 w_i - k_i w_0$,

$$\vec E(t,\vec x) = \frac{q\,(1-\vec v^{\,2})}{r^2\,(1-\vec v\,\vec n)^3}\big(\vec n - \vec v\big) + \frac{q}{r\,(1-\vec v\,\vec n)^3}\,\vec n\times\big((\vec n-\vec v)\times\vec a\big)\ . \tag{5.248}$$

Sein beschleunigungsunabhängiger Teil fällt mit $1/r^2$ ab und zeigt nicht in Richtung $\vec n$ von der Ursache, dem retardierten Ereignis z zur Auswirkung bei x , sondern in Richtung von $\vec x-(\vec z+r\vec v)$, weg von dem Bestimmungsort $\vec z+r\vec v$, den das Teilchen mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\vec v$ in dem Augenblick erreichen würde, in dem es sich bei $\vec x$ auswirkt.

Der beschleunigungsabhängige Teil, das Strahlungsfeld, fällt wie $1/r$ ab und ist senkrecht auf der Richtung $\vec n$ von der Ursache zum Ort $\vec x$.

Das Magnetfeld des Teilchens steht senkrecht auf $\vec n$ und $\vec E$. Denn es ist $k^0 = |\vec k|$ und

$$B^k = -\epsilon_{ijk}k_i w_j = \epsilon_{ijk}k^i w_j = \epsilon_{ijk}\,k^i/k^0\,E^j\ ,\quad \vec B = \vec n\times\vec E\ . \tag{5.249}$$

Die Energiestromdichte $\vec S = \vec E\times\vec B/(4\pi)$ des Strahlungsfeldes zeigt in Richtung $\vec n$ von der Ursache weg: eine beschleunigte Punktladung strahlt Energie ab.

Mathematisch sind die Lösungen der Feldgleichungen auf den Lösungskurven der Bahngleichungen singulär. Es gibt keine stetig differenzierbare Felder und Bahnen, die die Wirkung (5.188, 5.230, 4.14) stationär machen.

Auch aus physikalischen Gründen darf die Ladung nicht auf einen Punkt konzentriert sein. Falls keine Wechselwirkung negativ zur Energiedichte beiträgt, dann kann die Ladung eines Elektrons nicht auf eine Kugelschale mit einem kleineren Radius als dem halben Elektronradius

$$r_{\text{Elektron}} = \frac{e^2}{m_{\text{Elektron}}c^2} = 2{,}818\cdot 10^{-15}\mathrm{m} \tag{5.250}$$

konzentriert sein, sonst enthielte schon das elektrische Feld außerhalb des ruhenden Elektrons mehr als seine Ruhenergie.

6 Teilchen im Gravitationsfeld

6.1 Metrik

Das Längenquadrat von Tangentialvektoren am Punkt x ist in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht durch (2.43), sondern allgemeiner durch

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} := \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s} g_{mn}(x) \tag{6.1}$$

gegeben.[1] Die Funktionen $g_{mn}(x)$ sind die Komponenten der Metrik

$$g_{mn}(x) = g_{nm}(x) \ , \tag{6.2}$$

die wir als Skalarprodukt $g_{mn} = g(\partial_m, \partial_n) = \partial_m \cdot \partial_n$ der Tangentialvektoren ∂_m an die Koordinatenlinien deuten können. Die Metrik einer gekrümmten Raumzeit ist x-abhängig. In der flachen Raumzeit der Speziellen Relativitätstheorie mit Längenquadrat (2.43) hat die Metrik in kartesischen Koordinaten die Form (4.107)

$$g_{\text{flach}\,mn} = \eta_{mn} \ . \tag{6.3}$$

Auch in gekrümmten Räumen gibt es für jeden Punkt x, aber nicht für alle Punkte gemeinsam, Koordinatensysteme, so daß dort die Metrik mit der Metrik der flachen Raumzeit übereinstimmt $g_{mn|x} = \eta_{mn}$. Geometrische Eigenschaften kleiner Objekte, auf deren Abmessungen sich die Metrik nicht wesentlich ändert, und Abläufe von Ereignissen, während derer sich die Metrik nicht wesentlich ändert, stimmen daher in der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Speziellen Relativitätstheorie überein. Insbesondere gelten in kleinen Raumzeitbereichen die geometrischen Konstruktionen, aus denen wir Zeitdehnung und Verkürzung bewegter Maßstäbe abgelesen haben und die darauf beruhen, daß Längenmessungen mit festen Meßlatten dieselben Werte ergeben wie Laufzeitmessungen mit Licht. Die Lichtgeschwindigkeit ist also in kleinen Raumzeitgebieten konstant. In größeren Raumzeitgebieten stehen keine starren Meßlatten zur Verfügung, Lichtstrahlen werden vom Gravitationsfeld schwerer Körper abgelenkt. Bei großen Abständen und über lange Zeiten werden Begriffe wie „konstante Lichtgeschwindigkeit“, „gleichzeitige Ereignisse“ oder „räumlicher Abstand“ physikalisch unwichtig und unwirklich.

[1] Wir verwenden die Einsteinsche Summationskonvention. Jeder in einem Term doppelt vorkommende Index enthält die Anweisung, über seinen Laufbereich, hier von 0 bis 3, zu summieren.

6.2 Geodätische Linien und Beschleunigung

Die Metrik der Raumzeit bestimmt den Gang von Uhren, die auf Weltlinien $\Gamma:\ s\mapsto x(s)$ Ereignisse $A=x(\underline{s})$ und $B=x(\overline{s})$ durchlaufen. Zwischen diesen Ereignissen vergeht auf einer idealen Uhr die Zeit

$$\tau(B,A;\Gamma)=\frac{1}{c}\int_{\underline{s}}^{\overline{s}}\mathrm{d}s\,\sqrt{\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\,g_{kl}(x(s))}\ . \tag{6.4}$$

Freie Teilchen im Gravitationsfeld durchlaufen, wie wir in Abschnitt 7.3 ableiten, Weltlinien Γ, auf denen diese Zeit zwischen irgend zwei genügend benachbarten[2] Ereignissen A und B größer als auf allen anderen Linien wird, die ebenfalls A und B verbinden. Diese Weltlinien heißen die zeitartig geodätischen Linien oder, weniger technisch, die zeitartigen Geraden der gekrümmten Raumzeit mit Metrik g_{mn}.

Für die Weltlinien $x(s)$ freier Teilchen im Gravitationsfeld gelten also die Euler-Lagrange-Gleichungen (4.33) mit der Lagrangefunktion (vergleiche mit (4.14))

$$\mathscr{L}(x,\dot x)=-m\,c\,\sqrt{g_{kl}(x)\,\dot x^k\,\dot x^l}\ , \tag{6.5}$$

wobei wir kurz $\dot x^k$ für $\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}$ schreiben. Die Eulerableitung (4.28) dieser Lagrangefunktion ist

$$\begin{aligned}\frac{\hat\partial\sqrt{g_{kl}\,\dot x^k\,\dot x^l}}{\hat\partial x^m}&=\frac{\partial_m g_{kl}\,\dot x^k\,\dot x^l}{2\sqrt{g_{tu}\,\dot x^t\,\dot x^u}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{g_{ml}\,\dot x^l}{\sqrt{g_{tu}\,\dot x^t\,\dot x^u}}=\\&=\frac{1}{2\sqrt{g_{tu}\,\dot x^t\,\dot x^u}}\big(\partial_m g_{kl}\,\dot x^k\,\dot x^l-2\partial_k g_{ml}\,\dot x^k\,\dot x^l\big)-g_{ml}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\dot x^l}{\sqrt{g_{tu}\,\dot x^t\,\dot x^u}}\ .\end{aligned} \tag{6.6}$$

Bezeichnen wir mit

$$u^n=\frac{\dot x^n}{\sqrt{g_{kl}\,\dot x^k\,\dot x^l}} \tag{6.7}$$

den normierten Tangentialvektor und verwenden wir die Christoffelsymbole (C.106) als Abkürzung für die auftretenden partiellen Ableitungen der Metrik

$$\Gamma_{kl}{}^n=\frac{1}{2}g^{nm}\big(\partial_k g_{ml}+\partial_l g_{mk}-\partial_m g_{kl}\big)\ ,\quad \Gamma_{kl}{}^n=\Gamma_{lk}{}^n\ , \tag{6.8}$$

wobei g^{nm} mit oberen Indizes die Komponenten der inversen Metrik (A.106) sind, so hat die Eulerableitung die Form

$$\frac{\hat\partial\sqrt{g_{kl}\,\dot x^k\,\dot x^l}}{\hat\partial x^m}=-g_{mn}\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u^n+\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\,\Gamma_{kl}{}^n\,u^l\big)\ . \tag{6.9}$$

[2] Für beliebige Ereignisse A und B auf der Weltlinie freier Teilchen ist nur gesichert, daß die Weltlinie stationäre Länge hat. Dies ist ähnlich wie bei einem Großkreis auf einer Kugeloberfläche. Sind zwei Punkte auf dem Großkreis weiter als einen halben Kugelumfang entfernt, so ist die Weglänge auf dem Großkreis kein lokales Minimum.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen legen die Parametrisierung der Weltlinie nicht fest. Denn die Eigenzeit ist ein Funktional der Bahn, das nicht von der Parametrisierung abhängt (4.4). Ist $s(s')$ eine monotone, differenzierbare Funktion, so ist $x'^m(s')=x^m(s(s'))$ wegen der Kettenregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ genau dann eine Lösung, wenn $x^m(s)$ die Gleichungen erfüllt.

Daher können wir als Parameter s die Zeit wählen, die die mitgeführte Uhr bei $x(s)$ anzeigt. Dann hat der Tangentialvektor konstantes Längenquadrat c^2 (4.6)

$$g_{tu}\,\dot x^t\,\dot x^u=c^2\ , \tag{6.10}$$

und die Eulerableitung vereinfacht sich.

$$c\frac{\hat\partial\sqrt{g_{kl}\,\dot x^k\,\dot x^l}}{\hat\partial x^m}\Big|_{g_{tu}\dot x^t\dot x^u=c^2}=-g_{mn}\left(\ddot x^n+\Gamma_{kl}{}^n\,\dot x^k\,\dot x^l\right) \tag{6.11}$$

Ist der Bahnparameter s die Eigenzeit, so ist der Vektor

$$b^n=\ddot x^n+\Gamma_{kl}{}^n\,\dot x^k\,\dot x^l \tag{6.12}$$

die Beschleunigung längs einer Weltlinie $x^m(s)$. Frei fallende Teilchen sind per Definition unbeschleunigt. Ihre Weltlinien machen die zu (6.5) gehörige Wirkung extremal und erfüllen in der Parametrisierung (6.10) die Geodätengleichung (C.114)

$$\ddot x^n+\Gamma_{kl}{}^n\,\dot x^k\,\dot x^l=0\ . \tag{6.13}$$

Dabei braucht $g_{mn}\,\dot x^m\,\dot x^n=c^2$ nur anfänglich gefordert werden. Längs einer geodätischen Linie ändert sich das Längenquadrat des Tangentialvektors nicht

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(g_{mn}\,\dot x^m\,\dot x^n\big)=2\ddot x^n\,\dot x^m\,g_{mn}+\dot x^m\,\dot x^n\,\dot x^k\,\partial_k g_{mn}=2b^n\,\dot x^m\,g_{mn}=0\ . \tag{6.14}$$

Ist eine Weltlinie durch ihre Eigenzeit parametrisiert, so hat ihr Tangentialvektor konstantes Längenquadrat und ist senkrecht zur Beschleunigung b^n. Sie hat daher für einen Beobachter, der die Weltlinie durchläuft, nur räumliche Komponenten.

6.3 Effektives Gravitationspotential

Gravitation beeinflußt freie Teilchen dadurch, daß die Metrik g_{mn} nicht mehr die flache Metrik η_{mn} (4.107) ist, sondern eine Lösung der Einsteingleichungen. Die Einsteingleichungen beschreiben den Einfluß von Energie- und Impulsstromdichten auf die Metrik. Wir diskutieren sie später in Abschnitt 8.1 und verwenden hier das Ergebnis (8.37) von Abschnitt 8.4, nämlich die Schwarzschildlösung der Einsteingleichungen. Diese Lösung beschreibt die Gravitation außerhalb einer kugelsymmetrischen Massenverteilung.

In der Schwarzschildmetrik hat das Längenquadrat (bei verschwindender kosmologischer Konstante) außerhalb der Zentralmasse in Kugelkoordinaten $(x^0,x^1,x^2,x^3)=(c\,t,r,\theta,\varphi)$ die Form

$$g_{kl}(x)\,\dot x^k\,\dot x^l=c^2(1-\frac{r_0}{r})\,\dot t^2-\frac{\dot r^2}{(1-\frac{r_0}{r})}-r^2\,\dot\theta^2-r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\ . \tag{6.15}$$

Der Parameter r_0 heißt Schwarzschildradius. Er ergibt sich als Integrationskonstante der Einsteingleichungen und wird in Gleichung (6.23) mit der Masse, die das Gravitationsfeld erzeugt, identifiziert. Ist die Zentralmasse so komprimiert, daß sie sich vollständig im Inneren des Schwarzschildradius befindet, so kann sie, wie wir in Abschnitt 8.5 sehen werden, kein Licht nach außen abstrahlen. Sie ist also schwarz und heißt Schwarzes Loch.[3]

Die Geodätengleichung der Schwarzschildmetrik ist lösbar, weil die Bahnen freier Teilchen aus den Erhaltungssätzen konstruiert werden können.

Die Wirkung $W[\Gamma] = -m\,c^2\,\tau(\Gamma)$, $\Gamma : s \mapsto x(s)$,

$$W[\Gamma] = -m\,c\int \mathrm{d}s\,\sqrt{c^2(1-\frac{r_0}{r})\,\dot t^2 - \dot r^2/(1-\frac{r_0}{r}) - r^2\,\dot\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2} \tag{6.16}$$

legt die Parametrisierung der Weltlinie Γ nicht fest (4.4). Wir wählen den Bahnparameter s so, daß der Tangentialvektor $\dot x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ überall längs der Bahn dieselbe Länge c hat.

$$c^2\,(1-\frac{r_0}{r})\,\dot t^2 - \frac{\dot r^2}{(1-\frac{r_0}{r})} - r^2\dot\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 = c^2 \tag{6.17}$$

Dann ist der Bahnparameter s die Zeit, die eine mitgeführte Uhr anzeigt.

Die Metrik ist drehinvariant. Das zeigt sich in Kugelkoordinaten daran, daß die $\dot\theta$- und $\dot\varphi$-Abhängigkeit des Längenquadrats $r^2\big(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\big)$ genauso ist wie im flachen Raum auf der Kugeloberfläche in Kugelkoordinaten und daran, daß die übrigen Terme im Längenquadrat nicht von θ und φ abhängen. Wegen der Drehinvarianz der Wirkung (6.16) ist nach Noethertheorem der Drehimpuls $\vec L = \vec r \times \vec p$ erhalten. Da das Kreuzprodukt senkrecht auf seinen Faktoren steht, also $\vec r \cdot \vec L = 0$ gilt, und da $\vec L$ konstant ist, liegt $\vec r$ immer in der Ebene, auf der $\vec L$ senkrecht steht. Die Bahnkurve ist also eben. In Kugelkoordinaten heißt dies, daß die Bewegung nach Wahl der Koordinatenachsen in der x-y-Ebene verläuft, also mit zeitlich konstantem

$$\theta = \frac{\pi}{2}\ . \tag{6.18}$$

Es sind mit der Eigenschaft, daß die Bahnkurve eben ist, noch nicht alle Konsequenzen der Drehinvarianz ausgewertet; ebene Bahnen würden schon aus konstanter Richtung des Drehimpulses folgen. Daß auch der Betrag des Drehimpulses erhalten ist, zeigt sich daran, daß die Wirkung (6.16) invariant unter Translationen von φ ist. Der Winkel φ ist eine zyklische Variable. Der zu φ konjugierte Impuls $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\dot\varphi}$, der Drehimpuls L, ist zeitlich konstant (4.55) und hat bei unserer Wahl des Bahnparameters (6.17) den Wert

$$L = m\,r^2\,\dot\varphi\ . \tag{6.19}$$

Die Wirkung (6.16) ist nicht nur drehinvariant, sondern die Lagrangefunktion hängt auch nicht von der Zeit t ab, es ist also auch t eine zyklische Variable, und das Negative des dazu konjugierten Impulses ist erhalten

$$E = m\,c^2\,\big(1-\frac{r_0}{r}\big)\,\dot t\ . \tag{6.20}$$

[3] Reizvollerweise setzt sich der Name Schwarzschild aus Abschirmung und dem resultierenden Erscheinungsbild zusammen.

Die zu Zeittranslationen gehörige Erhaltungsgröße ist definitionsgemäß die Energie E.

Setzen wir (6.18), (6.19) und (6.20) in (6.17) ein und multiplizieren wir mit $-\frac{m}{2}(1-\frac{r_0}{r})$, so erhalten wir einen Energiesatz (4.60) für die Bewegung der Radialkoordinate r

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot r^2 - \frac{m\,r_0\,c^2}{2\,r} + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} - \frac{L^2\,r_0}{2\,m\,r^3} = \frac{E^2}{2\,m\,c^2} - \frac{m\,c^2}{2}\ . \tag{6.21}$$

Bis auf den $\frac{1}{r^3}$-Term im effektiven Potential, der die Drehimpulsbarriere $\frac{L^2}{2\,m\,r^2}$ der Newtonschen Physik in $\frac{L^2}{2\,m\,r^2}\,\big(1-\frac{r_0}{r}\big)$ abändert, und bis auf die Benennung der Erhaltungsgröße, ist dies der Energiesatz (4.76) für die Radialbewegung eines Teilchens mit Masse m im Newtonschen Gravitationspotential[4] einer Zentralmasse M

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot r^2 - G\,\frac{m\,M}{r} + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} = E_{\text{Newton}}\ . \tag{6.22}$$

Der Koeffizient $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{sec}^2}$ [23, 54] ist Newtons Gravitationskonstante.

Bei großem Abstand von der Zentralmasse wird der Term $-\frac{L^2\,r_0}{2\,m\,r^3}$ vernachlässigbar und die Bahnen in der Schwarzschildmetrik stimmen mit den Bahnen im Newtonschen Gravitationsfeld einer Zentralmasse M überein, wenn wir den Schwarzschildradius als

$$r_0 = \frac{2\,G\,M}{c^2} \tag{6.23}$$

identifizieren. Da Massen positiv sind, ist auch der Schwarzschildradius r_0 positiv. Bei der Sonne beträgt er $r_{0|_{\text{Sonne}}} = 2{,}953\cdot 10^3\mathrm{m}$, bei der Erde $r_{0|_{\text{Erde}}} = 8{,}87\cdot 10^{-3}\mathrm{m}$ [23].

Der Energiesatz für die Radialbewegung im Gravitationsfeld einer Zentralmasse M lautet nach Identifizierung des Schwarzschildradiusses in der Allgemeinen Relativitätstheorie

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot r^2 - G\,\frac{m\,M}{r} + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} - G\,\frac{L^2\,M}{m\,c^2\,r^3} = \frac{E^2}{2\,m\,c^2} - \frac{m\,c^2}{2}\ . \tag{6.24}$$

6.4 Periheldrehung

Wegen des zusätzlichen $\frac{1}{r^3}$-Terms ist die Gravitation in der Allgemeinen Relativitätstheorie stärker anziehend als die Newtonsche Gravitation. Die Bahnkurven der Planeten um die Sonne sind nur noch näherungsweise geschlossene Ellipsen $r(\varphi) = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$ (4.81) mit großer Halbachse a und Exzentrizität e, auf denen r periodisch zwischen maximalem Abstand $r_1 = a\,(1+e)$, dem Aphel, und minimalem Abstand $r_2 = a\,(1-e)$, dem Perihel, hin und her pendelt. Es wird ein etwas größerer Winkel als $\delta\varphi = 2\,\pi$ von Perihel zu Perihel durchlaufen. Das Perihel verschiebt sich in Umlaufrichtung nach vorne.

Zur Berechnung der Periheldrehung [61] betrachten wir den Kehrwert der Radialkoordinate als Funktion von φ

$$u(\varphi) = \frac{r_0}{r(\varphi)}\ . \tag{6.25}$$

[4] Dies gilt nur im Grenzfall einer kleinen Masse m, genauer tritt in der kinetischen Energie $\frac{1}{2}\,m\,\dot r^2$ der radialen Relativbewegung der zwei Körper und in der Drehimpulsbarriere $\frac{L^2}{2\,m\,r^2}$ statt m die reduzierte Masse $m_{\text{red}} = \frac{m\,M}{m+M}$ auf.

Für seine Ableitung gilt, falls $L \neq 0$ ist, wegen (6.19) und (6.21) und mit $c = 1$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{r_0}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\Big(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\Big)^{-1} = -\frac{m r_0}{L}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \pm\sqrt{u^3 - u^2 + \Big(\frac{m r_0}{L}\Big)^2 u + (E^2 - m^2)\Big(\frac{r_0}{L}\Big)^2}\ . \quad (6.26)$$

Das Vorzeichen vor der Wurzel ist je nach Bahnabschnitt zu nehmen, je nachdem, ob r ab- oder zunimmt. Der Radikand ist ein Polynom $(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$,

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 1\ ,\\ u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 &= \Big(\frac{m\,r_0}{L}\Big)^2\ ,\\ u_1u_2u_3 &= -(E^2 - m^2)\,\Big(\frac{r_0}{L}\Big)^2\ , \end{aligned} \quad (6.27)$$

dessen Nullstellen $0 < u_1 < u_2 < u_3$ für Umlaufbahnen positiv sind. Die Bahnen verlaufen zwischen u_1 und u_2, also zwischen einem maximalen und einem minimalen Abstand $r_{\min} > 0$. Nehmen wir den Kehrwert von (6.26), so erhalten wir die Ableitung der Umkehrfunktion $\varphi(u)$ und können integrieren (4.63)

$$\varphi(\hat{u}) - \varphi(u_1) = \int_{u_1}^{\hat{u}} \mathrm{d}u\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \int_{u_1}^{\hat{u}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}}\ . \quad (6.28)$$

Insgesamt nimmt der Winkel φ während der Bewegung zwischen maximalem über minimalen bis zu maximalem Wert von r, dem entspricht die kleinste Nullstelle u_1, um

$$\varphi_{\text{Umlauf}} = 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}} \quad (6.29)$$

zu. Dieses Integral hat mit den Variablen $y = \sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}}$ und $k^2 = \frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}$ die Form

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{Umlauf}} &= 2\frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\\ &= 2\frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\Big(1 + k^2\frac{y^2}{2} + \dots\Big)\\ &= 2\frac{2}{\sqrt{u_3-u_1}}\frac{\pi}{2}\Big(1 + \frac{k^2}{4} + O(k^4)\Big)\ . \end{aligned} \quad (6.30)$$

Hier haben wir das Integral genähert, denn die minimalen und maximalen Abstände der Planeten von der Sonne sind in Einheiten des Schwarzschildradiusses der Sonne riesig und u_1 und u_2 daher klein. Wegen $u_3 = 1 - u_1 - u_2$ (6.27) gilt annähernd

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{1 - 2u_1 - u_2} \approx u_2 - u_1\ , \quad (u_3 - u_1)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(2u_1 + u_2)\ . \quad (6.31)$$

In dieser Näherung wird der Umlaufwinkel

$$\varphi_{\text{Umlauf}} \approx 2\pi\Big(1 + \frac{3}{4}(u_1 + u_2)\Big) = 2\pi + \frac{3}{2}\pi\Big(\frac{r_0}{r_1} + \frac{r_0}{r_2}\Big)\ , \quad r_0 = \frac{2MG}{c^2}\ . \quad (6.32)$$

Für die Keplerbahnen der Planeten sind die Kuben der großen Halbachsen proportional den Quadraten der Umlaufzeiten (4.84)

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = G\,M_{\text{Sonne}}\Big(\frac{M_{\text{Sonne}}}{M_{\text{Sonne}} + M_{\text{Planet}}}\Big)^2 \approx G\,M_{\text{Sonne}} \quad (6.33)$$

und minimaler und maximaler Abstand sind durch Größe der Halbachse a und die Exzentrizität e durch $r_1 = a\,(1+e)$ und $r_2 = a\,(1-e)$ gegeben. Das Perihel wandert daher pro Umlauf um

$$\varepsilon \approx \frac{24\,\pi^3\,a^2}{c^2\,T^2\,(1-e^2)}\ . \quad (6.34)$$

In dieser Form ist die Periheldrehung durch die astronomisch beobachtbaren Größen ausgedrückt. Der Effekt fällt mit dem Abstand der Planeten von der Sonne (6.32) und ist im Sonnensystem daher beim Merkur am größten. Durch Radarmessungen ist die Periheldrehung des Merkurs mit einer Genauigkeit von 1‰ bekannt. Nach Berücksichtigung der Störungen durch die anderen Planeten verbleibt pro Jahrhundert ein Rest von $42{,}98'' \pm 0{,}04''$. Er stimmt mit der allgemein relativistischen Korrektur überein [69].

6.5 Lichtstrahlen

Ablenkung von Licht und schnellen Teilchen

Für elektromagnetische Wellen mit kurzer Wellenlänge

$$A_m(x) = \Re\,a_m(x,\varepsilon)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta(x)}{\varepsilon}} \quad (6.35)$$

folgt im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ aus den Maxwell-Gleichungen (7.65), wie wir in Abschnitt 7.5 ableiten, daß in einer Raumzeit mit Metrik $g_{mn}(x)$ der Wellenvektor

$$k_m = \partial_m\theta \quad (6.36)$$

lichtartig ist

$$g^{mn}k_mk_n = 0 \quad (6.37)$$

und daß die Lichtstrahlen, die Weltlinien von Lichtpulsen in der Raumzeit, die durch

$$\dot{x}^m = g^{mn}k_n(x) \quad (6.38)$$

gegeben sind (7.99), gerade Weltlinien oder, technischer ausgedrückt, geodätische Linien sind. Dabei bezeichnet $\dot{x}^m = \mathrm{d}x^m/\mathrm{d}s$ die Ableitung nach dem Bahnparameter.

Lichtartige geodätische Linien, die Lichtstrahlen, lassen sich, wenn man skrupelhaft ist, nicht aus dem Wirkungsprinzip mit Lagrangefunktion (6.5) ableiten, denn das Längenquadrat des Tangentialvektors verschwindet und die Wurzel aus dem Längenquadrat ist bei Null nicht differenzierbar. Eine geeignete Lagrangefunktion für Lichtstrahlen ist das Längenquadrat des Tangentialvektors

$$\mathscr{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\,g_{kl}(x)\,\dot{x}^k\,\dot{x}^l\ . \quad (6.39)$$

Die zugehörigen physikalischen Bahnen sind geodätische Linien (C.114)

$$\frac{\hat\partial}{\hat\partial x^m}\left(\frac{1}{2}\,g_{kl}(x)\,\dot x^k\,\dot x^l\right) = \frac{1}{2}\partial_m g_{kl}\,\dot x^k\,\dot x^l - \frac{\mathrm d}{\mathrm ds}\left(g_{ml}\,\dot x^l\right) = -g_{mn}\left(\ddot x^n + \Gamma_{kl}{}^n\,\dot x^k\,\dot x^l\right)\,, \qquad (6.40)$$

wie man mit den gleichen Rechenschritten bestätigt, die zu (6.9) geführt haben.

Die Wirkung ist nicht invariant unter Reparametrisierungen $s(s')$ der Weltlinie. Lösungen der Bewegungsgleichungen gehen durch linear inhomogene Reparametrisierungen

$$s(s') = a\,s' + s(0) \qquad (6.41)$$

in Lösungen über. Zu der fehlenden Invarianz der Wirkung unter Reparametrisierungen paßt, daß der Lichtstrahl selbst nicht die Frequenz des Lichtes festlegt, das ihn durchläuft. Die Frequenz kommt der Parametrisierung des Lichtstrahls, genauer $k^0 = \mathrm dx^0/\mathrm ds$, zu.

Die Lichtstrahlen im metrischen Feld einer kugelsymmetrischen Masse (6.15) bestimmen wir aus den Erhaltungsgrößen.

Die Lagrangefunktion hängt nicht vom Bahnparameter s ab und demnach ist die zur Translation des Bahnparameters gehörige Energie (4.57) erhalten. Diese Erhaltungsgröße stimmt mit dem Längenquadrat $\mathscr L$ überein, denn die Lagrangefunktion ist wie kinetische Energie quadratisch in den Ableitungen nach dem Bahnparameter. Da das Längenquadrat des Tangentialvektors an die Lichtbahnen verschwindet, hat diese Erhaltungsgröße den Wert Null

$$c^2(1-\frac{r_0}{r})\,\dot t^2 - \frac{\dot r^2}{(1-\frac{r_0}{r})} - r^2\dot\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 = 0\ . \qquad (6.42)$$

Wie bei massiven Teilchen folgt aus der Drehinvarianz der Schwarzschildmetrik, daß jede Bahnkurve eben ist und nach Wahl der Koordinatenachsen in der x-y-Ebene verläuft

$$\theta = \frac{\pi}{2}\,,\quad \dot\theta = 0\ . \qquad (6.43)$$

Der Winkel φ ist wegen Drehinvarianz eine zyklische Variable (4.55), und der zu φ konjugierte Impuls L, er ist bis auf einen Faktor die z-Komponente des Drehimpulses, ist konstant

$$L = -\frac{\partial\mathscr L}{\partial\dot\varphi} = r^2\dot\varphi\ . \qquad (6.44)$$

Die Schwarzschildlösung ist statisch, die Lagrangefunktion hängt nicht von der Zeit t ab. Also ist t eine zyklische Variable (4.55), und der zu t konjugierte Impuls ist auf der Weltlinie des Teilchens konstant. Er ist bis auf einen Faktor die Energie E

$$E = \left(1-\frac{r_0}{r}\right)c^2\,\dot t\ . \qquad (6.45)$$

Setzen wir in (6.42) ein und formen wir um, so erhalten wir effektiv einen Energiesatz für die eindimensionale Bewegung der Radialkoordinate

$$\frac{1}{2}\,\dot r^2 + \frac{L^2}{2\,r^2}\,(1-\frac{r_0}{r}) = \frac{E^2}{2\,c^2}\ . \qquad (6.46)$$

Das effektive Potential besteht nur aus der relativistischen Drehimpulsbarriere

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2r^2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\ . \qquad (6.47)$$

Es wird extremal bei $r = \frac{3}{2}r_0$ und hat dort seinen maximalen Wert $V_{\max} = \frac{2}{27}\frac{L^2}{r_0^2}$. Es läßt also keine stabile, gebundene Bahn zu. Es fehlt nämlich, da das Längenquadrat lichtartiger Tangentialvektoren Null und nicht c^2 ist, der Kepler-Anteil $-r_0c^2/r$ im effektiven Potential. Für $r < \frac{3}{2}r_0$ wirkt die Drehimpulsbarriere anziehend.

Für die Ableitung von $u(\varphi) = r_0/r(\varphi)$ (6.25) besagt (6.46) mit $c = 1$

$$\left(\frac{\mathrm du}{\mathrm d\varphi}\right)^2 = u^3 - u^2 + \left(\frac{Er_0}{L}\right)^2 = (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)\ . \qquad (6.48)$$

Dies ist der Spezialfall $m = 0$ der Gleichung (6.26), mit der wir nun für $E^2 > m^2$ die Ablenkung von Licht und von schnellen, massiven Teilchen gemeinsam untersuchen.

Das kubische Polynom hat drei reellen Nullstellen, $u_1 < u_2 < u_3$, falls der Drehimpuls genügend groß ist, $4L^2 > 27E^2r_0^2$, und das Teilchen nicht in das Zentrum stürzt. Eine von ihnen, u_1, ist für $E^2 > m^2$ negativ. Denn das Produkt der Nullstellen ist negativ und ihre Summe positiv (6.27).

Auf ihrer Bahn durchlaufen Teilchen, die abgelenkt werden, r-Werte von $r = \infty$ über den Minimalabstand $r_{\min}$ zu $r = \infty$, also u-Werte von $u = 0$ zu $u_2 = r_0/r_{\min}$ und zurück zu $u = 0$. Dabei nimmt der Winkel φ um $\delta\varphi$ zu,

$$\delta\varphi = 2\int_0^{u_2}\mathrm du\,\frac{\mathrm d\varphi}{\mathrm du} = 2\int_0^{u_2}\frac{\mathrm du}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}}\ . \qquad (6.49)$$

Skalieren wir die Integrationsvariable, $y = u/u_2$, so ist dieser Winkel

$$\delta\varphi = 2\int_0^1\frac{\mathrm dy}{\sqrt{(y-\frac{u_1}{u_2})(y-1)(u_2y-u_3)}}\ . \qquad (6.50)$$

Hier sind wegen (6.27) u_3 und u_1 Funktionen von u_2 und $m\,r_0/L$,

$$u_3 = 1-(u_1+u_2)\,,\quad u_1 = \frac{1-u_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2u_2-3u_2{}^2-4(\frac{mr_0}{L})^2}\ . \qquad (6.51)$$

Das Verhältnis $u_2 = r_0/r_{\min}$ von Schwarzschildradius zum Minimalabstand vom Sonnenmittelpunkt ist für Bahnen, die an der Sonne vorbei laufen, klein. Zudem gilt für schnelle Teilchen bis auf Terme höherer Ordnung in u_2 und m^2/E^2

$$\frac{m\,r_0}{L} \approx u_2\,\frac{m}{E}\ . \qquad (6.52)$$

Denn bei $r = r_{\min}$ ist $L/m = r_{\min}{}^2\dot\varphi$, $\dot r = 0$ und

$$r_{\min}{}^2\dot\varphi^2 = \left(1-\frac{r_0}{r_{\min}}\right)\dot t^2 - 1 = \frac{E^2}{m^2\,(1-\frac{r_0}{r_{\min}})} - 1 \approx \frac{E^2}{m^2}\,, \qquad (6.53)$$

also gilt $L/m \approx r_{\min}E/m$. Damit erhalten wir näherungsweise

$$\frac{u_1}{u_2} \approx -1 + u_2\,(1 + m^2/E^2)\ , \quad u_3 \approx 1\ , \tag{6.54}$$

$$\delta\varphi \approx 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\,(1 + \frac{u_2}{2}\,y + \frac{u_2}{2}\,\frac{1+\frac{m^2}{E^2}}{1+y})\ , \tag{6.55}$$

und können mit $1/(\sqrt{1-y^2}(1+y)) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\sqrt{1-y^2}/(1+y))$ integrieren

$$\delta\varphi \approx \pi + u_2\,(2 + \frac{m^2}{E^2}) = \pi + \frac{r_0}{r_{\min}}\,(2 + \frac{m^2}{E^2})\ . \tag{6.56}$$

Ein Lichtstrahl mit $m = 0$ durchläuft also nicht den Winkel π wie im flachen Raum mit $r_0 = 0$, sondern wird um

$$\delta\varphi - \pi \approx \frac{4\,G\,M}{r_{\min}c^2} \tag{6.57}$$

abgelenkt. Die Lichtablenkung ist umso größer, je näher der Lichtstrahl an der Sonne vorbeiläuft. Streift der Lichtstrahl den Sonnenrand, so ist $r_{\min} = r_{\text{Sonne}} = 6{,}953 \cdot 10^8$m und Lichtstrahlen werden um $8{,}49 \cdot 10^{-6} = 1{,}75''$ abgelenkt. Bei Sonnenfinsternissen erscheinen Sterne am Sonnenrand um diesen Winkel von der Sonne weg verschoben.

Mit dem ESA Satelliten Hipparcos wurden zwischen 1989 und 1993 die Positionen von etwa 100 000 Sternen jeweils etwa 100 Mal vermessen. Dabei variierte der Winkel zur Sonne zwischen 47° und 133°. Die gemessenen Sternenpositionen stimmen nach Berücksichtigung der Bewegung der Sonne, der Sterne, der Erde und des Satelliten mit gravitativer Lichtablenkung durch die Sonne, wie sie die Allgemeine Relativitätstheorie vorhersagt, innerhalb der Meßgenauigkeit von 3‰ überein [26]. Zum Beispiel ist Licht, das bei uns im rechten Winkel zur Sonne einfällt, um $4 \cdot 10^{-3}\,''$ gravitativ abgelenkt.

In Newtonscher Mechanik würde ein lichtschnelles Teilchen mit Energie $E = m/2$ im Keplerpotential um $\delta\varphi = 2\arcsin(1/\sqrt{1 + 2\,E\,L^2/(m\,\alpha^2)}) = 2\arcsin(1/\sqrt{1 + L^2/\alpha^2})$ abgelenkt (Seite 72). Da die Energie konstant ist, gilt $L^2/(2\,m\,r_{\min}^2) - \alpha/r_{\min} = m/2$, also $L^2 = m^2\,r_{\min}^2 + 2\,\alpha\,m\,r_{\min} = m^2\,r_{\min}\,(r_{\min} + r_0) \approx m^2\,r_{\min}^2$. Also ist $L/\alpha \approx 2\,r_{\min}/r_0$ groß und demnach der Ablenkwinkel $\delta\varphi \approx 2\,\alpha/L = r_0/r_{\min}$. Dies ist nur die Hälfte der Lichtablenkung der Allgemeinen Relativitätstheorie und experimentell widerlegt.

Auch wenn ein schnelles, massives Testteilchen im System des Gravitationszentrums nur wenig abgelenkt wird, so kann sich in dem System, in dem das Testteilchen zunächst ruht, eine schnell bewegte, schwere Masse stark auswirken. Im System der schweren Masse ist die Vierergeschwindigkeit des Teilchens vor der Wechselwirkung $(1, v, 0, 0)/\sqrt{1-v^2}$ und hinterher $(1, Cv, Sv, 0)/\sqrt{1-v^2}$, wobei $C = \cos\delta\varphi \approx 1 - 2(r_0/r_{\min})^2$ und $S = \sin\delta\varphi \approx 2r_0/r_{\min}$ sind. Die Vierergeschwindigkeit in dem System, in dem das Teilchen zunächst ruht, erhält man daraus durch die Lorentztransformation (3.9). Vor der Streuung ist sie $(1, 0, 0, 0)$ – das Teilchen ruht – und nachher

$$\begin{gathered}\Big(\frac{1 - Cv^2}{1 - v^2}, -\frac{(C-1)v}{1 - v^2}, \frac{Sv}{\sqrt{1 - v^2}}, 0\Big) \approx \\ \Big(1 + \frac{2v^2}{1 - v^2}\big(\frac{r_0}{r_{\min}}\big)^2, \frac{2v}{1 - v^2}\big(\frac{r_0}{r_{\min}}\big)^2, \frac{2v}{\sqrt{1 - v^2}}\frac{r_0}{r_{\min}}, 0\Big)\ .\end{gathered} \tag{6.58}$$

Fermatsches Prinzip, Brechungsindex

Lichtstrahlen, die Weltlinien, die von Lichtpulsen durchlaufen werden, genügen dem Fermatschen Prinzip der frühesten Ankunft [53]. Von allen lichtartigen, zukunftsgerichteten Weltlinien, die ein Ereignis p durchlaufen und danach eine genügend benachbarte, zeitartige Weltlinie Γ schneiden, kreuzt der Lichtstrahl die Weltlinie Γ am frühesten.

Wir zeigen das Fermatsche Prinzip zunächst für den Fall, daß die Metrik und die Lagrangefunktion von Lichtstrahlen (6.39) folgende Summe

$$\tilde g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n = (\mathrm{d}t)^2 + \tilde g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\ ,\ \mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2\ ,\ \mathscr{L}_1 = \frac{1}{2}\,\dot t^2\ ,\ \mathscr{L}_2(\vec x, \dot{\vec x}) = \frac{1}{2}\,\tilde g_{ij}\,\dot x^i\,\dot x^j\ , \tag{6.59}$$

ist, wobei $\tilde g_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, nicht von t abhängt. Dann entkoppeln die Geodätengleichungen für $t(s)$ und den räumlichen Teil $\vec x(s)$. Er ist eine geodätische Linie der räumlichen, zeitunabhängigen Metrik $\tilde g_{ij}$ und macht die Wirkung

$$W[\vec x] = \int \mathrm{d}s\,\sqrt{-\tilde g_{ij}\,\dot x^i\,\dot x^j} \tag{6.60}$$

stationär. Auf lichtartigen, zukunftsgerichteten Weltlinien gelten $\dot t^2 + \tilde g_{ij}\,\dot x^i\,\dot x^j = 0$ und $\dot t > 0$, also

$$\dot t = \sqrt{-\tilde g_{ij}\,\dot x^i\,\dot x^j}\ . \tag{6.61}$$

Demnach ist für lichtartige Weltlinien die Wirkung $W[\vec x] = \int_{\underline{s}}^{\overline{s}}\mathrm{d}s\,\dot t = t(\overline{s}) - t(\underline{s})$ die Differenz der Koordinatenzeiten, die zwischen Start $\vec x(\underline{s})$ und Ziel $\vec x(\overline{s})$ vergeht. In der Metrik (6.59) durchläuft bei gleicher Startzeit $t(\underline{s})$ von allen lichtartigen Weltlinien die geodätische Linie diejenige Bahn vom Start zum Ziel, die am frühesten eintrifft.

Das Argument gilt auch bei konform statischen Metriken,

$$g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n = \Omega^2\big((\mathrm{d}t)^2 + \tilde g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\big)\ , \quad \Omega^2 \neq 0\ , \tag{6.62}$$

die bis auf einen konformen Faktor $\Omega^2(x)$ mit der Metrik (6.59) übereinstimmen, weil bei konform verwandten Metriken, $\tilde g_{mn}$ und $g_{mn} = \Omega^2\tilde g_{mn}$, die Lichtkegel gleich sind und sich Lichtstrahlen nur durch ihre Parametrisierung unterscheiden.

Dies wiederum gilt, weil das Christoffelsymbol $\Gamma_{kl}{}^m$ von $g_{mn} = \Omega^2\tilde g_{mn}$ durch

$$\Gamma_{kl}{}^m = \tilde\Gamma_{kl}{}^m + \Omega^{-1}(\partial_k\Omega\,\delta_l{}^m + \partial_l\Omega\,\delta_k{}^m - g_{kl}\,g^{mn}\,\partial_n\Omega) \tag{6.63}$$

mit dem Christoffelsymbol $\tilde\Gamma_{kl}{}^m$ von $\tilde g_{mn}$ zusammenhängt. Für den Lichtstrahl folgt

$$\frac{\mathrm{d}^2x^m}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\Gamma_{kl}{}^m = \frac{\mathrm{d}^2x^m}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\tilde\Gamma_{kl}{}^m + 2\,\Omega^{-1}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} - \Omega^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}g^{mn}\partial_n\Omega\ , \tag{6.64}$$

wobei wir $\Omega(x(s))$ als Funktion des Bahnparameters s auffassen. Der letzte Term verschwindet, weil $\mathrm{d}x/\mathrm{d}s$ lichtartig ist. Der vorletzte Term ist ein Vielfaches des Tangentialvektors und kann durch eine Reparametrisierung absorbiert werden: lesen wir die Ableitungen als Ableitungen von $x^m(\tilde s(s))$, so haben die Terme die Form

$$\big(\frac{\mathrm{d}\tilde s}{\mathrm{d}s}\big)^2\big(\frac{\mathrm{d}^2x^m}{\mathrm{d}\tilde s^2} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tilde s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\tilde s}\tilde\Gamma_{kl}{}^m\big) + \big(2\,\Omega^{-1}\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\tilde s}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}^2\tilde s}{\mathrm{d}s^2}\big)\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\tilde s}\ . \tag{6.65}$$

Die letzte Klammer verschwindet, wenn der Bahnparameter $\tilde{s}(s)$ als

$$\tilde{s}(s) = \int^s \mathrm{d}s'\,\Omega^{-2}(s') \tag{6.66}$$

gewählt wird. Gilt also die Geodätengleichung für Lichtstrahlen $x(\tilde{s}(s))$ bezüglich der Metrik g_{mn}, so erfüllt $x(\tilde{s})$ sie für die Metrik $\tilde{g}_{mn}$.

Folglich genügen Lichtstrahlen in jeder konform statischen Metrik, zum Beispiel in der Schwarzschildmetrik, dem Fermatschen Prinzip.

Jede kugelsymmetrische, dreidimensionale Metrik $\tilde{g}_{ij}$ (F.21) ist in geeigneten Koordinaten, den isotropen Koordinaten, bis auf einen konformen Faktor n^2 euklidisch

$$a^2(r)\,(\mathrm{d}r)^2 + b^2(r)\left((\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2\right) = n^2\left((\mathrm{d}\tilde{r})^2 + \tilde{r}^2((\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2)\right)\ , \tag{6.67}$$

$$\tilde{r}(r) = \exp\int^r \mathrm{d}r' a(r')/b(r')\ , \tag{6.68}$$

wie man einfach mit $n = b/\tilde{r}$ und $\mathrm{d}\tilde{r}/\mathrm{d}r = \tilde{r}\,a(r)/b(r)$ bestätigt. Bei einer konform statischen, kugelsymmetrischen Metrik (6.62) ist $1/n$ die Lichtgeschwindigkeit

$$0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} - n^2\,\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2\left(1 - n^2\,\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right)\ ,\quad \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{n}\ . \tag{6.69}$$

Solch eine Metrik wirkt sich auf die Bahnen von Licht so aus wie im flachen Raum ein optisches Medium mit Brechungsindex $n(\vec{x})$ und Wirkung $W[\vec{x}] = \int \mathrm{d}t\, n(\vec{x})\,(\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}})^{1/2}$.

Für die Schwarzschildmetrik (6.15) ergibt sich

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{\theta\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{r(r-r_0)}}\ , \tag{6.70}$$

$$\ln\tilde{r} + k = \int^r \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{r'(r'-r_0)}} = 2\ln(\sqrt{r} + \sqrt{r-r_0}) = \ln(2\sqrt{r(r-r_0)} + 2r - r_0)\ . \tag{6.71}$$

Wir wählen die Integrationskonstante $k = \ln 4$ so, daß $\tilde{r}$ mit r für große r übereinstimmt,

$$\tilde{r} = \frac{r}{2} - \frac{r_0}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{r(r-r_0)}\ . \tag{6.72}$$

Dann gilt umgekehrt $(2\,\tilde{r} + r_0/2)^2 = 4\,r\,\tilde{r}$ oder

$$r = \tilde{r}\,(1 + \frac{r_0}{4\tilde{r}})^2\ , \tag{6.73}$$

und die Schwarzschildmetrik hat in diesen isotropen Kugelkoordinaten die Form

$$g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n = \left(\frac{1-\frac{r_0}{4\tilde{r}}}{1+\frac{r_0}{4\tilde{r}}}\right)^2(\mathrm{d}t)^2 - (1+\frac{r_0}{4\tilde{r}})^4\left((\mathrm{d}\tilde{r})^2 + \tilde{r}^2(\mathrm{d}\theta)^2 + \tilde{r}^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2\right)\ . \tag{6.74}$$

Die Gravitation der Zentralmasse wirkt sich in diesen Koordinaten auf die Bahnen von Licht so aus wie im flachen Raum ein Medium mit Brechungsindex $n = \sqrt{-g_{\tilde{r}\tilde{r}}/g_{00}}$,

$$n = (1+\frac{r_0}{4\tilde{r}})^3(1-\frac{r_0}{4\tilde{r}})^{-1}\ . \tag{6.75}$$

Gravitative Rotverschiebung

Auch ein konformer Faktor Ω^2, $g_{mn} = \Omega^2\tilde{g}_{mn}$, wirkt sich auf Licht aus. Er beeinflußt zwar nicht die Bahnen von Licht, wohl aber die Farbe, mit der ein Beobachter $\mathcal{B}$ am Ort $\vec{x}_\mathcal{B}$ eine Uhr bei $\vec{x}_\mathcal{U}$ sieht.

Wenn die Uhr in einer konform statischen Raumzeit (6.62) ruht, vergeht auf ihr zwischen zwei benachbarten Ereignissen $x_\mathcal{U} = (\underline{t}, \vec{x}_\mathcal{U})$ und $(\underline{t} + \mathrm{d}t, \vec{x}_\mathcal{U})$ die Zeit (6.4)

$$\tau_\mathcal{U} = \sqrt{g_{00}(x_\mathcal{U})}\,\mathrm{d}t\ . \tag{6.76}$$

Das Licht, das von diesen Ereignissen zu einem ruhenden Beobachter ausgesendet wird, erreicht ihn bei $(\bar{t}, \vec{x}_\mathcal{B})$ und $(\bar{t} + \mathrm{d}t, \vec{x}_\mathcal{B})$ mit derselben Koordinatendifferenz $\mathrm{d}t$.

Denn die Lichtstrahlen hängen nicht vom konformen Faktor Ω^2 ab (Seite 131) und stimmen mit den Lichtstrahlen überein, die zur Lagrangefunktion $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2$ (6.59) gehören. Dort entkoppeln die Bewegungsgleichungen für $t(s)$ und $\vec{x}(s)$. Die Zeitkoordinate löst $\ddot{t} = 0$ und ist eine linear inhomogene Funktion $t(s) = a\,s + t(0)$ des Bahnparameters. Bei versetzter Startzeit $t(0) = \underline{t} + \mathrm{d}t$ trifft der räumlich unveränderte Lichtstrahl um $\mathrm{d}t$ später bei $\mathcal{B}$ ein.

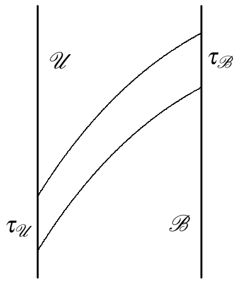

Abbildung 6.1: Gravitative Zeitdehnung

Der Beobachter sieht daher die Uhr mit derselben Koordinatendifferenz $\mathrm{d}t$ ticken, während die Zeit

$$\tau_\mathcal{B} = \sqrt{g_{00}(x_\mathcal{B})/g_{00}(x_\mathcal{U})}\,\tau_\mathcal{U} \tag{6.77}$$

auf seiner eigenen Uhr abläuft.

Ruht die Uhr in der Schwarzschildmetrik $g_{00}(x) = 1 - r_0/r$ an einem tieferen Ort, so ist $g_{00}(x_\mathcal{U}) < g_{00}(x_\mathcal{B})$ und die Zeitdifferenz $\tau_\mathcal{B}$ ist größer als $\tau_\mathcal{U}$. Die Uhr, die der Beobachter im tieferen Gravitationspotential ruhen sieht, erscheint ihm also nicht nur perspektivisch kleiner, sondern auch langsamer als seine eigene Uhr. Geht der Beobachter zu der entfernten Uhr hin, so stellt er fest, daß sie normal geht und normale Größe hat. An Ort und Stelle laufen physikalische Vorgänge normal ab.

Schwingt ein bei $\vec{x}_\mathcal{U}$ ruhender Sender mit der Frequenz $\nu_\mathcal{U} = n/\tau_\mathcal{U}$, so beobachtet $\mathcal{B}$ diese n Schwingungen, während bei ihm die Zeit $\tau_\mathcal{B}$ vergeht. Er nimmt die Frequenzen von Quellen, die tiefer im Gravitationspotential ruhen, rotverschoben und elektromagnetische Wellenlängen $\lambda_\mathcal{B} = c/\nu_\mathcal{B}$ um einen Faktor $1 + z$ vergrößert wahr,

$$\nu_\mathcal{B} = \sqrt{g_{00}(x_\mathcal{U})/g_{00}(x_\mathcal{B})}\,\nu_\mathcal{U}\ ,\quad z = \frac{\lambda_\mathcal{B} - \lambda_\mathcal{U}}{\lambda_\mathcal{U}} = \sqrt{g_{00}(x_\mathcal{B})/g_{00}(\vec{x}_\mathcal{U})} - 1\ . \tag{6.78}$$

Ist die Metrik nicht konform statisch, so ist es normalerweise nicht möglich, in der gekrümmten Raumzeit willkürfrei eine Klasse von ruhenden Beobachtern anzugeben. Dann läßt sich gravitative Zeitdehnung nicht ohne weiteres vom Dopplereffekt trennen, bei dem eine Relativbewegung von Quelle und Empfänger die Rotverschiebung verursacht.

6.6 Gewicht, Blickwinkel und Präzession

Senkrechter Fall ins Schwarze Loch

Beim senkrechten Fall verschwindet der Drehimpuls L, und der Energiesatz (6.21) lautet wie im nichtrelativistischen Fall (4.85)

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \frac{r_0}{r} = -\frac{r_0}{R} \; . \tag{6.79}$$

Dabei drücken wir die Konstante $(E/m)^2 - 1$ durch den Wert der linken Seite auf der Gipfelhöhe R aus, wo $\mathrm{d}r/\mathrm{d}s$ verschwindet. Die Lösung dieser Gleichung ist (4.90)

$$s(r) = s(0) + \sqrt{\frac{R^3}{r_0}}\left(\frac{\sqrt{r(R-r)}}{R} - \arctan\sqrt{\frac{r}{R-r}}\right) \; . \tag{6.80}$$

Der Fall bis zum Schwarzschildradius dauert die endliche Eigenzeit $s(r_0) - s(R)$.

Dort beträgt $\mathrm{d}r/\mathrm{d}s = -\sqrt{1 - r_0/R}$ (6.79). Wählen wir einfachheitshalber den Nullpunkt der Eigenzeit so, daß r_0 zur Eigenzeit $s(r_0) = 0$ durchlaufen wird, so verhält sich $r(s)$ dort bis auf höhere Potenzen von s wie

$$r = r_0 - \sqrt{1 - \frac{r_0}{R}}\, s \; . \tag{6.81}$$

Die Eigenzeit s hängt für $r > r_0$, das heißt $s < 0$, mit der Koordinatenzeit t durch (6.20) zusammen

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{R}} \; , \tag{6.82}$$

wobei wir die Konstante E/m durch die Gipfelhöhe R ausdrücken. Beim Schwarzschildradius gilt daher bis auf höhere Potenzen von s für negative s

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \sim -\frac{s}{r_0} \; , \quad s(t) \propto -\mathrm{e}^{-\frac{t}{r_0}} \; , \tag{6.83}$$

und umgekehrt $t/r_0 = -\ln(-s) + \text{konst.}$

Insbesondere erreicht das fallende Teilchen den Schwarzschildradius nicht zu endlicher Koordinatenzeit.

Das liegt, wie wir bei Raumzeitdiagramm 8.1 diskutieren, daran, daß die Koordinaten t und r am Schwarzschildradius r_0 ungeeignet sind. Es besagt nicht, daß das fallende Teilchen nicht r_0 durchfällt, und auch nicht, daß es unendlich lange für einen bei $r_\mathcal{B} > r_0$ ruhenden Beobachter sichtbar ist.

Seine Uhr zeigt die Eigenzeit $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - r_0/r_\mathcal{B}}\,\mathrm{d}t$. Wenn das Teilchen mit einer konstanten Rate $\mathrm{d}n/\mathrm{d}s$ Photonen aussendet, so verhält sich diese Rate, bezogen auf die Uhr des Beobachters, wegen $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}n/\mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}s/\mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$ wie $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ und nimmt, wenn das Teilchen dicht über dem Schwarzschildradius ist, exponentiell ab

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\tau} \propto \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{r_0\sqrt{1-r_0/r_\mathcal{B}}}} \; . \tag{6.84}$$

Genau so wie $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$ nimmt die Frequenz $\nu_\mathcal{B}$ der beobachteten Photonen, die beobachtete Zahl von Schwingungen pro Zeiteinheit, exponentiell ab, $\nu_\mathcal{B} \propto \mathrm{e}^{-t/r_0}$. Die Rotverschiebung des Lichts von fallenden Teilchen ist größer als von ruhenden Teilchen (6.78).

Der radiale Maßstab des Beobachters zeigt Längen $\mathrm{d}l = \mathrm{d}r/\sqrt{1 - r_0/r_\mathcal{B}}$. Wenn das Teilchen am Beobachter vorbeifällt, hat es für ihn eine Geschwindigkeit mit Betrag

$$v = \left|\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\tau}\right| = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}r}\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{r_0}{r_\mathcal{B}} - \frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \; . \tag{6.85}$$

Sie ist umso größer, je näher der Beobachter dem Schwarzen Loch ist, und geht für $r_\mathcal{B} \to r_0$ gegen die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$.

Strahlt das Teilchen gleichstark in alle Richtungen, so bewirkt Aberration den Scheinwerfereffekt, daß dieses Licht für den Beobachter mehr in Bewegungsrichtung des Teilchens ausläuft und, wenn er das Teilchen unter sich sieht, auf ein um $\frac{1+v}{1-v}$ vergrößertes Flächenelement verteilt wird. Diese Strahlauffächerung verringert die gesehene Leuchtstärke des Teilchens für einen Beobachter in der Fallinie um einen Faktor, der proportional zu $s(t) \propto -\mathrm{e}^{-t/r_0}$ ist, wenn das Teilchen den Schwarzschildradius durchfällt.

Durch Dopplereffekt, Rotverschiebung und Aberration nimmt also die beobachtete Leuchtstärke beim Fall durch den Horizont mit e^{-3t/r_0} ab. Sie wird zwar nie Null, verringert sich aber bei einem Schwarzen Loch mit einen Schwarzschildradius wie die Sonne, $r_0 \approx 3 \cdot 10^3\mathrm{m}$, binnen $3{,}3 \cdot 10^{-6}\mathrm{s}$ um einen Faktor e und ist schnell unter jeder Nachweisgrenze. Das Bild des Teilchens verlischt wie eine Glühlampe, die man ausschaltet: auch ihr Temperaturunterschied zur Umgebung verschwindet schließlich nur exponentiell. Die Gesamtzahl der Photonen, die der Beobachter vom Teilchen sieht, ist endlich. Damit kann man nur endlich viele Bilder belichten.

Das gemeinsame Gravitationsfeld des Schwarzen Lochs und eines Teilchens, das von $R = \infty$ fällt, ist nicht das eines Schwarzen Lochs mit größerer Masse, denn es ist nicht kugelsymmetrisch. Es ist zeitabhängig, und es werden Gravitationswellen abgestrahlt. Es entsteht wohl schließlich ein Schwarzes Loch mit Drehimpuls (Kerr-Lösung) und mit einer Masse, die um die Energie der abgestrahlten Gravitationswellen geringer ist als die Summe der Massen des Teilchens und des ursprünglichen Schwarzen Lochs.

Das Gravitationsfeld eines Schwarzen Lochs, in das eine kugelsymmetrische Schale von Materie fällt, ist außen dasjenige eines Schwarzes Lochs mit der Gesamtmasse, im von der Schale umschlossenen Bereich wirkt nur die Masse des Zentrums (8.56).

Beobachter auf Kreisbahnen

Ein Beobachter bezieht Längen und Zeiten benachbarter Ereignisse auf einen Satz von vier normierten und zueinander senkrechten Basisvektoren, auf das Vierbein. Dabei ist der zeitartige Basisvektor die Tangente an seine eigene, mit der Eigenzeit parametrisierte Weltlinie. Die Tangente verbindet Ereignisse, die nacheinander stattfinden, und entspricht der mitgeführten Uhr des Beobachters. Die drei dazu senkrechten raumartigen Basisvektoren zeigen von seiner Weltlinie zu gleichzeitigen Ereignissen in Einheitsabstand, sie sind die räumlichen Meßlatten. Einfachheitshalber rechnen wir mit $c = 1$.

Ein Beobachter, der in der x-y-Ebene das Gravitationszentrum mit einer Winkelgeschwindigkeit ω, die er mit seiner eigenen Uhr ermittelt, auf der Bahnkurve

$$\begin{pmatrix} t(s) \\ r(s) \\ \theta(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\,a(r) \\ r(0) \\ \frac{\pi}{2} \\ s\,\omega \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a(r) = \sqrt{\frac{1+r^2\omega^2}{1-\frac{r_0}{r}}} \tag{6.86}$$

umkreist, definiert durch die Beschleunigung und ihre Änderung die Bezugsrichtungen

$$e_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad e_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-\frac{r_0}{r}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_\varphi = \sqrt{1-\tfrac{r_0}{r}} \begin{pmatrix} \frac{\omega r^2}{r-r_0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a}{r} \end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.87}$$

Der Vektor $e_0 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ ist die Tangente an die Weltlinie des Beobachters, auf der die normierten Vektoren e_r, e_θ und e_φ senkrecht stehen. Der Vektor e_r zeigt im Gravitationsfeld vertikal nach oben, e_φ horizontal in Bewegungsrichtung nach vorne.

Wir werden die Weltlinie und das Vierbein für die Spezialfälle eines ruhenden Beobachters, $\omega = 0$, eines frei fallenden Beobachters, $b = 0$, und auch für verschwindende Gravitation $r_0 = 0$ untersuchen. In jedem Fall erhalten wir durch wiederholte, kovariante Ableitung das Vierbein

$$\frac{\delta e_a{}^m}{\delta s} = \frac{\mathrm{d}e_a{}^m}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\,\Gamma_{kl}{}^m\, e_a{}^l = \frac{\mathrm{d}e_a{}^m}{\mathrm{d}s} + \left(a\Gamma_{tl}{}^m + \omega\Gamma_{\varphi l}{}^m\right) e_a{}^l\,, \tag{6.88}$$

$$\frac{\delta e_0}{\delta s} = b\,e_r\,, \quad \frac{\delta e_r}{\delta s} = b\,e_0 + \Omega\,e_\varphi\,, \quad \frac{\delta e_\varphi}{\delta s} = -\Omega\,e_r\,, \quad \frac{\delta e_\theta}{\delta s} = 0\,, \tag{6.89}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}}\left(\frac{r_0}{2r^2} - r\omega^2\big(1-\frac{3r_0}{2r}\big)\right), \quad \Omega = \sqrt{\frac{1+r^2\omega^2}{1-\frac{r_0}{r}}}\left(1-\frac{3r_0}{2r}\right)\omega\,. \tag{6.90}$$

Dabei haben wir die folgenden nichtverschwindenden Christoffelsymbole $\Gamma_{kl}{}^m$ (C.106) der Schwarzschildmetrik (6.15) sowie $\theta = \pi/2$ verwendet

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}{}^t &= \Gamma_{rt}{}^t = \frac{r_0}{2r(r-r_0)}\,, & \Gamma_{tt}{}^r &= \frac{r_0}{2r^3}(r-r_0)\,, & \Gamma_{rr}{}^r &= -\frac{r_0}{2r(r-r_0)}\,,\\
\Gamma_{\theta\theta}{}^r &= -(r-r_0)\,, & \Gamma_{\varphi\varphi}{}^r &= -(r-r_0)\sin^2\theta\,, & \Gamma_{r\theta}{}^\theta &= \Gamma_{\theta r}{}^\theta = \frac{1}{r}\,,\\
\Gamma_{\varphi\varphi}{}^\theta &= -\sin\theta\cos\theta\,, & \Gamma_{r\varphi}{}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}{}^\varphi = \frac{1}{r}\,, & \Gamma_{\varphi\theta}{}^\varphi &= \Gamma_{\theta\varphi}{}^\varphi = \cot\theta\,.
\end{aligned} \tag{6.91}$$

Kreist ein Beobachter für $r > \frac{3}{2}r_0$ mit Winkelgeschwindigkeit ω_{frei},

$$\omega^2_{\text{frei}} = \frac{r_0}{2r^3}\left(1-\frac{3r_0}{2r}\right)^{-1}, \tag{6.92}$$

um das Gravitationszentrum, so verschwindet die Beschleunigung b (6.90) und er fällt frei. Diese Winkelgeschwindigkeit ist um $(1-\frac{3r_0}{2r})^{-1/2}$ größer als in Newtonscher Physik. Beim Vergleich von Winkelgeschwindigkeiten ist auch zu berücksichtigen, daß ein im großen Abstand ruhender Beobachter mit seiner Uhr statt ω die kleinere Winkelgeschwindigkeit ω/a mißt.

Für $r = \frac{3}{2}r_0$ ist die Beschleunigung b unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit und für $r < \frac{3}{2}r_0$ erhöht sich das Gewicht des Beobachters, wenn er nicht ruht, sondern um das Gravitationszentrum kreist. Dort wirkt die zur Kreisbewegung gehörige Zentrifugalkraft nach innen [1] und erhöht das Gewicht, denn die Drehimpulsbarriere $\frac{L^2}{2mr^2}\big(1-\frac{r_0}{r}\big)$ (6.21) wird maximal für $r = \frac{3}{2}r_0$ und anziehend für $r < \frac{3}{2}r_0$.

Kreisbahnen, die mit $\frac{3}{2}r_0 < r \le 3r_0$ im freien Fall durchlaufen werden, sind instabil. Das effektive Potential V_{eff} (6.21) ist mit $a = \frac{L}{mr_0}$ als Funktion von $u = \frac{r_0}{r}$ durch $V_{\text{eff}} = \frac{m}{2}(-u + a^2u^2 - a^2u^3)$ gegeben. Ist $a^2 > 3$, so wird das effektive Potential extremal bei $u_{\text{min,max}} = \frac{1}{3}\big(1 \mp \sqrt{1-\frac{3}{a^2}}\big)$. Die stabilen Kreisbahnen gehören zum Minimum und treten nur für $u < \frac{1}{3}$, also für $r > 3r_0$, auf.

Ruhender Beobachter

Für einen Beobachter mit Masse m, der im Gravitationsfeld der Masse M mit $\omega = 0$ ruht, verschwindet die Beschleunigung nicht. Er wiegt $F = mb$

$$F_{\text{Gewicht}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}}\,\frac{r_0}{2\,r^2} = m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sqrt{g_{00}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}}\,\frac{m\,M\,G}{r^2}\,. \tag{6.93}$$

Das Gewicht ist um den Faktor $1/\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}$ größer als in Newtonscher Physik und wird am Schwarzschildradius unendlich.

Der Tangentialvektor $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ eines Lichtstrahls, der in der $\theta = \frac{\pi}{2}$-Ebene einfällt, hat für den ruhenden Beobachter in vertikaler e_r-Richtung und horizontaler e_φ-Richtung die Komponenten

$$e_r \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\,, \quad e_\varphi \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\,. \tag{6.94}$$

Der Beobachter sieht den Lichtstrahl in der zur Ausbreitungsrichtung entgegengesetzten Richtung mit einem Winkel

$$\tan\alpha = -\frac{e_\varphi \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}}{e_r \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}} = -r\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}\,\frac{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}} \tag{6.95}$$

zur Vertikalen einfallen. Mit den Erhaltungssätzen (6.44, 6.46) erhalten wir den Einfallswinkel

$$(\tan\alpha)^2 = \frac{\frac{r}{r_0} - 1}{\frac{E^2r_0^2}{L^2}\big(\frac{r}{r_0}\big)^3 - \frac{r}{r_0} + 1} \tag{6.96}$$

als Funktion des Ortes und von Er_0/L.

Das effektive Potential (6.47) nimmt bei $r = \frac{3}{2}r_0$ sein Maximum $V_{\text{eff, max}} = \frac{2}{27}\frac{L^2}{r_0^2}$ an. Lichtstrahlen, die diese Potentialbarriere überwinden, erfüllen gemäß (6.46)

$$E^2 > \frac{4}{27}\frac{L^2}{r_0{}^2}\,. \tag{6.97}$$

Sie können daher bei r höchstens unter einem Winkel von

$$\alpha(r) = \arctan\sqrt{\frac{\frac{r}{r_0}-1}{\frac{4}{27}\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 - \frac{r}{r_0} + 1}} \tag{6.98}$$

zur Vertikalen gesehen werden. Alle Lichtstrahlen von Objekten mit $r > \frac{3}{2}r_0$, zum Beispiel der Sternenhimmel, werden von ruhenden Beobachtern bei $r < \frac{3}{2}r_0$ innerhalb des Öffnungswinkels $\alpha(r)$ gesehen. Für $r \to r_0$ geht dieser Öffnungswinkel gegen Null, der ganze sichtbare Sternenhimmel schrumpft auf einen Punkt zusammen so wie in einem Tunnel das Licht vom Eingang. Diese Lichtstrahlen von entfernten Objekten sind gemäß (6.78) zu Frequenzen $\nu(r) = \nu(\infty)/\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}$ blauverschoben. Diese optischen Erscheinungen lassen sich auch als Aberration und Dopplereffekt eines Beobachters verstehen, der sich relativ zu frei fallenden Beobachtern schnell bewegt. Ein bei $r = r_0$ ruhender Beobachter wäre lichtschnell ebenso wie nach oben abgestrahltes Licht.

Für einen bei $r = \frac{3}{2}r_0$ ruhenden Beobachter nimmt der Sternenhimmel den halben Raumwinkel und die Objekte innerhalb $r = \frac{3}{2}r_0$ die andere Hälfte ein. Für Beobachter bei $r > \frac{3}{2}r_0$ kommen alle Lichtstrahlen, die von Objekten mit $r < \frac{3}{2}r_0$ abgestrahlt werden, aus einem Bereich mit Öffnungswinkel $\alpha(r)$. Für große Abstände $r \to \infty$ erscheint der Bereich um das Gravitationszentrum um $\sqrt{3}$ vergrößert; der Bereich innerhalb von $\frac{3}{2}r_0$ wird unter einem Winkel mit $\tan\alpha \to \sqrt{3}\,\frac{3}{2}\,\frac{r_0}{r}$ gesehen.

Fallende Beobachter sehen eine durch Aberration verformte, durch den Dopplereffekt verfärbte und durch beide Effekte in der Leuchtstärke abgeänderte Version des Bildes, das ruhende Beobachter am selben Ort sehen. Beim Überqueren von $r = r_0$ bleibt die Frequenzverschiebung von Licht und der Raumwinkel des Sternenhimmels endlich.

Präzession

Für einen Beobachter, der eine Zentralmasse umkreist, ändern sich dauernd die Richtungen der Sterne durch Parallaxe und Aberration, denn sein Ort und seine Geschwindigkeit ändern sich auf der Kreisbahn. Nach einem vollständigen Umlauf sind drehungsfrei transportierte Richtungen wie zum Beispiel Kreiselachsen gegenüber dem Fixsternhimmel verdreht.

Der Vektor e_r zeigt in radiale Richtung, also im Gravitationsfeld nach oben, und wird nur für $r = \frac{3}{2}r_0$ drehungsfrei zu e_r am benachbarten Punkt auf der Kreisbahn transportiert, ebenso der Vektor e_φ, der in Bewegungsrichtung nach vorne zeigt. Wie (6.89) zeigt, werden die Vektoren

$$e_1 = e_r \cos\Omega s - e_\varphi \sin\Omega s\ , \quad e_2 = e_r \sin\Omega s + e_\varphi \cos\Omega s \tag{6.99}$$

drehungsfrei (C.141) verschoben

$$\frac{\delta e_0}{\delta s} = b\,e_1\,\cos\Omega s + b\,e_2\,\sin\Omega s\ , \quad \frac{\delta e_1}{\delta s} = b\,e_0\,\cos\Omega s\ , \quad \frac{\delta e_2}{\delta s} = b\,e_0\,\sin\Omega s\ . \tag{6.100}$$

Bei Vernachlässigung gravitativer und relativistischer Effekte würde hier statt Ω die Winkelgeschwindigkeit ω stehen, die sich für $r_0 = 0$ als Grenzwert von Ω für kleine

ω ergibt. Die drehungsfrei transportierten Richtungen e_1 und e_2 präzedieren also mit Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = \Omega - \omega\ , \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\Omega}{\omega} - 1 \tag{6.101}$$

rückwärts gegenüber den Richtungen, die ohne Gravitation und relativistische Effekte drehungsfrei wären. Hat insbesondere nach einem Umlauf s um $2\pi/\omega$ zugenommen, so sind die drehungsfrei transportierten Vektoren e_1 und e_2 relativ zu den anfänglichen Richtungen und den Fixsternen rückwärts um den Winkel $\beta = 2\pi\,(\Omega/\omega - 1)$ verdreht.

Insbesondere tritt ohne Gravitation für $r_0 = 0$ rückdrehende Präzession auf Bahnen auf, deren Beschleunigungsrichtung sich dreht. Sie heißt Thomas-Präzession und beträgt

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\varphi}_{|r_0=0} = \sqrt{1 + r^2\omega^2} - 1 \approx \frac{1}{2}\frac{r^2\omega^2}{c^2}\ . \tag{6.102}$$

Wird die Kreisbahn mit $\omega = \omega_{\text{frei}}$ (6.92) im freien Fall durchlaufen, spricht man von geodätischer Präzession oder dem de Sitter-Effekt. Er bewirkt die Präzession von Kreiselachsen um die Senkrechte der Bahnebene mit einer Geschwindigkeit von

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}_{|\text{frei}} = \sqrt{\frac{r_0}{2r^3}}\bigl(1 - (1 - \frac{3r_0}{2r})^{-\frac{1}{2}}\bigr) \approx -\frac{3c}{4\sqrt{2}}\frac{r_0^{3/2}}{r^{5/2}}\ . \tag{6.103}$$

Sie hat das entgegengesetzte Vorzeichen der Thomas-Präzession. Auf einer erdnahen Kreisbahn sind die drehungsfreien Richtungen innerhalb eines Jahres um etwa 8,4″ im Umlaufsinn gegenüber den Fixsternen verdreht.

Frei fallende Zwillinge

Diejenige Weltlinie, auf der zwischen zwei zeitartig zueinander liegenden Ereignissen am meisten Zeit vergeht, ist, wenn sie existiert, die Weltlinie eines frei fallenden Beobachters, aber umgekehrt ist nicht unbedingt wahr, daß auf der Weltlinie jedes frei fallenden Beobachters zwischen zwei Ereignissen mehr Zeit vergeht als auf jeder anderen Weltlinie, die ebenfalls diese Ereignisse verbindet. Sind die Ereignisse weit entfernt, so kann auf einer geodätischen Weltlinie durchaus weniger Zeit vergehen als auf einer beschleunigten.

Zum Beispiel durchlaufen ein ortsfester Beobachter mit Weltlinie

$$\bigl(t(s'),\ r(s'),\ \theta(s'),\ \varphi(s')\bigr) = \Bigl(s'\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}},\ r(0),\ \tfrac{\pi}{2},\ 0\Bigr) \tag{6.104}$$

und ein Beobachter, der die Erde im freien Fall umkreist (6.86, 6.92), beide die Ereignisse $(0, r(0), \frac{\pi}{2}, 0)$ und $(\frac{2\pi}{\omega}a(r), r(0), \frac{\pi}{2}, 0 \sim 2\pi)$.

Zwischen diesen Ereignissen vergeht auf der Kreisbahn die Zeit $s = \frac{2\pi}{\omega}$, mehr Zeit aber beim ortsfesten, nicht frei fallenden Beobachter,

$$s' = \frac{2\pi}{\omega}\,a(r)\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} = s\sqrt{1 + r^2\omega^2}\ . \tag{6.105}$$

Die Zeit, die beim ortsfesten Beobachter zwischen einer Umkreisung vergeht, ist nicht maximal, denn auf seiner Weltlinie ist die Wirkung (6.5) nicht stationär. Am meisten Zeit vergeht auf der Weltlinie eines Beobachters im senkrechten Fall. Man kann durch Wahl der Gipfelhöhe der Bahn erreichen, daß ein von der Erde mit hoher Geschwindigkeit senkrecht gestarteter Beobachter im freien Fall während der Aufwärtsbewegung an der Raumstation und am ortsfesten Beobachter vorbeikommt und bei der Abwärtsbewegung dieselbe Stelle passiert, wenn die Raumstation gerade eine Umkreisung vollendet hat. Die zwei Ereignisse, in denen sich die Weltlinie des senkrecht fallenden Beobachters und der im freien Fall kreisenden Raumstation kreuzen, sind durch zwei geodätische Linien verbunden; das Gravitationsfeld der Erde bündelt sie wie eine gravitative Linse.

Es gilt ganz allgemein, daß in einem zentralsymmetrischen Gravitationsfeld auf einer geodätischen Weltlinie Γ die Uhrzeit zwischen zwei Ereignissen A und B nicht maximal wird, wenn Γ den Zentralkörper zwischen A und B mehr als halb umläuft. Denn dann besitzt sie zwischen A und B einen zu A fokalen Punkt C.

Ein Ereignis C heißt fokaler Punkt zu A, wenn A und C durch zwei verschiedene geodätische Linien gleicher Länge verbunden sind. Solch ein fokaler Punkt C wird im zentralsymmetrischen Gravitationsfeld auf Γ nach einem halben Umlauf erreicht, denn alle Kurven, die aus Γ durch Rotation um die Achse vom Zentrum zu A entstehen, sind geodätische Linien gleicher Länge, die A und C verbinden.

Hinter einem fokalen Punkt ist die Zeit von A nach B auf Γ nicht mehr maximal, wie man aus der Abbildung 6.2 abliest. Die Zeit stimmt mit der Zeit längs $\hat{\Gamma}$ von A nach C und längs Γ von C nach B überein und kann durch eine „Abkürzung“ von S nach R noch vergrößert werden.

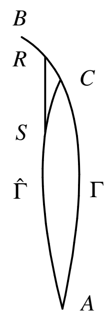

Abbildung 6.2: Abkürzung am fokalen Punkt

Daß die Zeit auf der Abkürzung zwischen S und R größer als von S über C nach R ist, hatten wir bei der Diskussion des Zwillingsparadoxons in Abbildung 2.9 gesehen. Für kleine Dreiecke überträgt sich die Ungleichung $\tau_{RS} > \tau_{RC} + \tau_{CS}$ des flachen Minkowski-Raumes in die gekrümmte Raumzeit, denn im Punkt C kann die Metrik auf die Form $g_{mn\,|C} = \eta_{mn}$ des flachen Raumes gebracht werden und in genügend kleinen Raumzeit-Gebieten ändert sie sich nur wenig.

Wenn die geodätischen Linien Γ und $\hat{\Gamma}$ in Abbildung 6.2 Lichtstrahlen sind, die vom Gravitationsfeld einer Masse fokussiert werden, dann gibt es eine geodätische Linie von A nach B, auf der die Wirkung, die zur Lagrangefunktion (6.39) gehört, maximal und größer als Null ist [30, Abschnitt 6.7]. Also gibt es bei optischen Gravitationslinsen einen frei fallenden Beobachter, der wie in einem Spiegel in seine Vergangenheit schauen und bei B Licht sehen kann, das er bei A ausgesendet hat.

7 Äquivalenzprinzip

7.1 Eichinvarianz und Koordinateninvarianz

Grundlegend für die geometrische Deutung der Gravitation ist das Äquivalenzprinzip, nämlich der physikalische Befund, daß alle Testteilchen, die ein Ereignis mit gegebener Geschwindigkeit durchlaufen, unter dem Einfluß der Gravitation derselben Weltlinie folgen. Da die Weltlinien frei fallender Teilchen universell sind und nicht von Eigenschaften der Teilchen, wie zum Beispiel von ihrer Masse, abhängen, sind diese Weltlinien eine geometrische Struktur, nämlich Geraden oder geodätische Linien der Raumzeit. Ebenso universell sind Lichtstrahlen, die Weltlinien von Lichtpulsen. Sie sind geodätische Weltlinien, die sich als Grenzfall der geodätischen Weltlinien massiver Teilchen ergeben, deren Geschwindigkeit gegen die Lichtgeschwindigkeit strebt.

Wir haben in unserer Darstellung bisher einfach die Geodätenhypothese und damit das Äquivalenzprinzip unterstellt und angenommen, daß frei fallende Teilchen und Licht im Vakuum geodätische Weltlinien der Metrik der Raumzeit durchlaufen. Tatsächlich folgt das Äquivalenzprinzip aus der Invarianz der Wirkung, die aufgrund der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie stationär ist, unter Koordinatenwechsel. Aus den Maxwellgleichungen, die durch Eichinvarianz und Koordinateninvarianz der Wirkung festgelegt sind, folgt, daß Lichtstrahlen, die Weltlinien von Lichtpulsen, geodätisch sind.

Die Eichinvarianz und die Koordinateninvarianz der Wirkung sind in einer Quantenfeldtheorie mit Spin-1-Teilchen und mit Spin-2-Teilchen notwendig, um zu verhindern, daß sich unphysikalische Zustände mit negativer und daher widersinniger Wahrscheinlichkeit in physikalischen Prozessen auswirken [21]. Diese Koordinateninvarianz ist also nicht nur schön und ästhetisch reizvoll, sondern zwingend erforderlich. Aus denselben Gründen kann es nur ein Spin-2-Teilchen und damit nur eine Metrik geben [12]. Dies erklärt den erstaunlichen, als Äquivalenzprinzip formulierten Befund, daß alle Teilchen ein und derselben Gravitation unterliegen und auf ein und dieselbe Art durch ihren Energieimpulstensor Gravitation erzeugen, statt an mehrere Spin-2-Felder auf so unterschiedliche Art zu koppeln wie an die zwölf Spin-1-Felder des Standardmodells der elementaren Wechselwirkungen.

Die Geodätenhypothese ist, im Gegensatz zu ihrem Namen, keine Hypothese, die man zur Deutung des metrischen Feldes fordern kann und die man in Spielarten der Allgemeinen Relativitätstheorie abändern könnte. Wie wir zeigen werden, spielt Torsion für die Bewegung von Testteilchen und Licht keine Rolle. Testteilchen und Lichtstrahlen durchlaufen geodätische Weltlinien des torsionsfreien, metrikverträglichen Paralleltransports.

Die Geodätenhypothese gilt näherungsweise, solange die Gravitation, die vom Testteilchen und von den Lichtstrahlen erzeugt wird, auch am Ort des Teilchens vernachlässigbar ist und solange die Ausmessungen des Teilchens und die Wellenlänge des Lichts klein sind gegenüber den Strecken, auf denen sich das Gravitationsfeld ändert. Diese Einschränkung gilt auch schon für das Äquivalenzprinzip in der Newtonschen Physik. Daß eine große und eine kleine Masse gleich fallen, leitet man gelegentlich mit der Überlegung her, daß, wenn man eine Masse in zwei Teile zerschneidet, beide Teile nebeneinander so fallen wie die Gesamtmasse. Das gilt allerdings nur, wenn die Teile nicht unterschiedlicher Gravitation ausgesetzt sind, also wenn das Gravitationsfeld auf den Abmessungen der Gesamtmasse konstant ist, und wenn man die gegenseitige Gravitation der Teile vernachlässigen kann.

Die Geodätenhypothese wird in der Nähe von Singularitäten der Metrik falsch, denn dort ändert sich die Metrik innerhalb der Abmessungen der Wellenpakete der Teilchen oder des Lichts. Um das Verhalten von Licht und Teilchen und ihre Rückwirkung auf die Metrik in der Nähe einer Singularität zu bestimmen, müßte man die gekoppelten Feldgleichungen für Metrik und Materie lösen.

7.2 Lokale Energie-Impulserhaltung

Die Geodätenhypothese folgt daraus, daß die Wirkung, aus der die Feldgleichungen abgeleitet werden, invariant unter Koordinatentransformationen ist.

Unter infinitesimalen Koordinatentransformationen $x'^m = x^m - \xi^m$ ändert sich die Metrik um die Lieableitung (C.107) längs ξ

$$\delta_\xi g_{mn} = \xi^k \partial_k g_{mn} + \partial_m \xi^k g_{kn} + \partial_n \xi^k g_{mk} \ . \tag{7.1}$$

Wir unterstellen, daß in Abwesenheit von Materie die Feldgleichungen der Metrik aus einer Wirkung $W_{\text{Metrik}}[g]$ folgen, die invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen ist, und daß alle anderen Felder ϕ, die Materiefelder, durch eine ebenfalls koordinateninvariante Wirkung W_{Materie} an die Metrik gekoppelt ist [1]

$$W[g,\phi] = W_{\text{Metrik}}[g] + W_{\text{Materie}}[g,\phi] \ . \tag{7.2}$$

Wie die Felder ϕ unter infinitesimalem Wechsel der Koordinaten transformieren und welche genauere Struktur die beiden Anteile der Wirkung haben, wird im weiteren nicht benötigt, da wir nur die Noetheridentität (G.37) auswerten, die zu den Transformationen (7.1) gehört. Erfüllen die Materiefelder ϕ_i ihre Bewegungsgleichungen $\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta \phi_i} = 0$, so gelten identisch im Feld g_{mn} die Gleichungen (G.54)

$$(\partial_k g_{mn}) \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta g_{mn}} - \partial_m \big(g_{kn} \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta g_{mn}}\big) - \partial_n \big(g_{mk} \frac{\delta W_{\text{Matrie}}}{\delta g_{mn}}\big) = 0 \ . \tag{7.3}$$

[1]Brans-Dicke-Theorien enthalten ein Skalarfeld φ, das bei geeignet gewählter Metrik nicht in $W_{\text{Materie}}[g,\phi]$ sondern nur in $W_{\text{Metrik}}[g,\varphi]$ auftritt. Solch ein Feld ändert die Bewegungsgleichungen der Metrik, wechselwirkt aber nicht direkt mit der Materie. Auch in Theorien mit solcherart verborgenen Teilen gilt lokale Energie-Impulserhaltung der Materie ϕ, deren Testteilchen die geodätischen Weltlinien der Metrik g_{mn} durchlaufen.

Verborgene Sektoren werden als Erklärung gravitativ wirkender, nicht leuchtender Materie vorgeschlagen, die sich in der Bewegung von Sternen in Galaxien und der Zeitentwicklung des Universums zeigt. Warum einige Felder verborgen sein sollten, bleibt allerdings rätselhaft.

Die Variationsableitung der Materiewirkung

$$\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta g_{mn}(x)} = -\frac{1}{2} \mathcal{T}^{mn} \tag{7.4}$$

ist bis auf den Faktor $-\frac{1}{2}$ die Energie-Impulstensordichte: $\mathcal{T}^{mn}$ stimmt im flachen Raum aufgrund der Bewegungsgleichungen der Materie bis auf sogenannte Verbesserungsterme mit dem Energie-Impulstensor überein, der die Ströme enthält, die zur Invarianz unter räumlichen und zeitlichen Translationen gehören. Diese Identifizierung (G.55) der Variationsableitung der Materiewirkung als Energie-Impulstensordichte ist eine Folge der Invarianz der Materiewirkung unter Wechsel des Koordinatensystems und gilt unabhängig von Besonderheiten dieser oder jener Materiewirkung.

Die Energie-Impulstensordichte ist in den Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

$$\frac{\delta W_{\text{Metrik}}}{\delta g_{mn}(x)} = \frac{1}{2} \mathcal{T}^{mn}(x) \tag{7.5}$$

die Quelle für Gravitation und enthält in ihren Komponenten Energiedichten und Energiestromdichten sowie Impulsdichten und Impulsstromdichten. Alle Materie erzeugt also Gravitation auf ein und dieselbe Art durch ihre Energie-Impulstensordichte, unabhängig davon, welche anderen Eigenschaften die jeweilige Materie hat. Der erstaunliche Befund, daß auch bei der Erzeugung von Gravitation alle Materie äquivalent ist, solange sie nur die gleiche Energie-Impulstensordichte erzeugt, folgt so wie die Tatsache, daß alle Materie durch Gravitation auf dieselbe Art beeinflußt wird, aus der Invarianz der Wirkung unter Wechsel der Koordinaten.

Weil die Metrik $g_{mn} = g_{nm}$ symmetrisch unter Vertauschung der beiden Indizes ist, ist die Energie-Impulstensordichte symmetrisch

$$\mathcal{T}^{mn} = \mathcal{T}^{nm} \ . \tag{7.6}$$

Die Noetheridentität (7.3) besagt für die Energie-Impulstensordichte

$$\partial_l \mathcal{T}^{ml} + \Gamma_{kl}{}^m \mathcal{T}^{kl} = 0 \ , \tag{7.7}$$

wobei

$$\Gamma_{kl}{}^m = \frac{1}{2} g^{mn} (\partial_k g_{nl} + \partial_l g_{nk} - \partial_n g_{kl}) \tag{7.8}$$

das Christoffelsymbol (C.106) ist, das zum metrikverträglichen, torsionsfreien Paralleltransport gehört.

Daß die Gleichung (7.7) kovariant ist und in allen Koordinatensystemen gilt, wird offensichtlich, wenn wir von der Tensordichte $\mathcal{T}^{mn}$ das Volumenelement $\sqrt{\mathfrak{g}}$ (I.14) abspalten

$$\mathcal{T}^{mn} = \sqrt{\mathfrak{g}}\, T^{mn} \ . \tag{7.9}$$

Der Energie-Impulstensor T^{mn} erfüllt wegen (7.7) und (I.15) die Gleichung

$$0 = \sqrt{\mathfrak{g}} \big(\partial_l T^{ml} + \Gamma_{lk}{}^k T^{ml} + \Gamma_{lk}{}^m T^{kl} \big) = \sqrt{\mathfrak{g}} D_l T^{ml} \ , \tag{7.10}$$

es verschwindet also die kovariante Divergenz des Energie-Impulstensors. Dabei ist die Konnektion $\Gamma_{kl}{}^m$, mit der die kovariante Ableitung gebildet wird, metrikverträglich und torsionsfrei, also durch das Christoffelsymbol gegeben.

Die Gleichung (7.7) beschreibt analog zur Elektrodynamik (5.26), wie in der Allgemeinen Relativitätstheorie Energie und Impuls erhalten sind und wie die Energie- und Impulserhaltung verletzt sind.

Für jeden Raumzeitpunkt lassen sich Koordinaten finden, so daß das Christoffelsymbol an diesem Punkt verschwindet. Dies haben wir im Anschluß an Gleichung (C.74) gezeigt. Grenzt man in solch einem Koordinatensystem ein kleines Volumen ab, und integriert man die Energiedichte $\mathcal{T}^{00}$, so ändert sich, analog zu (5.22), die im Volumen befindliche Energie nur dadurch, daß unausgeglichen Energie durch die Randflächen in das Volumen hinein oder heraus strömt. Dies ist zwar nicht ganz richtig, denn das Christoffelsymbol verschwindet nicht im ganzen Volumen, aber man kann den Fehler durch Verkleinern des Volumens beliebig klein machen. Gleiches gilt für jede Komponente des Impulses und die zugehörige Impulsdichte $\mathcal{T}^{0i}$. Lokal gilt also in jedem Raumzeitpunkt Energie- und Impulserhaltung.

Folglich gibt die Allgemeine Relativitätstheorie auf die Frage: „Wann würden wir es auf der Erde merken, wenn plötzlich die Sonne nicht mehr da wäre und die Gravitation der Sonne die Erde nicht mehr auf einer Umlaufbahn hielte?“ die Antwort, daß solch eine Situation nicht entstehen kann, denn Energie und Impuls können nicht einfach weggedacht werden, sondern nur an einen anderen Punkt transportiert werden. Die Frage ist im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie so sinnvoll wie in der Zahlentheorie die Frage, ob eine ganze Zahl gerade oder ungerade ist, wenn sie zwischen 0 und 1 liegt.

Obwohl es in jedem Raumzeitpunkt Energie- und Impulserhaltung gibt, gibt es dennoch keine Erhaltung der Gesamtenergie oder des Gesamtimpulses. Es läßt sich, wie wir im Anschluß an Gleichung (C.67) diskutiert haben, das Christoffelsymbol nur dann in einer Umgebung eines Punktes durch Wahl des Koordinatensystems auf Null transformieren, wenn der Riemanntensor verschwindet und folglich die Raumzeit flach ist. Dies kann nur in einer Raumzeit gelten, die vollständig leer ist. Der Term $\Gamma_{kl}{}^m\mathcal{T}^{kl}$ in (7.7) verletzt die Energie- und Impulserhaltung. Anders als im Fall der Elektrodynamik (5.26), wo die Zusatzterme $\frac{1}{c}F^k{}_n j^n$ den Austausch von Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes mit den Ladungen beschreibt, kann $\Gamma_{kl}{}^m\mathcal{T}^{kl}$ nicht einfach als Austausch von Energie- und Impuls der Materie mit dem Gravitationsfeld gedeutet werden, denn dieser Term hängt vom verwendeten Koordinatensystem ab. Er kann nicht lokal gemessen werden, denn alle lokalen Meßapparate messen Größen, die vom verwendeten Koordinatensystem unabhängig sind.

Wenn aber die Metrik eine Isometrie besitzt und es ein Killingfeld ξ mit $\delta_\xi g_{mn} = 0$ (7.1) gibt, dann folgt aus (7.7) ein zur Symmetrie gehöriger erhaltener Strom. Wir sehen dies, wenn wir die nach Wilhelm Killing [37] benannte Killinggleichung (E.28)

$$0 = \xi^k\partial_k g_{mn} + \partial_m\xi^k g_{kn} + \partial_n\xi^k g_{mk} \tag{7.11}$$

mit $\mathcal{T}^{mn}$ multiplizieren und, wir verwenden die Schreibweise $\xi_n = g_{nk}\xi^k$, geeignet zusammenfassen

$$\begin{aligned}0 &= \big(\xi^k\partial_k g_{mn} + \partial_m\xi^k g_{kn} + \partial_n\xi^k g_{mk}\big)\mathcal{T}^{mn}\\ &= \partial_m(\xi_n\mathcal{T}^{mn}) + \partial_n(\xi_m\mathcal{T}^{mn}) +\\ &\quad + \xi^k\big((\partial_k g_{mn})\mathcal{T}^{mn} - \partial_m(g_{kn}\mathcal{T}^{mn}) - \partial_n(g_{mk}\mathcal{T}^{mn})\big)\ .\end{aligned} \tag{7.12}$$

Die letzte Zeile verschwindet wegen (7.3). Demnach gehört zu jedem Killingfeld ξ ein erhaltener Strom (G.55)

$$j^m = \mathcal{T}^{mn}\xi_n\ , \quad \partial_m j^m = 0\ . \tag{7.13}$$

Ist zum Beispiel die Metrik zeitunabhängig, so ist die Energie der Materie im Gravitationsfeld erhalten; ist die Metrik drehinvariant, so ist der Drehimpuls der Materie erhalten. Ändert sich die Metrik wie im expandierenden Universum im Laufe der Zeit, so ist die Energie nicht erhalten. Die Energie der Hintergrundstrahlung nimmt durch die Rotverschiebung, die mit der Expansion einhergeht, ab, ohne daß diese Energie in eine andere, lokal meßbare Energieform überführt wird.

Auch zu jedem konformen Killingfeld ξ, $\xi^k\partial_k g_{mn} + \partial_m\xi^k g_{kn} + \partial_n\xi^k g_{mk} + \epsilon g_{mn} = 0$, gehört, wie (7.12) zeigt, ein erhaltener Strom $\mathcal{T}^{mn}\xi_n$, wenn die Energie-Impulstensordichte spurfrei ist $\mathcal{T}^{mn}g_{mn} = 0$. Dies ist dann der Fall, wenn die Lagrangedichte von der Metrik g_{mn} nur über die metrische Dichte $\mathfrak{g}^{\frac{1}{d}}g^{mn}$ abhängt, beispielsweise beim Skalarfeld ϕ in $d = 2$ Dimensionen mit Lagrangedichte $\mathscr{L} = \sqrt{\mathfrak{g}}\, g^{mn}\,\partial_m\phi\,\partial_n\phi$ oder beim Vektorfeld A_m in $d = 4$ Dimensionen mit Lagrangedichte (7.62).

7.3 Testteilchen

Ist ein Testteilchen so klein, daß auf seinen Abmessungen die Ungleichmäßigkeit des metrischen Feldes vernachlässigt werden kann, andererseits aber so ausgedehnt, daß die Gravitation, die es selbst erzeugt auch an dem Ort vernachlässigt werden kann, an dem es sich aufhält, so durchläuft im Vakuum, wie wir in diesem Abschnitt zeigen [50], der Schwerpunkt dieses Testteilchens in der Raumzeit eine geodätische Weltlinie des torsionsfreien, metrikverträglichen Paralleltransports.

Ein Teilchen hat Energie und Impuls und trägt also zur Energie-Impulstensordichte (7.4) bei. Um das Verhalten des Teilchens im Gravitationsfeld zu klären, denken wir uns die Feldgleichungen (7.5) der Gravitation zunächst in Abwesenheit des Teilchens gelöst. Dann existieren eine Metrik g_{mn} und eine Energie-Impulstensordichte $\mathcal{T}^{mn}$, die insbesondere die Gleichung (7.7) für die kovariante Energie-Impulserhaltung lösen. Fügen wir ein Testteilchen hinzu, so ändert sich die Metrik und damit verbunden das Christoffelsymbol und die Energie-Impulstensordichte. Außer (7.7) gilt auch

$$0 = \partial_l(\mathcal{T}^{ml} + \tau^{ml}) + (\Gamma_{kl}{}^m + \gamma_{kl}{}^m)(\mathcal{T}^{kl} + \tau^{kl})\ . \tag{7.14}$$

Für die Änderung τ^{ml} der Energie-Impulstensordichte, die vom Testteilchen hervorgerufen ist, und die Änderung des Christoffelsymbols $\gamma_{kl}{}^m$ folgt also

$$0 = \partial_l\tau^{ml} + \Gamma_{kl}{}^m\tau^{kl} + \gamma_{kl}{}^m(\mathcal{T}^{kl} + \tau^{kl})\ . \tag{7.15}$$

Eine etwaige Vakuumenergiedichte, die zu einer kosmologischen Konstante gehört und die getrennt (7.7) erfüllt, denken wir uns von $\mathcal{T}^{kl}$ abgezogen. Betrachten wir dann das Testteilchen im Vakuum, so verschwindet $\mathcal{T}^{kl}$ dort. Darüber hinaus nehmen wir an, daß wir die gravitative Rückwirkung des Teilchens auf sich selbst, den Term $\gamma_{kl}{}^m\tau^{kl}$ vernachlässigen dürfen. Diese Annahme schließt aus, daß das Teilchen ein Punktteilchen ist. Insbesondere muß das Teilchen groß gegen den zu seiner Masse gehörigen Schwarzschildradius sein und überall geringe Dichten von Energie- und Impuls haben, damit wir die ihm eigene Gravitation vernachlässigen können.

Mit diesen Modellannahmen vernachlässigen wir die gravitativen Auswirkungen des Testteilchens und fassen die Metrik g_{mn} als vorgegebenes Feld auf, als sogenanntes Hintergrundfeld, unter dessen Einfluß sich das Testteilchen bewegt

$$0 = \partial_l\tau^{ml} + \Gamma_{kl}{}^m\tau^{kl} \tag{7.16}$$

und folglich

$$\tau^{mn} = \partial_l\bigl(x^n\tau^{ml}\bigr) + x^n\Gamma_{kl}{}^m\tau^{kl}\ . \tag{7.17}$$

Als weitere Eigenschaft des Teilchens nehmen wir an, daß die Energie-Impulstensordichte des Teilchens auf einen Schlauch um die Weltlinie des Schwerpunktes $X(\lambda)$ beschränkt ist, das heißt, wenn wir über Schichten gleicher Zeit $x^0 = X^0(\lambda)$ integrieren, so verschwindet für jedes λ

$$\int_{x^0=X^0(\lambda)} \mathrm{d}^3x\,(x^l - X^l(\lambda))\tau^{mn} = 0\ . \tag{7.18}$$

Für $m = n = 0$ definiert diese Gleichung die Weltlinie des Energieschwerpunktes eines ausgedehnten Teilchens. Wir fordern als Eigenschaft des Teilchens, daß die Schwerpunkte der anderen Komponenten der Energie-Impulstensordichte mit dem Energieschwerpunkt übereinstimmen, so wie das bei einem Punktteilchen der Fall ist.

Zur rechnerischen Vereinfachung wählen wir als Parameter λ der Weltlinie die Koordinatenzeit x^0 und nennen ihn t. Es gilt dann einfach $X^0(t) = t$.

Der Schlauch sei groß genug, daß die Energie- und Impulsdichten des Teilchen klein sind, und klein genug, so daß sich auf seinen Abmessungen nicht auswirkt, daß die Gravitation ungleichmäßig ist. Was diese etwas unklaren Eigenschaften genau besagen sollen, zeigt die folgende Rechnung.

Wir integrieren (7.16) über Schichten gleicher Zeit $x^0 = t$

$$0 = \int_{x^0=t} \mathrm{d}^3x\,\bigl(\partial_0\tau^{m0} + \partial_i\tau^{mi} + \Gamma_{kl}{}^m\tau^{kl}\bigr)\ . \tag{7.19}$$

Beim ersten Term kann die Zeitableitung vor das Integral gezogen werden. Das Integral über die räumlichen Ableitungen $\partial_i\tau^{mi}$ verschwindet, denn nach dem Gaußschen Satz ist es gleich dem Oberflächenintegral über die Fläche, die das Integrationsvolumen berandet, und in weiter Entfernung von Schwerpunkt verschwindet τ^{mi}, weil das Teilchen klein ist. Beim dritten Term entwickeln wir $\Gamma_{kl}{}^m(x)$ um den Schwerpunkt mit einem Restglied zweiter Ordnung

$$\Gamma_{kl}{}^m(x) = \Gamma_{kl}{}^m(X) + (x^r - X^r)\partial_r\Gamma_{kl}{}^m(X) + \frac{1}{2}(x^r - X^r)(x^s - X^s)\partial_r\partial_s\Gamma_{kl}{}^m(\overline{x})\ ,$$

wobei $\overline{x}$ ein Punkt zwischen $X(t)$ und x ist. Setzten wir diese Entwicklung in das Integral $\int_{x^0=t}\Gamma_{kl}{}^m(x)\tau^{kl}$ ein, so können wir beim ersten Term $\Gamma_{kl}{}^m(X)$ und beim zweiten $\partial_r\Gamma_{kl}{}^m(X)$ vor das Integral ziehen, da diese Faktoren nicht von der Integrationsvariablen abhängen. Das Integral über $(x^r - X^r)\tau^{kl}$ verschwindet nach Definition des Schwerpunktes (7.18). Das Integral über den Term mit dem Restglied vernachlässigen wir

$$\int_{x^0=t} \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}(x^r - X^r)(x^s - X^s)\partial_r\partial_s\Gamma_{kl}{}^m(\overline{x})\tau^{kl} \approx 0\ . \tag{7.20}$$

Es ist proportional zu den Änderungen von Γ in zweiter Ordnung innerhalb der Abmessungen des Teilchens und verschwindet im Grenzfall eines nicht ausgedehnten Teilchens. In diesem Sinn ist ein Testteilchen klein.

Wir erhalten mit dieser Näherung aus (7.19)

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{m0} + \Gamma_{kl}{}^m(X(t))\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{kl}\ . \tag{7.21}$$

Für ein Integral mit $\Gamma_{kl}{}^m$ wirkt τ^{kl} wie ein Vielfaches der $\delta^3(\vec{x} - \vec{X}(t))$-Funktion.

Integrieren wir (7.17), so erhalten wir aus denselben Gründen

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{kl} &= \int \mathrm{d}^3x\,\bigl(\partial_0(x^k\tau^{0l}) + \partial_i(x^k\tau^{il}) + x^k\Gamma_{mn}{}^l\tau^{mn}\bigr)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigl(X^k(t)\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{0l}\Bigr) + X^k(t)\,\Gamma_{mn}{}^l(X(t))\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{mn}\ .\end{aligned} \tag{7.22}$$

Kombinieren wir dies Ergebnis mit (7.21), so vereinfacht es sich zu

$$\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{kl} = \Bigl(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^k(t)\Bigr)\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{0l}\ . \tag{7.23}$$

Für $l = 0$ und wegen $\tau^{kl} = \tau^{lk}$ erhalten wir

$$\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{0k} = \Bigl(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^k(t)\Bigr)\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{00}\ , \tag{7.24}$$

und, wenn wir k in l umbenennen und in (7.23) einsetzen,

$$\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{kl} = \Bigl(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^k(t)\Bigr)\Bigl(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^l(t)\Bigr)\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{00}\ . \tag{7.25}$$

Setzen wir in (7.21) ein, so ergibt sich

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigl(\frac{\mathrm{d}X^m}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{00}\Bigr) + \Gamma_{kl}{}^m(X)\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}X^l}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3x\,\tau^{00}\ . \tag{7.26}$$

Dies ist die Geodätengleichung in der Parametrisierung $X^0(t) = t$. Fassen wir $t(s)$ als Funktion eines Parameters s auf, die durch

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = f(t)\ ,\quad f(t) = \frac{1}{m}\int_{x^0=t} \mathrm{d}^3x\,\tau^{00} \tag{7.27}$$

definiert ist, über den Normierungsfaktor m sagen wir gleich etwas, dann ist (7.26) die Gleichung für eine geodätische Weltlinie (6.13), die mit ihrer Eigenzeit parametrisiert ist

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}X^m(s) + \Gamma_{kl}{}^m(X)\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}X^l}{\mathrm{d}s} = 0 \ . \tag{7.28}$$

Greifen wir die Bemerkung nach (7.21) auf, daß in Integralen über Schichten gleicher Zeit die Energie-Impulstensordichte wie ein Vielfaches der δ-Funktion wirkt. Dieses Vielfache wird in (7.25) und (7.27) bestimmt,

$$\tau^{kl}(x) = m\,\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}X^l}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{X}(t)) \ . \tag{7.29}$$

Den Normierungsfaktor m identifizieren wir als Masse des Teilchens. Dazu integrieren wir die Komponenten τ^{k0}, das sind die Dichten von Energie und Impuls, über eine Schicht gleicher Zeit. Für Energie und Impuls erhalten wir

$$P^k(t) = \int_{x^0=t} \mathrm{d}^3x\,\tau^{k0} = m\,\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}s}(s(t)) \ . \tag{7.30}$$

Dies ist im Maßsystem $c = 1$ der Viererimpuls eines Teilchens mit Masse m und Eigenzeit s (4.103, 4.6).

Verteilt man viele Teilchen mit einer Energie-Impulstensordichte (7.29) zu einem Kontinuum mit Massendichte $\rho(x)$ und zeitartiger Vierergeschwindigkeit $u^k(x)$, $u^2 = 1$,

$$\mathcal{T}^{kl} = \sqrt{\mathfrak{g}}\,\rho\,u^k\,u^l \ , \tag{7.31}$$

Materie mit solch einem Energie-Impulstensor nennt man Staub, so besagt die kovariante Energie-Impulserhaltung

$$0 = \sqrt{\mathfrak{g}}D_k(\,\rho\,u^k\,u^l) = \sqrt{\mathfrak{g}}\big(D_k(\rho\,u^k)u^l + \rho\,u^k D_k u^l\big) \ . \tag{7.32}$$

Die beiden Terme müssen getrennt verschwinden, denn die Ableitung eines Einheitsvektors $D_k u$ steht auf u senkrecht (C.100) und ist, da u nicht lichtartig ist, linear unabhängig von u. Die Gleichung

$$u^k D_k u^l = 0 \tag{7.33}$$

ist die Geodätengleichung für die Weltlinien $x(s)$, $u^l = \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}$, der Staubteilchen. Die Staubteilchen fallen frei. Ihre Massendichte gehört zu einem erhaltenen Strom (I.16)

$$\sqrt{\mathfrak{g}}D_k\big(\rho\,u^k\big) = \partial_k\big(\sqrt{\mathfrak{g}}\,\rho\,u^k\big) = 0 \ . \tag{7.34}$$

Die Massendichte ρ ändert sich, wenn geodätische Weltlinien auseinander- oder zusammenlaufen. Bezeichne $f(s) = D_k u^k{}_{|x(s)}$ die Viererdivergenz der geodätischen Linien als Funktion des Bahnparameters, so besagt $\partial_k(\sqrt{\mathfrak{g}}\,\rho\,u^k) = 0$, daß die Massendichte ρ längs der geodätischen Weltlinie die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\rho + f(s)\,\rho = 0 \tag{7.35}$$

erfüllt. Ist die Massendichte $\rho(x)$ auf den Ereignissen $x(0)$ vorgegeben, die von den geodätischen Weltlinien für $s = 0$ durchlaufen werden, so liegt sie überall fest

$$\rho(x(s)) = \rho(x(0))\,\mathrm{e}^{-\int_0^s ds'\,f(s')} \ . \tag{7.36}$$

7.4 Ideale Flüssigkeit

Die Teilchen einer ruhenden Flüssigkeit, die ein Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ mit konstanter Dichte ausfüllt, kann man durch den jeweiligen Ort $\vec{y} \in \mathcal{G}$ bezeichnen, an dem sie sich befinden. Bewegen sich die Teilchen, so durchlaufen sie Weltlinien $\Gamma_{\vec{y}} : \lambda \mapsto x(\lambda, \vec{y})$, die einen Bereich der Raumzeit, $\mathcal{M}$, durchströmen. Wir geben umgekehrt für jedes Ereignis $x \in \mathcal{M}$ den Parameterwert λ und den Namen des Teilchens $\vec{y}$ (zusammengefaßt als $y = (\lambda, \vec{y})$) an, das das Ereignis x durchläuft,

$$y : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R}\times\mathcal{G} \\ x & \mapsto & y(x) \end{array}\right. \ . \tag{7.37}$$

Die Abbildung y bilde den von der Flüssigkeit durchströmten Bereich $\mathcal{M}$ invertierbar auf $\mathbb{R}\times\mathcal{G}$ ab.

Die Funktionen y^m, $m = 0,1,2,3$, $y^0 = \lambda$, transformieren unter Koordinatentransformationen der Raumzeit, $\Phi : x \mapsto x'(x)$, als skalare Funktionen,

$$y'^m(x') = y^m(x(x')) \ , \quad y' = y\circ\Phi^{-1} \ . \tag{7.38}$$

Unter Umbenennungen, $\phi : \mathbb{R}\times\mathcal{G} \to \mathbb{R}\times\mathcal{G}$, $(y^0, \vec{y}) \mapsto (y^0, \vec{z}(\vec{y}))$, transformieren die Teilchennamen wie Koordinaten,

$$y'^0 = y^0 \ , \quad \vec{y}'(x) = \vec{z}(\vec{y}(x)) \ , \quad y' = \phi\circ y \ . \tag{7.39}$$

Wir verwenden einschränkender die Bezeichnung Umbenennung für invertierbare, volumentreue Selbstabbildungen von $\mathcal{G}$, die die konstante Dichte nicht ändern,

$$\det{}_{3\times 3}\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \ . \tag{7.40}$$

Eine Reparametrisierung der Weltlinien ersetzt die Funktion $y^0(x)$ durch eine beliebige andere Funktion $y'^0(x)$, die nur dadurch eingeschränkt ist, daß $y'(x)$ invertierbar sei und daß die Weltlinien mit zunehmendem Parameter durchlaufen werden, $\partial_0 y'^0 > 0$.

Aus den Ableitungen der Teilchennamen $\vec{y}$ ist die Stromdichte

$$j^m = \varepsilon^{mnrs}\,\partial_n y^1\,\partial_r y^2\,\partial_s y^3 = \frac{1}{6}\,\varepsilon^{mnrs}\,\partial_n y^a\,\partial_r y^b\,\partial_s y^c\,\varepsilon^{0abc} \tag{7.41}$$

zusammengesetzt. Dabei bezeichnet ε^{mnrs} das Epsilonsymbol (A.60) in vier Dimensionen. Die Stromdichte ist erhalten,

$$\partial_m j^m = 0 \ , \tag{7.42}$$

denn mit $\varepsilon^{m\ldots r\ldots}$ kontrahiert verschwinden die zweiten Ableitungen $\partial_m\partial_r y^i$.

Die Stromdichte ist unter Umbenennungen (7.39) und Reparametrisierungen invariant.

Bei Koordinatenwechsel (7.38) transformieren die Funktionen j^m wie die Komponenten einer Stromdichte (B.45) vom Gewicht 1,

$$j'^m(x') = \big(\det\frac{\partial x}{\partial x'}\big)\,\frac{\partial x'^m}{\partial x^n}\,j^n(x(x')) \ . \tag{7.43}$$

Dies folgt aus der Kettenregel $\partial'_m y'^i = \frac{\partial x^u}{\partial x'^m}\partial_u y^i$ und weil $j'^m \frac{\partial x^u}{\partial x'^m}$ die Jacobi-Determinante $\varepsilon^{m\dots s}\frac{\partial x^u}{\partial x'^m}\dots\frac{\partial x^v}{\partial x'^s} = (\det\frac{\partial x}{\partial x'})\,\varepsilon^{u\dots v}$ enthält.

Multipliziert mit den partiellen Ableitungen $\partial_m y^n$ ergibt die Stromdichte j^m entweder Null oder die Jacobi-Determinante

$$j^m \partial_m y^0 = \det\frac{\partial y}{\partial x}\ , \quad j^m \partial_m y^i = 0 \text{ für } i \in \{1,2,3\}\ . \tag{7.44}$$

Sie ist demnach proportional zur ersten Zeile der inversen Jacobi-Matrix $\partial x/\partial y$ (I.8),

$$j^m(x) = \frac{\partial x^m}{\partial y^0}_{|y(x)} \det\frac{\partial y}{\partial x}_{|x}\ , \tag{7.45}$$

das heißt, proportional zum Tangentialvektor an die Weltlinie $\Gamma_{\vec y}$, die x durchströmt.

Die Stromdichte sei zeitartig $j^m\, j^n\, g_{mn} \geq 0$.

Da das Volumenelement $\sqrt{\mathfrak{g}}$ wie eine skalare Dichte vom Gewicht 1 transformiert, sind die Funktionen $j^m/\sqrt{\mathfrak{g}}$ die Komponenten eines Vektorfeldes,

$$j^m = \sqrt{\mathfrak{g}}\,\rho\, u^m\ , \quad u^2 = 1\ , \quad \rho = \sqrt{\frac{|j^m\, j^n\, g_{mn}|}{\mathfrak{g}}}\ , \tag{7.46}$$

dessen Betrag ρ ein Skalarfeld ist. Die Funktion ρ ist die Teilchendichte der Flüssigkeit im mitbewegten Bezugssystem und das normierte Vektorfeld u^m ihre Vierergeschwindigkeit.

Mit ρ ist ist auch jede Funktion $\mu(\rho)$ ein skalares Feld. Daher gehört die Lagrangedichte

$$\mathscr{L}_{\text{Flüssigkeit}}(g,\partial y) = -\sqrt{\mathfrak{g}}\,\mu(\rho) \tag{7.47}$$

zu einer Wirkung, die unter Umbenennungen (7.39) und, wie Argumente wie auf Seite 161 zeigen, unter allgemeinen Koordinatentransformationen invariant ist.

Die Ableitung der Lagrangedichte nach der Metrik ist die Energie-Impulsdichte (7.4).

$$\frac{\delta W_{\text{Flüssigkeit}}}{\delta g_{mn}(x)} = -\frac{1}{2}\mathcal{T}^{mn} = -\frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{g}}\left(g^{mn}\mu + \frac{\mu'}{\rho\,\mathfrak{g}}\big(j^m\, j^n - j^k\, j^l\, g_{kl}\, g^{mn}\big)\right)\ , \quad \mu' = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\rho}\ . \tag{7.48}$$

Durch die Dichte und die Vierergeschwindigkeit ausgedrückt (7.46) und mit

$$p = \rho\,\mu' - \mu \tag{7.49}$$

hat der Energie-Impulstensor $T^{mn} = \mathcal{T}^{mn}/\sqrt{\mathfrak{g}}$ die Form

$$T^{mn} = (\mu + p)\, u^m\, u^n - p\, g^{mn}\ . \tag{7.50}$$

Es sind folglich $p(\rho)$ der Druck und $\mu(\rho)$ die Energiedichte der Flüssigkeit im mitbewegten Bezugssystem als Funktion der Teilchendichte ρ .

Der Druck (7.49) gehört zu adiabatischer, also entropiebewahrender, Änderung des Volumens der unveränderten Flüssigkeitsmenge, $\mathrm{d}(\rho V) = 0 = (\mathrm{d}\rho)\, V + \rho\,\mathrm{d}V$. Denn dabei ändert sich die Energie $E = \mu\, V$ im kleinen Volumen V um

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}(\mu\, V) = \mu'\,(\mathrm{d}\rho)\, V + \mu\,\mathrm{d}V = -\mu'\rho\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}V = -p\,\mathrm{d}V\ . \tag{7.51}$$

Ist beispielsweise die Energiedichte eine Potenz der Teilchendichte, $\mu = \text{konst}\cdot\rho^k$, so ist der Druck $p = (k-1)\,\mu$ proportional zur Energiedichte. Bei einem relativistischen Gas ist der Energie-Impulstensor spurlos, $T^{mn} g_{mn} = \mu - 3p = 0$, und $k = 4/3$. Bei Staub verschwindet der Druck, $p = 0, k = 1$. Eine konstante, positive Energiedichte, $k = 0$, bewirkt negativen Druck, $p = -\mu$.

Die Wirkung ist unter allgemeinen Koordinatentransformationen invariant. Daher ist der Energie-Impulstensor kovariant erhalten,

$$D_m\big((\mu + p)\, u^m\, u_r - p\,\delta^m{}_r\big) = 0 \tag{7.52}$$

falls die Felder $y(x)$ ihre Bewegungsgleichungen erfüllen (7.10).

Wir zeigen, daß diese Bewegungsgleichungen überall dort äquivalent zur kovarianten Erhaltung des Energie-Impulstensors sind, wo die Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen $\partial_m y^a$ von maximalem Rang ist. Aus der Lagrangefunktion (7.47) ergibt sich wegen

$$\frac{\partial\mathscr{L}_{\text{Flüssigkeit}}}{\partial j^m} = -\sqrt{\mathfrak{g}}\,\mu'\,\frac{j^n\, g_{mn}}{\rho\,\mathfrak{g}} = -\mu'\, u_m \tag{7.53}$$

und (7.41) die Eulerableitung der zugehörigen Wirkung

$$\frac{\delta W_{\text{Flüssigkeit}}}{\delta y^a} = \partial_n(\mu' u_m)\,\frac{1}{2}\,\varepsilon^{mnkl}\,\partial_k y^b\,\partial_l y^c\,\varepsilon^{0abc}\ . \tag{7.54}$$

Die Bewegungsgleichung der Flüssigkeit besagt, daß diese Eulerableitung für $a = 0,1,2,3$ verschwindet. Sie muß auch verschwinden, wenn wir mit $\partial_r y^a$ multiplizieren. Dann enthält der Ausdruck einen Faktor

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon^{mnkl}\,\partial_r y^a\,\partial_k y^b\,\partial_l y^c\,\varepsilon^{0abc} = X^{mn}{}_r = \delta^m{}_r X^n - \delta^n{}_r X^m = -\delta^m{}_r j^n + \delta^n{}_r j^m\ . \tag{7.55}$$

Die zweite Gleichung gilt wegen der Antisymmetrie in m und n und weil $X^{mn}{}_r$ verschwindet, falls r von m und n verschieden ist. Die dritte Gleichung, $X^m = -j^m$, ergibt sich, wenn man mit $\delta^r{}_m$ kontrahiert. Daher gilt

$$\frac{\delta W_{\text{Flüssigkeit}}}{\delta y^a}\,\partial_r y^a = \partial_n(\mu'\, u_m)\,(\delta^n{}_r j^m - \delta^m{}_r j^n) = \big(D_n(\mu'\, u_m) - D_m(\mu'\, u_n)\big)\,\delta^n{}_r j^m\ , \tag{7.56}$$

wobei wir noch ausgenutzt haben, daß wir antisymmetrisierte Ableitungen zu kovarianten Ableitungen ergänzen können. Durch $\sqrt{\mathfrak{g}}\,\rho$ geteilt, folgt mit $u^2 = 1$ und $(D_r u_m)u^m = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}\,\rho}\frac{\delta W_{\text{Flüssigkeit}}}{\delta y^a}\,\partial_r y^a = D_r(\mu'\, u_m)\, u^m - u^m D_m(\mu'\, u_r) = D_r\mu' - u^m D_m(\mu'\, u_r)\ . \tag{7.57}$$

Dies ist bis auf den Faktor ρ die linke Seite von (7.52). Verwenden wir nämlich dort $\mu + p = \rho\,\mu'$ (7.49) und $\partial_m j^m = \sqrt{\mathfrak{g}}\, D_m(\rho\, u^m) = 0$ (7.42), so lautet (7.52)

$$D_m(\mu'\rho\, u^m\, u_r) - D_r(\rho\,\mu' - \mu) = \rho\, u^m D_m(\mu' u_r) - \rho\, D_r\mu' = 0\ . \tag{7.58}$$

Multipliziert mit μ'/ρ sind dies Gleichungen für das Vektorfeld $v_m = \mu' u_m$

$$v^m D_m v_r - \frac{1}{2} D_r \mu'^2 = v^m D_m v_r - \frac{1}{2} D_r v^2 = v^m (D_m v_n - D_n v_m) = 0 \ . \tag{7.59}$$

Die kovariante, antisymmetrisierte Ableitung kann hier durch die partielle Ableitung ersetzt werden. Die Metrik tritt in diesen Gleichungen für die Funktionen v_m nur bei $v^m = g^{ms} v_s$ auf.

Lösen wir die Gleichungen für $r = 1,2,3$ nach den Zeitableitungen auf, so erhalten wir ($s, t \in \{0,1,2,3\}$, $i, j \in \{1,2,3\}$)

$$\partial_0 v_i = \partial_i v_0 - \frac{v_s g^{sj}}{v_t g^{t0}} (\partial_j v_i - \partial_i v_j) \ . \tag{7.60}$$

Die Gleichung für $r = 0$ ist als Folge dieser drei Gleichungen erfüllt.

Diese Gleichung hängt nicht von der Funktion $\mu(\rho)$ ab. Sie kommt ins Spiel, wenn man berücksichtigt, daß die Stromdichte j^m zwar nach Konstruktion die Kontinuitätsgleichung erfüllt, daß man aber $D_m(\rho/\mu' v^m) = 0$ zusätzlich noch fordern muß. Dies führt wegen $v^2 = \mu'^2$ und $v^n D_m v_n = \mu' \mu'' D_m \rho$ für $\mu' \mu'' \neq 0$ auf

$$(g^{mn} + f(v^2)\, v^m v^n)\, D_m v_n = 0 \ , \tag{7.61}$$

wobei die Funktion f sich aus der Funktion μ ergibt, $1 + \mu'^2 f(\mu'^2) = \mu'/(\rho\, \mu'')$. Die Gleichung (7.61) kann nach der Zeitableitung von v_0 aufgelöst werden, sodaß bei gegebener Metrik analytische Lösungen von (7.60, 7.61) durch die Anfangswerte von v^m festgelegt sind.

7.5 Lichtstrahlen

Licht ist eine elektromagnetische Welle, die die Maxwell-Gleichungen löst. Um den Einfluß der Gravitation auf Licht zu bestimmen, untersuchen wir die Feldgleichungen für das elektromagnetische Viererpotential, die sich aus der Wirkung mit Lagrangedichte

$$\mathscr{L}_{\text{Maxwell}}(g, A, \partial A) = -\frac{1}{16\pi c} \sqrt{\mathfrak{g}}\, g^{km}\, g^{ln} \left(\partial_k A_l - \partial_l A_k\right)\left(\partial_m A_n - \partial_n A_m\right) \tag{7.62}$$

ergeben. Diese Lagrangefunktion ist bei Abwesenheit weiterer Felder bis auf vollständige Ableitungen und die Normierung eindeutig festgelegt, wenn man fordert, daß die Bewegungsgleichungen linear in A_m und zweiter Ordnung sein sollen und daß die Wirkung invariant unter Eichtransformationen (5.84) und unter Koordinatentransformationen (A.128) sein soll. Wenn die Metrik flach ist $g_{\text{flach}\ mn} = \eta_{mn}$, dann stimmt die Lagrangefunktion mit (5.188) überein.

Sowohl die Eichinvarianz und Koordinateninvarianz als auch die Beschränkung der Ableitungsordnung sind in einer Quantenfeldtheorie zwingend erforderlich [21], damit sich nicht unphysikalische Freiheitsgrade mit negativen, und daher widersinnigen Wahrscheinlichkeiten in physikalischen Prozessen auswirken.

Durch Variation des Viererpotentials $A_n(x)$ in W_{Maxwell} erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\partial_m\big(\sqrt{\mathfrak{g}}\, g^{km}\, g^{ln} \left(\partial_k A_l - \partial_l A_k\right)\big) = 0 \ . \tag{7.63}$$

Diese Gleichungen sind kovariant, denn die Feldstärke $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_k A_k$ und daher auch $F^{mn} = g^{km} g^{ln} F_{kl}$ transformieren, wie ihr Indexbild angibt, als Tensor (5.204). Die Ableitung von $\sqrt{\mathfrak{g}}$ ergibt ein Christoffelsymbol (I.15), das die partielle Ableitung von F^{mn} zur torsionsfreien und metrikverträglichen kovarianten Ableitung ergänzt. Zudem kann ein Term $\sqrt{\mathfrak{g}}\, \Gamma_{ml}{}^n F^{ml}$ hinzugefügt werden, da die Summe über ein antisymmetrisches Indexpaar $F^{ml} = -F^{lm}$ und ein symmetrisches Indexpaar $\Gamma_{ml}{}^n = \Gamma_{lm}{}^n$ verschwindet (5.17)

$$\partial_m\big(\sqrt{\mathfrak{g}}\, F^{mn}\big) = \sqrt{\mathfrak{g}}\left(\partial_m F^{mn} + \Gamma_{ml}{}^m F^{ln} + \Gamma_{ml}{}^n F^{ml}\right) = \sqrt{\mathfrak{g}}\, D_m F^{mn} \ . \tag{7.64}$$

Wegen $\Gamma_{kl}{}^m = \Gamma_{lk}{}^m$ kann die Feldstärke auch durch kovariante Ableitungen, $D_k A_l = \partial_k A_l - \Gamma_{kl}{}^n A_n$, geschrieben werden $F_{kl} = D_k A_l - D_l A_k$. Zudem können wir die Indizes von Tensorkomponenten mit der Metrik hoch- und runterziehen, denn die kovariante Ableitung der Metrik und folglich der inversen Metrik (C.98) verschwindet. Daher sind die Maxwellgleichungen im Vakuum der gekrümmten Raumzeit

$$D^m(D_m A_n - D_n A_m) = 0 \ . \tag{7.65}$$

In der kovarianten Formulierung der Maxwellgleichung tritt die metrikverträgliche, torsionsfreie Konnektion, das Christoffelsymbol auf. Ebenso wie Testteilchen spürt das elektromagnetische Feld nichts von Torsion.

Den zweiten Term in den Maxwellgleichungen schreiben wir mit (C.54) um, wobei wir berücksichtigen, daß die Torsion verschwindet

$$D_m D_n A^m = [D_m, D_n] A^m + D_n D_m A^m = R_{mnr}{}^m A^r + D_n D_m A^m \ . \tag{7.66}$$

Die Summe

$$R_{mn} = R_{mln}{}^l \tag{7.67}$$

definiert die Komponenten des Riccitensors[2]. Er ist permutationssymmetrisch (C.112)

$$R_{mn} = R_{nm} \ . \tag{7.68}$$

Damit schreiben sich die Feldgleichungen des Viererpotentials als

$$D^m D_m A_n + R_{nm} A^m - D_n D_m A^m = 0 \ . \tag{7.69}$$

Über die Eichfreiheit des Viererpotentials kann man so verfügen, daß diese Gleichungen einfacher werden. Verlangt man die Lorenzeichung (5.89)

$$D_m A^m = 0 \ , \tag{7.70}$$

[2]gesprochen Ritschi

so entkoppeln die vier Potentialfunktionen teilweise

$$D^m D_m A_n + R_{nm} A^m = 0 \ . \tag{7.71}$$

Im flachen Raum verschwinden der Riemann- und der Riccitensor und es gibt kartesische Koordinatensysteme, in denen die Christoffelsymbole Null sind. Dann reduzieren sich diese Gleichungen auf die Wellengleichung (5.90) im Vakuum.

Die Wellengleichung im gekrümmten Raum erhält man nicht aus der Wellengleichung des flachen Raumes, indem man die partiellen Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzt. Über diese minimale Ersetzung hinaus enthält sie einen Zusatzterm mit dem Ricci-Tensor, der nicht einfach einem Term im flachen Raum entspricht.

Die Variationsableitung der Maxwellwirkung nach der Metrik ist die Energie-Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes (7.4). Mit den Formeln (I.8) für die Ableitung einer Determinante und der inversen Matrix (I.12) erhalten wir aus (7.62)

$$\mathcal{T}^{mn}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4\pi c}\sqrt{\mathfrak{g}}\left(F^m{}_l\, F^{nl} - \frac{1}{4} g^{mn}\, F_{kl}\, F^{kl}\right) \ . \tag{7.72}$$

Diese elektromagnetische Energie-Impulstensordichte stimmt für den flachen Raum mit (5.24) überein.

Abhängigkeitsgebiet

Da die Energie-Impulstensordichte $\mathcal{T}^{kl}$ von Feldern u, die ihre Bewegungsgleichungen erfüllen, kovariant erhalten ist (7.7),

$$\partial_l \mathcal{T}^{ml} + \Gamma_{kl}{}^m \mathcal{T}^{kl} = 0 \ , \tag{7.73}$$

sind in der gekrümmten Raumzeit die Energie und der Impuls der Materie normalerweise nicht erhalten. Dann erscheint möglich, daß Materie, elektromagnetische Wellen oder Gravitationsswellen aus dem Nichts entstehen oder spurlos vergehen.

Die folgenden Überlegungen räumen diesen Verdacht für jedes Feld u aus, dessen Bewegungsgleichung von der Form ist

$$\Box u + f(x,u,\partial u,\psi) = v(x,\psi) \ , \ \Box = g^{mn}\partial_m\partial_n \ , \tag{7.74}$$

wobei ψ weitere Felder und ihre Ableitungen bezeichne und die Metrik g^{mn} Minkowskisignatur hat, $g^{00} > 0, g^{11} < 0, g^{22} < 0, g^{33} < 0$.

Abhängigkeitsgebiet: *Gibt man auf einer raumartigen Fläche A die anfänglichen Werte von u und seine Zeitableitung $\partial_0 u$ vor, dann hängt später in jedem Punkt p die Lösung der Bewegungsgleichung nur von der Inhomogenität v und den Anfangswerten im und auf dem Rückwärtslichtkegel von p ab.*

Denn die Differenz zweier Lösungen mit gleicher Inhomogenität v und gleichen Anfangsbedingungen erfüllt eine homogene Gleichung der Form $\Box u + \hat{f} = 0$ [3] mit verschwindenden Anfangswerten und muß daher, wie wir gleich zeigen, verschwinden. Von nichts kommt nichts.

[3] $\hat{f}$ sei mindestens linear in $u, \partial u$, so daß $|\hat{f}(x,u,\partial u,\psi)| \le c\sqrt{|u|^2 + \sum_m |\partial_m u|^2}$ in einer Umgebung U von $(u,\partial u) = 0$ gilt.

Zum Beweis verwenden wir ein Vierbein mit Komponenten $e_a{}^m$

$$e_a{}^m\, e_b{}^n\, g_{mn} = \eta_{ab} \ , \ g^{mn} = e_a{}^m\, e_b{}^n\, \eta^{ab} \ , \ e_0{}^0 > 0 \ , \tag{7.75}$$

und betrachten hilfsweise den Energie-Impulstensor eines massiven Skalarfeldes ($m^2 > 0$)

$$T_{ab} = d_a u\, d_b u - \frac{1}{2}\eta_{ab}\,\eta^{cd}\, d_c u\, d_d u + \frac{1}{2}\eta_{ab}\, m^2 u^2 \ , \ d_a = e_a{}^m \partial_m \ . \tag{7.76}$$

Die Energiedichte $T_{00}(x,u,\partial u)$

$$2\, T_{00} = \sum_{n=0}^{3} d_n u\, d_n u + m^2 u^2 \tag{7.77}$$

ist an jedem Punkt x eine positiv definite quadratische Form in u und ∂u

$$T_{00}(x,u,\partial u) \ge 0 \ , \quad T_{00}(x,u,\partial u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 = \partial u \ . \tag{7.78}$$

Allgemeiner ist für jeden Vektor k aus dem Inneren des Vorwärtslichtkegel die quadratische Form $k^a T_{a0}$ positiv definit, denn für $k = (1, k^1, k^2, k^3)$ ist

$$\begin{aligned} 2k^a T_{a0} &= d_0 u\, d_0 u + d_i u\, d_i u + 2k^i d_i u\, d_0 u + m^2 u^2 \\ &= (d_0 u + k^i d_i u)^2 + (d_i u\, d_i u) - (k^i d_i u)^2 + m^2 u^2 \\ &\ge (d_0 u + k^i d_i u)^2 + (d_i u\, d_i u)(1 - k^j k^j) + m^2 u^2 \end{aligned} \tag{7.79}$$

eine positiv definite quadratische Form, falls (k^1, k^2, k^3) weniger als Einheitslänge hat.

Insbesondere ist die Nullkomponente des Stromes

$$j^m(x,u,\partial u) = e_b{}^m\, \eta^{ba}\, T_{a0} = \frac{1}{2}\left(e_0{}^l\, g^{mk} + e_0{}^k\, g^{ml} - e_0{}^m\, g^{kl}\right)\left(\partial_k u\, \partial_l u\right) + \frac{1}{2} e_0{}^0\, m^2\, u^2 \tag{7.80}$$

eine positiv definite, quadratische Form in $u, \partial u$, denn $k^a = e_b{}^0 \eta^{ba}$ ist wegen $g^{00} > 0$ aus dem Vorwärtslichtkegel. Bis auf Terme, die keine zweiten Ableitungen von u enthalten, gilt

$$\begin{aligned} \partial_m j^m &= \frac{1}{2}\left(e_0{}^l\, g^{mk} + e_0{}^k\, g^{ml} - e_0{}^m\, g^{kl}\right)\partial_m\left(\partial_k u\, \partial_l u\right) + \ldots \\ &= \left(e_0{}^l \partial_l u\right) g^{mk} \partial_m \partial_k u + \ldots \\ &= \left(e_0{}^l \partial_l u\right)\left(\Box u + \hat{f}(x,u,\partial u,\psi)\right) + h(x,u,\partial u,\psi) \end{aligned} \tag{7.81}$$

Die Funktion $h(x,u,\partial u,\psi)$ ist mindestens quadratisch in $u, \partial u$. Daher ist sie in jedem kompakten Gebiet G der Raumzeit und der Felder ψ in einer genügend kleinen Umgebung U von $(u,\partial u) = 0$ kleiner als ein Vielfaches der quadratischen Form j^0. In $G \times U$ kann so die Divergenz des Stromes abgeschätzt werden,

$$\partial_m j^m \le \left(e_0{}^l \partial_l u\right)\left(\Box u + \hat{f}(x,u,\partial u,\psi)\right) + C\, j^0 \ . \tag{7.82}$$

Sei nun p ein Ereignis, das später als die Ereignisse auf der Anfangsfläche A stattfindet: sein Rückwärtslichtkegel wird von A abgeschnitten. Durch jeden Punkt im Inneren dieses

Kegelabschnitts gibt es eine raumartige Fläche F, die zusammen mit dem Abschnitt von A ein Volumen V berandet. Wir integrieren die Ungleichung (7.82) über das Gebiet V und berücksichtigen, daß die Felder u die Bewegungsgleichungen erfüllen. Mit dem Gaußschen Satz und der Bezeichnung k_m für die Komponenten der Flächennormalen erhalten wir

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}^3x\, k_m\, j^m = \int_V \mathrm{d}^4x\, \partial_m j^m \leq C \int_V \mathrm{d}^4x\, j^0 \ . \tag{7.83}$$

Da der Strom auf der Anfangsfläche A verschwindet[4], trägt zum Integral über den Rand von V nur die raumartige Fläche F bei.

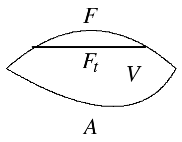

Abbildung 7.1: Leeres Gebiet V

Die Ungleichung gilt auch für Teilgebiete V_t, die aus den Ereignissen in V bestehen, die vor der Zeit t stattgefunden haben, und deren Rand aus (Teilen von) A besteht, gegebenenfalls Teilen von F und einer Schicht F_t gleicher Zeit t. Wir verkleinern die linke Seite, wenn wir nur die Beiträge von F_t berücksichtigen, denn auf der bezüglich j^m raumartigen Fläche ist der Integrand des Flächenintegrals, $k_m\, j^m$, nirgends negativ. Auf F_t ist $(k_0, k_1, k_2, k_3) = (1, 0, 0, 0)$,

$$\int_{F_t} \mathrm{d}^3x\, j^0(t, \vec{x}) \leq C \int_{V_t} \mathrm{d}^4x\, j^0 = C \int^t \mathrm{d}t' \int_{F_{t'}} \mathrm{d}^3x\, j^0(t', \vec{x}) \ . \tag{7.84}$$

Es genügt also die Ableitung der nicht negativen Größe $W(t) = \int_{V_t} \mathrm{d}^4x\, j^0$ der Ungleichung

$$\frac{\mathrm{d}\,W}{\mathrm{d}t} \leq C\,W \ . \tag{7.85}$$

Da W für Zeiten $\hat{t}$ vor allen Ereignissen in V verschwindet (dann ist das Integrationsgebiet $V_{\hat{t}}$ leer) und dieser Ungleichung genügt, muß es verschwinden. Denn addieren wir auf der rechten Seite ein $\varepsilon > 0$, so können wir durch $W + \varepsilon$ teilen und integrieren,

$$\frac{\mathrm{d}\,(W+\varepsilon)}{\mathrm{d}t} \leq C\,(W + \varepsilon) \ , \quad W(t) + \varepsilon \leq \varepsilon\, \mathrm{e}^{C\,(t-\hat{t})} \ . \tag{7.86}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, muß $W(t)$ zu allen Zeiten verschwinden, und da der Integrand j^0 nicht negativ ist, muß j^0 und damit u und ∂u in Inneren von V verschwinden.

Damit ist der Satz über das Abhängigkeitsgebiet gezeigt, zumindest, solange u und ∂u so klein sind, daß sie in der Umgebung U liegen, in der (7.82) gilt. Das ist aber für stetige Felder u und ∂u keine Einschränkung, denn sie können die kleinen Werte nicht überspringen.

Änderungen der Anfangsdaten oder der Inhomogenität wirken sich daher bei Feldern mit Bewegungsgleichung (7.74) höchstens mit Lichtgeschwindigkeit aus. Nichts überholt Licht.

Die niedrigeren Ableitungen in (7.74) wirken sich nicht auf das Abhängigkeitsgebiet aus. Insbesondere führt ein negatives Massenquadrat, $f = -m^2\, u$, nicht zu tachyonischer, überlichtschneller Ausbreitung von geänderten Anfangswerten. Ebenso spielen die

[4] Auf der Anfangsfläche A reicht die Bedingung $k_m j^m \geq 0$, daß nichts hineinströmt.

Konnektionsterme in kovarianten Wellengleichungen von Vektoren und Tensoren für das Abhängigkeitsgebiet keine Rolle.

Geometrische Optik

Elektromagnetische Wellen verhalten sich im Gravitationsfeld nicht universell. So wie am Spalt die Beugungserscheinungen von der Wellenlänge abhängen, so sind die Einflüsse ungleichmäßiger Gravitation auf elektromagnetische Wellen verschieden, wenn die Wellen verschiedene Wellenlängen haben. Universell ist das Verhalten elektromagnetischer Wellen nur in dem Grenzfall, in dem die Wellenlänge vernachlässigbar klein wird gegenüber den Abmessungen, auf denen sich die Metrik g_{mn} ändert.

Wir untersuchen diesen Grenzfall verschwindender Wellenlängen als Grenzwert $\varepsilon \to 0$ des Ansatzes

$$A_m(x, \varepsilon) = \Re\, \varepsilon\, a_m(x, \varepsilon)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta(x)}{\varepsilon}} \ , \quad \theta(x) = \theta^*(x) \tag{7.87}$$

für das elektromagnetische Potential $A_m(x)$. Diesen Ansatz findet man unter den Namen Eikonalnäherung, Wentzel-Kramers-Brillouin-Näherung oder Geometrische Optik in verschiedenen Bereichen der Theoretischen Physik. Hier unterstellt er, daß es möglich ist, für kurze Wellenlängen eine Schar von Lösungen der Maxwellgleichung mit einer reellen Funktion, der Phase $\theta(x)$, und mit komplexen Amplituden $a_m(x, \varepsilon)$ zu finden, die nur wenig von der Wellenlänge abhängen, so daß sie bei $\varepsilon = 0$ stetig sind und durch eine Potenzreihe in ε angenähert werden können

$$a_m(x, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} a_{m,j}(x)\, \varepsilon^j + \mathrm{o}_{m,N}(\varepsilon, x) \ , \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-N} \mathrm{o}_{m,N}(\varepsilon, x) = 0 \ . \tag{7.88}$$

Dabei steht $\mathrm{o}_{m,N}(\varepsilon, x)$ für Restterme, die schneller als ε^N verschwinden. Im flachen Raum löst der Eikonalansatz mit $\theta(x) = k \cdot x$ und einer konstanten Amplitude die Wellengleichung.

Die Flächen, auf denen die reelle Funktion θ konstant ist, sind für $\varepsilon \to 0$ die Wellenfronten konstanter Phase, denn die Phasen $\alpha_m(x, \varepsilon)$ der Amplituden $a_m = r_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_m}$ sind nach Annahme entwickelbar und die Fronten gleicher Phase $\theta + \varepsilon\alpha_m =$ konst sind für $\varepsilon \to 0$ für alle vier Komponenten des Viererpotentials gemeinsam durch $\theta =$ konst gegeben. Demnach ist

$$k_m = \partial_m \theta(x) \tag{7.89}$$

der allen vier Potentialen gemeinsame Wellenvektor. Er steht im Grenzfall verschwindender Wellenlänge senkrecht auf der Wellenfront.

Der Wellenvektor ist tangential an die Weltlinie $x^m(\lambda)$, den Lichtstrahl, den er durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda} = g^{mn} k_n \quad \text{definiert.} \tag{7.90}$$

Zur Auswertung des Eikonalansatzes bemerken wir, daß eine komplexe Funktion bei $\varepsilon = 0$ verschwindet, $f(0) = 0$, falls sie dort stetig ist und falls im offenen Intervall

$0 < \varepsilon < \delta$ der Realteil

$$\Re\bigl(f(\varepsilon)\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}}\bigr) = 0 \tag{7.91}$$

verschwindet. Dies gilt, weil sich $f(\varepsilon)$ mit einem Restglied als $f(\varepsilon) = f(0) + \mathrm{o}(\varepsilon)$ schreiben läßt, wobei $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{o}(\varepsilon) = 0$ ist. Die Annahme, $f(0) = |f(0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ sei nicht Null, führt zum Widerspruch, denn dann gibt es positive ε, die so klein sind, daß $|\mathrm{o}(\varepsilon)| < |f(0)|$ gilt, für die aber $\cos(\frac{1}{\varepsilon} + \alpha) = 1$ ist. Für solche ε kann (7.91) nicht gelten

$$|f(0)|\cos(\frac{1}{\varepsilon} + \alpha) + \Re\left(\mathrm{o}(\varepsilon)\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}}\right) \neq 0\ , \tag{7.92}$$

denn der Betrag des zweiten Terms ist kleiner als der erste Term.

Die Maxwellgleichungen (7.69), multipliziert mit ε, besagen für (7.87)

$$\begin{aligned} 0 = \Re\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta(x)}{\varepsilon}}\bigl[&- k^m k_m a_n - \mathrm{i}\varepsilon\bigl\{2k^m D_m a_n + (D_m k^m)a_n + \mathrm{i}\varepsilon\bigl(D^m D_m a_n + R_n{}^k a_k\bigr)\bigr\} \\ &+ \bigl(k_n + \mathrm{i}\varepsilon D_n\bigr)\bigl(k^m a_m + \mathrm{i}\varepsilon D^m a_m\bigr)\bigr]\ . \end{aligned} \tag{7.93}$$

Hieraus folgt, zumindest wo $\theta(x)$ nicht in einer Umgebung verschwindet,

$$k^m k_m a_{n|_{\varepsilon=0}} - k_n k^m a_{m|_{\varepsilon=0}} = 0\ . \tag{7.94}$$

Entweder ist bei $\varepsilon = 0$ die Amplitude $a_n = k_n b$ proportional zu k_n, dann sind k_n und a_n nicht weiter eingeschränkt. Allerdings läßt sich solch eine Amplitude wegeichen, $A'_m = A_m + \partial_m \Re\,\mathrm{i}\varepsilon^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{\varepsilon}} b$ verschwindet bis zu quadratischer Ordnung bei $\varepsilon = 0$.

Oder es ist bei $\varepsilon = 0$ die Amplitude a_n nicht proportional zu k_n. In diesem Fall, den wir im weiteren betrachten, ist k^m lichtartig und a_m transversal

$$k^m k_m = 0 \quad \text{und} \quad k^m a_{m|_{\varepsilon=0}} = 0. \tag{7.95}$$

Auf den Lichtstrahlen $x(\lambda)$ ist daher die Phase θ konstant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\theta(x(\lambda)) = \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}\partial_m\theta = k^m k_m = 0\ . \tag{7.96}$$

Weil k_m ein Gradient ist und weil das Christoffelsymbol symmetrisch unter Permutation der unteren Indizes ist, ist auch $D_n k_m$ symmetrisch

$$D_n k_m = (\partial_n\partial_m\theta - \Gamma_{nm}{}^l k_l) = D_m k_n\ . \tag{7.97}$$

Daher und weil die Länge des Wellenvektors konstant ist (7.95), verschwindet die kovariante Ableitung des Tangentialvektors k^n längs des Lichtstrahls

$$0 = \frac{1}{2}D_n(k^m k_m) = k^m D_n k_m = k^m D_m k_n = \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda} D_m k_n\ . \tag{7.98}$$

Lichtstrahlen sind lichtartige geodätische Weltlinien[5] des torsionsfreien, metrikverträglichen Paralleltransports

$$0 = \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda} D_m k^n = \frac{\mathrm{d}k^n}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}\Gamma_{ml}{}^n k^l = \frac{\mathrm{d}^2 x^n}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma_{kl}{}^n \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\lambda}\ . \tag{7.99}$$

[5] Aus den gleichen Gründen durchlaufen relativistische, quantenmechanische Wellenpakete von Teilchen mit Masse $\frac{m}{\varepsilon}$, die der Klein-Gordon Gleichung $(\Box + \frac{m^2}{\varepsilon^2})\psi = 0$ genügen, zeitartige geodätische Weltlinien mit einem Wellenvektor auf der Massenschale $k^n k_n = m^2$.

Die Lichtstrahlen und die Phase θ sind vollständig festgelegt, wenn θ zu einer Anfangszeit $x^0 = 0$ vorgegeben wird und zu dieser Zeit nirgends extremal ist. Damit sind die räumlichen Komponenten $k_i = \partial_i\theta \neq 0$ gegeben, und k^0 folgt aus $k^m k_m = 0$

$$k^0 = \sqrt{(g^{0i}g^{0j} - g^{00}g^{ij})k_i k_j}\ . \tag{7.100}$$

Folglich liegen die Tangentialvektoren k^m der Lichtstrahlen zur Zeit $x^0 = 0$ fest und es gibt, wenn alle Ereignisse $x^0 = 0$ zueinander raumartig sind, durch jeden Punkt genau einen Lichtstrahl (7.99) mit diesem Tangentialvektor, der den Anfangspunkt zur Anfangszeit durchläuft. Auf dem Lichtstrahl ist die Phase θ konstant und durch ihren Wert am Anfangspunkt gegeben.

In der Lorenzeichung, $k^m a_m + \mathrm{i}\varepsilon D^m a_m = 0$, werden die Amplituden a_n wegen (7.93) und wegen $k^2 = 0$ längs der Lichtstrahlen $x(\lambda)$ gemäß

$$2k^m D_m a_n + (D_m k^m)a_n + \mathrm{i}\varepsilon\bigl(D^m D_m a_n + R_n{}^k a_k\bigr) = 0 \tag{7.101}$$

transportiert. Ihre Entwicklungskoeffizienten $a_{m,j}(x)$ für $j = 0, 1, \dots, N$ (7.88) genügen also dem linear inhomogenen Differentialgleichungssystem

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} a_{n,j}(x(\lambda)) + f_n{}^m(\lambda)\, a_{m,j}(x(\lambda)) = b_{n,j}(\lambda) \tag{7.102}$$

mit Funktionen $f_n{}^m(\lambda)$ und $b_{m,j}(\lambda)$

$$\begin{aligned} f_n{}^m(\lambda) &= (-2k^l\Gamma_{ln}{}^m + \delta_n{}^m D_l k^l)_{|x(\lambda)}\ , \\ b_{n,j}(\lambda) &= -\mathrm{i}(D^m D_m a_{n,j-1} + R_n{}^m a_{m,j-1})_{|x(\lambda)}\ , \quad a_{n,-1} = 0\ . \end{aligned} \tag{7.103}$$

Die Lösung $a_{m,j}(x(\lambda))$ existiert und ist nach Vorgabe der Anfangswerte $a_{m,j}(x(0))$ eindeutig. Demnach definieren das Gleichungssystem und die Anfangsbedingungen rekursiv die Koeffizientenfunktionen $a_{m,j}(x)$.

Aus (7.101) folgt, daß im Vakuum die Photonenzahl lokal erhalten ist. Denn multiplizieren wir mit a^{*n} und addieren wir die komplex konjugierte Gleichung, so folgt

$$0 = D_m(k^m a^n a^*_n)\ . \tag{7.104}$$

Jeder kovariant erhaltene Strom j^m gehört zu einer Stromdichte $\sqrt{\mathfrak{g}}j^m$, die eine Kontinuitätsgleichung erfüllt (I.16). Im vorliegenden Fall ist die Nullkomponente der erhaltenen Stromdichte $-\frac{\varepsilon}{8\pi\hbar}\sqrt{\mathfrak{g}}\,k^0 a^n a^*_n$ die Photonendichte, denn die Energiedichte $\mathcal{T}^{00}$ (7.72) des elektromagnetischen Feldes ist $-\frac{1}{8\pi}\sqrt{\mathfrak{g}}\,k^0 k^0 a^n a^*_n$, also einen Faktor $\hbar\omega = \hbar k^0/\varepsilon$ größer. Wenn die Energiedichte von Teilchen der Energie $\hbar\omega$ herrührt, dann ist $-\frac{\varepsilon}{8\pi\hbar}\sqrt{\mathfrak{g}}\,k^0 a^n a^*_n$ die Dichte dieser Teilchen.

Der Erhaltungssatz der Photonenzahl besagt, daß sich Photonen geometrisch so verdünnen, wie die Lichtstrahlen auseinander laufen. Dies ist für lokale Energieerhaltung notwendig. Weltlinien von Photonen beginnen nicht im Vakuum und enden nicht im Vakuum, sie durchlaufen es.

Die Polarisationsrichtung wird im Grenzfall verschwindender Wellenlängen, also für $\varepsilon = 0$, längs der Lichtstrahlen parallel transportiert. Schreiben wir nämlich in (7.101) die

Amplitude a_m als komplexen Einheitsvektor e_m, die Polarisationsrichtung, mal Betrag $|a| = \sqrt{-a^n a^*_n}$, $a_m = |a| e_m$, und berücksichtigen wir (7.104), so erhalten wir für $\varepsilon = 0$

$$|a| k^m D_m e_n = 0 \ . \tag{7.105}$$

Wie wir gleich zeigen, hat die Bewegungsgleichung (7.101)

$$(2k^m D_m + (D_m k^m))(k^n a_{n,j} + \mathrm{i} D^n a_{n,j-1}) = \mathrm{i}\, D^m D_m \big(k^n a_{n,j-1} + \mathrm{i} D^n a_{n,j-2}\big) \tag{7.106}$$

zur Folge. Demnach[6] gilt die Lorenzeichung

$$k^n a_{n,j} + \mathrm{i} D^n a_{n,j-1} = 0 \tag{7.107}$$

überall, wenn sie zur Anfangszeit $x^0 = 0$ erfüllt ist, und wenn sie für $j-1$ überall erfüllt ist. Denn dann erfüllt die Größe $(k^n a_{n,j} + \mathrm{i} D^n a_{n,j-1})$ längs der Lichtstrahlen eine linear homogene Differentialgleichung und verschwindet zur Anfangszeit. Sie verschwindet daher überall.

Wir bestätigen (7.106) mit der Geodätengleichung $k^m D_m k^n = 0$ und (7.101)

$$\begin{aligned}
&(2k^m D_m + (D_m k^m))(k^n a_{n,j} + \mathrm{i} D^n a_{n,j-1}) \\
&= k^n (2k^m D_m + (D_m k^m)) a_{n,j} + \mathrm{i} D^n (2k^m D_m + (D_m k^m)) a_{n,j-1} - \\
&\quad - \mathrm{i} [D^n, 2k^m D_m + (D_m k^m)] a_{n,j-1} \\
&= -\mathrm{i} k^n (D^m D_m a_{n,j-1} + R_n{}^l a_{l,j-1}) + D^n (D^m D_m a_{n,j-2} + R_n{}^l a_{l,j-2}) - \\
&\quad - \mathrm{i} [D^n, 2k^m D_m + (D_m k^m)] a_{n,j-1} \\
&= -\mathrm{i}\, D^m D_m \big(k^n a_{n,j-1} + \mathrm{i} D^n a_{n,j-2}\big) + \\
&\quad - \mathrm{i}\big([k^n, D^m D_m] a_{n,j-1} + k^n R_n{}^l a_{l,j-1} + [D^n, 2k^m D_m + (D_m k^m)] a_{n,j-1}\big) + \\
&\quad + [D^n, D^m D_m] a_{n,j-2} + D^n (R_n{}^l a_{l,j-2}) \ .
\end{aligned} \tag{7.108}$$

Wegen $D_m k_n = D_n k_m$ (7.97), $R_{mn} = R_{nm}$ (7.68) und $[D_m, D_n] v^l = R_{mnk}{}^l v^k$ (C.54) verschwindet die vorletzte Zeile, ebenso verschwindet die Zeile mit den $a_{n,j-2}$-Termen. Damit ist (7.106) mit etwas Rechnung gezeigt.

Dies schließt unsere Diskussion der Geodätenhypothese ab. Die Feldgleichungen erlauben herzuleiten, daß sich Testteilchen und Lichtstrahlen so verhalten, wie wir das für unsere geometrischen Konstruktionen unterstellt haben. Aus rein geometrischen Gründen kann man zunächst nicht ausschließen, daß Paralleltransport mit Torsion einhergeht oder metrikunverträglich ist. Formuliert man allerdings die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik und der Materie als Variationsprinzip eines Funktionals, das unter Eichtransformationen und Koordinatentransformationen invariant ist, so sind solche allgemeineren Geometrien nicht bei den Weltlinien von Testteilchen und Lichtpulsen realisiert.

[6] Ich verdanke Volker Perlick die Beweisidee.

8 Dynamik der Gravitation

8.1 Einstein-Hilbert-Wirkung

Die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie besagen, daß die Wirkung

$$W[g,\phi] = W_{\mathrm{Metrik}}[g] + W_{\mathrm{Materie}}[g,\phi] \ , \tag{8.1}$$

bei der g die Metrik und ϕ alle weiteren Felder bezeichne, für physikalische Felder stationär ist unter allen Variationen der Metrik, die außerhalb beschränkter Gebiete verschwinden.

Dabei ist die Wirkung lokal, also ein Integral über eine Lagrangedichte, und invariant unter Koordinatentransformationen. Diese Forderung beschränkt in Raumzeiten gerader Dimension die möglichen Lagrangedichten $\mathscr{L}_{\mathrm{Metrik}}$ darauf, ein Produkt des Volumenelements $\sqrt{\mathfrak{g}}$ (I.14) mit einem skalaren Feld zu sein, das aus Komponenten des Riemanntensors und seinen kovarianten Ableitungen besteht [14]. Falls die zugehörigen Bewegungsgleichungen zudem zweiter Ableitungsordnung sein sollen, so ist in der vierdimensionalen Raumzeit dieses skalare Feld eine Linearkombination des Krümmungsskalars

$$R = g^{kl} R_{kml}{}^m \ , \tag{8.2}$$

der zum Riemanntensor der metrikverträglichen, torsionsfreien Konnektion (C.106) gehört, und einer Konstante Λ, die kosmologische Konstante heißt

$$W_{\mathrm{Metrik}} = \frac{1}{2\kappa} \int \mathrm{d}^4x \, \sqrt{\mathfrak{g}}\, (R - 2\Lambda) \ . \tag{8.3}$$

Dies ist die Einstein-Hilbert-Wirkung mit kosmologischer Konstante. Wie wir sehen werden (8.105), ist der Vorfaktor κ durch die Newtonsche Gravitationskonstante G gegeben.

Der Integrand ist eine Dichte: wertet man ihn für eine transformierte Metrik

$$g_{mn}(x) = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} g'_{kl}(x'(x)) \tag{8.4}$$

aus, wobei $x'(x)$ eine Koordinatentransformation bezeichnet, so gilt

$$\sqrt{\mathfrak{g}}\, R(x) = \Big|\det \frac{\partial x'}{\partial x}\Big| \sqrt{\mathfrak{g}'}\, R'(x'(x)) \ , \tag{8.5}$$

denn für das Volumenelement $\sqrt{\mathfrak{g}}$ gilt der Determinantenproduktsatz und R ist ein Skalarfeld (A.128). Nach Integralsubstitutionssatz ist demnach die Wirkung der Metrik $g_{mn}(x)$ und der transformierten Metrik $g'_{mn}(x)$ gleich

$$\int_{x\text{-Bereich}} \mathrm{d}^4x \, \sqrt{\mathfrak{g}} (R - 2\Lambda) = \int_{x'\text{-Bereich}} \mathrm{d}^4x' \, \sqrt{\mathfrak{g}'} (R'(x') - 2\Lambda) = \int_{x\text{-Bereich}} \mathrm{d}^4x \, \sqrt{\mathfrak{g}'} (R'(x) - 2\Lambda) \ , \tag{8.6}$$

falls die x- und x'-Bereiche übereinstimmen. Kürzer gesagt ist die Wirkung invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen. Falls die Wirkung als Integral über eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ definiert ist, ist die Wirkung unter Transformationen der Metrik invariant, die zu invertierbaren Selbstabbildungen von $\mathcal{M}$ gehören.

8.2 Einsteingleichungen

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen trennen wir die Änderung der Lagrangedichte bei Änderung der Metrik in drei Anteile, die von der Änderung des Volumenelementes $\sqrt{\mathfrak{g}}$, der inversen Metrik g^{kl} und des Riccitensors $R_{kl} = R_{kml}{}^m$ stammen

$$\delta\big(\sqrt{\mathfrak{g}}(g^{kl}R_{kl} - 2\Lambda)\big) = (\delta\sqrt{\mathfrak{g}})(R - 2\Lambda) + \sqrt{\mathfrak{g}}(\delta g^{kl})R_{kl} + \sqrt{\mathfrak{g}}g^{kl}(\delta R_{kl}) \ . \tag{8.7}$$

Wie in Anhang I gezeigt,[1] gilt $\delta(\sqrt{\mathfrak{g}}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{g}}g_{kl}\delta g^{kl}$ und folglich

$$(\delta\sqrt{\mathfrak{g}})(R - 2\Lambda) + \sqrt{\mathfrak{g}}(\delta g^{kl})R_{kl} = \sqrt{\mathfrak{g}}(\delta g^{kl})\big(R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R + g_{kl}\Lambda\big) \ . \tag{8.8}$$

Der Term $\sqrt{\mathfrak{g}}g^{kl}\delta R_{kml}{}^m$ trägt zur Änderung der Lagrangedichte nur Ableitungsterme bei. Denn der Riemanntensor $R_{klm}{}^n(\Gamma)$ (C.76) ändert sich bei Änderung der Konnektion bis auf Terme, die quadratisch in $\delta\Gamma$ sind, um

$$R_{klm}{}^n(\Gamma + \delta\Gamma) - R_{klm}{}^n(\Gamma) = \big(\partial_k\delta\Gamma_{lm}{}^n - \Gamma_{km}{}^r\delta\Gamma_{lr}{}^n + \Gamma_{kr}{}^n\delta\Gamma_{lm}{}^r\big) - \big(k \leftrightarrow l\big) \ , \tag{8.9}$$

also um die antisymmetrisierte kovariante Ableitung von $\delta\Gamma$ und einen Torsionsterm

$$\delta R_{klm}{}^n = D_k\big(\delta\Gamma_{lm}{}^n\big) - D_l\big(\delta\Gamma_{km}{}^n\big) + T_{kl}{}^r\delta\Gamma_{rm}{}^n \ . \tag{8.10}$$

Dabei ist die kovariante Ableitung D_k von $\delta\Gamma$ mit der Konnektion Γ gebildet. Im vorliegenden Fall ist diese kovariante Ableitung metrikkompatibel und torsionsfrei, und wegen (I.16) gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathfrak{g}}g^{kl}\delta R_{kml}{}^m &= \sqrt{\mathfrak{g}}g^{kl}\big(D_k\delta\Gamma_{ml}{}^m - D_m\delta\Gamma_{kl}{}^m\big)\\ &= \sqrt{\mathfrak{g}}D_k\big(g^{kl}\delta\Gamma_{ml}{}^m - g^{rs}\delta\Gamma_{rs}{}^k\big)\\ &= \partial_k\big(\sqrt{\mathfrak{g}}\big(g^{kl}\delta\Gamma_{ml}{}^m - g^{rs}\delta\Gamma_{rs}{}^k\big)\big) \ .\end{aligned} \tag{8.11}$$

Die zugehörige Änderung der Wirkung verschwindet, da das Integral über diese Ableitungsterme Oberflächenterme ergibt und da nach Voraussetzung nur solche Änderungen der Metrik g_{kl} betrachtet werden, die auf dem Rand des Integrationsbereiches verschwinden. Daher ist

$$\frac{\delta W_{\text{Metrik}}}{\delta g^{kl}} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{\mathfrak{g}}\big(R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R + g_{kl}\Lambda\big) \tag{8.12}$$

die Variationsableitung der Einstein-Hilbert-Wirkung.

[1] Wegen $\delta g_{km}g^{mn} + g_{km}\delta g^{mn} = 0$ unterscheidet sich die Ableitung nach der inversen Metrik g^{mn} um ein Vorzeichen und die Indexstellung von der Ableitung nach g_{kl}.

Die Variationsableitung der Materiewirkung ist (bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}$) die Energie-Impulstensordichte (7.4)

$$\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta g^{kl}(x)} = \frac{1}{2}\mathcal{T}_{kl} \ . \tag{8.13}$$

Sie stimmt im flachen Raum aufgrund der Bewegungsgleichungen der Materie bis auf sogenannte Verbesserungsterme mit dem Energie-Impulstensor überein, der die Ströme enthält, die zur Invarianz unter räumlichen und zeitlichen Translationen gehören. Diese Identifizierung (G.55) der Variationsableitung der Materiewirkung als Energie-Impulstensordichte ist eine Folge der Invarianz der Materiewirkung unter Wechsel des Koordinatensystems und gilt unabhängig von Besonderheiten dieser oder jener Materiewirkung. Spaltet man von $\mathcal{T}_{kl} = \sqrt{\mathfrak{g}}\,T_{kl}$ das Volumenelement ab

$$T_{kl} = \frac{2}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta g^{kl}} \ , \tag{8.14}$$

so erhält man mit T_{kl} die Komponenten des Energie-Impulstensors.

Bei Änderung der Metrik ändert sich also die Wirkung $W_{\text{Metrik}} + W_{\text{Materie}}$ um

$$\delta W = \frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{\mathfrak{g}}\,\delta g^{kl}\big(R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R + g_{kl}\Lambda + \kappa T_{kl}\big) \ . \tag{8.15}$$

Sie ist genau dann stationär, wenn die Einsteingleichungen

$$R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R = -(\kappa T_{kl} + \Lambda g_{kl}) \tag{8.16}$$

gelten.

Der Tensor

$$G_{kl} = R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R \ , \tag{8.17}$$

der sich aus der Variationsableitung der Einstein-Hilbert-Wirkung ergibt und auf der linken Seite der Einsteingleichungen auftritt, heißt Einsteintensor. Da er die Variationsableitung einer Wirkung ist, die invariant unter Koordinatentransformationen ist, erfüllt er die Noetheridentität (G.51)

$$D^kG_{kl} = 0 \ , \tag{8.18}$$

wie man mit (C.62) im Spezialfall verschwindender Torsion bestätigt.

Materiefelder nehmen bei der einfachsten Lösung ihrer Bewegungsgleichungen, im Vakuum, den konstanten Wert an, für den ihre potentielle Energiedichte V minimal wird. Entwickelt man in der Lagrangedichte der Materie die potentielle Energiedichte um ihr Minimum, so trägt diese Vakuumenergiedichte zur Lagrangedichte mit $-\sqrt{\mathfrak{g}}\,V_{\min}$ auf gleiche Art bei wie die kosmologische Konstante $-\frac{\Lambda}{\kappa}\sqrt{\mathfrak{g}}$ und kann mit ihr zusammengefaßt werden. Die Einstein-Gleichungen lauten dann kürzer

$$R_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}R = -\kappa T_{kl} \ , \tag{8.19}$$

allerdings ist dieser Energie-Impulstensor im Vakuum nicht Null, $\kappa T_{kl\,\text{Vakuum}} = \Lambda g_{kl}$.

Eine kosmologische Konstante $\Lambda = \kappa V_{\min}$ tritt also auf natürliche Art in jedem Matermodell auf. Sie ist in vielen Modellen ein unbestimmter Parameter, dessen Größe den Beobachtungen entnommen werden muß.

Die kosmologische Konstante war von Einstein eingeführt worden, um ein statisches, kosmologisches Modell in Übereinstimmung mit den damaligen astronomischen Befunden zu konstruieren. Daß er seine ursprünglichen Gleichungen nicht ernst genug genommen und daraus die Expansion des Universums vorausgesagt hatte, bezeichnete Einstein später nach Hubbles Beobachtungen als seine größte Eselei. Die heutigen Beobachtungen zeigen durch die Rotverschiebung der Galaxien, daß das Universum expandiert und nicht statisch ist, allerdings trägt zur Expansion die kosmologische Konstante, die Vakuumenergiedichte, stärker als alle anderen Energieformen bei.

8.3 Kugelsymmetrischer Einsteintensor

Ist die Metrik invariant unter Drehungen, dann hat sie in der Umgebung eines Punktes, in dem ∂_r raumartig ist, die Form (F.22)

$$g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n = \mathrm{e}^{\nu(t,r)}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{\mu(t,r)}\mathrm{d}r^2 - r^2\big(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\big)\ . \tag{8.20}$$

Um zu klären, was die Einsteingleichungen besagen, berechnen wir die Christoffelsymbole und daraus den Riemanntensor. Die Christoffelsymbole (C.106) liest man einfach aus den Euler-Lagrange-Gleichungen der Lagrangefunktion $\mathscr{L}_{\mathrm{Bahn}} = \frac{1}{2}g_{mn}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda}$ ab (6.39)

$$\frac{\hat\partial\mathscr{L}_{\mathrm{Bahn}}}{\hat\partial x^l} = -g_{lk}\Big(\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma_{mn}{}^k\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda}\Big)\ , \tag{8.21}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Bahn}} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{\nu(t,r)}\Big(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\Big)^2 - \mathrm{e}^{\mu(t,r)}\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\Big)^2 - r^2\Big(\Big(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}\Big)^2 + \sin^2\theta\Big(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\Big)^2\Big)\Big)\ . \tag{8.22}$$

Variiert man zum Beispiel $t(\lambda)$, so ändert sich die Lagrangefunktion in erster Ordnung um

$$\delta\mathscr{L}_{\mathrm{Bahn}} = \frac{1}{2}\delta t\frac{\partial\nu}{\partial t}\mathrm{e}^{\nu}\Big(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\Big)^2 + \mathrm{e}^{\nu}\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} - \frac{1}{2}\delta t\frac{\partial\mu}{\partial t}\mathrm{e}^{\mu}\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\Big)^2\ .$$

Die Ableitung von δt faßt man zu einer vollständigen Ableitung zusammen

$$\mathrm{e}^{\nu}\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big(\mathrm{e}^{\nu}\delta t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\Big) - \mathrm{e}^{\nu}\delta t\Big(\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{\partial\nu}{\partial t}\Big(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\Big)^2 + \frac{\partial\nu}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\Big)\ .$$

Demnach ist bis auf eine vollständige Ableitung

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}_{\mathrm{Bahn}} &= -\mathrm{e}^{\nu}\delta t\Big(\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\lambda^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial t}\Big(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\Big)^2 + \frac{\partial\nu}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} + \mathrm{e}^{\mu-\nu}\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\Big)^2\Big)\\ &= -\delta t\, g_{0k}\Big(\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma_{mn}{}^k\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\lambda}\Big)\ .\end{aligned}$$

Hieraus entnehmen wir die Christoffelsymbole $\Gamma_{mn}{}^0$. Ebenso erhält man $\Gamma_{mn}{}^k$ für $k = 1,2,3$ durch Variation von r, θ und φ. Statt die Komponenten durchzunumerieren,

benennen wir sie im folgenden mit den Koordinaten: wir schreiben beispielsweise $\Gamma_{tt}{}^r$ statt $\Gamma_{00}{}^1$. Die nichtverschwindenden Komponenten der Konnektion sind

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{tt}{}^t = \frac{1}{2}\dot\nu && \Gamma_{tr}{}^t = \Gamma_{rt}{}^t = \frac{1}{2}\nu' && \Gamma_{rr}{}^t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mu-\nu}\dot\mu\\
&\Gamma_{tt}{}^r = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\nu-\mu}\nu' && \Gamma_{tr}{}^r = \Gamma_{rt}{}^r = \frac{1}{2}\dot\mu && \Gamma_{rr}{}^r = \frac{1}{2}\mu'\\
&\Gamma_{\theta\theta}{}^r = -r\mathrm{e}^{-\mu} && \Gamma_{\varphi\varphi}{}^r = -r\mathrm{e}^{-\mu}\sin^2\theta && \Gamma_{r\theta}{}^\theta = \Gamma_{\theta r}{}^\theta = \frac{1}{r}\\
&\Gamma_{\varphi\varphi}{}^\theta = -\sin\theta\cos\theta && \Gamma_{r\varphi}{}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}{}^\varphi = \frac{1}{r} && \Gamma_{\theta\varphi}{}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}{}^\varphi = \cot\theta\ .
\end{aligned} \tag{8.23}$$

Dabei bezeichnet der Punkt die partielle Ableitung nach t und der Strich die Ableitung nach r

$$\frac{\partial}{\partial t} = \dot{}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial r} = {}'\ . \tag{8.24}$$

Zur Berechnung des Riemanntensors kombiniert man die Komponenten der Konnektion zu einer matrixwertigen Differentialform

$$\mathbf{\Gamma}_m{}^n = \mathrm{d}x^k\Gamma_{km}{}^n\ . \tag{8.25}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Gamma}_t{}^t = \frac{1}{2}\big(\mathrm{d}t\,\dot\nu + \mathrm{d}r\,\nu'\big) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\nu && \mathbf{\Gamma}_r{}^t = \frac{1}{2}\big(\mathrm{d}t\,\nu' + \mathrm{d}r\,\mathrm{e}^{\mu-\nu}\,\dot\mu\big)\\
&\mathbf{\Gamma}_t{}^r = \frac{1}{2}\big(\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\nu-\mu}\,\nu' + \mathrm{d}r\,\dot\mu\big) && \mathbf{\Gamma}_r{}^r = \frac{1}{2}\big(\mathrm{d}t\,\dot\mu + \mathrm{d}r\,\mu'\big) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\mu\\
&\mathbf{\Gamma}_\theta{}^r = -\mathrm{d}\theta\,r\,\mathrm{e}^{-\mu} && \mathbf{\Gamma}_\varphi{}^r = -\mathrm{d}\varphi\,r\mathrm{e}^{-\mu}\sin^2\theta\\
&\mathbf{\Gamma}_r{}^\theta = \mathrm{d}\theta\,\frac{1}{r} && \mathbf{\Gamma}_\theta{}^\theta = \mathrm{d}r\,\frac{1}{r}\\
&\mathbf{\Gamma}_\varphi{}^\theta = -\mathrm{d}\varphi\,\sin\theta\cos\theta && \mathbf{\Gamma}_r{}^\varphi = \mathrm{d}\varphi\,\frac{1}{r}\\
&\mathbf{\Gamma}_\theta{}^\varphi = \mathrm{d}\varphi\cot\theta && \mathbf{\Gamma}_\varphi{}^\varphi = \mathrm{d}r\,\frac{1}{r} + \mathrm{d}\theta\cot\theta
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Die Komponenten des Riemanntensors sind die Komponenten der Zweiform (A.70, A.86),

$$\mathbf{R} = \mathrm{d}\,\mathbf{\Gamma}_m{}^n - \mathbf{\Gamma}_m{}^r\mathbf{\Gamma}_r{}^n\ , \tag{8.27}$$

in der Differentiale antikommutieren, $\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l = -\mathrm{d}x^l\mathrm{d}x^k$ (A.73). Die Ableitung d ist die äußere Ableitung $\mathrm{d} : f \mapsto \mathrm{d}f = \mathrm{d}x^m\partial_m f$ (A.92). Sie ist nilpotent

$$\mathrm{d}^2 = \mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n\,\partial_m\partial_n = 0\ , \tag{8.28}$$

weil die Doppelsumme über ein symmetrisches und ein antisymmetrisches Indexpaar verschwindet (5.17) und weil vereinbarungsgemäß $\mathrm{d}(\mathrm{d}x^m) = 0$ gilt.

Mit diesen Rechenregeln bestätigt man leicht, daß die Komponenten des Riemanntensors (C.76) die Komponenten der Zweiform (8.27) sind

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_m{}^n &= \mathrm{d}\,\mathbf{\Gamma}_m{}^n - \mathbf{\Gamma}_m{}^r\mathbf{\Gamma}_r{}^n = \mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l\big(\partial_k\Gamma_{lm}{}^n - \Gamma_{km}{}^r\,\Gamma_{lr}{}^n\big)\\ &= \mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l\frac{1}{2}\big(\partial_k\Gamma_{lm}{}^n - \partial_l\Gamma_{km}{}^n - \Gamma_{km}{}^r\,\Gamma_{lr}{}^n + \Gamma_{lm}{}^r\,\Gamma_{kr}{}^n\big)\\ &= \mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l\frac{1}{2}R_{klm}{}^n\ .\end{aligned} \tag{8.29}$$

Der Riemanntensor hat die Matrixelemente

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_t{}^t &= 0\ ,\\
\mathbf{R}_r{}^t &= \mathrm{d}t\mathrm{d}r\big(\mathrm{e}^{\mu-\nu}\big(\tfrac{1}{2}\ddot{\mu}+\tfrac{1}{4}\dot{\mu}^2-\tfrac{1}{4}\dot{\mu}\dot{\nu}\big)-\tfrac{1}{2}\nu''-\tfrac{1}{4}(\nu')^2+\tfrac{1}{4}\mu'\nu'\big)\ ,\\
\mathbf{R}_\theta{}^t &= \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta\big(-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mu}r\nu'\big)+\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\big(-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\nu}r\dot{\mu}\big)\ ,\\
\mathbf{R}_\varphi{}^t &= \mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi\big(-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mu}r\sin^2\theta\ \nu'\big)+\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\big(-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\nu}r\sin^2\theta\ \dot{\mu}\big)\ ,\\
\mathbf{R}_t{}^r &= \mathrm{d}t\mathrm{d}r\big(\tfrac{1}{2}\ddot{\mu}+\tfrac{1}{4}\dot{\mu}^2-\tfrac{1}{4}\dot{\mu}\dot{\nu}+\mathrm{e}^{\nu-\mu}\big(-\tfrac{1}{2}\nu''-\tfrac{1}{4}(\nu')^2+\tfrac{1}{4}\mu'\nu'\big)\big)\ ,\\
\mathbf{R}_r{}^r &= 0\ ,\\
\mathbf{R}_\theta{}^r &= \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta\tfrac{1}{2}r\mathrm{e}^{-\mu}\dot{\mu}+\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\tfrac{1}{2}r\mathrm{e}^{-\mu}\mu'\ ,\\
\mathbf{R}_\varphi{}^r &= \mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi\tfrac{1}{2}r\mathrm{e}^{-\mu}\sin^2\theta\ \dot{\mu}+\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\tfrac{1}{2}r\mathrm{e}^{-\mu}\sin^2\theta\ \mu'\ ,\\
\mathbf{R}_t{}^\theta &= \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta\big(-\tfrac{1}{2r}\mathrm{e}^{\nu-\mu}\nu'\big)+\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\big(-\tfrac{1}{2r}\dot{\mu}\big)\ ,\\
\mathbf{R}_r{}^\theta &= \mathrm{d}t\mathrm{d}\theta\big(-\tfrac{1}{2r}\dot{\mu}\big)+\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\big(-\tfrac{1}{2r}\mu'\big)\ ,\\
\mathbf{R}_\theta{}^\theta &= 0\ ,\\
\mathbf{R}_\varphi{}^\theta &= \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\sin^2\theta\,\big(1-\mathrm{e}^{-\mu}\big)\ ,\\
\mathbf{R}_t{}^\varphi &= \mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi\big(-\tfrac{1}{2r}\mathrm{e}^{\nu-\mu}\nu'\big)+\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\big(-\tfrac{1}{2r}\dot{\mu}\big)\ ,\\
\mathbf{R}_r{}^\varphi &= \mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi\big(-\tfrac{1}{2r}\dot{\mu}\big)+\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\big(-\tfrac{1}{2r}\mu'\big)\ ,\\
\mathbf{R}_\theta{}^\varphi &= \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\big(-1+\mathrm{e}^{-\mu}\big)\ ,\\
\mathbf{R}_\varphi{}^\varphi &= 0\ .
\end{aligned}
\tag{8.30}
$$

Zur Kontrolle der Rechnung überprüft man leicht, daß der Riemanntensor antisymmetrisch im zweiten Indexpaar ist, $R_{klm}{}^s g_{sn} = -R_{kln}{}^s g_{sm}$ (C.25), und die Bianchiidentität $R_{klm}{}^n + R_{lmk}{}^n + R_{mkl}{}^n = 0$ (C.60) erfüllt.

Aus dem Riemanntensor ergeben sich die folgenden nichtverschwindenden Komponenten des Riccitensor $R_{kl} = R_{kml}{}^m$

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= \big(\tfrac{1}{2}\ddot{\mu}+\tfrac{1}{4}\dot{\mu}(\dot{\mu}-\dot{\nu})\big)+\mathrm{e}^{\nu-\mu}\big(-\tfrac{1}{2}\nu''-\tfrac{\nu'}{r}+\tfrac{\nu'}{4}(\mu'-\nu')\big)\ ,\\
R_{rr} &= \mathrm{e}^{\mu-\nu}\big(-\tfrac{1}{2}\ddot{\mu}-\tfrac{1}{4}\dot{\mu}(\dot{\mu}-\dot{\nu})\big)+\big(\tfrac{1}{2}\nu''-\tfrac{\mu'}{r}-\tfrac{\nu'}{4}(\mu'-\nu')\big)\ ,\\
R_{tr} &= R_{rt} = -\frac{\dot{\mu}}{r}\ ,\\
R_{\theta\theta} &= \mathrm{e}^{-\mu}\big(1-\mathrm{e}^{\mu}-\tfrac{r}{2}(\mu'-\nu')\big)\ ,\\
R_{\varphi\varphi} &= \mathrm{e}^{-\mu}\sin^2\theta\,\big(1-\mathrm{e}^{\mu}-\tfrac{r}{2}(\mu'-\nu')\big)\ ,
\end{aligned}
\tag{8.31}
$$

der Krümmungsskalar $R = g^{kl}R_{kl}$,

$$
\begin{aligned}
R = {} & \mathrm{e}^{-\nu}\big(\ddot{\mu}+\tfrac{1}{2}\dot{\mu}(\dot{\mu}-\dot{\nu})\big)+\mathrm{e}^{-\mu}\big(-\nu''+\frac{\mu'-\nu'}{r}+\frac{\nu'}{2}(\mu'-\nu')\big)\\
& -\frac{2}{r^2}\mathrm{e}^{-\mu}\big(1-\mathrm{e}^{\mu}-\frac{r}{2}(\mu'-\nu')\big)\ ,
\end{aligned}
\tag{8.32}
$$

und der Einsteintensor $G_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R$, $G_{mn} = G_{nm}$. Er hat in der Indexstellung $G^m{}_n = g^{mk}G_{kn}$ folgende nichtverschwindende Komponenten

$$
\begin{aligned}
G^t{}_t &= \frac{1}{r^2}\big(\mathrm{e}^{-\mu}(1-r\mu')-1\big)\ ,\\
G^r{}_t &= \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mu}\dot{\mu}\ ,\quad G^t{}_r = -\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\nu}\dot{\mu}\ ,\\
G^r{}_r &= \frac{1}{r^2}\big(\mathrm{e}^{-\mu}(1+r\nu')-1\big)\ ,\\
G^\theta{}_\theta = G^\varphi{}_\varphi &= \mathrm{e}^{-\mu}\big(\frac{\nu''}{2}-\frac{\mu'-\nu'}{2r}-\frac{1}{4}\nu'(\mu'-\nu')\big)+\mathrm{e}^{-\nu}\big(-\frac{1}{2}\ddot{\mu}-\frac{1}{4}\dot{\mu}(\dot{\mu}-\dot{\nu})\big)\ .
\end{aligned}
\tag{8.33}
$$

8.4 Schwarzschildlösung

Sind die Komponenten $G^t{}_t$, $G^r{}_r$ und $G^r{}_t$ des kugelsymmetrischen Einsteintensors mit den Einsteingleichungen $G_{mn} = -\kappa T_{mn}$ durch den Energie-Impulstensor gegeben, so können daraus durch Integration $\mu(t,r)$ bis auf eine Konstante und $\nu(t,r)$ bis auf eine Funktion $2k(t)$ bestimmt werden

$$
\frac{\partial}{\partial r}\big(r\mathrm{e}^{-\mu}\big) = 1 + r^2 G^t{}_t\ ,\quad \frac{\partial}{\partial t}\big(r\mathrm{e}^{-\mu}\big) = -r^2 G^r{}_t\ , \tag{8.34}
$$

$$
\nu' = \frac{1}{r}\big(-1+\mathrm{e}^{\mu}\big(1+r^2 G^r{}_r\big)\big)\ . \tag{8.35}
$$

Falls insbesondere der Energie-Impulstensor und der Einstein-Tensor in einem Bereich bis auf eine kosmologische Konstante verschwinden, falls dort also $G_{mn} = -\Lambda g_{mn}$ gilt, läßt sich (8.34) einfach integrieren. Es ist $r\mathrm{e}^{-\mu} = r - \frac{\Lambda}{3}r^3 - r_0$ mit einer Integrationskonstante r_0, die zeitunabhängig ist, weil $G^r{}_t$ verschwindet. Daher gilt

$$
g_{rr} = -\frac{1}{1-\frac{r_0}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^2}\ . \tag{8.36}
$$

Aus $G^t{}_t - G^r{}_r = 0$ folgt $\mu' + \nu' = 0$, also $\mu + \nu = 2k(t)$ oder $\mathrm{e}^{\nu} = \mathrm{e}^{2k(t)}\mathrm{e}^{-\mu}$. Die Integrationskonstante $k(t)$ kann in einer neuen Zeitkoordinate $\mathrm{d}t' = \mathrm{e}^{k(t)}\mathrm{d}t$ absorbiert werden. Dann gilt

$$
g_{tt} = -\frac{1}{g_{rr}} = 1 - \frac{r_0}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\ . \tag{8.37}
$$

Damit ist das Birkhoffsche Theorem gezeigt: Jede kugelsymmetrische Lösung der Einsteingleichungen ist außerhalb der Materie statisch, auch wenn im Inneren der Materie der Energie-Impulstensor zeitabhängig ist, und stimmt außerhalb der Polstellen von g_{rr} mit der Schwarzschildlösung (6.15) mit kosmologischer Konstante überein. Die Lösung mit nichtverschwindender kosmologischen Konstante stammt von Friedrich Kottler [35] und von Hermann Weyl [68].

Bei $r = 0$ ist die Schwarzschildlösung für $r_0 \neq 0$ singulär, denn zum Beispiel die skalare Größe $R_{kl}{}^{mn}R_{mn}{}^{kl} = 12r_0^2/r^6 + 8\Lambda^2/3$, der Kretschmannskalar, divergiert dort. In der Umgebung der Singularität wird die Näherung, Teilchen durch Weltlinien darzustellen, unzureichend, denn die Metrik ändert sich auf den Abmessungen der Teilchen, zu denen aus quantenmechanischen Gründen ausgedehnte Wellenpakete gehören.

Für $\Lambda = 0$ nennen wir r_0 den Schwarzschildradius und identifizieren ihn durch seine Auswirkung auf die Bewegung von Testteilchen. Er ist, bis auf Naturkonstante, die gravitationserzeugende Masse, $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ (6.23). Sie ist, wie die astronomischen Beobachtungen ausnahmslos ergeben, in allen Fällen positiv. Diese Einschränkung der denkbaren Werte folgt nicht aus den Einsteingleichungen.

Ohne Zentralmasse, also im Fall $r_0 = 0$, ist die Schwarzschildlösung für $\Lambda > 0$ die de Sitter-Metrik (F.29), und die vierdimensionale Raumzeit hat die geometrischen Eigenschaften der Fläche $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 = -\frac{3}{\Lambda}$ im fünfdimensionalen, flachen Raum mit der Metrik $g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}u^2$. Sie ist dann nicht nur kugelsymmetrisch und statisch, sondern invariant unter der de Sitter-Gruppe SO(1, 4).

8.5 Kruskalkoordinaten

Für $r_0 > 0$ und $0 < \Lambda < 4/(9r_0{}^2)$ hat g_{tt} zwei positive Nullstellen r_1 und r_2

$$g_{tt} = -\frac{\Lambda}{3r}(r - r_2)(r - r_1)(r + r_1 + r_2)\ , \quad 0 < r_1 < r_2\ . \tag{8.38}$$

Als Schwarzschildradius bezeichnen wir in diesem Fall die Nullstelle r_1. Die Metrik ist der Spezialfall $f(r) = -\frac{\Lambda}{3r}(r - r_2)(r + r_1 + r_2)$, $f(r_1) > 0$, einer Metrik der Form

$$g_{kl}(x)\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l = (r-r_1)f(r)\,c^2(\mathrm{d}t)^2 - \frac{1}{(r - r_1)f(r)}(\mathrm{d}r)^2 - r^2(\mathrm{d}\theta)^2 - r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2\ , \tag{8.39}$$

die wir in einer Umgebung von $r = r_1$ genauer untersuchen wollen.

Dazu betrachten wir wie in Abbildung 8.1 eine zweidimensionale Ebene mit Koordinaten u und v, den Kruskalkoordinaten [36, 62]. Die Ebene wird von den Winkelhalbierenden $u = \pm v$ in vier Bereiche zerlegt: den rechten Bereich $\mathcal{M}_1 = \{u > |v|\}$, den oberen Bereich $\mathcal{M}_2 = \{v > |u|\}$, den linken Bereich $\mathcal{M}_3 = \{-u > |v|\}$ und den unteren Bereich $\mathcal{M}_4 = \{-v > |u|\}$.

Wir führen mit einer Funktion F, die wir geeignet wählen, in $\mathcal{M}_1$ und in $\mathcal{M}_3$ durch

$$ct = \frac{2}{f(r_1)}\,\mathrm{artanh}\,\frac{v}{u}\ , \quad F(r) = \frac{f(r_1)}{4}(u^2 - v^2)\ , \tag{8.40}$$

und in $\mathcal{M}_2$ und in $\mathcal{M}_4$ durch

$$ct = \frac{2}{f(r_1)}\,\mathrm{artanh}\,\frac{u}{v}\ , \quad F(r) = \frac{f(r_1)}{4}(u^2 - v^2)\ , \tag{8.41}$$

jeweils Koordinaten t und r ein und untersuchen in jedem Bereich eine Metrik von der Form (8.39). Dabei lassen wir zu, daß in den vier Bereichen $\mathcal{M}_j$ unterschiedliche Funktionen $f = f_j$ und $F = F_j$ auftreten dürfen.

Wegen

$$c\,\mathrm{d}t = \frac{2}{f(r_1)}\frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2 - v^2} \quad \text{und} \quad F'\mathrm{d}r = \frac{f(r_1)}{2}(u\mathrm{d}u - v\mathrm{d}v) \tag{8.42}$$

hat der du-dv-Teil der Metrik die Form

$$\begin{aligned}(r - r_1)f(r)\,c^2(\mathrm{d}t)^2 - \frac{(\mathrm{d}r)^2}{(r - r_1)f(r)} &= \\ = \frac{(r - r_1)f(r)}{F(r)f(r_1)}\frac{(u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u)^2}{u^2 - v^2} &- \frac{F(r)f(r_1)}{(r - r_1)f(r)(F')^2}\frac{(u\mathrm{d}u - v\mathrm{d}v)^2}{u^2 - v^2}\ .\end{aligned} \tag{8.43}$$

Wir wählen die Funktion F als

$$F(r) = (r - r_1)\exp - \int_{r_1}^{r}\mathrm{d}\hat{r}\,\frac{f(\hat{r}) - f(r_1)}{(\hat{r} - r_1)f(\hat{r})}\ , \tag{8.44}$$

dann sind die Vorfaktoren der beiden Terme der Metrik gleich, denn F erfüllt

$$\frac{F'}{F} = \frac{f(r_1)}{(r - r_1)f(r)}\ , \tag{8.45}$$

und der du-dv-Teil der Metrik ist die flache Metrik mal einem konformen Faktor h

$$h(r(u, v))\big((\mathrm{d}v)^2 - (\mathrm{d}u)^2\big) \quad \text{mit} \quad h(r) = \frac{(r - r_1)f(r)}{F(r)f(r_1)}\ . \tag{8.46}$$

Insbesondere gilt für die Schwarzschildmetrik für $\Lambda = 0$ und $r_1 = r_0$

$$f(r) = \frac{1}{r}\ , \quad F(r) = (r - r_1)\exp(\frac{r - r_1}{r_1}) \quad \text{und} \quad h(r) = \frac{r_1}{r}\exp(-\frac{r - r_1}{r_1})\ . \tag{8.47}$$

Die Koordinatentransformation (8.40) bildet in diesem Fall alle Ereignisse außerhalb des Schwarzschildradius, also alle (t, r) mit $r > r_1$, auf den u-v-Bereich $\mathcal{M}_1$ ab.

Weltlinien mit konstantem $r > r_1$ und konstantem θ und φ gehören zu ruhenden Beobachtern. Diese Linien sind Hyperbeln $u^2 - v^2 =$ konst im Bereich $\mathcal{M}_1$.

Linien gleicher Koordinatenzeit t sind in der (u, v)-Ebene Geraden durch den Ursprung. Die Gerade $v = u$ gehört zu $t = \infty$, die Gerade $v = -u$ zu $t = -\infty$. Diese Geraden bilden die entartete Hyperbel $u^2 - v^2 = 0$, die zu $r = r_1$ gehört.

Tangentialvektoren mit $\mathrm{d}v = \pm\mathrm{d}u$ und $\mathrm{d}\theta = 0 = \mathrm{d}\varphi$ sind lichtartig und gehören zu radial ein- oder auslaufenden Lichtstrahlen. Sie durchlaufen in der (u, v)-Ebene von unten nach oben Geraden, $v = \pm u +$ konst, mit einem Winkel von ±45° zu den Achsen. Koordinaten, in der Lichtstrahlen wie in Minkowskidiagrammen der flachen Raumzeit verlaufen, existieren lokal in jeder zweidimensionalen Raumzeit; denn ihre Metrik ist bis auf einen Faktor flach (E.54).

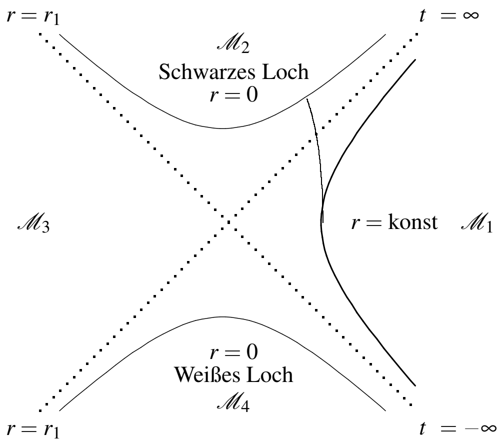

Abbildung 8.1: Schwarzes Loch in Kruskal-Koordinaten (u, v)

Damit die Metrik bei $v = \pm u$ stetig ist, muß der Parameter $r_1 = r(u, \pm u)$, die Nullstelle von g_{tt}, in allen vier Bereichen $\mathcal{M}_j$ übereinstimmen. Dann sind bei $u = \pm v$ die Komponenten $g_{\theta\theta}$ und $g_{\varphi\varphi}$ stetig und die Kugelschalen, die durch θ und φ parametrisiert werden, passen aneinander.

Sind darüber hinaus die erste und die zweite Ableitung der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f_j(r)/f_j(r_1)$, die in den vier Bereichen $\mathcal{M}_j$ die Metrik bestimmen, bei $r = r_1$ gleich, so ist die Metrik in einer Umgebung der Winkelhalbierenden $u = \pm v$ zweimal stetig differenzierbar und der Riemanntensor ist stetig. Dies gilt insbesondere, falls in allen Bereichen $\mathcal{M}_j$ eine Metrik mit derselben Funktion $f_j = f$ vorliegt.

Daher ist die Metrik (8.46) auch in einer Umgebung der Winkelhalbierenden $u = \pm v$, also in einer Umgebung von $r = r_1$ eine Lösung der Einsteingleichungen, soweit die Funktion $f \neq 0$ in den Bereichen $\mathcal{M}_j$ zu einer Lösung der Einsteingleichung gehört.

Die Funktion $r(u, v)$ ist spezieller eine Funktion von $u^2 - v^2$. Ihr Wert stimmt also mit $r(u', v')$ an lorentztransformierten Argumenten überein

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\sigma & \sinh\sigma \\ \sinh\sigma & \cosh\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \ . \tag{8.48}$$

Diese Lorentztransformation läßt also r invariant. Sie verschiebt t (8.40)

$$r' = r \ , \qquad t' = t + \frac{2}{c\, f(r_1)}\, \sigma \ . \tag{8.49}$$

Die Zeittranslation ist also eine Lorentztransformation der Kruskalkoordinaten (u, v). Sie hat bei $(u, v) = (0, 0)$ einen Fixpunkt und die Zeit kann dort, wie ein Drehwinkel bei einem Fixpunkt, keine brauchbare Koordinate sein. Zudem hat dort die Funktion $r(u, v)$ einen Sattelpunkt und ist dort als Koordinate ungeeignet.

Die Fläche $r = r_1$ ist lichtartig, das heißt, es gibt einen lichtartigen Tangentialvektor ∂_t, $(\partial_t, \partial_t) = g_{tt} = 0$, der senkrecht auf allen anderen Tangentialvektoren der Fläche, ∂_θ und ∂_φ, steht. Daher ist jeder weitere Vektor w, der senkrecht auf den Tangentialvektoren der Fläche steht, ein Vielfaches von ∂_t und kann nicht ein linear unabhängiger Tangentialvektor ∂_r eines orthogonalen Koordinatensystems (t, r, θ, φ) sein. Es können nicht die Koordinaten (t, θ, φ) der lichtartigen Fläche $r = r_1$, die den Rand von $\mathcal{M}_1$ bildet, zu orthogonalen Koordinaten ergänzt werden.

Die Ereignisse $r = 0$ bestehen in Kruskalkoordinaten aus einem weißen Loch, den Punkten $r = 0$ mit $v = -\sqrt{4r_0^2/\mathrm{e} + u^2}$ (für $\Lambda = 0$), von dem nach $\mathcal{M}_1$ Lichtstrahlen nur ausgesendet werden können, und einem schwarzen Loch mit $r = 0$ und $v = \sqrt{4r_0^2/\mathrm{e} + u^2}$, das aus $\mathcal{M}_1$ nur Lichtstrahlen empfangen, aber keine Lichtstrahlen aussenden kann. Denn Licht läuft in der (u, v)-Ebene auf Geraden mit Winkel $\pm 45°$ zu den Achsen nach oben. Auch von keinem anderen Ereignis in $\mathcal{M}_2$ kann Licht zu $\mathcal{M}_1$ gesendet werden. Jeder Lichtstrahl, der in $\mathcal{M}_2$ ausgesendet wird, endet im schwarzen Loch bei $r = 0$. Der Schwarzschildradius ist also ein Horizont für Beobachter, deren Weltlinien in $\mathcal{M}_1$ verlaufen: Lichtstrahlen von Ereignissen in $\mathcal{M}_2$ können von keinem Beobachter in $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_3$ außerhalb des Schwarzschildhorizonts gesehen werden.

In den Bereichen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_3$ sind die t-Koordinatenlinien $u^2 - v^2 = \text{konst}$ zeitartig, in $\mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_4$ sind sie raumartig. Die Singularität der Schwarzschildlösung liegt auf der Weltlinie $r = 0$, die Grenzfall raumartiger Weltlinien $r = \varepsilon > 0$ ist.

Ist die Materie eines Stern zunächst bis zu $r_{\text{Stern}} > r_1$ ausgedehnt und zieht sich die Materie des Sterns später unter dem eigenen Gewicht zusammen, so weicht die Weltlinie der Sternoberfläche, wie in Abbildung 8.1 angedeutet, von der Hyperbel $r = \text{konst}$ zu kleineren Werten von r ab. Die Kruskalmetrik (8.46) ist die Lösung der Einsteingleichungen im Vakuum, sie gilt also für $r > r_{\text{Stern}}$ rechts von dieser Weltlinie.

Ihr Tangentialvektor ist überall innerhalb des Vorwärtslichtkegels: Materie ist langsamer als Licht. Wenn der Stern auf weniger als den Schwarzschildradius schrumpft, ist daher das vollständige Zusammenstürzen auf die Linie $r = 0$ in $\mathcal{M}_1$ unvermeidlich, Insbesondere bildet sich die Singularität des Schwarzen Lochs bei $r = 0$.

Ein Weißes Loch kann nicht entstehen, denn es liegt nicht im Vorwärtslichtkegel irgendeiner vorherigen Ursache.

Auch wenn das Überschreiten des Horizonts unumkehrbar zum Zusammensturz nach $r = 0$ führt, so ist dieses Überschreiten dennoch für frei fallende Beobachter ohne spektakuläre Begleiterscheinungen. Es wirken sich bei ihm nur die Gezeitenkräfte der Gravitation aus, die daher rühren, daß bei freiem Fall benachbarte Punkte durch die unterschiedliche Gravitation unterschiedlich fallen und ihren Abstand verändern. Diese Gezeitenkräfte auf eine Masse m im Abstand δr sind von der Größenordnung $mc^2 \delta r\, r_1/r^3$ (C.120) und sind am Horizont $r = r_1$ klein, wenn der Schwarzschildradius groß ist.

Für $r_0 > 0$ und $0 < \Lambda < 4/(9{r_0}^2)$ hat g_{tt} (8.37) eine zweite positive Nullstelle bei r_2 und die Metrik ist dort von der Form (8.39) mit $f = -\frac{\Lambda}{3\,r}(r - r_1)(r + r_1 + r_2)$, allerdings ist $f(r_2) < 0$. Die geometrischen Verhältnisse sind wie in Abbildung 8.1 mit einem Horizont bei r_2. Nur enthalten die Bereiche $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_3$ jeweils das Gravitationszentrum und r ist dort kleiner als r_2. In $\mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_4$ ist r größer als r_2. Überschreitet ein Beobachter, der von $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_3$ kommt, längs einer zeitartigen Weltlinie am Horizont den Wert r_2, so vergrößert sich mit dem Universum, das sich wegen der positiven kosmologischen Konstante ausdehnt, anschließend unausweichlich der Abstand r zur gravitationserzeugenden, kugelsymmetrischen Masse.

Zwischen r_1 und r_2 wechselt das Gewicht eines ortsfesten Beobachters, der eine Weltlinie mit $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1/\sqrt{g_{tt}}$ und $\mathrm{d}r = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$ durchläuft, sein Vorzeichen. Seine Beschleunigung $b^n = \frac{\mathrm{d}^2x^n}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma_{kl}{}^n \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}$ in radialer Richtung ist durch das Skalarprodukt $e_r \cdot b$ mit dem radialen Einheitsvektor e_r gegeben. Für sein Gewicht $m\, e_r \cdot b$ in einer drehinvarianten, zeitunabhängigen Metrik mit $g_{tt} = -1/g_{rr}$ ergibt sich wie bei (6.93)

$$F_{\text{Gewicht}} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sqrt{g_{tt}}\ . \tag{8.50}$$

Die Wurzel $\sqrt{g_{tt}}$ entspricht also dem Newtonschen Gravitationspotential.

Die Ableitung von g_{tt} wechselt zwischen den Nullstellen r_1 und r_2 ihr Vorzeichen und verschwindet bei einem Wert $\underline{r}$, den wir als Reichweite der Anziehung der Zentralmasse bezeichnen können. Bei r_1 kann keine endliche Beschleunigung den Absturz ins Schwarze Loch verhindern, bei r_2 kann keine endliche Beschleunigung ein Vergrößern des Abstandes zum Gravitationszentrum vermeiden.

Man kann nicht mit Kruskalkoordinaten r_1 und r_2 gemeinsam überdecken, denn der bei r_1 radial auslaufende Lichtstrahl verharrt bei r_1 und schneidet nie den bei r_2 radial einlaufenden Lichtstrahl, der bei r_2 bleibt.

Ein Beobachter bei r_2 ist ein Viertel des Umfangs des de Sitter-ähnlichen Universums vom Gravitationszentrum in $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_3$ entfernt. Die drehinvariante Vakuumlösung der Einsteingleichungen mit positiver kosmologischer Konstante beschreibt ein Paar antipodaler Gravitationszentren gleicher Masse.

8.6 Lösung im Inneren von Materie

Als Quelle einer kugelsymmetrischen Metrik muß der Energie-Impulstensor eines idealisierten Sterns, der sich nicht dreht, kugelsymmetrisch sein. Es können daher nur die Komponenten T^{tt}, $T^{tr} = T^{rt}$, T^{rr} und $T^{\theta\theta} = \sin^2\theta\, T^{\varphi\varphi}$ von Null verschieden sein, und sie dürfen nicht darüber hinaus von θ und φ abhängen. Wenn die Bewegungsgleichungen der Materiefelder aus einer Wirkung folgen, die invariant unter Koordinatentransformationen ist, ist der Energie-Impulstensor kovariant erhalten (G.51) und erfüllt $D_m T^m{}_n = 0$.

Die r-Komponente dieser Identität kann nach $T^\theta{}_\theta$ aufgelöst werden

$$0 = \partial_t T^t{}_r + \partial_r T^r{}_r + \frac{1}{2}(\dot\mu + \dot\nu)T^t{}_r + \frac{\nu'}{2}(T^r{}_r - T^t{}_t) + \frac{2}{r}(T^r{}_r - T^\theta{}_\theta)\ . \tag{8.51}$$

Die t-Komponente besagt

$$0 = \partial_t T^t{}_t + \partial_r T^r{}_t + \frac{2}{r}T^r{}_t + \frac{1}{2}\big(\dot\mu(T^t{}_t - T^r{}_r) + (\nu' + \mu')T^r{}_t\big)\ . \tag{8.52}$$

Dabei verschwindet der eingeklammerte Teil, denn wegen $G_{mn} = -\kappa T_{mn}$ (8.19) gilt

$$G^l{}_m T^m{}_k = T^l{}_m G^m{}_k \tag{8.53}$$

und für eine drehinvariante Metrik und einen drehinvarianten Energie-Impulstensor lautet die r-t-Komponente dieser Gleichung

$$0 = G^r{}_t(T^t{}_t - T^r{}_r) - T^r{}_t(G^t{}_t - G^r{}_r) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}}{r}\big(\dot\mu(T^t{}_t - T^r{}_r) + (\nu' + \mu')T^r{}_t\big)\ . \tag{8.54}$$

Daher erfüllt der Energie-Impulstensor die Gleichung $\partial_t(r^2 T^t{}_t) = -\partial_r(r^2 T^r{}_t)$. Sie legt $T^r{}_t$ vollständig fest

$$T^r{}_t(t,r) = -\frac{1}{r^2}\int_0^r \mathrm{d}r'\, r'^2\, \dot T^t{}_t(t,r')\ , \tag{8.55}$$

falls zu allen Zeiten $\dot T^t{}_t(t,r)$ bezüglich r integrabel und bei $r = 0$ stetig ist. Daß $T^r{}_t$ bei $r = 0$ endlich sei, legt die Integrationskonstante von $r^2 T^r{}_t$ fest.

Damit sind die Einsteingleichungen (8.34, 8.35) für beliebig vorgegebene $T^t{}_t$ und $T^r{}_r$ integrabel

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mu(t,r)} &= -g^{rr}(t,r) = 1 - \frac{\kappa}{r}\int_0^r \mathrm{d}r' r'^2\, T^t{}_t(t,r')\ ,\\ \nu(t,r) = \ln g_{tt}(t,r) &= \int_0^r \mathrm{d}r' \frac{1}{r'}\left(\mathrm{e}^{\mu}(1 - \kappa r'^2 T^r{}_r(t,r')) - 1\right)\ . \end{aligned} \tag{8.56}$$

Die Integrationskonstante von $\mathrm{e}^{-\mu}$ ist durch die Forderung festgelegt, daß die Metrik bei $r = 0$ existiert. Ein zeitabhängiger Term $\nu(t,0)$, der in der allgemeinen Lösung von $\nu(t,r)$ zusätzlich auftreten könnte, kann durch Wahl einer neuen Zeitkoordinate t', die $\mathrm{d}t' = \mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}}\mathrm{d}t$ erfüllt, absorbiert werden.

Im Inneren einer Hohlkugel, $T^{mn}(t,r) = 0$ für $r < R$, hebt sich die Gravitation außen liegender, kugelsymmetrisch verteilter Massen auf.

Die weiteren Eigenschaften der kugelsymmetrischen Lösung der Einsteingleichung (8.56) beruhen auf Materieeigenschaften. Untersucht man Materie, die wie eine Flüssigkeit keine Scherspannungen zuläßt, in der sich also das Gewicht der Materie nicht wie in einem Gewölbe aus Kugelschalen abstützen kann, so ist $T^\theta{}_\theta = T^r{}_r$. Der Energie-Impulstensor ist dann an jedem Ort drehinvariant nicht nur unter Drehungen um die Vertikale, sondern um alle Achsen. Mit einem Vierervektor u, $u^2 = 1$, der tangential an die Weltlinien der Teilchen ist, die den Stern bilden, hat solch ein Energie-Impulstensor die Form

$$T^{mn} = \frac{1}{c}\big((\rho c^2 + p)u^m u^n - p g^{mn}\big)\ . \tag{8.57}$$

Die Größe $\rho c^2 = c u_m u_n T^{mn}$ ist an jedem Ort die Energiedichte im Ruhsystem der dortigen Teilchen. Daß p als Druck zutreffend identifiziert ist, überprüft man mit der Kontinuitätsgleichung $D_m T^{mn} = 0$. In Richtung von u^n besagt sie, daß die Länge des Tangentialvektors konstant ist, senkrecht zu u^n, daß die Kraft auf die Teilchen der negative Gradient des Druckes p ist

$$(\rho c^2 + p)u^m D_m u^n = (g^{mn} - u^m u^n) D_m p\ . \tag{8.58}$$

Beim Vorzeichen ist zu beachten, daß räumliche Längenquadrate negativ sind. Auf der linken Seite ist bemerkenswert, daß Druck zu Trägheit beiträgt.

Einfachheitshalber betrachten wir im folgenden einen zeitunabhängigen Stern. Dann ist $u^m = (\mathrm{e}^{-\nu/2}, 0, 0, 0)$ und $T^t{}_t = \rho c$ und $T^r{}_r = -\frac{p}{c}$. Wegen $T^\theta{}_\theta = T^r{}_r$ verknüpft (8.51) ρ und p und ν

$$p' + \frac{\nu'}{2}(\rho c^2 + p) = 0 \ . \tag{8.59}$$

Die Gleichungen (8.56) und (8.35) verwenden wir in der Form

$$\mathrm{e}^{-\mu} = 1 - \frac{2\hat{m}}{r} \ , \quad \hat{m} = \frac{\kappa c}{8\pi} m \ , \quad m(r) = 4\pi \int_0^r \mathrm{d}r' r'^2 \rho(r') \ , \tag{8.60}$$

$$\frac{\kappa}{c} p = \frac{\nu'}{r}\big(1 - \frac{2\hat{m}}{r}\big) - \frac{2\hat{m}}{r^3} \ . \tag{8.61}$$

Differenzieren wir (8.61) und multiplizieren wir mit $\mathrm{e}^{\nu/2}/\sqrt{1 - 2\hat{m}/r}$ und ersetzen wir p' mit (8.59) und p durch (8.61), so folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(\frac{\nu'}{r}\sqrt{1 - \frac{2\hat{m}}{r}}\,\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}}\Big) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{2\hat{m}}{r}}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(\frac{2\hat{m}}{r^3}\Big) \ . \tag{8.62}$$

Die Ableitung auf der rechten Seite ist nicht positiv, denn mit dem Druck p nimmt die Dichte nach außen ab, $r < R \Rightarrow \rho(r) \geq \rho(R)$. Es nimmt aber der Mittelwert

$$\bar{f}(R) = \frac{\int_0^R \mathrm{d}x\, f(x)\, g(x)}{\int_0^R \mathrm{d}x\, g(x)} \tag{8.63}$$

einer nicht wachsenden Funktion f, der mit einer positiven Gewichtsfunktion g gebildet wird, nicht zu. Er ist ja wegen $\int_0^R \mathrm{d}x\, f(x)\, g(x) \geq f(R) \int_0^R \mathrm{d}x\, g(x)$ nicht kleiner als der Funktionswert bei R, $\bar{f}(R) \geq f(R)$, und die Ableitung des Mittelwertes ist nicht positiv

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\bar{f}(r) = \frac{f(r)g(r)}{\int_0^r \mathrm{d}x\, g(x)} - \frac{\bar{f}(r)}{\int_0^r \mathrm{d}x\, g(x)} g(r) = \frac{f(r) - \bar{f}(r)}{\int_0^r \mathrm{d}x g(x)} g(r) \leq 0 \ . \tag{8.64}$$

Die Funktion $2\hat{m}(r)/r^3$ ist der Mittelwert von $\frac{\kappa c}{3}\rho$ mit der Gewichtsfunktion $g(r) = r^2$ und wächst daher nicht an

$$r < R \quad \Rightarrow \quad 2\hat{m}(r)/r^3 \geq 2\hat{m}(R)/R^3 \ . \tag{8.65}$$

Aus (8.62) folgt also die Ungleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(\frac{\nu'}{r}\sqrt{1 - \frac{2\hat{m}}{r}}\,\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}}\Big) \leq 0 \ . \tag{8.66}$$

An der Sternoberfläche beim Radius R verschwindet der Druck bis auf den kleinen Wert $-\Lambda$, der von Vakuumenergiedichte herrührt. Einfachheitshalber vernachlässigen wir sie im folgenden, denn die kosmologische Konstante Λ ist klein und ändert unsere Ergebnisse nur wenig. Größere Werte von Λ werden bei [9] untersucht.

Bei R muß die Metrik stetig in die Vakuumlösung, die Schwarzschildlösung (6.15) mit $r_0 = 2\hat{m}(R) = \frac{2MG}{c^2}$ (6.23) übergehen. Insbesondere stimmt die durch ihre gravitative Auswirkung außen meßbare Masse M wegen $\frac{\kappa c}{8\pi} = \frac{G}{c^2}$ (8.105) mit $m(R)$ (8.60) überein.

$$\mathrm{e}^{\nu(R)} = 1 - \frac{2\hat{M}}{R} = \mathrm{e}^{-\mu(R)} \ , \quad \hat{M} = \hat{m}(R) \ , \quad p(R) = 0 = \frac{\nu'(R)}{R}\big(1 - \frac{2\hat{M}}{R}\big) - \frac{2\hat{M}}{R^3} \tag{8.67}$$

Mit diese Randwerten integrieren wir (8.66) von r bis zum Radius R des Sterns

$$\frac{2\hat{M}}{R^3} - \frac{2}{r}\sqrt{1 - \frac{2\hat{m}}{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}} \leq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\hat{M}}{R^3}\frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2\hat{m}}{r}}} \leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{e}^{\frac{\nu}{2}} \ . \tag{8.68}$$

Wenn wir nochmal integrieren, erhalten wir

$$\frac{\hat{M}}{R^3}\int_r^R \mathrm{d}r\, \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2\hat{m}}{r}}} \leq \mathrm{e}^{\frac{\nu(R)}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\nu(r)}{2}} = \sqrt{1 - \frac{2\hat{M}}{R}} - \mathrm{e}^{\frac{\nu(r)}{2}} \ . \tag{8.69}$$

Wir verkleinern die linke Seite, wenn wir in der Wurzel nicht $2\hat{m}r^2/r^3$, sondern weniger, $2\hat{M}r^2/R^3$, abziehen. Ordnen wir um, so folgt

$$\mathrm{e}^{\frac{\nu(r)}{2}} \leq \sqrt{1 - \frac{2\hat{M}}{R}} - \frac{\hat{M}}{R^2}\int_r^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \frac{2\hat{M}r^2}{R^3}}} = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2\hat{M}}{R}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2\hat{M}}{R^3}r^2} \ . \tag{8.70}$$

Da $g_{tt} = \mathrm{e}^\nu$ nicht verschwindet, ist die rechte Seite für $r = 0$ positiv. Daher ist bei einem stabilen Stern der Radius R, der durch die Größe $4\pi R^2$ der Sternoberfläche definiert ist, größer als $9/8$ mal sein durch gravitative Auswirkungen meßbarer Schwarzschildradius

$$R \geq \frac{9}{8}\frac{2MG}{c^2} = \frac{9}{8} r_0 \ . \tag{8.71}$$

Ein Stern, der auf weniger als $(9/8)r_0$ geschrumpft ist und den Energie-Impulstensor (8.57) einer idealen Flüssigkeit hat, in der es keine gewölbeartig tragende Kugelschichten gibt, kann nicht zeitunabhängig sein und stürzt zu einem Schwarzen Loch zusammen.

Die Wellenlänge von Licht von einer stabilen Sternoberfläche kann höchstens um $z = 2$ (6.78) gravitativ rotverschoben sein. Diese Schranke an die maximale Rotverschiebung unterstellt, daß die Metrik asymptotisch in die Metrik des flachen Raumes übergeht. Sie gilt nicht im expandierenden Universum.

Bei gegebener, konstanter Dichte ρ ist die Schranke $R > 9/8\, r_0$ eine Schranke an die Masse $M < (3\pi G/c^2)^{-3/2}\rho^{-\frac{1}{2}}$. Neutronensterne mit einer Dichte von etwa $10^{15}\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ können daher nicht schwerer als 4 Sonnenmassen sein.

Ist die Sternmaterie inkompressibel, $\rho(r) = \rho(0)$ für $r < R$, so gilt in der Abschätzung (8.70) das Gleichheitszeichen und ergibt mit (8.60) und $\hat{m} = \hat{M}r^3/R^3$ die Metrik

$$g_{rr} = -\mathrm{e}^\mu = -\Big(1 - \frac{2\hat{M}}{R^3}r^2\Big)^{-1} , \quad g_{tt} = \mathrm{e}^\nu = \Big(\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2\hat{M}}{R}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2\hat{M}}{R^3}r^2}\,\Big)^2 , \tag{8.72}$$

im Sterninneren. Ihr negativer, räumlicher Teil ist die vom flachen $\mathbb{R}^4$ auf der Kugelschale $x(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta,\, \sqrt{\frac{R^3}{2M} - r^2}),\ r < R$, induzierte, maximal symmetrische Metrik. Allerdings zeichnen g_{tt} und der Druckgradient die Vertikale als besondere Richtung aus.

8.7 Der Energie-Impulskomplex des Gravitationsfeldes

Multipliziert man den Einstein-Tensor mit einer geeigneten Funktion $f(\mathfrak{g})$ der Determinante der Metrik (I.14), $f(-1) = 1$, und addiert man geeignete Funktionen $t^{mn} = t^{nm}$ der Metrik und ihrer ersten Ableitungen, dann erhält man Funktionen C^{mn} der Metrik und ihrer Ableitungen, deren Divergenz identisch verschwindet,

$$C^{mn} = f(\mathfrak{g})\, G^{mn} - \kappa\, t^{mn}\,,\ \partial_m C^{mn} = 0\,. \tag{8.73}$$

Die Forderungen, daß die Divergenz verschwinde und daß t^{mn} unter linearen, volumentreuen Koordinatentransformationen ein Tensor sei, legen f und t^{mn} fest. Denn die Divergenz einer symmetrischen Phasenraumfunktion $C^{mn} = C^{nm}(g, \partial g, \partial^2 g \dots)$ verschwindet genau dann, wenn $C^{mn} = \partial_r\partial_s X^{rmsn}$ die zweifache Ableitung einer Phasenraumfunktion X^{rmsn} ist, die die Permutationssymmetrien des Riemanntensors hat (Seite 316). Daher folgt aus $\partial_m C^{mn} = 0$

$$f(\mathfrak{g})\, G^{mn} - \kappa\, t^{mn} = \partial_r\partial_s X^{rmsn}\,. \tag{8.74}$$

Der Einsteintensor G^{mn} besteht nur aus Termen, bei denen zwei Ableitungen auf die Metrik wirken. Er ist eine Summe von Termen, die linear in zweiten Ableitungen der Metrik sind mit Koeffizienten ohne Ableitungen, und von Termen, die quadratisch sind in den ersten Ableitungen der Metrik. Zum Einsteintensor können daher nur Funktionen X^{rmsn} beitragen, die nicht von Ableitungen von g abhängen. Der einzige vierfach kontravariante Tensor (unter linearen, volumentreuen Koordinatentransformationen) mit der Permutationssymmetrie des Riemanntensors, den man aus der Metrik konstruieren kann, ist

$$X^{rmsn} = h(\mathfrak{g})\left(g^{rs}g^{mn} - g^{rn}g^{ms}\right). \tag{8.75}$$

Die hierbei auftretende Funktion h ist durch Vergleich der Terme festgelegt, die linear in zweiten Ableitungen der Metrik sind. Sie kommen nicht in t^{mn} vor, sondern müssen in $f\,G^{mn}$ und in $\partial_r\partial_s X^{rmsn}$ übereinstimmen. Wie der Koeffizientenvergleich zeigt, ist dies genau dann der Fall, wenn $h = -f/2$ und $\mathfrak{g}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\mathfrak{g}} = h$ ist. Also sind f und h homogen vom Grad 1, und mit der Notation

$$\gamma^{mn} = \sqrt{\mathfrak{g}}\, g^{mn} \tag{8.76}$$

für die metrische Dichte gilt

$$\mathfrak{g}\, G^{mn} = -\frac{1}{2}\partial_r\partial_s\bigl(\gamma^{rs}\gamma^{mn} - \gamma^{rn}\gamma^{ms}\bigr) + \kappa\, t^{mn}\,. \tag{8.77}$$

Hierbei definieren die Terme in $\mathfrak{g}\, G^{mn}$ und $\partial_r\partial_s X^{rmsn}$, die quadratisch in den ersten Ableitungen der Metrik sind, die Größe $\kappa\, t^{mn}$. Explizit ergibt sich nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} 2\kappa\, t^{mn} &= 2\,\mathfrak{g}\, G^{mn} + \partial_r\partial_s\bigl(\gamma^{rs}\gamma^{mn} - \gamma^{rn}\gamma^{ms}\bigr) = \\ &= \partial_k\gamma^{mn}\partial_l\gamma^{kl} - \partial_k\gamma^{km}\partial_l\gamma^{ln} + \frac{1}{2}g^{mn}g_{kl}\partial_r\gamma^{ks}\partial_s\gamma^{lr} - \\ &\quad - g_{kl}g^{mr}\partial_r\gamma^{ks}\partial_s\gamma^{ln} - g_{kl}g^{nr}\partial_r\gamma^{ks}\partial_s\gamma^{lm} + g_{kl}g^{rs}\partial_r\gamma^{mk}\partial_s\gamma^{nl} + \\ &\quad + \frac{1}{8}\bigl(2g^{ml}g^{nk} - g^{mn}g^{kl}\bigr)\bigl(2g_{pr}g_{qs} - g_{pq}g_{rs}\bigr)\partial_k\gamma^{pq}\partial_l\gamma^{rs}\,. \end{aligned} \tag{8.78}$$

Dies ist der von Landau und Lifschitz [38] angegebene Energie-Impulskomplex. Er ist kein Tensor, sondern transformiert unter nichtlinearen Transformationen linear inhomogen,

$$\begin{aligned} 2\kappa\, t'^{mn}(x'(x)) &= \Bigl(\det\frac{\partial x}{\partial x'}\Bigr)^2\frac{\partial x'^m}{\partial x^t}\frac{\partial x'^n}{\partial x^u}\,2\kappa\, t^{tu}(x) + \\ &+ \partial_r\partial_s\Bigl(\bigl(\det\frac{\partial x}{\partial x'}\bigr)^2\frac{\partial x'^m}{\partial x^t}\frac{\partial x'^n}{\partial x^u}\Bigr)\bigl(\gamma^{rs}\gamma^{tu} - \gamma^{ru}\gamma^{ts}\bigr) + \\ &+ \partial_s\Bigl(\bigl(\det\frac{\partial x}{\partial x'}\bigr)^2\frac{\partial x'^m}{\partial x^t}\frac{\partial x'^n}{\partial x^u}\Bigr)\partial_r\bigl(2\gamma^{rs}\gamma^{tu} - \gamma^{ru}\gamma^{ts} - \gamma^{su}\gamma^{tr}\bigr) + \\ &+ \partial_s\Bigl(\bigl(\det\frac{\partial x}{\partial x'}\bigr)^2\frac{\partial x'^m}{\partial x^t}\frac{\partial x'^n}{\partial x^u}\Bigr)\frac{\partial x^l}{\partial x'^k}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^r\partial x^l}\bigl(2\gamma^{rs}\gamma^{tu} - \gamma^{ru}\gamma^{ts} - \gamma^{su}\gamma^{tr}\bigr) + \\ &+ \frac{\partial x^k}{\partial x'^l}\partial_k\Bigl(\bigl(\det\frac{\partial x}{\partial x'}\bigr)^2\frac{\partial x'^m}{\partial x^t}\frac{\partial x'^n}{\partial x^u}\Bigr)\frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^s\partial x^r}\bigl(\gamma^{rs}\gamma^{tu} - \gamma^{ru}\gamma^{ts}\bigr)\,. \end{aligned} \tag{8.79}$$

An jedem vorgegebenen Punkt können die ersten partiellen Ableitungen der Metrik und damit t^{mn} durch eine Koordinatentransformation zum Verschwinden gebracht werden. Dennoch ist t^{mn} als Funktion von g und ∂g eindeutig bis auf Terme der Form $\partial_k\partial_l Y^{kmln}$, die entweder höhere Ableitungen der Metrik oder höhere Potenzen der ersten Ableitungen enthalten oder unter linearen, volumenbewahrenden Koordinatentransformationen nicht wie ein Tensor transformieren.

Erhaltungsgrößen

Wegen $-2\mathfrak{g}\, G^{mn} + 2\kappa\, t^{mn} = \partial_r\partial_s(\gamma^{rs}\gamma^{mn} - \gamma^{rn}\gamma^{ms})$ sind die Einstein-Gleichungen äquivalent zu

$$\partial_r\partial_s(\gamma^{rs}\gamma^{mn} - \gamma^{rn}\gamma^{ms}) = 2\kappa\left(\mathfrak{g}\, T^{mn} + t^{mn}\right)\,, \tag{8.80}$$

wenn man eine etwaige kosmologische Konstante mit dem Energie-Impulstensor der Materie zusammenfaßt.

Weil die Divergenz der linken Seite verschwindet, folgen aus den Einstein-Gleichungen die vier Kontinuitätsgleichungen

$$\partial_m\left(\mathfrak{g}\, T^{mn} + t^{mn}\right) = 0\,. \tag{8.81}$$

Die Erhaltungsgrößen

$$P^m = \int \mathrm{d}^3x\,\left(\mathfrak{g}\, T^{0m} + t^{0m}\right) \tag{8.82}$$

nennen wir wie diejenige Größen, in die sie für $g_{mn} = \eta_{mn}$ übergehen. P^m ist der Energie-Impuls-Vierervektor. Er transformiert unter Lorentztransformationen wie ein Vierervektor (falls nicht Energie und Impuls abgestrahlt werden).

Die in einem Gebiet V enthaltene Energie und der in V enthaltene Impuls läßt sich wegen der Einstein-Gleichungen (8.80) aus Oberflächenintegralen über die Metrik bestimmen. Denn da $\gamma^{rs}\gamma^{m0} - \gamma^{r0}\gamma^{ms}$ für $s = 0$ verschwindet, enthalten die Gleichungen für $n = 0$ keine zweiten Zeitableitungen, sondern sind von der Form

$$\operatorname{div} \vec{E}^m = \rho^m \quad \text{mit} \quad E^{im} = \partial_r\big(\gamma^{ri}\gamma^{m0} - \gamma^{r0}\gamma^{mi}\big) \text{ und } \quad \rho^m = 2\kappa\,(\mathfrak{g}\,T^{m0} + t^{m0})\ . \qquad (8.83)$$

So wie die Gaußbedingung der Elektrodynamik schränken diese Gleichungen die Anfangswerte ein und erlauben es, die in einem Volumen enthaltene Ladung als Oberflächenintegral über den Rand des Volumens zu bestimmen,

$$P^m(V) = \frac{1}{2\kappa}\int_V \mathrm{d}^3x\,\partial_r\partial_s\big(\gamma^{rs}\gamma^{m0} - \gamma^{r0}\gamma^{ms}\big) = \frac{1}{2\kappa}\int_{\partial V}\mathrm{d}^2f_i\,\partial_r\big(\gamma^{ri}\gamma^{m0} - \gamma^{r0}\gamma^{mi}\big)\ . \qquad (8.84)$$

Zwar ist in jedem Koordinatensystemen richtig, daß sich dieser Impuls im Volumen nur ändert, wenn Energie- und Impulsströme durch die Oberfläche fließen, aber er hängt vom verwendeten Koordinatensystem ab und ist nur für solche Gebiete V definiert, die sich mit einer Karte überdecken lassen. Ob und wie man die Viererimpulse aus verschiedenen Gebieten addieren kann, die sich nicht mit einer Karte überdecken lassen, muß noch untersucht werden. Beispielsweise kann nicht einfach geschlossen werden, daß ein Volumen wie die dreidimensionale Kugelfläche S^3 keinen Viererimpuls enthalte, weil es keinen Rand habe.

Drehimpuls und Schwerpunktsatz

Wie die Energie-Impulsströme sind auch die Drehimpulsströme erhalten

$$M^{mkl} = -M^{mlk} = x^k\,(\mathfrak{g}\,T^{ml} + t^{ml}) - x^l\,(\mathfrak{g}\,T^{mk} + t^{mk})\ ,\ \partial_m\,M^{mkl} = 0\ , \qquad (8.85)$$

denn $2\kappa\,M^{mkl}$ ist wegen der Einsteingleichungen die Divergenz einer im Indexpaar $n\,m$ antiysymmetrischen Größe M^{nmkl}

$$\begin{aligned} 2\kappa\,M^{mkl} &= x^k\,\big(\partial_r\partial_s(\gamma^{rs}\gamma^{ml} - \gamma^{rl}\gamma^{ms})\big) - k \leftrightarrow l = \partial_n M^{nmkl} \\ M^{nmkl} &= x^k\,\partial_s\big(\gamma^{ns}\gamma^{ml} - \gamma^{nl}\gamma^{ms}\big) - x^l\partial_s\big(\gamma^{ns}\gamma^{mk} - \gamma^{nk}\gamma^{ms}\big) - \gamma^{nk}\gamma^{ml} + \gamma^{nl}\gamma^{mk} \end{aligned} \qquad (8.86)$$

Wegen $M^{nmkl} = -M^{mnkl}$ enthält $\partial_n M^{n0kl}$ keine Zeitableitung und das Volumenintegral über die Drehimpulsstromdichte kann mit dem Gaußschen Satz auf dem Rand des Volumens berechnet werden,

$$M^{kl}(V) = \frac{1}{2\kappa}\int_{\partial V}\mathrm{d}^2f_i\,\Big(x^k\,\partial_s\big(\gamma^{is}\gamma^{0l} - \gamma^{il}\gamma^{0s}\big) - x^l\,\partial_s\big(\gamma^{is}\gamma^{0k} - \gamma^{ik}\gamma^{0s}\big) - \gamma^{ik}\gamma^{0l} + \gamma^{il}\gamma^{0k}\Big)\ . \qquad (8.87)$$

Die Größen M^{23}, M^{31}, M^{12} sind die Komponenten des Drehimpuls, (M^{10}, M^{20}, M^{30}) der anfängliche Energie-Schwerpunkt. Da er zeitunabhängig ist, wenn keine Strahlung durch den Rand des Volumens strömt, bewegt sich der Energie-Schwerpunkt gradlinig gleichförmig.

$$X^j(t)\,P^0 = \frac{1}{2\kappa}\int_{\partial V}\mathrm{d}^2f_i\,\Big(x^j\,\partial_s\big(\gamma^{is}\gamma^{00} - \gamma^{i0}\gamma^{0s}\big) - \gamma^{ij}\gamma^{00} + \gamma^{i0}\gamma^{0j}\Big) = X^j(0)\,P^0 + t\,P^j \qquad (8.88)$$

Zugehörige infinitesimale Symmetrie

Im materiefreien Raum sind t^{mn} die Komponenten von vier erhaltenen Strömen. Zu ihnen gehören nach dem Noethertheorem (G.16) vier infinitesimale Symmetrien δ^n der Einstein-Wirkung. Um die infinitesimalen Transformationen der Metrik $\delta^n(g_{kl})$ zu berechnen, formen wir die Divergenz von t^{mn} um und lesen $\delta^n(g_{kl})$ als Faktor bei der Variationsableitung $-\sqrt{\mathfrak{g}}\,G^{kl}/(2\kappa)$ der Einsteinwirkung (mit verschwindender kosmologischen Konstante) ab,

$$\partial_m t^{mn} - \frac{1}{2\kappa}\delta^n(g_{kl})\,\sqrt{\mathfrak{g}}\,G^{kl} = 0\ . \qquad (8.89)$$

Glücklicherweise stimmt die Divergenz von κt^{mn} wegen $\kappa t^{mn} = \mathfrak{g}\,G^{mn} + \partial_r\partial_s X^{rmsn}/2$ mit der von $\mathfrak{g}\,G^{mn}$ überein. Zudem verschwindet die kovariante Divergenz des Einsteintensors, $D_m G^{mn} = 0$ (G.52). Mit (I.15) und (I.16) gilt

$$\begin{aligned} \kappa\,\partial_m t^{nm} &= \partial_m(\mathfrak{g}\,G^{mn}) = \mathfrak{g}\,\Big(\Gamma_{rm}{}^r\,G^{mn} - \Gamma_{rs}{}^n\,G^{rs}\Big) \\ &= -\sqrt{\mathfrak{g}}\,\Big(\Gamma_{kl}{}^n - \frac{1}{2}\Gamma_{rk}{}^r\,\delta_l{}^n - \frac{1}{2}\Gamma_{rl}{}^r\,\delta_k{}^n\Big)\sqrt{\mathfrak{g}}\,G^{kl}\ . \end{aligned} \qquad (8.90)$$

Also ist die Einstein-Wirkung invariant unter den infinitesimalen Transformationen

$$\delta^n(g_{kl}) = -\sqrt{\mathfrak{g}}\,\Big(2\Gamma_{kl}{}^n - \Gamma_{rk}{}^r\,\delta_l{}^n - \Gamma_{rl}{}^r\,\delta_k{}^n\Big)\ . \qquad (8.91)$$

Hierbei handelt es sich um die Lieableitung der Metrik längs der vier „Vektorfelder“ $v^n = v^{nl}\partial_l$ mit Komponenten

$$v^{nl} = \sqrt{\mathfrak{g}}\,g^{nl} = \gamma^{nl}\ , \qquad (8.92)$$

$$\delta^n(g_{kl}) = \mathcal{L}_{v^n}g_{kl} = \gamma^{nr}\partial_r g_{kl} + \partial_k\gamma^{nr}g_{rl} + \partial_l\gamma^{nr}g_{kr}\ . \qquad (8.93)$$

Jede Wirkung, die unter allgemeinen Koordinatentransformationen invariant ist, ist spezieller unter den von v^n erzeugten Transformationen invariant. Der gemäß Noethertheorem zugehörige, erhaltene Strom ist, wenn wir auch Materie einbeziehen, $\mathfrak{g}\,T^{mn} + t^{mn}$.

Anfangswertproblem

Die harmonische Eichung (F.1)

$$\partial_m\gamma^{mn} = 0 \qquad (8.94)$$

legt zusammen mit den Einstein-Gleichungen (8.80) die Zeitentwicklung der Metrik fest,

$$\Box_\gamma\gamma^{mn} - \partial_r\gamma^{ms}\partial_s\gamma^{nr} = 2\kappa\,\mathfrak{g}\,T^{mn} + 2\kappa\,t^{mn}\ , \qquad (8.95)$$

dabei ist

$$\Box_\gamma = \gamma^{rs}\partial_r\partial_s \tag{8.96}$$

der skalare Wellenoperator der gekrümmten Raumzeit.

Betrachten wir eine Schar von Anfangsbedingungen und Materieverteilungen, die differenzierbar von einem Parameter λ abhängt, und eine zugehörige Schar $\gamma^{mn}(\lambda)$ von Lösungen der Einstein-Gleichungen in harmonischer Eichung. Die Änderung der Metrik

$$\bar{h}^{mn} = -\partial_\lambda \gamma^{mn} \tag{8.97}$$

erfüllt die linear inhomogene Wellengleichung

$$\Box_\gamma \bar{h}^{mn} - \partial_s\gamma^{mr}\,\partial_r\bar{h}^{ns} - \partial_s\bar{h}^{mr}\,\partial_r\gamma^{ns} + \bar{h}^{rs}\partial_r\partial_s\gamma^{mn} = -2\kappa\,\partial_\lambda(\mathfrak{g}T^{mn} + t^{mn})\ . \tag{8.98}$$

von der Form (7.74). Daher hängt die Lösung dieser Gleichung in jedem Ereignis nur von der Inhomogenität und den Anfangsbedingungen im Rückwärtslichtkegel ab, der durch γ bestimmt ist. Lokalisierte Änderungen, Signale, breiten sich folglich höchstens so schnell wie Licht aus, falls auch die Materiefelder Gleichungen mit demselben Wellenoperator erfüllen oder ihre Schallkegel innerhalb des Lichtkegels liegen.

Ändern sich mit der Metrik die Lichtkegel, so kann die Metrik nicht analytisch im Scharparameter sein, denn jeder Term einer Potenzreihe in λ hat Einfluß- und Abhängigkeitsgebiete, die durch die Metrik am Entwicklungspunkt $\underline{\lambda}$ bestimmt sind, statt durch die Metrik bei λ.

Die harmonische Eichung schränkt die Anfangswerte von $\bar{h}^{mn}$ und $\partial_0\bar{h}^{mn}$ ein,

$$\partial_m\bar{h}^{mn}(0,\vec{x}) = 0\ ,\ \partial_m\partial_0\bar{h}^{mn}(0,\vec{x}) = 0\ . \tag{8.99}$$

Während die erste Bedingung einfach die anfängliche Zeitableitung von $\bar{h}^{0n}$ festlegt,

$$\partial_0\bar{h}^{0n}(0,\vec{x}) = -\partial_i\bar{h}^{in}(0,\vec{x})\ , \tag{8.100}$$

enthält die zweite Bedingung zweite Zeitableitungen von $\bar{h}^{0n}$. Eliminiert man diese zweiten Zeitableitungen mit den Einsteingleichungen, so ist die Bedingung erfüllt, falls die Gaußbedingung (8.83) erfüllt ist. Dies ist ein partielles, elliptisches Differentialgleichungssystem vom Typ

$$\Delta_\gamma u + f(u,\partial u,\psi) = v(\psi)\ ,\ \Delta_\gamma = -\gamma^{ij}\partial_i\partial_j\ ,\ f(0,0,\psi) = 0\ , \tag{8.101}$$

für die Anfangswerte von $u^n = \bar{h}^{0n}$, ψ bezeichne hier die übrigen Felder. Die Lösung ist durch die Inhomogenität v und die Randwerte eindeutig festgelegt. Für Änderungen δv in einem beschränken Gebiet V gibt es wie in der Elektrodynamik Lösungen δu, die ebenfalls auf V beschränkt sind und die normalerweise mit Flächendichten von Energie und Impuls auf der Oberfläche von V einhergehen. Die Auswirkungen solcher Änderungen δv und $\delta\bar{h}^{0n}$ sind auf den Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel von V beschränkt: Gravitationswellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Da die Divergenz $\partial_\lambda\partial_m(2\kappa\,\mathfrak{g}\,T^{mn} + 2\kappa\,t^{mn})$ für Lösungen der Einstein-Gleichungen verschwindet, gilt dann die harmonische Eichung zu allen Zeiten, denn die Divergenz von (8.95)

$$\Box_\gamma(\partial_m\bar{h}^{mn}) - (\partial_s\gamma^{nr})\partial_r(\partial_m\bar{h}^{ms}) = 0 \tag{8.102}$$

ist eine Wellengleichung (7.74) für $\partial_m\bar{h}^{mk}$ und hat bei verschwindenden Anfangswerten die eindeutige Lösung $\partial_m\bar{h}^{mk} = 0$.

Identifizierung von κ

Das metrische Feld außerhalb eines kugelsymmetrischen Sterns hat in harmonischen, kartesischen Koordinaten (t,x^1,x^2,x^3) den Wert (F.9), $(r^2 = (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 > l^2)$,

$$\gamma^{ij} = -\delta^{ij} + \frac{l^2}{r^4}x^i x^j\ ,\quad \gamma^{0i} = 0\ ,\quad \gamma^{00} = \frac{(r+l)}{(r-l)}\Bigl(1+\frac{l}{r}\Bigr)^2\ ,\ l = \frac{r_0}{2} = \frac{m\,G}{c^2} \tag{8.103}$$

wobei der Scharzschildradius r_0 (6.23) durch seine Auswirkung auf die Bahnen von Testteilchen identifiziert ist. Eine Kugel mit Radius r enthält die Gesamtenergie

$$P^0(r) = \frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^2 f_i\,\gamma^{ij}\,\partial_j\gamma^{00} = \frac{4\pi}{2\kappa}(l^2-r^2)\frac{\partial}{\partial r}\frac{(r+l)^3}{r^2(r-l)} = \frac{8\pi}{\kappa}\,l\,\frac{(r+l)^3}{r^3}\frac{r-l/2}{r-l}\ . \tag{8.104}$$

Für $r\to\infty$ ist $P^0 = m\,c$ die Ruhemasse des Sterns und seines Gravitationsfeldes, die rechte Seite geht gegen $(8\pi G\,m)/(c^2\,\kappa)$. Dies identifiziert die Gravitationskopplung

$$\kappa = \frac{8\pi\,G}{c^3}\ . \tag{8.105}$$

Die Ableitung von $P^0(r)$ nach r, geteilt durch die Kugeloberfläche $4\pi\,r^2$ ergibt die gravitative Energiedichte t^{00} außerhalb des Sterns $(r > l)$,

$$t^{00}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\,r^2}\frac{\partial}{\partial r}P^0(r) = \frac{l^2}{\kappa}\left(\frac{r+l}{r-l}\right)^2\frac{1}{r^6}\bigl(-7r^2 + 8r\,l - 3l^2\bigr)\ . \tag{8.106}$$

Sie ist wie in Newtonscher Gravitationstheorie negativ! Zieht sich ein Stern bei gleichbleibender Gesamtenergie zusammen, so wird die im Gravitationsfeld enthaltene Energie negativer und die Energiedichte im Stern steigt mit dem Druck zusätzlich stärker an, als einfach ihrer Verdichtung entspräche.

8.8 Asymptotisch flache Raumzeit

Wir untersuchen eine Schar von Metriken, die nur wenig von der Metrik des flachen Raumes abweichen, und die Einsteingleichungen lösen,

$$\sqrt{\mathfrak{g}}\,g^{mn}(\lambda) = \eta^{mn} - \lambda\,\bar{h}^{mn} + O(\lambda^2) \tag{8.107}$$

$$g_{mn}(x) = \eta_{mn} + \lambda h_{mn}(x) + O(\lambda^2)\ , \tag{8.108}$$

$$h_{mn} = \eta_{mk}\eta_{nl}\bar{h}^{kl} - \frac{1}{2}\eta_{mn}\eta_{kl}\bar{h}^{kl}\ ,\quad \bar{h}^{mn} = \eta^{mk}\eta^{nl}h_{kl} - \frac{1}{2}\eta^{mn}\eta^{kl}h_{kl}\ . \tag{8.109}$$

Damit die Metrik für $\lambda = 0$ eine Lösung der Einsteingleichungen ist, ist der Energie-Impulstensor $\kappa\mathfrak{g}T^{mn} = \lambda\kappa T^{mn}_{(0)} + O(\lambda^2)$ der Materie mindestens erster Ordnung im Parameter λ, der Energie-Impulskomplex t^{mn} ist mindestens zweiter Ordnung. Dann sind in der Lorenzeichung (F.1)

$$0 = \partial_m\bar{h}^{mn} \tag{8.110}$$

die Einsteingleichungen (8.98) in erster Ordnung einfach inhomogene Wellengleichungen

$$\Box\bar{h}^{mn} = -2\kappa\, T_{(0)}^{mn}\ , \quad \Box = \eta^{mn}\partial_m\partial_n\ , \tag{8.111}$$

deren Anfangswerte durch

$$\partial_0\bar{h}^{m0}(0,\vec{x}) = -\partial_i\bar{h}^{mi}(0,\vec{x})\ , \quad \Delta\bar{h}^{m0}(0,\vec{x}) = 2\kappa T^{m0}(0,\vec{x}) - \partial_0\partial_i\bar{h}^{mi}(0,\vec{x}) \tag{8.112}$$

eingeschränkt sind. In der Anfangseichung $\partial_i\bar{h}^{mi}(0,\vec{x}) = 0$ und $\partial_0\partial_i\bar{h}^{mi}(0,\vec{x}) = 0$ gilt insbesondere

$$\partial_0\bar{h}^{m0}(0,\vec{x}) = 0\ , \quad \bar{h}^{m0}(0,\vec{x}) = -\frac{2\kappa}{4\pi}\int \mathrm{d}^3y\,\frac{T^{m0}(0,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ . \tag{8.113}$$

Jede Lösung dieser Gleichung läßt sich als Summe einer partikulären Lösung, dem retardierten Potential, und einer Lösung der homogenen Wellengleichung, einer linearisierten Gravitationswelle, schreiben (5.119).

$$\bar{h}^{mn} = \bar{h}^{mn}_{\text{ret}} + \bar{h}^{mn}_{\text{Welle}} \tag{8.114}$$

Drücken wir die Lösung durch die Anfangswerte und die Inhomogenität für $t > 0$ aus, so trägt zum retardierten Potential (5.143) zur Zeit t am Ort $\vec{x}$

$$\bar{h}^{mn}_{\text{ret}}(t,\vec{x}) = -\frac{2\kappa}{4\pi}\int_{|\vec{x}-\vec{y}|<|t|}\mathrm{d}^3y\,\frac{T^{mn}_{(0)}(t-|\vec{x}-\vec{y}|,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{8.115}$$

der Energie-Impulstensor $T^{mn}_{(0)}$ von allen Orten $\vec{y}$ bei, die man innerhalb der Laufzeit $t > 0$ mit Lichtgeschwindigkeit vom Ort $\vec{x}$ erreichen kann. Die Anfangswerte von h^{mn} tragen zur Lösung zur Zeit t am Ort x mit ihren Mittelwerten $M_{t,\vec{x}}$ auf Kugelflächen um $\vec{x}$ mit Radius t $(c = 1)$ bei,

$$\bar{h}^{mn}_{\text{Welle}}(t,\vec{x}) = t\,M_{t,\vec{x}}[\phi^{mn}] + \frac{\partial}{\partial t}\big(t\,M_{t,\vec{x}}[\psi^{mn}]\big) \tag{8.116}$$

$$\bar{h}^{mn}(0,\vec{x}) = \psi^{mn}(\vec{x})\ , \quad \frac{\partial}{\partial t}\bar{h}^{mn}(0,\vec{x}) = \phi^{mn}(\vec{x})\ . \tag{8.117}$$

In niedrigster Ordnung erzeugt zwar der Energie-Impulstensor der Materie Gravitation, aber die Gravitation wirkt in dieser Ordnung nicht auf die Materie zurück,

$$\partial_m T^{mn}_{(0)} = 0\ . \tag{8.118}$$

Dann genügt das retardierte Potential nicht nur anfänglich, sondern auch später der Lorenzbedingung $\partial_m\bar{h}^{mn} = 0$.

Beispielsweise gilt die lokale Erhaltung von Energie und Impuls bei einer ruhenden Wolke freier Teilchen mit Massendichte $\rho(\vec{x})$

$$T^{00}_{(0)} = \rho(\vec{x})\,c \tag{8.119}$$

oder bei einer axialsymmetrischen, um die z-Achse rotierenden Massenverteilung

$$T^{00}_{(0)} = \rho\,c\ , \quad T^{01}_{(0)} = T^{10}_{(0)} = -\rho\,\Omega y\ , \quad T^{02}_{(0)} = T^{20}_{(0)} = \rho\,\Omega x\ , \tag{8.120}$$

bei der die Massendichte ρ und die Winkelgeschwindigkeit Ω beliebige Funktionen von z und $x^2 + y^2$ sind.

Zeitunabhängiges Fernfeld

Bis auf Terme, die wie $1/r^3$ abfallen, ist wegen

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{r} + \frac{x^i y^i}{r^3} + O(\frac{1}{r^3}) \tag{8.121}$$

das retardierte Potential, das zu einem zeitunabhängigen Energie-Impulstensor gehört,

$$-\frac{4\pi}{2\kappa}\bar{h}^{mn} = \frac{1}{r}\int\mathrm{d}^3y\,T^{mn} + \frac{x^i}{r^3}\int\mathrm{d}^3y\,y^i\,T^{mn}\ . \tag{8.122}$$

Die hierbei auftretenden Integrale vereinfachen sich, denn aus $\partial_n T^{mn} = 0$ folgt

$$T^{mn} = \partial_l(x^m T^{nl}) = \frac{1}{2}\partial_k\partial_l(x^m x^n T^{kl})\ . \tag{8.123}$$

Selbst wenn die Impulsdichten nicht verschwinden, so verschwindet bei einem zeitunabhängigen Energie-Impulstensor der räumliche Gesamtimpuls

$$P^i = \int\mathrm{d}^3x\,T^{i0} = \int\mathrm{d}^3x\,\partial_m(x^i T^{0m}) = \int\mathrm{d}^3x\,x^i\partial_0 T^{00} = 0\ , \quad i = 1,2,3\ , \tag{8.124}$$

denn das Integral über die räumliche Divergenz verschwindet.

Aus gleichem Grund verschwinden für $i,j,k \in \{1,2,3\}$ die Momente

$$\int\mathrm{d}^3x\,(x^i T^{j0} + x^j T^{i0}) = \int\mathrm{d}^3x\,\partial_m(x^i x^j T^{m0}) = \int\mathrm{d}^3x\,x^i x^j\partial_0 T^{00} = 0\ , \tag{8.125}$$

$$\int\mathrm{d}^3x\,T^{ij} = \int\mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\partial_m\partial_n(x^i x^j T^{mn}) = \int\mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}x^i x^j\partial_0\partial_0 T^{00} = 0\ , \tag{8.126}$$

$$\int\mathrm{d}^3x\,x^k T^{ij} = \int\mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\partial_m(x^k\partial_n(x^i x^j T^{mn}) - x^i x^j T^{km}) = 0\ . \tag{8.127}$$

Durch Wahl des Ursprungs verschwinden die Koordinaten M^{0i} des Energieschwerpunktes

$$0 = M^{0i} = \int\mathrm{d}^3x\,(x^i T^{00} - x^0 T^{i0}) = \int\mathrm{d}^3x\,x^i\,T^{00}_{|_{x^0=0}}\ . \tag{8.128}$$

Damit ist das Fernfeld einer zeitunabhängigen Energie-Impulsverteilung in erster Ordnung in κ bis auf Terme der Ordnung $1/r^3$,

$$\begin{aligned}
\bar{h}^{00} &= -\frac{2\kappa}{4\pi}\frac{Mc}{r}\ , & Mc &= \int\mathrm{d}^3x\,T^{00}\ ,\\
\bar{h}^{0i} &= \frac{2\kappa}{4\pi}\frac{1}{2r^3}\varepsilon^{ijk}x^j L^k\ , & \varepsilon^{ijk}L^k &= \int\mathrm{d}^3x\,(x^i T^{0j} - x^j T^{0i})\ ,\\
\bar{h}^{ij} &= 0\ ,
\end{aligned} \tag{8.129}$$

vollständig durch die Masse M und den Drehimpuls $\vec{L}$ festgelegt.

Masse und Drehimpuls können diesem Fernfeld mit (8.84) und (8.87) abgelesen werden, $P^0 = Mc$, $P^i = 0 = M^{0i}$, $M^{ij} = \varepsilon^{ijk}L^k$. Diese Oberflächenintegrale behalten ihre Bedeutung in der asymptotisch flachen Raumzeit, selbst wenn die Quelle zeitabhängig oder die Gravitation in einem beschränkten Bereich stark wird.

Die zugehörigen nichtverschwindenden Komponenten von h_{mn} (8.109) sind

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = -\frac{\kappa}{4\pi}\frac{Mc}{r}\ , \quad h_{0i} = -\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ijk}\frac{x^j}{r^3}L^k\ . \tag{8.130}$$

Thirring-Lense-Effekt

Anders als in Newtonscher Gravitationstheorie verursacht auch ein Drehimpuls $\vec{L}$ ein Gravitationsfeld h_{0i} (8.130). Es bewirkt den Thirring-Lense-Effekt[2] [64], daß die räumlichen Bezugsrichtungen eines ruhenden Beobachters, deren Drehungsfreiheit er durch hin- und herlaufendes Licht überwacht (C.141), sich gegenüber den Richtungen zu den Fixsternen drehen.

Dieser Effekt tritt in einem kugelsymmetrischen Gravitationsfeld nicht auf: wie (6.89) für $\omega = 0$ zeigt, sind dort die Richtungen e_r, e_θ und e_φ drehungsfrei.

In niedrigster Ordnung in $1/r$ reicht es, den Effekt linear in $\vec{L}$ für verschwindende Masse zu berechnen, denn sie bewirkt nur Korrekturen höherer Ordnung.

Die Weltlinie eines ortsfesten Beobachters mit Tangentialvektor ${e_0}^m = {\delta_0}^m = \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}$ ist für $M = 0$ eine geodätische Weltlinie der Metrik (8.130), denn die Christoffelsymbole ${\Gamma_{00}}^m$ und übrigens auch ${\Gamma_{0m}}^0$ verschwinden, und mit der Notation $\frac{\delta}{\delta s} = {e_0}^m D_m$ gilt $\frac{\delta e_0}{\delta s} = 0$. Wie ein Magnet zieht ein Drehimpuls ein ruhendes Testteilchen weder an noch stößt er es ab.

Die räumlichen Bezugsrichtungen e_i, $i = 1, 2, 3$, zu den zeitlich unveränderlichen Fixsternen haben in niedrigster Ordnung die Komponenten ${e_i}^m = {\delta_i}^m$. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ dieser Basis relativ zur drehungsfreien Basis entnehmen wir (C.142) für $\hat{b}_i = 0$,

$$\frac{\delta e_i}{\delta s} = \frac{1}{c}\,\omega_{ij} e_j \ , \quad \Omega^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{kij}\omega_{ij} \ . \tag{8.131}$$

Wegen $\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}s} = 0$ und ${\Gamma_{rs}}^m {e_0}^r {e_i}^s = {\Gamma_{0i}}^j {e_j}^m$ ist

$$\omega_{ij} = c{\Gamma_{0i}}^j = -c\Gamma_{0i\,j} = -\frac{c}{2}(\partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i}) = \frac{G}{c^2}(\varepsilon^{jkl}\partial_i - \varepsilon^{ikl}\partial_j)\frac{x^k L^l}{r^3} \ , \tag{8.132}$$

und mit $\varepsilon^{kij}\varepsilon^{jfg} = \delta^{kf}\delta^{ig} - \delta^{kg}\delta^{if}$ ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega^k = \frac{G}{c^2}\frac{1}{r^5}\big(L^k r^2 - 3x^k(\vec{x}\vec{L})\big) \ , \tag{8.133}$$

mit der sich die Fixsterne um einen Beobachter drehen, der am Ort $\vec{x}$ ruht. Das Vektorfeld $\vec{\Omega} = \frac{G}{c^2}L^i\partial_i\frac{\vec{x}}{r^3}$ hat die Ortsabhängigkeit der Feldstärke eines Dipols mit Dipolmoment $\vec{L}$.

Bei einer starr mit der Winkelgeschwindigkeit $\hat{\Omega}$ rotierenden, homogenen Kugel mit Radius R ist $L = 2/5\, MR^2\hat{\Omega}$ und die Präzession hat den Betrag $\Omega = LG/(c^2R^3) = r_0/(5R)\,\hat{\Omega}$. Am Äquator der Erde, deren Schwarzschildradius $r_{0\,\mathrm{Erde}} = 0{,}888\cdot 10^{-2}$m und deren Radius $6{,}38\cdot 10^6$m beträgt [23], dauert eine Umdrehung der Fixsterne relativ zum drehungsfreien Bezugssystem $\hat{\Omega}/\Omega = 358\cdot 10^7$ mal länger als ein Sternentag, also etwa 10^7 Jahre.

Für einen auf der Erdoberfläche mitgeführten Beobachter kommt durch die Kreisbewegung Präzession, in einer Erdumlaufbahn geodätische Präzession (6.103), hinzu. Dieser de Sitter-Effekt und der in einer Erdumlaufbahn hundertmal kleinere Thirring-Lense-Effekt wurde 2011 nach Auswertung des Experiments Gravity-Probe-B mit einem

[2] Die Anfänge von Thirring und Tirol lauten gleich. Es handelt sich nicht um ein englisches „th“.

Satelliten bestätigt, der im April 2004 gestartet wurde [25]. Im gleichen Jahr wurde der Einfluß des Drehimpulses der Erde auf die Metrik (8.130) durch die sich daraus ergebenen Drehung der Bahnebene der Satelliten Lageos und Lageos 2 bestätigt [16].

8.9 Gravitationswellen

Die linearisierten Einsteingleichungen (8.111) lassen im Vakuum, $T^{mn} = 0$, Abweichungen vom flachen Raum zu, die aus ebenen Wellen zusammengesetzt sind. Diese Gravitationswellen sind Lösungen der Lorenzbedingung $\partial_m\bar{h}^{mn}$ und der homogenen Wellengleichung $\Box\bar{h}^{mn} = 0$ und sind daher wie das elektromagnetische Viererpotential (5.165) Wellenpakete und von der Form

$$\bar{h}^{mn}(x) = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\sum_{\tau=1}^{10}\big(\epsilon^{*\,mn}_\tau a_\tau{}^\dagger(\vec{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + \epsilon^{mn}_\tau a_\tau(\vec{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\big)_{|_{k^0=\sqrt{\vec{k}^2}}} \ . \tag{8.134}$$

Hierbei haben wir die zehn Amplituden $a^{\dagger\,mn}(\vec{k}) = a^{\dagger\,nm}(\vec{k})$ als Linearkombination von zehn Basiselementen, den Polarisationstensoren $\epsilon^{*\,mn}_\tau(k)$ geschrieben, mit denen sich leichter die Lorenzbedingung (8.110), die Auswirkung der verbleibenden Koordinatentransformationen sowie das Verhalten der physikalischen Amplituden unter Drehungen klären lassen.

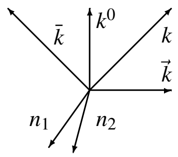

Abbildung 8.2: Polarisationsvektoren

Um die Polarisationstensoren angeben zu können, ergänzen wir wie in Abbildung 8.2 den lichtartigen Vierervektor $k = (k^0, \vec{k}) = (|\vec{k}|, \vec{k})$, $k \neq 0$, durch einen weiteren lichtartigen Vektor $\bar{k} = (|\vec{k}|, -\vec{k})$ und zwei dazu senkrechte, komplexe Vektoren n_i, $i = 1, 2$ mit raumartigem Real- und Imaginärteil zu einer vierdimensionalen Basis, zum Beispiel $n_1(k) \propto (0, \vec{w}\times\vec{k})$, $n_2(k) \propto (0, \vec{n}_1^*\times\vec{k})$, wobei der Real- und Imaginärteil von $\vec{w}$ linear unabhängig sind. Diese Polarisationsvektoren haben Skalarprodukte

$$\begin{gathered} k^2 = 0 = \bar{k}^2 \ , \quad k\cdot\bar{k} = 2\vec{k}^2 \ , \quad k\cdot n_i = 0 = \bar{k}\cdot n_i \ , \\ n_i^*\cdot n_j = -\delta_{ij} \ , \quad i,j\in\{1,2\} \ . \end{gathered} \tag{8.135}$$

Als Polarisationstensoren $\epsilon^{*\,mn}_\tau(k)$, $\tau = 1,\dots,10$, verwenden wir

$$\begin{aligned}
\epsilon^{*\,mn}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(n_1^m n_1^n - n_2^m n_2^n\big) & \epsilon^{*\,mn}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(n_1^m n_2^n + n_2^m n_1^n\big) \\
\epsilon^{*\,mn}_3 &= \frac{1}{2\vec{k}^2}k^m k^n & \epsilon^{*\,mn}_4 &= \frac{1}{2\vec{k}^2}\bar{k}^m\bar{k}^n \\
\epsilon^{*\,mn}_5 &= \frac{1}{2\sqrt{2}\vec{k}^2}\big(k^m\bar{k}^n + \bar{k}^m k^n\big) & \epsilon^{*\,mn}_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(n_1^m n_1^n + n_2^m n_2^n\big) \\
\epsilon^{*\,mn}_{7,8} &= \frac{1}{2|\vec{k}|}\big(k^m n_i^n + k^n n_i^m\big)\ i = 1,2 & \epsilon^{*\,mn}_{9,10} &= \frac{1}{2|\vec{k}|}\big(\bar{k}^m n_i^n + \bar{k}^n n_i^m\big)\ i = 1,2 \ .
\end{aligned} \tag{8.136}$$

Damit ergibt sich

$$\partial_m \bar h^{mn} = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{i}\right)\left(a_4^\dagger \bar k^n + \frac{1}{\sqrt{2}} a_5^\dagger k^n + |\vec k| a_9^\dagger n_1^n + |\vec k| a_{10}^\dagger n_2^n\right) + \dots\ , \tag{8.137}$$

wobei die Punkte für die komplex konjugierten Terme stehen. Die Lorenzbedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Amplituden von $\partial_m \bar h^{mn}$ verschwinden, wenn also

$$0 = a_4^\dagger = a_5^\dagger = a_9^\dagger = a_{10}^\dagger \tag{8.138}$$

gilt. Nur 6 der 10 Amplituden erfüllen auch die Lorenzbedingung.

Gilt die Lorenzeichung in einem Koordinatensystem, dann gilt sie auch in Koordinaten $x'(x)$, wenn die neuen Koordinatenfunktionen die Wellengleichung

$$\sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl} \partial_k \partial_l x'^n = 0 \tag{8.139}$$

erfüllen (F.6). Dabei ändert sich die metrische Dichte $\sqrt{\mathfrak{g}} g^{mn} = \eta^{mn} - \bar h^{mn}$ gemäß

$$\sqrt{\mathfrak{g}'} g'^{mn}(x') = \sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl} \partial_k x'^m \partial_l x'^n \det\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\ . \tag{8.140}$$

Ändern sich die Koordinaten nur wenig um ξ^m, $x'^m = x^m - \xi^m$, und entwickeln wir nach ξ^m und $\bar h^{mn}$, so bewirkt solch eine kleine Koordinatentransformation in erster Ordnung die Änderung

$$\delta \bar h^{mn} = \partial^m \xi^n + \partial^n \xi^m - \partial_l \xi^l \eta^{mn} \tag{8.141}$$

der Abweichung der Metrik vom flachen Raum.

Dabei müssen in dieser Näherung die Felder ξ^m die Wellengleichung $\Box \xi^m = 0$ erfüllen. Sie sind daher Wellenpakete, die sich mit den Polarisationsvektoren als

$$\xi^m(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\left(n_1^m c_1^\dagger + n_2^m c_2^\dagger + k^m c_3^\dagger + \bar k^m c_4^\dagger\right) + \dots \tag{8.142}$$

schreiben lassen. Bei der zugehörigen Koordinatentransformation ändert sich $\bar h^{mn}$ um

$$\partial^m \xi^n + \partial^n \xi^m - \partial_l \xi^l \eta^{mn} = \tag{8.143}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\, \mathrm{i}\left((k^m n_i^n + k^n n_i^m) c_i^\dagger + 2k^m k^n c_3^\dagger + (k^m \bar k^n + k^n \bar k^m) c_4^\dagger - 2\vec k^2 c_4^\dagger \eta^{mn}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + \dots\ .$$

Für die Koeffizienten bei $c_4^\dagger$ gilt

$$k^m \bar k^n + k^n \bar k^m - 2\vec k^2 \eta^{mn} = 2\sqrt{2}\vec k^2 \epsilon_6^{*\,mn}\ . \tag{8.144}$$

denn auf die Basis k_n, $\bar k_n$, $n_{1\,n}$ und $n_{2\,n}$ angewendet stimmen beide Seiten überein.

Demnach lassen sich mit infinitesimalen Koordinatentransformationen (8.141) die vier Amplituden $a_7^\dagger, a_8^\dagger, a_3^\dagger$ und $a_6^\dagger$ durch die vier Amplituden $c^\dagger$ additiv verändern und wegeichen

$$0 = a_3^\dagger = a_6^\dagger = a_7^\dagger = a_8^\dagger\ . \tag{8.145}$$

Eine Gravitationswelle enthält folglich pro Wellenvektor $10 - 4 - 4 = 2$ unabhängige, physikalische Amplituden, nämlich $a_1^\dagger$ und $a_2^\dagger$. In der durch (8.145) ergänzten Lorenzeichung ist die Gravitationswelle doppelt transversal, das heißt, ihre Amplituden erfüllen $k_m a^{\dagger\,mn} = 0$ und $\bar k_m a^{\dagger\,mn} = 0$, und sie ist spurfrei $\eta_{mn} a^{\dagger\,mn} = 0$.

Weil sie spurfrei ist, stimmt bei einer Gravitationswelle h_{mn} (8.109) mit $\eta_{mk}\eta_{nl}\bar h^{kl}$ überein.

Ebene Welle

Besteht die Gravitationswelle in einem $\vec x$-Bereich nur aus Anteilen mit Wellenvektoren gleicher Richtung, weil sie von einer von $\vec x$ weit entfernten Quelle abgestrahlt wurde, und wählen wir die Richtung zur Quelle als negative z-Achse, so hat die physikalische Amplitude $a_1^\dagger(\vec k)$ näherungsweise die Form

$$a_1^\dagger(\vec k) = 2\sqrt{2}(2\pi)^2 \delta(k_x)\delta(k_y)|k_z|\Theta(k_z)\, a^\dagger(k_z) \tag{8.146}$$

und die zugehörige Gravitationswelle ist in diesem Bereich

$$\begin{aligned} h_{11} = -h_{22} &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(z-t)} a^\dagger(k) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-t)} a(k)\right) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t-z)} \tilde h(k) = h(x^-)\ , \\ \tilde h(k) &= \begin{cases} a^\dagger(k) & \text{falls } k > 0 \\ a(-k) & \text{falls } k < 0 \end{cases}\ , \\ x^- &= t - z\ . \end{aligned} \tag{8.147}$$

Entsprechend gehört die zweite physikalische Amplitude $a_2^\dagger$ einer Gravitationswelle in z-Richtung zu

$$h_{12} = h_{21} = k(x^-) \tag{8.148}$$

Eine ebene Gravitationswelle, die sich in z-Richtung ausbreitet, gehört also zur Metrik

$$g_{mn}\mathrm{d}x^m \mathrm{d}x^n = (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2 + h(x^-)\left((\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2\right) + 2k(x^-)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{8.149}$$

Die Gravitationswelle besteht aus Anteilen der Helizität $+2$ und -2. Das heißt, unter Drehungen, die den Wellenvektor $\vec k$ invariant lassen, in unserem Fall unter Drehungen um die z-Achse,

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\ ,\quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\ , \tag{8.150}$$

transformieren h und k mit dem doppelten Drehwinkel. Denn es gilt

$$\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 \\ 2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\mathrm{d}x')^2 - (\mathrm{d}y')^2 \\ 2\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \end{pmatrix} \tag{8.151}$$

und daher

$$\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\ . \tag{8.152}$$

Insbesondere sind die komplexen Linearkombinationen $h \pm \mathrm{i}k$ Eigenvektoren

$$h' \pm \mathrm{i}k' = \mathrm{e}^{\mp 2\mathrm{i}\alpha}(h \pm \mathrm{i}k)\ . \tag{8.153}$$

Der hier bei $\mathrm{i}\alpha$ auftretende Koeffizient ∓ 2 ist die Helizität.

8.10 Nachweis von Gravitationswellen

Eine Gravitationswelle verändert richtungsabhängig die Laufzeit von Licht zwischen ruhenden, unbeschleunigten Teilchen. Um dies zu messen, hängt man in Detektoren wie GEO600 [27] oder LIGO [40] Strahlteiler und Spiegel eines Interferometers im Schwerefeld der Erde so auf, daß sie von störenden Erschütterungen genügend entkoppelt sind und in Richtung des Lichtstrahls frei beweglich sind, oder man läßt sie bei LISA [41] auf Satelliten, abgeschirmt vom Sonnenwind, hinter der Erde die Sonne im freien Fall umkreisen, wobei ihr gegenseitiger Abstand nahezu unverändert bleibt. Den darüber hinausgehenden gravitativen Einfluß von Erde und Sonne auf den Detektor kann man vernachlässigen: sie bewirken analog zur Lichtablenkung eine vernachlässigbar geringe Ablenkung der Gravitationswelle.

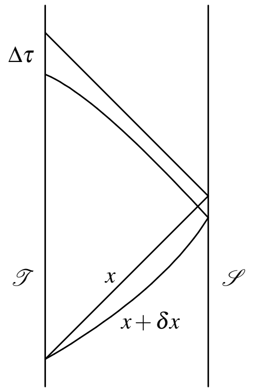

Abbildung 8.3: Auswirkung einer Gravitationswelle

In der folgenden Berechnung vereinfachen wir daher die Weltlinien von Strahlteiler, Spiegel und Licht zu geodätischen Weltlinien der Metrik (8.149) und bestimmen die Auswirkung der Gravitationswelle in erster Ordnung in h und k. Die Laufzeitänderung des Lichts, $\Delta\tau$, weist man durch Interferenz mit einem zweiten Lichtstrahl nach, der im zweiten Arm des Interferometers die Gravitationswelle in einer anderen Richtung durchläuft.

So wie ein Magnetfeld nicht auf ruhende Ladungen wirkt, so beeinflußt die Gravitationswelle nicht die Weltlinien $y(s)$ des ruhenden Spiegels $\mathcal{S}$ und des ruhenden Strahlteilers $\mathcal{T}$ des Interferometers

$$(y^-, y^1, y^2, y^+) = (s - a^3, a^1, a^2, s + a^3)\ . \tag{8.154}$$

Hierbei sind $y^- = t - z$ und $y^+ = t + z$ Lichtkegelkoordinaten und (a^1, a^2, a^3) sind die jeweiligen konstanten Ortskoordinaten. Unabhängig von den Amplituden h und k der Gravitationswelle sind (8.154) geodätisch, denn die Gravitationswelle ist in mitfallenden Koordinaten (F.11) gegeben.

Explizit überprüft man die Geodätengleichung im Koordinatensystem (x^-, x^1, x^2, x^+) mit der Metrik

$$(g_{mn}) = \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{2} \\ & -1+h & k & \\ & k & -1-h & \\ \frac{1}{2} & & & \end{pmatrix}\ ,\quad (g^{mn}) = \begin{pmatrix} & & & 2 \\ & -1-h & -k & \\ & -k & -1+h & \\ 2 & & & \end{pmatrix}\ , \tag{8.155}$$

wobei wir nur in erster Ordnung in h und k rechnen, und mit den Christoffelsymbolen

$$\begin{aligned} -\Gamma_{-1}{}^1 = \Gamma_{-2}{}^2 = -\frac{1}{2}\Gamma_{11}{}^+ = \frac{1}{2}\Gamma_{22}{}^+ = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x^-}\ ,\\ \Gamma_{-1}{}^2 = \Gamma_{-2}{}^1 = \frac{1}{2}\Gamma_{12}{}^+ = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x^-}\ . \end{aligned} \tag{8.156}$$

Ebenso bestätigt man in erster Ordnung in h und k, daß die Vektoren e_-, e_1, e_2 und e_+ mit Komponenten

$$\begin{aligned} e_a{}^m = \delta_a{}^m + \delta e_a{}^m\ ,\quad \delta e_-{}^m = 0\ ,\quad \delta e_+{}^m = 0\ ,\\ \delta e_1{}^m = \frac{1}{2}(0, h, k, 0)\ ,\quad \delta e_2{}^m = \frac{1}{2}(0, k, -h, 0) \end{aligned} \tag{8.157}$$

längs der ruhenden Weltlinien $y(s)$ parallel und drehungsfrei (C.141) verschoben werden

$$\frac{\mathrm{d}e_a{}^m}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}y^l}{\mathrm{d}s}\Gamma_{ln}{}^m e_a{}^n = 0\ . \tag{8.158}$$

Den Lichtstrahl $x + \delta x$ vom Strahlteiler zu Spiegel zerlegen wir in die Weltlinie $x(\lambda)$, die er ohne Gravitationswelle durchlaufen würde

$$x^m(\lambda) = x^m(0) + \lambda(1 - \cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, 1 + \cos\theta)\ , \tag{8.159}$$

und die von der Welle hervorgerufene Abweichung $\delta x(\lambda)$, die wir in erster Ordnung berechnen. Hierbei ist θ der Winkel zwischen der Richtung $\vec{n}$ des Lichtstrahls und der Ausbreitungsrichtung der Gravitationswelle.

Die Geodätengleichung besagt für die Abweichung δx

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta x^m}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\Gamma_{kl}{}^m\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\lambda}\ . \tag{8.160}$$

und δx kann durch zweifache Integration über λ berechnet werden. Wir setzen (8.156) und $\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda}$ ein und verwenden $\frac{dh}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^-}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x^-} = (1-\cos\theta)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x^-}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\delta x^-}{\mathrm{d}\lambda^2} = 0\ ,\quad \frac{\mathrm{d}^2\delta x^+}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\big(h(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2k\cos\varphi\sin\varphi\big)\ ,\\ \frac{\mathrm{d}^2\delta x^1}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\sin\theta(h\cos\phi + k\sin\phi)\ ,\quad \frac{\mathrm{d}^2\delta x^2}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\sin\theta(-h\sin\phi + k\cos\phi)\ . \end{aligned} \tag{8.161}$$

Berücksichtigt man $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1 + \cos\theta$ und die Winkeladditionstheoreme der trigonometrischen Funktionen, so erhält man nach Integration

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\delta x^-}{\mathrm{d}\lambda} = c^-\ ,\quad \frac{\mathrm{d}\delta x^+}{\mathrm{d}\lambda} = c^+ + (1+\cos\theta)(h\cos(2\varphi) + k\sin(2\varphi))\ ,\\ \frac{\mathrm{d}\delta x^1}{\mathrm{d}\lambda} = c^1 + \sin\theta(h\cos\varphi + k\sin\varphi)\ ,\quad \frac{\mathrm{d}\delta x^2}{\mathrm{d}\lambda} = c^2 + \sin\theta(-h\sin\varphi + k\cos\varphi)\ . \end{aligned} \tag{8.162}$$

Die Integrationskonstanten sind dadurch festgelegt, daß der Lichtstrahl unabhängig von der Gravitationswelle im selben Ereignis startet, $\delta x^m(0) = 0$, und daß die Gravitationswelle auch nicht die anfängliche Richtung des Lichtstrahls, bezogen auf die drehungsfrei transportierten Vektoren e_a (8.157), ändert

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\delta x^m}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=0} &= \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\lambda}\delta e_a{}^m = \sin\theta(\delta e_1{}^m\cos\varphi + \delta e_2{}^m\sin\varphi)\\ &= \frac{1}{2}\sin\theta(0, h\cos\varphi + k\sin\varphi, -h\sin\varphi + k\cos\varphi, 0)\ . \end{aligned} \tag{8.163}$$

Dies ergibt die Integrationskonstanten

$$\begin{aligned} c^- &= 0\ , & c^+ &= (1+\cos\theta)(\underline{h}\cos(2\varphi) + \underline{k}\sin(2\varphi))\ ,\\ c^1 &= -\frac{1}{2}\sin\theta(\underline{h}\cos\varphi + \underline{k}\sin\varphi)\ , & c^2 &= -\frac{1}{2}\sin\theta(-\underline{h}\sin\varphi + \underline{k}\cos\varphi)\ , \end{aligned} \tag{8.164}$$

wobei $\underline{h} = h(x(0))$ und $\underline{k} = k(x(0))$ die Werte von h und k beim Start des Lichtstrahls bezeichnen. Wir setzen in (8.162) ein und integrieren ein zweites Mal über λ. Auf der rechten Seite ersetzen wir mit $(1-\cos\theta)\mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{d}x^-}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}x^-$ die Integrationsvariable

$$\begin{aligned} \delta x^- &= 0\ , \quad \delta x^+ = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\int_{\underline{x}^-}^{x^-}\mathrm{d}x((h-\underline{h})\cos(2\varphi) + (k-\underline{k})\sin(2\varphi))\ ,\\ \delta x^1 &= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\int_{\underline{x}^-}^{x^-}\mathrm{d}x(\ \ (h-\frac{1}{2}\underline{h})\cos\varphi + (k-\frac{1}{2}\underline{k})\sin\varphi)\ ,\\ \delta x^2 &= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\int_{\underline{x}^-}^{x^-}\mathrm{d}x(-(h-\frac{1}{2}\underline{h})\sin\varphi + (k-\frac{1}{2}\underline{k})\cos\varphi)\ . \end{aligned} \tag{8.165}$$

Die Änderung des Lichtstrahls hat zur Folge, daß er erst beim Parameterwert $\lambda = l + \delta\lambda$ die Spiegelebene $\{\vec{y} : (\vec{y} - \underline{\vec{x}})\cdot\vec{n} = l\}$ erreicht. Wir setzen $\vec{y} = \vec{x} + \delta\vec{x} = \underline{\vec{x}} + (l+\delta\lambda)\vec{n} + \delta\vec{x}(l)$ ein und lösen nach $\delta\lambda$ auf

$$-\delta\lambda = \frac{\delta x^+ - \delta x^-}{2}\cos\theta + \sin\theta(\delta x^1\cos\varphi + \delta x^2\sin\varphi)\ . \tag{8.166}$$

Damit erhalten wir schließlich die Laufzeitveränderung $\Delta_1 x^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}\delta\lambda + \delta x^0 = \delta\lambda + \delta x^0$ während des Hinweges, wobei $x^0 = \frac{1}{2}(x^+ - x^-)$ und $x^-(l) = \overline{x}^- = l(1-\cos\theta) + \underline{x}^-$ ist,

$$\Delta_1 x^0 = -\frac{1+\cos\theta}{2}\int_{\underline{x}^-}^{\underline{x}^- + l(1-\cos\theta)}\mathrm{d}x\,(h(x)\cos(2\varphi) + k(x)\sin(2\varphi))\ . \tag{8.167}$$

Der Rückweg verläuft in umgekehrter Richtung $\theta' = \pi - \theta$, $\varphi' = \varphi + \pi$. Auf ihm ändert sich die Laufzeit folglich um

$$\Delta_2 x^0 = -\frac{1-\cos\theta}{2}\int_{\underline{x}^- + l(1-\cos\theta)}^{\underline{x}^- + 2l}\mathrm{d}x\,(h(x)\cos(2\varphi) + k(x)\sin(2\varphi))\ . \tag{8.168}$$

Ist das Interferometer kurz im Vergleich zur Wellenlänge der Gravitationswelle, dann kann man die beiden Integrale mit dem Zwischenwertsatz nähern: das Integral für $\Delta_1 x^0$ ist Intervallänge $l(1-\cos\theta)$ mal einem Zwischenwert des Integranden und es gilt etwa

$$\int_{\underline{x}}^{\underline{x}+l(1-\cos\theta)}\mathrm{d}x\,(h(x)\dots) \approx (1-\cos\theta)\int_{\underline{x}}^{\underline{x}+l}\mathrm{d}x\,(h(x)\dots)\ . \tag{8.169}$$

Entsprechendes gilt für $\Delta_2 x^0$. Zusammengenommen ist $\Delta\tau = \Delta_1 x^0 + \Delta_2 x^0$ etwa

$$\Delta\tau \approx -H(t,l)\,a_+(\theta,\varphi) - K(t,l)\,a_\times(\theta,\varphi) \tag{8.170}$$

wobei die Funktionen

$$H(t,l) = \frac{1}{2}\int_{t-2l}^{t}\mathrm{d}x\,h(x)\ , \quad K(t,l) = \frac{1}{2}\int_{t-2l}^{t}\mathrm{d}x\,k(x) \tag{8.171}$$

die Amplituden der Gravitationswelle über die Laufzeit im Interferometer integrieren und die Winkelabhängigkeit durch Produkte der Komponenten des Richtungsvektors $\vec{n}$ gegeben ist

$$a_+(\theta,\varphi) = n_x n_x - n_y n_y = \sin^2\theta\cos(2\varphi)\ , \quad a_\times(\theta,\varphi) = 2n_x n_y = \sin^2\theta\sin(2\varphi)\ . \tag{8.172}$$

Dies Ergebnis für $\Delta\tau$ behält seine Form, wenn der Lichtstrahl mehrfach im Interferometer gespiegelt wird, bevor man das Interferenzbild ausliest.

Gegenüber Licht in einem gleichlangen, zweiten Interferometerarm in Richtung (θ',φ') ist die Laufzeit um $\delta\tau$ verschoben,

$$\delta\tau \approx -H(t,l)\big(a_+(\theta,\varphi) - a_+(\theta',\varphi')\big) - K(t,l)\big(a_\times(\theta,\varphi) - a_\times(\theta',\varphi')\big)\ . \tag{8.173}$$

Daher beobachtet man eine zeitliche Änderung der Interferenz beider Strahlen

$$\frac{\mathrm{d}\delta\tau}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{h(t) - h(t-2l)}{2}\big(a_+(\theta,\varphi) - a_+(\theta',\varphi')\big) - \frac{k(t) - k(t-2l)}{2}\big(a_\times(\theta,\varphi) - a_\times(\theta',\varphi')\big)\ . \tag{8.174}$$

Dieses Detektorsignal ist proportional zur Amplitude der Gravitationswelle. Es wird nicht ein Energieübertrag von der Gravitationswelle auf den Detektor gemessen, er wäre quadratisch in h und k, sondern die Änderung der Phasenverschiebung der Lichtstrahlen. Daher nimmt die Empfindlichkeit des Detektors als Funktion des Abstands r zur Quelle der Gravitationswelle wie $1/r$ und nicht wie $1/r^2$ ab.

Es gibt eine für den Gravitationswellennachweis optimale Verweildauer des Lichts im Detektor, nämlich die halbe Schwingungsdauer der Gravitationswelle. Bei längerer Verweildauer vermindert sich das Signal wieder.

Das gleiche Verschwinden des Signals bei langer Wechselwirkungsdauer ergibt eine feldtheoretische Rechnung. Die Wechselwirkung von Licht und Gravitationswelle ist in niedrigster Ordnung durch die Entwicklung von W_{Maxwell} (7.62) gegeben

$$W_{\text{Photon, Graviton}} = \frac{1}{8\pi c}\int \mathrm{d}^4x\,\bar{h}^{mn}(F_{mk}F_n{}^k - \frac{1}{4}\eta_{mn}F_{rs}F^{rs})\ . \tag{8.175}$$

Sie erlaubt die Absorption eines Gravitons durch ein Photon, das dadurch in ein Photon mit geändertem Impuls und Energie übergeht. Wäre die Wechselwirkungszone von Licht und Gravitationswelle groß und die Wechselwirkungsdauer lang, so gäbe es Impulserhaltung und Energieerhaltung. Aber dann wäre solch eine Absorption unmöglich, denn Photonen und Gravitonen sind masselos und die Summe der Viererimpulse masseloser Teilchen hat eine positive Masse (3.57), gehört also nicht wieder zu einem Photon. Dauert die Wechselwirkung nur eine halbe Schwingungsdauer der Gravitationswelle, so ist die Energieunschärfe von der Größenordnung der Energie $\hbar\omega$ des Gravitons und die Absorption eines Gravitons ist möglich.

Auch wenn diese Begriffe zur Quantenmechanik gehören und auch wenn wir heutzutage Quantenphysik und Allgemeine Relativitätstheorie nicht gemeinsam verstehen, so ist die Betrachtung dennoch gerechtfertigt: sie macht nur davon Gebrauch, daß Elektrodynamik und Allgemeine Relativitätstheorie Feldtheorien sind und hängt nicht daran, ob das Feld Quanten erzeugt und vernichtet.

Anhang

A Strukturen auf Mannigfaltigkeiten

Die Raumzeit hat die mathematische Struktur einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Sie besteht aus Punkten p, die wir Ereignisse nennen und durch Koordinaten

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^d) \tag{A.1}$$

bezeichnen. Wir nennen die Raumzeit kürzer Raum, wenn keine Mißdeutung zu befürchten ist. Hier sollen kurz die für Mannigfaltigkeiten wichtigsten Begriffe zusammengestellt werden und dabei die Physikern geläufigen Schlampigkeiten in Kauf genommen werden. Eine genaue Darstellung findet sich zum Beispiel knapp zusammengefaßt bei [56] und in vielen mathematischen Lehrbüchern [33, 42, 31].

Die Anzahl d der Koordinaten, die zur Bezeichnung eines Punktes benötigt werden, ist die Dimension der Mannigfaltigkeit. Ohne es weiter zu erwähnen, verschieben wir oft, insbesondere wenn die erste Koordinate eine Zeit bezeichnet, die Bezeichnungen zu $x = (x^0, x^1, \ldots, x^{d-1})$. Die physikalische Raumzeit ist vierdimensional, $d = 4$, allerdings ist dies ein Befund, der sich bei höherer experimenteller Auflösung ändern könnte. Was uns als Punkt erscheint, ist möglicherweise in weitere Dimensionen ausgedehnt und nur klein.

Nach Voraussetzung wird die Mannigfaltigkeit von Umgebungen $U_\alpha \subset \mathcal{M}$ überdeckt, die jeweils durch eine Abbildung ϕ_α, das Koordinatensystem ϕ_α, bijektiv und beiderseits stetig in Umgebungen $\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^d$ abgebildet werden.

$$\phi_\alpha : \begin{cases} U_\alpha \subset \mathcal{M} & \rightarrow \quad \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^d \\ \qquad p & \mapsto \quad x(p) \end{cases} \tag{A.2}$$

Dabei ist α aus einer Indexmenge, die Umgebungen und Koordinatensysteme bezeichnet. Weil jede Koordinatenabbildung lokal bijektiv ist, gestatten sich Physiker häufig, bei fest gewähltem Koordinatensystem die Koordinaten $x(p) = \phi_\alpha(p)$ zur Benennung der Punkte p zu verwenden, also vom Punkt x zu reden, statt genauer vom Punkt p mit ϕ_α-Koordinaten x.

In einem anderen Koordinatensystem ϕ_β bezeichnen wir dieselben Punkte mit Koordinaten x'. Diese Koordinaten können in ihrem gemeinsamen Gültigkeitsbereich ineinander umgerechnet werden, das heißt, in $\phi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha)$ sind die neuen Koordinaten x' invertierbare Funktionen der alten, $x'(x) = N_{\beta\alpha}(x)$,

$$N_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \ . \tag{A.3}$$

In differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist vorausgesetzt, daß die Koordinatentransformationen $N_{\beta\alpha}$ zwischen den betrachteten Koordinatensystemen genügend oft differenzierbar sind.

Mit den Koordinaten ϕ_α können wir jede reelle Funktion der Mannigfaltigkeit

$$f : \begin{cases} \mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & f(p) \end{cases} \tag{A.4}$$

in der Umgebung $\phi_\alpha U_\alpha$ als die Funktion f_α der Koordinaten x angeben,

$$f_\alpha = f \circ \phi_\alpha^{-1} \ . \tag{A.5}$$

Im Koordinatensystem $x'(x) = N_{\beta\alpha}(x)$ gilt in $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ für die entsprechend definierte Funktion f_β

$$f_\beta = f_\alpha \circ N_{\alpha\beta} \ . \tag{A.6}$$

Traditionell schreibt man f' und x' für f_β und $\phi_\beta(p)$ und läßt bei f_α und $x = \phi_\alpha(p)$ den Hinweis α auf das Koordinatensystem ϕ_α weg. Dann besagt die letzte Gleichung für zwei Koordinatendarstellungen einer Funktion der Mannigfaltigkeit

$$f'(x'(x)) = f(x) \text{ oder } f'(x') = f(x(x')) \ . \tag{A.7}$$

Eine Funktion, deren Darstellungen in verschiedenen Koordinatensystemen so miteinander zusammenhängen, heißt Skalarfeld.

Kurven und Tangenten

Eine Weltlinie Γ ist ein Weg oder eine Kurve in der Raumzeit, das heißt, eine Abbildung eines reellen Intervalls I in die Mannigfaltigkeit

$$\Gamma : \begin{cases} I \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{M} \\ s & \mapsto & p(s) \end{cases} \ . \tag{A.8}$$

In Koordinaten ϕ_α ist sie durch d reelle Funktionen

$$\Gamma_\alpha = \phi_\alpha \circ \Gamma : s \mapsto (x^0(s), x^1(s), \dots, x^{d-1}(s)) \tag{A.9}$$

einer reellen Variablen s gegeben. Die Koordinatenfunktionen $s \mapsto x'(s) = x'(x(s))$ derselben Kurve Γ ergeben sich einfach durch Verkettung mit der Koordinatentransformation,

$$\Gamma_\beta = N_{\beta\alpha} \circ \Gamma_\alpha \ . \tag{A.10}$$

Wenn wir es nicht ausdrücklich anders sagen, beschränken wir uns auf zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, in denen jeder Punkt durch einen Weg mit jedem anderen Punkt verbunden werden kann.

Durchläuft Γ den Punkt $p = \Gamma(\hat{s})$ und sei f aus dem Raum $\mathcal{F}_p$ der Funktionen, die in einer Umgebung von p definiert sind, dann definiert f in einer Umgebung von $\hat{s}$ die Funktion $f \circ \Gamma$. Ihre Ableitung bei $\hat{s}$ ist eine Abbildung von $\mathcal{F}_p$ in die reellen Zahlen,

$$u : \begin{cases} \mathcal{F}_p & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & u(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}_{|\hat{s}} f \circ \Gamma \ , \ p = \Gamma(\hat{s}) \end{cases} \ . \tag{A.11}$$

Die Abbildung u ist linear und genügt der Produktregel. Sie ist der Tangentialvektor u an die Kurve Γ im Punkt p,

$$\begin{gathered} u(f_1 + f_2) = u(f_1) + u(f_2) \ , \quad u(c\, f) = c\, u(f) \quad \forall c \in \mathbb{R} \ , \\ u(f_1 \cdot f_2) = u(f_1) f_2 + f_1 u(f_2) \ . \end{gathered} \tag{A.12}$$

Bezeichnen wir, wie üblich,[1] mit x die ϕ_α-Koordinaten und mit f die Koordinatendarstellung f_α, so besagt die Kettenregel für $f \circ \Gamma = f_\alpha \circ \Gamma_\alpha$,

$$u(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x(s))_{|\hat{s}} = \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}_{|\hat{s}} \partial_{m|_{x(\hat{s})}} f(x) \ . \tag{A.13}$$

Tangentialvektoren an Kurven durch p bilden einen Vektorraum $\mathcal{T}_p$, den Tangentialraum am Punkt p, denn Summe und Vielfache von linearen Abbildungen u sind wiederum Tangentialvektoren an Kurven durch p. Insbesondere sind die partiellen Ableitungen $\partial_{m_{|x}}$ die Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien eines Koordinatensystems ϕ_α und bilden eine Basis des Tangentialraumes am Punkt p mit Koordinaten x, in der jeder Tangentialvektor entwickelt werden kann, $u = u^m \partial_m$. In dieser Basis hat der Tangentialvektor an die Kurve mit Koordinatendarstellung $\Gamma_\alpha : s \mapsto x(s)$ die Komponenten

$$u^m = \frac{\mathrm{d}x^m(s)}{\mathrm{d}s} \ . \tag{A.14}$$

In einem anderen Koordinatensystem $x'(x)$ hat nach Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} x'^m(x(s)) = \frac{\partial x'^m}{\partial x^n} \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s} \tag{A.15}$$

derselbe Vektor die Komponenten

$$u'^m(x'(x)) = \frac{\partial x'^m}{\partial x^n} u^n(x) \ . \tag{A.16}$$

Insbesondere besagt die Kettenregel für die Basis in x'-Koordinaten

$$\frac{\partial}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x^m} \ , \tag{A.17}$$

und der Tangentialvektor u hängt nicht von der Basis ab

$$u'^m \partial'_m \Big|_{x'(x)} = u^m \partial_m \Big|_x \ . \tag{A.18}$$

Man kann den Tangentialvektor u am Punkt p auch als Äquivalenzklasse von Kurven durch p auffassen, die bei p dieselbe lineare Abbildung von Funktionen $f \in \mathcal{F}_p$ bewirken.

Gibt man an jedem Punkt einen Vektor an, so heißt diese Zuordnung $p \mapsto u_{|p}$ das Vektorfeld u. Im Koordinatensystem x ist es durch Komponentenfunktionen $x \mapsto u^m(x)$ gegeben. Bei gegebenen Komponentenfunktionen ist (A.14) ein Differentialgleichungssystem für eine Schar von Kurven $x(s)$, die Integralkurven des Vektorfeldes u.

[1] Wir verwenden die Einsteinsche Summationskonvention und verabreden, um Summenzeichen nicht schreiben zu müssen, daß jeder in einem Term doppelt auftretende Index die Anweisung enthält, über seinen Laufbereich, hier von 1 bis d, zu summieren. Der Name des Summationsindexpaares kann frei gewählt werden, er muß nur von allen anderen im Term auftretenden Indizes verschieden sein.

Vektorfeld, Faserbündel, Schnitt

Aber was ist eine Zuordnung? Man vermeidet bei Funktionen $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ diesen unklaren Begriff, indem man f als eine Teilmenge des kartesischen Produktes definiert, die für jedes $p \in \mathcal{M}$ genau ein Paar $(p, f(p))$ enthält,[2]

$$f = \{(p, f(p)) : p \in \mathcal{M}\ , f(p) \in \mathcal{N}\} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{N}\ . \tag{A.19}$$

Die mathematisch haltbare Definition eines Vektorfeldes u muß den Begriff einer Funktion verallgemeinern, denn für verschiedene Punkte p sind die Vektoren $u_{|p}$ in *verschiedenen* Vektorräumen $\mathcal{T}_p$: es lassen sich Tangentialvektoren an verschiedenen Punkten nicht addieren.

Wir definieren daher ein Vektorfeld u als einen Schnitt im Tangentialbündel über $\mathcal{M}$. Das Tangentialbündel $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ ist die Menge aller Paare von Punkten p und Vektoren v am Punkt p,

$$\mathcal{T}_\mathcal{M} = \{(p, v) : p \in \mathcal{M}\ ,\ v \in \mathcal{T}_p\}\ . \tag{A.20}$$

Ein Schnitt u durch das Tangentialbündel ist eine Teilmenge, die für jeden Punkt $p \in \mathcal{M}$ genau ein Paar $(p, u_{|p}) \in \mathcal{T}_\mathcal{M}$ enthält,

$$u = \{(p, u_{|p}) : p \in \mathcal{M}\ ,\ u_{|p} \in \mathcal{T}_p\} \subset \mathcal{T}_\mathcal{M}\ . \tag{A.21}$$

Bei den mathematischen Begriffen Bündel, Faser und Schnitten soll die Ähnlichkeit zu den gleichlautenden Begriffen bei Getreidefeldern das intuitive Begreifen erleichtern.

Allgemeiner ist ein Faserbündel (oder kurz Bündel) $\mathcal{B}$ über $\mathcal{M}$ eine Mannigfaltigkeit, in der es eine Projektion auf die Basismannigfaltigkeit gibt,

$$\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{M}\ , \tag{A.22}$$

hier: $\pi(p, v) = p$. Die Faser über p ist die Menge der Urbilder, $\pi^{-1}(p) \subset \mathcal{B}$. Fasern verschiedener Punkte sind einander isomorph: jeder Punkt p liegt in einer Umgebung U_α, so daß in ihr die Urbilder $\pi^{-1}U_\alpha$ wie ein kartesisches Produkt $U_\alpha \times \mathcal{N}$ aussehen, mathematisch: bijektiv stetig auf das kartesische Produkt abbildbar sind. Da die Basismannigfaltigkeit durch Wegprojizieren der Fasern entsteht, die bijektiv zu $\mathcal{N}$ sind, schreibt man $\mathcal{M} = \mathcal{B}/\mathcal{N}$.

Zwar sieht jedes Bündel in einer Umgebung jedes Punktes wie ein kartesisches Produkt aus, aber es gibt nichttriviale Bündel, die kein Produkt sind. Beispielsweise ist das Möbiusband ein Faserbündel über dem Kreis, S^1, wobei als Faser das reelle Intervall $[-1, 1]$ dienen kann.

Ein Schnitt $\mathcal{S}$ in einem Bündel $\mathcal{B}$ ist eine Teilmenge, die für jeden Punkt p der Basismannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ genau einen Punkt der Faser $\pi^{-1}(p)$ enthält.

Beim Möbiusband, beispielsweise, gibt es, anders als in einem Produktbündel, keinen Schnitt, der nicht mindestens eine Nullstelle hat. Ebenso läßt das Tangentialbündel der Kugeloberfläche, $\mathcal{T}_{S^2}$, keinen Schnitt zu, der nicht in wenigstens einem Punkt verschwindet: einen Igel kann man nicht (wirbelfrei) kämmen.

[2]Diese Menge heißt auch Graph der Funktion f.

Kommutator

Wendet man ein Vektorfeld v auf Funktionen f an, so erhält man eine Funktion $v(f)$. Sie kann mit einem Vektorfeld u erneut differenziert werden. Die zweifache Differentation uv ist linear, erfüllt aber nicht die Produktregel (A.12). Hingegen ist der Kommutator

$$[u, v] = uv - vu = \big(u^m(\partial_m v^n) - v^m(\partial_m u^n)\big)\partial_n\ . \tag{A.23}$$

zweier Vektorfelder wieder ein Vektorfeld,

$$[u, v](f\,g) = (uvf)\,g + (vf)\,(ug) + (uf)\,(vg) + f\,(uvg) - u \leftrightarrow v = ([u, v]f)\,g + f\,([u, v]g)\ . \tag{A.24}$$

Kotangentialraum

Dual zu Vektoren $u \in \mathcal{T}_p$ am Punkt p sind ihre linearen Abbildungen $\chi : u \mapsto \chi(u) \in \mathbb{R}$ in die reellen Zahlen. Die linearen Abbildungen können addiert und mit reellen Zahlen multipliziert werden und bilden an jedem Punkt p einen Vektorraum, den Dualraum $\mathcal{T}_p^*$ des Tangentialraumes $\mathcal{T}_p$, den Kotangentialraum. Die Menge aller Paare von Punkten p und Dualvektoren χ am Punkt p ist das Kotangentialbündel

$$\mathcal{T}_\mathcal{M}^* = \{(p, \chi) : p \in \mathcal{M}\ ,\ \chi \in \mathcal{T}_p^*\}\ . \tag{A.25}$$

Ein duales Vektorfeld ω ist ein Schnitt des Kotangentialbündels, das heißt, eine Teilmenge, die für jedes $p \in \mathcal{M}$ genau ein Paar $(p, \omega_{|p}) \in \mathcal{T}_\mathcal{M}^*$ enthält,

$$\omega = \{(p, \omega_{|p}) : p \in \mathcal{M}\ ,\ \omega_{|p} \in \mathcal{T}_p^*\} \subset \mathcal{T}_\mathcal{M}^*\ . \tag{A.26}$$

Jede Funktion f definiert durch Anwenden von $u_{|x}$ auf f eine lineare Abbildung $\mathrm{d}f_{|x}$ von Tagentialvektoren $u_{|x} = u^n\partial_n$ am Punkt x in die reellen Zahlen

$$\mathrm{d}f_{|x} : u_{|x} \mapsto u_{|x}(f) = u^m\partial_m f_{|x}\ . \tag{A.27}$$

Dabei sind zwei Funktionen äquivalent und definieren denselben Kovektor bei x, wenn dort ihre ersten Ableitungen übereinstimmen. Die Äquivalenzklasse von Funktionen, die bei x dieselben Ableitungen wie f haben, und die zugehörige Abbildung von Tangentialvektoren $u \in \mathcal{T}_x$ in die reellen Zahlen bezeichnen wir als $\mathrm{d}f_{|x}$ oder, kürzer, als das Differential $\mathrm{d}f$ oder die Änderung $\mathrm{d}f$.

Die Äquivalenzklassen $\mathrm{d}x^n$ der Koordinatenfunktionen x^n, die Koordinatendifferentiale, bilden an jedem Punkt x die zur Basis ∂_m des Tangentialraumes duale Basis des Kotangentialraumes $\mathcal{T}_x^*$. Sie bilden also die Tangentialvektoren ∂_m auf Eins oder Null ab, je nachdem ob der Wert von m mit dem Wert von n übereinstimmt,[3]

$$\mathrm{d}x^n(\partial_m) = \partial_m x^n = \delta_m{}^n\ , \tag{A.28}$$

[3]Das hierbei auftretende, doppelt indizierte Symbol $\delta_m{}^n$ (lies delta m n) heißt Kronecker-Delta.

$$\delta_m{}^n = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad m \neq n \ , \\ 1 & \text{falls} \quad m = n \ , \end{cases} \text{ zum Beispiel } \delta_1{}^1 = 1,\ \delta_1{}^2 = 0 \ , \tag{A.29}$$

und sind eine Basis für Kovektoren, $\omega_{|x} = \mathrm{d}x^m \omega_m(x)$ mit $\omega_m(x) = \omega_{|x}(\partial_m)$,

$$\omega_{|x}(u) = u^m(x)\, \omega_{|x}(\partial_m) = \mathrm{d}x^m_{|x}(u)\, \omega_m(x) \ . \tag{A.30}$$

Ein duales Vektorfeld heißt auch Differentialform oder Einsform.

Insbesondere ist die Änderung $\mathrm{d}f$ einer Funktion die Summe der Änderungen $\mathrm{d}x^n$ ihrer Argumente multipliziert mit den partiellen Ableitungen

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}x^n \partial_n f \ . \tag{A.31}$$

Nicht jede Einsform $\omega(x) = \mathrm{d}x^m \omega_m(x)$ ist die Änderung $\mathrm{d}f$ einer Funktion f. Dazu ist wegen $\partial_m \partial_n f = \partial_n \partial_m f$ erforderlich und in sternförmigen Gebieten auch hinreichend, daß die antisymmetrisierten Ableitungen der Komponentenfunktionen verschwinden,

$$\omega = \mathrm{d}f \Leftrightarrow \partial_m \omega_n - \partial_n \omega_m = 0 \ . \tag{A.32}$$

Für die Koordinatendifferentiale $\mathrm{d}x'$ eines anderen Koordinatensystems besagt (A.31)

$$\mathrm{d}x'^l = \mathrm{d}x^n \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} \ . \tag{A.33}$$

Auch sie bilden eine Basis des Dualraumes. Aus $\omega = \mathrm{d}x'^l \omega'_l = \mathrm{d}x^n \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} \omega'_l = \mathrm{d}x^n \omega_n$ liest man ab

$$\frac{\partial x'^l}{\partial x^n}\, \omega'_l(x'(x)) = \omega_n(x) \ . \tag{A.34}$$

Satz von Frobenius

Wenn in einem d-dimensionalen Raum in einer Umgebung durch jeden Punkt mit Koordinaten x^i, y^a, $i = 1, \dots, p$, $a = 1, \dots, d-p$, p-dimensionale Flächen $y^a(x)$ gehen, die die Differentialgleichungen

$$\partial_i y^a = u_i{}^a(x, y) \tag{A.35}$$

oder, in Formensprache, $\theta^a := \mathrm{d}y^a - \mathrm{d}x^i u_i{}^a = 0$ erfüllen, dann folgt aus $(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) y^a = 0$ notwendig die Integrabilitätsbedingung

$$\partial_i u_j{}^a + u_i{}^b \partial_b u_j{}^a - \partial_j u_i{}^a - u_j{}^b \partial_b u_i{}^a = 0 \tag{A.36}$$

nicht nur als Identität in x, wenn man für y eine Lösung $y(x)$ einsetzt, sondern als Identität in den Variablen x und y, da (A.35) an jedem Punkt x für alle y gilt.

Umgekehrt existieren in einer genügend kleinen Umgebung jedes Punktes $\underline{x}$ Lösungen $y^a(x)$ von (A.35) für jeden beliebigen, bei $\underline{x}$ vorgegebenem Wert $\underline{y}^a = y^a(\underline{x})$, wenn die Integrabilitätsbedingung (A.36) identisch in x und y erfüllt ist.

Zum Beweis dieses Satzes von Frobenius betrachten wir in einer Umgebung eines Punktes $\underline{x}$ eine Schar von Kurven $\Gamma_t : s \mapsto x(s,t)$ durch diesen Punkt, $x(0,t) = \underline{x}$. Die Umgebung sei genügend klein, so daß alle Verbindungskurven zweier Punkte ineinander verformt werden können. Für jeden Wert von t definiert die Lösung $z^a(s,t)$ des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems

$$\frac{\partial z^a}{\partial s} = \frac{\partial x^i}{\partial s} u_i{}^a(x, z) \ , \quad z^a(0,t) = \underline{y}^a \ , \tag{A.37}$$

stetig differenzierbare Funktionen von s und t.

Für die Ableitung von $\partial_t z^a - \partial_t x^i u_i{}^a(x,z)$ folgt wegen $\partial_s \partial_t z^a = \partial_s \partial_t z^a$ nach Differenzieren und nach Einsetzen von (A.37)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial z^a}{\partial t} - \frac{\partial x^i}{\partial t} u_i{}^a\Big) &= \frac{\partial x^j}{\partial s} \partial_b u_j{}^a \Big(\frac{\partial z^b}{\partial t} - \frac{\partial x^i}{\partial t} u_i{}^b\Big) \\ &+ \frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial t}\big(\partial_j u_i{}^a - \partial_i u_j{}^a + u_j{}^b \partial_b u_i{}^a - u_i{}^b \partial_b u_j{}^a\big) \ . \end{aligned} \tag{A.38}$$

Dies ist ein linear homogenes Differentialgleichungssystem für $\partial_t z^a - \partial_t x^i u_i{}^a$, denn die zweite Zeile verschwindet (A.36), und die Lösung $\partial_t z^a - \partial_t x^i u_i{}^a = 0$ ist eindeutig durch die Anfangswerte $\partial_t z^a{}_{|s=0} = 0 = \partial_t x^i{}_{|s=0}$ bestimmt.

Wegen $\partial_t z^a - \partial_t x^i u_i{}^a = 0$ hängt der Funktionswert $z^a(s,t)$ nur vom Punkt $x(s,t)$ und nicht von der Kurve Γ_t von $\underline{x}$ nach $x(s,t)$ ab: gehen nämlich zwei Kurven durch denselben Punkt $\overline{x}$, so können sie ineinander verformt werden und gehören zu einer Schar Γ_t von Kurven durch diesen Punkt. Für diese Schar gilt $x(\overline{s},t) = \overline{x}$ identisch in t, also $\partial_t x^i(\overline{s},t) = 0$ und $\partial_t z^a(\overline{s},t) = 0$. Folglich hängt $z^a(\overline{s},t)$ nicht von t, also nicht von der Kurve zum Punkt $\overline{x}$ ab. Es definiert daher $z^a(s,t)$ durch $z^a(s,t) = y^a(x(s,t))$ überall in der Umgebung von $\underline{x}$ Funktionen $y^a(x)$. Weil dort überall $\partial_t z^a = \partial_t x^i \partial_i y^a = \partial_t x^i u_i{}^a$ gilt, egal welchen Wert $\partial_t x^i$ hat, löst $y^a(x)$ die Gleichung $\partial_i y^a = u_i{}^a$ (A.35).

Gerade und ungerade Permutationen

Permutationen π der natürlichen Zahlen bis n sind invertierbare Selbstabbildungen

$$\pi : (1, 2, \dots, n) \mapsto (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)) \ . \tag{A.39}$$

Sie bilden die Permutationsgruppe von n Elementen, die auch *symmetrische* Gruppe heißt und daher mit S_n bezeichnet wird.

Die Fehlstellung $a(\pi)$ zählt in $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ ab, wie oft ein $\pi(i)$ größer als ein rechts davon stehendes $\pi(j)$ ist. Mit der Stufenfunktion $\Theta(x)$, die für positive x den Wert Eins und sonst den Wert Null hat, schreibt sich die Fehlstellung als $a(\pi) = \sum_{i<j} \Theta(\pi(i) - \pi(j))$. Wenn $a(\pi)$ gerade ist, heißt π gerade, sonst ungerade. Das Signum $\operatorname{sign} \pi = (-1)^{a(\pi)}$ einer Permutation ist 1, wenn sie gerade ist, sonst -1.

Jede Paarvertauschung (k,l), die k auf l, l auf k und die übrigen Zahlen auf sich abbildet, verändert die Fehlstellung um eine ungerade Zahl, $\operatorname{sign}((k,l) \circ \pi) = -\operatorname{sign}(\pi)$. Dies sieht man zunächst für Nachbarvertauschungen $(k, k+1)$ ein: sie ändern die Fehlstellung um ± 1, weil sie in genau einem Paar aus $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ ändern, ob die linksstehende Zahl größer als die rechtsstehende ist. Aus $(l, k+1) = (k, k+1) \circ (l, k) \circ (k, k+1)$ folgt dann durch Induktion, daß jede Paarvertauschung die Fehlstellung einer Permutation um eine ungerade Anzahl ändert.

Es läßt sich jede Permutation π aus Paarvertauschungen zusammensetzen. Wenn die Fehlstellung $a(\pi)$ gerade (ungerade) ist, muß die Zahl dieser Paarvertauschungen gerade (ungerade) sein. Also gibt $\operatorname{sign}(\pi)$ an, ob π aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Paarvertauschungen zusammengesetzt ist, und es gilt

$$\operatorname{sign}(\pi' \circ \pi) = \operatorname{sign}(\pi') \operatorname{sign}(\pi) \ . \tag{A.40}$$

Dichten und Inhalte

Ladung, Energie, Teilchenzahl und ähnliche additive Größen können in Mannigfaltigkeiten oder Untermannigfaltigkeiten der Dimension p kontinuierlich verteilt sein. Der Inhalt eines Bereiches $\mathcal{B}$ ergibt sich dabei als Integral über eine Dichte pro Weg, pro Fläche oder pro Volumen, das sich über den Bereich $\mathcal{B}$ erstreckt. Je nach Dimension p des Bereichs heißt die zugehörige Dichte p-Form.

Für $p = 1$ ist die Arbeit, die längs eines Weges $\Gamma : [\underline{s}, \bar{s}] \to \mathcal{M}$ geleistet wird, ein Integral über eine Arbeitsdichte pro Weg, die Kraft. Sie hat Komponentenfunktionen ω_m,

$$A[\Gamma] = \int_{\underline{s}}^{\bar{s}} \mathrm{d}s \, \omega_m(x(s)) \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} = \int_{\underline{s}}^{\bar{s}} \mathrm{d}s \, \omega(u) \ . \tag{A.41}$$

Die Arbeit längs Γ hängt nicht vom Koordinatensystem ab, wenn ω ein Kovektorfeld ist, das auf der Kurve Tangentialvektoren u in die reellen Zahlen abbilden. Sie hängt auch nicht von der Parametrisierung des Weges ab, und läßt sich daher kurz als

$$A[\Gamma] = \int_\Gamma \omega \tag{A.42}$$

schreiben, denn sei s eine monoton zunehmende Funktion von s', so besagen die Kettenregel und der Integraltransformationssatz

$$\int_{\underline{s}'}^{\bar{s}'} \mathrm{d}s' \, \omega_m(x(s(s'))) \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'} \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} = \int_{s(\underline{s}')}^{s(\bar{s}')} \mathrm{d}s \, \omega_m(x(s)) \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} \ . \tag{A.43}$$

Bei konstanter Stromdichte fließt durch ein $p = 2$-dimensionales Parallelogramm mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Gesamtstrom $J(\vec{a}, \vec{b})$. Er definiert die 2-Dichte J, die Stromdichte, die bilinear Paare von Vektoren $(\vec{a}, \vec{b})$ auf Zahlen abbildet,

$$J(\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{c}, \vec{b}) = \lambda_1 J(\vec{a}, \vec{b}) + \lambda_2 J(\vec{c}, \vec{b}) \ , \ J(\vec{a}, \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}) = \lambda_1 J(\vec{a}, \vec{b}) + \lambda_2 J(\vec{a}, \vec{c}) \ . \tag{A.44}$$

Nach dem Cavalierischen Prinzip bleibt der Strom ungeändert, wenn man zu $\vec{b}$ ein beliebiges Vielfaches von $\vec{a}$ hinzufügt, denn dabei ändert sich nicht die Flächengröße.

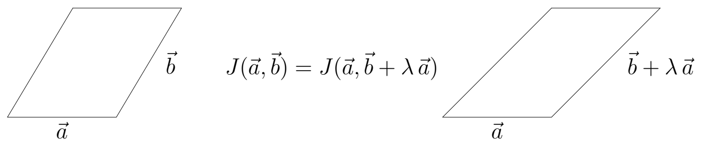

Abbildung A.1: Cavalierisches Prinzip

Der Strom $J(\vec{a}, \vec{b})$ verschwindet, falls $\vec{a} = \vec{b}$ ist,

$$J(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \ .$$

Daher ist J antisymmetrisch unter Vertauschung der beiden Argumente,

$$0 = J(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) = J(\vec{a}, \vec{a}) + J(\vec{a}, \vec{b}) + J(\vec{b}, \vec{a}) + J(\vec{b}, \vec{b}) = 0 + J(\vec{a}, \vec{b}) + J(\vec{b}, \vec{a}) + 0 \ ,$$
$$J(\vec{a}, \vec{b}) = -J(\vec{b}, \vec{a}) \ . \tag{A.45}$$

Es ist J der Strom in Normalenrichtung des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Er wechselt sein Vorzeichen, wenn man $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vertauscht.

Man kann Stromdichten addieren und vervielfältigen, folglich bilden sie einen Vektorraum $\mathcal{L}_2$: den Vektorraum der in zwei Vektoren linearen, unter Permutation antisymmetrischen (die Mathematiker sagen „alternierenden") Abbildungen in die reellen Zahlen. Da Stromdichten, angewendet auf ein Paar von Kantenvektoren eines Parallelogramms, eine Zahl ergeben, definieren Parallelogramme Vektoren des zu $\mathcal{L}_2$ dualen Vektorraums, nämlich die lineare Abbildung $\vec{a} \wedge \vec{b}$, gesprochen „a Keil be" oder „a Dach be", die Stromdichten J auf den Strom $J(\vec{a}, \vec{b})$ abbildet,

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) : J \mapsto J(\vec{a}, \vec{b}) \ . \tag{A.46}$$

Weil die Stromdichten antisymmetrisch und bilinear sind, ist das Keilprodukt (oder Dachprodukt) antisymmetrisch und distributiv in beiden Faktoren,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \ , \tag{A.47}$$

$$(\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}) \wedge \vec{c} = \lambda_1 \vec{a} \wedge \vec{c} + \lambda_2 \vec{b} \wedge \vec{c} \ , \quad \vec{a} \wedge (\lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}) = \lambda_1 \vec{a} \wedge \vec{b} + \lambda_2 \vec{a} \wedge \vec{c} \ . \tag{A.48}$$

Dabei sind Summen und Vielfache der Keilprodukte definiert als Summen und Vielfache der linearen Abbildungen, die sie bewirken.

Schreiben wir $\vec{a} = \vec{e}_m a^m$ und $\vec{b} = \vec{e}_n b^n$ als Linearkombinationen einer Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots$, so erweist sich das Keilprodukt $\vec{a} \wedge \vec{b}$ wegen der Distributiveigenschaften und der Antisymmetrie des Keilproduktes als Linearkombination der Produkte $\vec{e}_m \wedge \vec{e}_n$ mit $m < n$.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = a^m b^n \, \vec{e}_m \wedge \vec{e}_n = \sum_{m<n} (a^m b^n - a^n b^m) \, \vec{e}_m \wedge \vec{e}_n = \frac{1}{2} (a^m b^n - a^n b^m) \, \vec{e}_m \wedge \vec{e}_n \tag{A.49}$$

Die Produkte $\vec{e}_m \wedge \vec{e}_n$ mit $m < n$ sind linear unabhängig, denn jede Linearkombination $u = \sum_{m<n} u^{mn} \, \vec{e}_m \wedge \vec{e}_n$, angewendet auf Stromdichten J, ergibt $\sum_{m<n} u^{mn} J(\vec{e}_m, \vec{e}_n)$

und dies ist nur dann die Nullabbildung von Stromdichten, wenn diese Summe für alle Stromdichten verschwindet.

In einem d-dimensionalen Raum hat der Raum der Stromdichten so wie sein Dualraum die Dimension $d(d-1)/2$.

In mehr als drei Dimensionen sind nicht alle Elemente u des Dualraumes $\mathcal{L}_2^*$ Produkte $\vec{a}\wedge\vec{b}$, sondern $\mathcal{L}_2^*$ besteht aus Linearkombinationen von Produkten.

Für den Strom durch $(\vec{a},\vec{b})$, ausgedrückt durch die Komponenten, ergibt sich die Doppelsumme

$$J(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a}\wedge\vec{b})\,J = \sum_{m<n}(a^m b^n - a^n b^m)(\vec{e}_m\wedge\vec{e}_n)J = \frac{1}{2}\sum_{mn} J_{mn}(a^m b^n - a^n b^m)\ . \tag{A.50}$$

Sie ist linear im Vektor $\vec{a}$, im Vektor $\vec{b}$ und in den Komponenten der Stromdichte,

$$J_{mn} = -J_{n\,m} = J(\vec{e}_m,\vec{e}_n) = (\vec{e}_m\wedge\vec{e}_n)\,J\ . \tag{A.51}$$

Das sind die Ströme durch Parallelogramme, deren Kanten Basisvektoren sind. Ist der Raum dreidimensional, so spezialisiert sich mit den Bezeichnungen $j^3 = J_{12}$, $j^1 = J_{23}$ und $j^2 = J_{31}$ die Doppelsumme zu $J(\vec{a},\vec{b}) = \vec{j}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

Vektoren $u_1, u_2 \dots u_p$ eines Vektorraumes $\mathcal{V}$ definieren die Punkte

$$u = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i \quad \text{mit} \quad 0\le\lambda_i\le 1 \tag{A.52}$$

des p-Spats $(u_1, u_2 \dots u_p)$. Er wird auch Parallelotop oder Parallelflach genannt. Für $p=1$ sind dies die Punkte auf der Strecke zwischen 0 und u_1, für $p=2$ die Punkte des Parallelogramms mit Kanten u_1 und u_2.

Jede p-Dichte ist eine multilineare Abbildung F, die dem p-Spat seinen F-Inhalt zuordnet,

$$F : (u_1, u_2 \dots u_p) \mapsto F(u_1, u_2 \dots u_p)\ . \tag{A.53}$$

Der Inhalt des Spats verschwindet, wenn zwei der Vektoren übereinstimmen, die ihn aufspannen. Also ist die Dichte F antisymmetrisch (4.109) unter Vertauschung irgend zweier Argumente und für jede Permutation π gilt

$$F(u_{\pi(1)}, u_{\pi(2)}, \dots u_{\pi(p)}) = \operatorname{sign}(\pi)\,F(u_1, u_2, \dots u_p)\ . \tag{A.54}$$

Man kann Dichten addieren und vervielfältigen. Sie bilden den Vektorraum $\mathcal{L}_p$ derjenigen Abbildungen, die in p Vektorargumenten linear und total antisymmetrisch (alternierend) sind. Da Dichten angewendet auf p-Spate Zahlen ergeben, definiert jeder p-Spat einen Vektor $u_1\wedge u_2\wedge\cdots\wedge u_p$ im Dualraum $\mathcal{L}_p^*$, nämlich die lineare Abbildung, die auf jede p-Dichte F angewendet den F-Inhalt des Spats ergibt

$$u_1\wedge u_2\wedge\cdots\wedge u_p : F \mapsto F(u_1, u_2 \dots u_p)\ . \tag{A.55}$$

Weil die p-Dichten F total antisymmetrisch und multilinear sind, ist das mehrfache Keilprodukt total antisymmetrisch und distributiv in jedem Faktor. Dabei sind Summen

und Vielfache von Keilprodukten als Summen und Vielfache von linearen Abbildungen definiert.

Jedes Keilprodukt ist eine Linearkombination von Keilprodukten von Basisvektoren[4] $e_{m_1}\wedge e_{m_2}\cdots\wedge e_{m_p}$ mit $m_1 < m_2 < \cdots < m_p$. Seien die Vektoren $u_1 = e_{m_1}\,{u_1}^{m_1}$, $u_2 = e_{m_2}\,{u_2}^{m_2}\ \dots$ als Linearkombination der Basisvektoren $e_1, e_2, \dots$ gegeben, dann folgt aus den Distributiveigenschaften und der totalen Antisymmetrie des Keilproduktes

$$\begin{aligned} u_1\wedge u_2\dots\wedge u_p &= (e_{m_1}\wedge e_{m_2}\cdots\wedge e_{m_p})\,{u_1}^{m_1}\,{u_2}^{m_2}\dots{u_p}^{m_p} \\ &= \sum_{m_1<m_2<\cdots<m_p}(e_{m_1}\wedge e_{m_2}\cdots\wedge e_{m_p})\sum_{\pi\in S_p}\operatorname{sign}(\pi)\,({u_1}^{m_{\pi(1)}}\,{u_2}^{m_{\pi(2)}}\dots{u_p}^{m_{\pi(p)}})\ . \end{aligned} \tag{A.56}$$

Wie für $p=2$ folgt, daß die Produkte $e_{m_1}\wedge e_{m_2}\cdots\wedge e_{m_p}$ mit $m_1 < m_2\cdots < m_p$ linear unabhängig sind und demnach eine Basis des $d!/((d-p)!\,p!)$-dimensionalen Vektorraumes $\mathcal{L}_p^*$ bilden, der dual zum Vektorraum $\mathcal{L}_p$ der p-Dichten ist.

Der F-Inhalt des p-Spats, ausgedrückt durch die Komponenten, ist die p-fache Summe

$$\begin{aligned} (u_1\wedge u_2\cdots\wedge u_p)\,F &= F(e_{m_1}, e_{m_2}\dots e_{m_p})\,{u_1}^{m_1}\wedge{u_2}^{m_2}\cdots\wedge{u_p}^{m_p} \\ &= \sum_{m_1<m_2<\cdots<m_p} F_{m_1 m_2\dots m_p}\sum_{\pi\in S_p}\operatorname{sign}(\pi)\,({u_1}^{m_{\pi(1)}}\,{u_2}^{m_{\pi(2)}}\dots{u_p}^{m_{\pi(p)}})\ . \end{aligned} \tag{A.57}$$

Er ist linear in den Komponenten

$$F_{m_1 m_2\dots m_p} = F(e_{m_1}, e_{m_2}\dots e_{m_p}) = (e_{m_1}\wedge e_{m_2}\cdots\wedge e_{m_p})\,F \tag{A.58}$$

der p-Dichte und linear in den Komponenten jedes Kantenvektors.

Der Inhalt eines d-Spats, zum Beispiel bei konstanter Ladungsdichte die eingeschlossene Ladung Q, liegt wegen der Linearität und Antisymmetrie für alle d-Spate fest, wenn er für den Einheits-d-Spat gegeben ist.

$$Q(u_1\dots u_n) = Q(e_{m_1}\dots e_{m_d})\,{u_1}^{m_1}\ \dots\ {u_d}^{m_d}\ . \tag{A.59}$$

Weil der Inhalt antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Vektoren ist, verschwindet $Q(e_{m_1}\dots e_{m_d}) = Q_{m_1 m_2\dots m_d}$, wenn einige der Indizes $m_1 m_2\dots m_d$ denselben Wert aus 1 bis d annehmen und keine Permutation von $1\,,2\dots d$ sind. Falls aber $m_1 m_2\dots m_d$ eine Permutation π von $1\,,2\dots d$ ist, so ist $Q_{\pi(1)\,\pi(2)\dots\pi(d)} = \operatorname{sign}(\pi)\,Q_{1\,2\dots d} = \operatorname{sign}(\pi)\,Q$.

Es sind also die Komponenten von Q proportional dem ε-Symbol in d Dimensionen

$$\varepsilon^{i_1 i_2\dots i_d} = \begin{cases} 1\ , & \text{falls } i_1 i_2\dots i_d \text{ gerade Permutation von } 1,2\dots d \text{ ist,} \\ -1\ , & \text{falls } i_1 i_2\dots i_d \text{ ungerade Permutation von } 1,2\dots d \text{ ist,} \\ 0\ , & \text{falls } i_1 i_2\dots i_d \text{ keine Permutation von } 1,2\dots d \text{ ist,} \end{cases} \tag{A.60}$$

$$Q_{i_1 i_2\dots i_d} = Q\,\varepsilon^{i_1 i_2\dots i_d}\ , \tag{A.61}$$

$$Q(u_1\dots u_d) = Q\,\varepsilon^{i_1 i_2\dots i_n}\,{u_1}^{i_1}\ \dots\ {u_d}^{i_d} = Q\sum_{\pi\in S_n}\operatorname{sign}(\pi)\,{u_1}^{\pi(1)}\ \dots\ {u_d}^{\pi(d)}\ . \tag{A.62}$$

[4]Hier braucht man p verschiedene Indizes zur Bezeichnung der Faktoren. Da das Alphabet nur 26 Buchstaben hat, die zudem umständlich zu zählen sind, schreiben wir statt verschiedener Buchstaben verschieden indizierte Buchstaben, $m_1, m_2\dots m_p$.

Dabei ist $Q = Q(e_1, e_2 \dots e_d)$ die Ladungsdichte und

$$\sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sign}(\pi)\, {u_1}^{\pi(1)} \dots {u_d}^{\pi(d)} \tag{A.63}$$

der Faktor, um den die Abbildung $u_1 \wedge u_2 \dots \wedge u_d$ größer als die von Einheitsspat bewirkte Abbildung $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_d$ ist.

Insbesondere bestimmt dieser Faktor, ob die Kanten $u_1, u_2 \dots u_d$ linear abhängig sind. Dann verschwindet er, weil diese Kanten nur eine niedriger dimensionale Punktmenge aufspannen. Weil dieser Faktor *bestimmend* dafür ist, ob die Vektoren $u_1, u_2 \dots u_d$ linear unabhängig sind, heißt er *Determinante*.

Differentialformen

Eine Differentialform ω vom Grad p am Ort x, oder kürzer eine p-Form, ist eine in p Vektoren $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ lineare und total antisymmetrische Abbildung. In der Koordinatenbasis, $u_i = {u_i}^m \partial_m$, hat ω wegen der Multilinearität die Form

$$\omega(u_1, u_2, \dots u_p) = {u_1}^{m_1} {u_2}^{m_2} \dots {u_p}^{m_p}\, \omega_{m_1 m_2 \dots m_p} \tag{A.64}$$

mit total antisymmetrischen Komponenten

$$\omega_{m_1 m_2 \dots m_p} = \omega_{[m_1 m_2 \dots m_p]} = \omega(\partial_{m_1}, \partial_{m_2}, \dots, \partial_{m_p}) \ . \tag{A.65}$$

Dabei verwenden wir eckige oder runde Klammern um Indizes

$$T_{[m_1 m_2 \dots m_p]} = \sum_\pi \frac{1}{p!} \mathrm{sign}(\pi)\, T_{m_{\pi(1)} m_{\pi(2)} \dots m_{\pi(p)}} \ , \tag{A.66}$$

$$T_{(m_1 m_2 \dots m_p)} = \sum_\pi \frac{1}{p!} T_{m_{\pi(1)} m_{\pi(2)} \dots m_{\pi(p)}} \tag{A.67}$$

zur Bezeichnung des total antisymmetrischen oder total symmetrischen Anteils. Die Summe erstreckt sich über alle Permutationen π der natürlichen Zahlen bis p.

Weil in (A.64) die Komponenten ${u_1}^{m_1} {u_2}^{m_2} \dots {u_p}^{m_p}$ mit $\omega_{[m_1 m_2 \dots m_p]}$ summiert werden, trägt nur ihr total antisymmetrischer Anteil bei

$${u_1}^{[m_1} {u_2}^{m_2} \dots {u_p}^{m_p]} = {u_{[1}}^{m_1} {u_2}^{m_2} \dots {u_{p]}}^{m_p} = \frac{1}{p!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} {u_{i_1}}^{m_1} {u_{i_2}}^{m_2} \dots {u_{i_p}}^{m_p} \ . \tag{A.68}$$

Die p-Formen $\mathrm{d}x^{m_1} \mathrm{d}x^{m_2} \dots \mathrm{d}x^{m_p}$ mit $m_1 < m_2 < \dots < m_p$, die $(u_1, u_2, \dots u_p)$ auf das antisymmetrisierte Produkt ihrer Komponenten abbilden

$$\mathrm{d}x^{m_1} \mathrm{d}x^{m_2} \dots \mathrm{d}x^{m_p} : (u_1, u_2, \dots u_p) \mapsto \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} {u_{i_1}}^{m_1} {u_{i_2}}^{m_2} \dots {u_{i_p}}^{m_p} \ , \tag{A.69}$$

bilden an jedem Punkt eine Basis für p-Formen,

$$\omega = \frac{1}{p!} \mathrm{d}x^{m_1} \mathrm{d}x^{m_2} \dots \mathrm{d}x^{m_p} \omega_{m_1 m_2 \dots m_p} = \sum_{m_1 < m_2 < \dots < m_p} \mathrm{d}x^{m_1} \mathrm{d}x^{m_2} \dots \mathrm{d}x^{m_p} \omega_{m_1 m_2 \dots m_p} \ . \tag{A.70}$$

Dabei haben wir mit der Notation der Koordinatenvolumina als Produkt von Einsformen vorweggenommen, daß p-Formen $\omega^{(p)}$ und q-Formen $\hat\omega^{(q)}$ multipliziert werden können. Ihr Produkt ist die $p+q$-Form

$$\begin{aligned} \omega^{(p)} \hat\omega^{(q)} &: (u_1, \dots, u_{p+q}) \mapsto \\ & \sum_{\pi \in \mathrm{S}_{p+q}} \frac{\mathrm{sign}(\pi)}{p! q!} \omega^{(p)}(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(p)})\, \hat\omega^{(q)}(u_{\pi(p+1)}, \dots, u_{\pi(p+q)}) \ . \end{aligned} \tag{A.71}$$

Das Produkt ist bilinear, assoziativ und graduiert kommutativ, das heißt

$$\omega^{(p)} \hat\omega^{(q)} = (-1)^{pq} \hat\omega^{(q)} \omega^{(p)} \ . \tag{A.72}$$

Differentialformen aller Formengrade bilden nicht nur einen Vektorraum sondern darüber hinaus eine graduiert kommutative Algebra. Insbesondere antikommutieren Differentiale

$$\mathrm{d}x^m \mathrm{d}x^n = -\mathrm{d}x^n \mathrm{d}x^m \ . \tag{A.73}$$

Dieses Produkt von Differentialformen ist verschieden vom Tensorprodukt (A.132), bei dem nicht antisymmetrisiert wird, und vom symmetrischen Produkt zweier Differentiale, wie es bei der Metrik (A.104) auftritt. Zur deutlichen Unterscheidung der verschiedenen Produkte verwendet man häufig $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, um das antisymmetrische Produkt zu kennzeichnen, $\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y$ für das Tensorprodukt und selten $\mathrm{d}x \vee \mathrm{d}y$ für das symmetrisches Produkt. Solange aus dem Zusammenhang klar ist, welches Produkt gemeint ist, verwenden wir die leichter zu lesende Schreibweise $\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Die p-Form (A.64) hängt nicht vom Koordinatensystem ab. Verwenden wir Koordinaten x', um den Punkt $x(x')$ zu bezeichnen, so hat ω' die Komponenten (A.65)

$$\omega'_{m_1 \dots m_p}(x') = \omega(\partial'_{m_1}, \dots, \partial'_{m_p}) = \frac{\partial x^{n_1}}{\partial x'^{m_1}} \dots \frac{\partial x^{n_p}}{\partial x'^{m_p}} \omega_{n_1 \dots n_p}(x(x')) \ . \tag{A.74}$$

Wenn wir $\mathrm{d}x'^m \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} = \mathrm{d}x^n$ (A.31) verwenden, folgt

$$\mathrm{d}x'^{m_1} \mathrm{d}x'^{m_2} \dots \mathrm{d}x'^{m_p} \omega'_{m_1 m_2 \dots m_p}(x') = \mathrm{d}x^{n_1} \mathrm{d}x^{n_2} \dots \mathrm{d}x^{n_p} \omega_{n_1 n_2 \dots n_p}(x(x')) \ . \tag{A.75}$$

Inhalte

Jedes p-Formfeld ω definiert den Integranden eines Integrals über p-dimensionale Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, den ω-Inhalt von $\mathcal{F}$, wobei $\mathcal{F}$ durch eine invertierbare Abbildung $\Phi : (s^1, s^2, \dots, s^p) \mapsto x(s)$ eines p-dimensionalen Parameterbereiches $D \subset \mathbb{R}^p$ auf $\mathcal{F} = \Phi(D)$ gegeben sei,

$$\int_{\mathcal{F}} \omega = \int_D \mathrm{d}^p s\, \frac{1}{p!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial s^{i_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial s^{i_2}} \dots \frac{\partial x^{m_p}}{\partial s^{i_p}} \omega_{m_1 m_2 \dots m_p}(x(s)) \ . \tag{A.76}$$

Auf der rechten Seite ist x als Funktion der Parameter s^i, $i = 1, \dots, p$, aufgefaßt und $\mathrm{d}x^m = \frac{\partial x^m}{\partial s^i} \mathrm{d}s^i$ (A.31) als Parameterdifferential. Wegen $\mathrm{d}s^i \mathrm{d}s^j = -\mathrm{d}s^j \mathrm{d}s^i$ (A.73) ist das p-fache Produkt von Differentialen $\mathrm{d}s^i$ total antisymmetrisch und daher

$$\mathrm{d}s^{i_1} \mathrm{d}s^{i_2} \dots \mathrm{d}s^{i_p} = \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathrm{d}s^1 \mathrm{d}s^2 \dots \mathrm{d}s^p = \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathrm{d}^p s \ . \tag{A.77}$$

Das Integral (A.76) hängt nicht von der Parametrisierung der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{F}$ ab. Ist nämlich $x^m(s'(s))$ durch Parameter s' parametrisiert, die ihrerseits invertierbar von s abhängen, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial s^i} x^m(s'(s)) = \frac{\partial s'^j}{\partial s^i} \frac{\partial x^m}{\partial s'^j} \ , \tag{A.78}$$

und wegen der Definition (I.6) der Determinante

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{\partial s'^{j_1}}{\partial s^{i_1}} \frac{\partial s'^{j_2}}{\partial s^{i_2}} \dots \frac{\partial s'^{j_p}}{\partial s^{i_p}} = \left(\det \frac{\partial s'}{\partial s}\right) \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_p} \tag{A.79}$$

und des Integralsubstitutionssatzes

$$\int_D \mathrm{d}^p s \left(\det \frac{\partial s'}{\partial s}\right) f(s'(s)) = \int_{D'=s'(D)} \mathrm{d}^p s' \, f(s') \tag{A.80}$$

ist das Integral (A.76) über den Bereich D der Parameter s dem Integral

$$\int_{D'} \mathrm{d}^p s' \, \frac{1}{p!} \, \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_p} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial s'^{j_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial s'^{j_2}} \dots \frac{\partial x^{m_p}}{\partial s'^{j_p}} \, \omega_{m_1 m_2 \dots m_p}(x(s')) \tag{A.81}$$

über den Bereich $D' = s'(D)$ der Parameter s' gleich.

Das Integral $\int_{\mathcal{F}} \omega$ hängt wegen (A.75) auch nicht vom Koordinatensystem ab, sondern nur von der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{F}$ und der p-Form ω. Es ist auch keine Metrik zur Messung von Kantenlängen und Winkeln erforderlich.

Stokesscher Satz

Ist spezieller $p = 1$ und die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{F}$ eine Kurve $\Gamma : s \mapsto x(s)$ von $\underline{x} = x(0)$ zu $\bar{x} = x(1)$, so definiert die Einsform ω das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^1 \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} \omega_m(x(s)) \ . \tag{A.82}$$

Es ist ein Funktional der Kurve Γ und hängt normalerweise nicht nur von den Endpunkten ab.

Um die Abhängigkeit vom Weg zu untersuchen, betrachten wir eine Kurve Γ_1, die bei festgehaltenen Endpunkten durch Verformung aus einer Kurve Γ_0 hervorgeht. Das heißt: es gebe eine einparametrige Schar von Kurven $\Gamma_t : s \mapsto x(t,s)$, $0 \le t \le 1$, von $\underline{x}$ nach $\bar{x}$, $x(t,0) = \underline{x}$, $x(t,1) = \bar{x}$.

Als Abbildung des zweiparametrigen Bereiches betrachtet sei $x(t,s)$ eine Fläche F. Sie wird berandet von dem zusammengesetzten, geschlossenen Weg $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_0$ von $\underline{x}$ längs Γ_1 nach $\bar{x}$ und dann längs der rückwärts durchlaufenen Kurve Γ_0 zurück nach $\underline{x}$. Wir bezeichnen den Rand von F mit ∂F (lies Rand von F) und notieren

$$\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_0 = \partial F \ . \tag{A.83}$$

Die Integrale über die Kurven Γ_t ändern sich mit dem Parameter t um

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Gamma_t} \omega &= \int_0^1 \mathrm{d}s \left(\frac{\partial^2 x^m}{\partial t \partial s} \, \omega_m(x(t,s)) + \frac{\partial x^m}{\partial s} \frac{\partial x^n}{\partial t} \, \partial_{x^n} \omega_m \right) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}s \, \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial x^m}{\partial t} \, \omega_m(x(t,s)) \right) + \frac{\partial x^m}{\partial s} \frac{\partial x^n}{\partial t} \left(\partial_{x^n} \omega_m - \partial_{x^m} \omega_n \right) \ . \end{aligned} \tag{A.84}$$

Der $\frac{\partial}{\partial s}$-Term kann integriert werden und ergibt Null, denn $\frac{\partial x^n}{\partial t}$ verschwindet für $s = 0$ und $s = 1$. Integrieren wir schließlich über t von $t = 0$ bis $t = 1$, so erhalten wir

$$\int_{\Gamma_1} \omega - \int_{\Gamma_0} \omega = \int_\Gamma \omega = \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s \left(\frac{\partial x^n}{\partial t} \frac{\partial x^m}{\partial s} - \frac{\partial x^n}{\partial s} \frac{\partial x^m}{\partial t} \right) \frac{1}{2} \left(\partial_{x^n} \omega_m - \partial_{x^m} \omega_n \right) \ . \tag{A.85}$$

Die rechte Seite ist das Integral (A.76) über die Fläche F, die von Γ berandet wird, und dessen Integrand die Zweiform

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x^n \mathrm{d}x^m \frac{1}{2} \left(\partial_n \omega_m - \partial_m \omega_n \right) \tag{A.86}$$

ist. In dieser Notation formulieren wir (A.85) kurz und knapp als Stokesschen Satz

$$\int_F \mathrm{d}\omega = \int_{\partial F} \omega \ . \tag{A.87}$$

Falls $\mathrm{d}\omega$ (A.86) überall verschwindet, liegt der Spezialfall der Integrabilitätsbedingung (A.36) vor, in dem a nur einen Wert annimmt, i die Werte 1 bis d durchläuft und ${u_i}^a$ nicht von y abhängt. Das Kurvenintegral

$$f(\bar{x}) = f(\underline{x}) + \int_\Gamma \omega = f(\underline{x}) + \int_0^1 \mathrm{d}s \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} \omega_m(x(s)) \tag{A.88}$$

ist die Lösung von (A.37) für $s = 1$ und definiert nach dem Satz von Frobenius in einfach zusammenhängenden Gebieten, in denen alle Verbindungskurven zweier Punkte ineinander verformt werden können, eine bis auf die Integrationskonstante $f(\underline{x})$ eindeutige, von der Verbindungskurve Γ unabhängige Funktion f des Endpunktes $\bar{x}$, die die Differentialgleichung (A.35)

$$\partial_m f = \omega_m \tag{A.89}$$

löst. In einfach zusammenhängenden Gebieten gilt folglich für Einsformen ω das Lemma von Poincaré

$$\begin{aligned} \partial_m \omega_n - \partial_n \omega_m = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists f \ : \quad \omega_m = \partial_m f \ , \\ \mathrm{d}\omega = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists f \ : \quad \omega = \mathrm{d}f \ . \end{aligned} \tag{A.90}$$

Gleichung (A.88) ist die eindimensionale Version des Stokesschen Satzes

$$\int_\Gamma \mathrm{d}f = \int_{\partial\Gamma} f = f(\bar{x}) - f(\underline{x}) \ , \tag{A.91}$$

wenn wir Funktionen f als Nullformen auffassen, deren nulldimensionales Integral über einen Punkt einfach den Funktionswert ergibt. Der Rand der Kurve Γ trägt orientiert bei: auf die Kurve bezogen wird der Endpunkt $\bar{x}$ nach außen und der Anfangspunkt $\underline{x}$ nach innen durchlaufen.

Äußere Ableitung

Passend zur bisherigen Schreibweise definieren wir als äußere Ableitung d der p-Form $\omega = 1/p!\,\mathrm{d}x^{m_1}\dots\mathrm{d}x^{m_p}\omega_{m_1\dots m_p}$ die $p+1$-Form

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}x^{m_0}\mathrm{d}x^{m_1}\dots\mathrm{d}x^{m_p}\partial_{m_0}\frac{1}{p!}\,\omega_{m_1\dots m_p} = \mathrm{d}x^{m_0}\mathrm{d}x^{m_1}\dots\mathrm{d}x^{m_p}\frac{1}{p!}\,\partial_{[m_0}\omega_{m_1\dots m_p]}\\ &= \mathrm{d}x^{m_0}\mathrm{d}x^{m_1}\dots\mathrm{d}x^{m_p}\frac{1}{(p+1)!}\sum_{l=0}^{p}(-1)^{l\,p}\partial_{m_l}\omega_{m_{l+1}\dots m_p m_0\dots m_{l-1}}\ .\end{aligned} \tag{A.92}$$

Da das Produkt von Koordinatendifferentialen total antisymmetrisch ist, trägt zur äußeren Ableitung nur die antisymmetrisierte partielle Ableitung der Komponentenfunktionen bei. Sie sind antisymmetrisch, daher reicht es, zur Antisymmetrisierung (A.66) über die $p+1$ zyklischen Vertauschungen der Indizes zu summieren und dabei das Vorzeichen $\mathrm{sign}(\pi)$ zu berücksichtigen. Die l-fach zyklische Vertauschung von $p+1$-Indizes ist ungerade, wenn $l\,p$ ungerade ist.

Die äußere Ableitung hängt nicht vom Koordinatensystem ab. Drücken wir $\omega_{m_1\dots m_p}$ durch die Komponenten $\omega'_{n_1\dots n_p}$ aus (A.75), und leiten wir ab

$$\partial_{[m_0}\Big(\frac{\partial x'^{\,n_1}}{\partial x^{m_1}}\dots\frac{\partial x'^{\,n_p}}{\partial x^{m_p]}}\,\omega'_{n_1\dots n_p}\Big)\ , \tag{A.93}$$

so verschwinden wegen der Antisymmetrisierung $\frac{\partial^2 x'^{\,n}}{\partial x^{[m_0}\partial x^{m]}}$ und die Ableitung wirkt als $\partial_{m_0} = \frac{\partial x'^{n_0}}{\partial x^{m_0}}\partial'_{n_0}$ nur auf $\omega'_{n_1\dots n_p}$. Die Differentiale fassen wir mit $\mathrm{d}x^m\frac{\partial x'^{\,n}}{\partial x^m} = \mathrm{d}x'^{\,n}$ zusammen

$$p!\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x^{m_0}\mathrm{d}x^{m_1}\dots\mathrm{d}x^{m_p}\partial_{m_0}\omega_{m_1\dots m_p} = \mathrm{d}x'^{\,n_0}\mathrm{d}x'^{\,n_1}\dots\mathrm{d}x'^{\,n_p}\partial'_{n_0}\omega'_{n_1\dots n_p}\ . \tag{A.94}$$

Man bestätigt leicht, daß d linear ist, auf Produkte von p- und q-Formen mit der graduierten Produktregel

$$\mathrm{d}(\omega^{(p)}\hat\omega^{(q)}) = (\mathrm{d}\omega^{(p)})\hat\omega^{(q)} + (-1)^p\omega^{(p)}(\mathrm{d}\hat\omega^{(q)}) \tag{A.95}$$

wirkt und nilpotent ist, weil antisymmetrisierte, zweifache Ableitungen verschwinden

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0\ . \tag{A.96}$$

In sternförmigen Gebieten, die mit jedem Punkt x auch die Verbindungsstrecke λx, $0\le\lambda\le 1$, zum Ursprung enthalten, gilt das Poincaré-Lemma

$$\mathrm{d}\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = \mathrm{konst} + \mathrm{d}\alpha \tag{A.97}$$

Die Folgerung von rechts nach links ist selbstverständlich, denn die äußere Ableitung einer konstanten Funktion verschwindet und d ist nilpotent. Verschwindet umgekehrt die äußere Ableitung einer Nullform, so ist die Funktion konstant. Diese von x und $\mathrm{d}x$ unabhängige Konstante ist keine äußere Ableitung, da sie kein $\mathrm{d}x$ enthält.

Verschwindet in einem sternförmigen Gebiet die äußere Ableitung $\mathrm{d}\omega$ einer p-Form mit $p>0$, so schreiben wir $\omega(x)$ als ein Integral längs des Strahls vom Ursprung,[5] und verwenden die Antisymmetrie von $\omega_{m_1\dots m_p}$ sowie $(-1)^p = (-1)^{-p}$,

$$\begin{aligned}\omega_{m_1\dots m_p}(x) &= \int_0^1\mathrm{d}\lambda\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\big(\lambda^p\,\omega_{m_1\dots m_p}(\lambda x)\big)\\ &= \int_0^1\mathrm{d}\lambda\,p\,\lambda^{p-1}\omega_{m_1\dots m_p|\lambda x} + \lambda^p x^{m_0}\partial_{m_0}\omega_{m_1\dots m_p|\lambda x}\\ &\overset{\mathrm{d}\omega=0}{=} \int_0^1\mathrm{d}\lambda\,p\,\lambda^{p-1}\omega_{m_1\dots m_p|\lambda x} - \lambda^p x^{m_0}\sum_{l=1}^{p}(-1)^{lp}\partial_{m_l}\omega_{m_{l+1}\dots m_p m_0\dots m_{l-1}|\lambda x}\\ &= \int_0^1\mathrm{d}\lambda\,p\,\lambda^{p-1}\omega_{m_1\dots m_p|\lambda x} + \lambda^p x^{m_0}\sum_{l=1}^{p}(-1)^{lp+p-l+1}\partial_{m_l}\omega_{m_0 m_{l+1}\dots m_p m_1\dots m_{l-1}|\lambda x}\\ &= \sum_{l=1}^{p}(-1)^{(l-1)(p-1)}\partial_{m_l}\Big(\int_0^1\mathrm{d}\lambda\,\lambda^{p-1}x^{m_0}\omega_{m_0 m_{l+1}\dots m_p m_1\dots m_{l-1}}(\lambda x)\Big)\ .\end{aligned} \tag{A.98}$$

Es ist also $\omega = \mathrm{d}\alpha$ und $\alpha = \mathrm{d}x^{m_2}\dots\mathrm{d}x^{m_p}\alpha_{m_2\dots m_p}/(p-1)!$ hat die Komponenten

$$\alpha_{m_2\dots m_p}(x) = \int_0^1\mathrm{d}\lambda\,\lambda^{p-1}x^{m_1}\omega_{m_1 m_2\dots m_p}(\lambda x)\ . \tag{A.99}$$

Für eine sternförmige Untermannigfaltigkeit $\mathcal{F}$ folgt hieraus der Satz von Stokes. Man kann sie in Strahlen vom Ursprung zu den Randpunkten $\bar x(s^2,\dots,s^p)$ zerlegen und mit den Koordinaten $x(\lambda, s^2\dots s^p) = \lambda\bar x(s^2,\dots,s^p)$, $0\le\lambda\le 1$, parametrisieren. Das Integral (A.76) über $\partial\mathcal{F}$ über die $p-1$-Form α ist nach (A.99) gleich dem Integral über $\mathcal{F}$ über die p-Form $\mathrm{d}\alpha$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{F}}\alpha &= \int\varepsilon^{i_2\dots i_p}\frac{\partial\bar x^{m_2}}{\partial s^{i_2}}\dots\frac{\partial\bar x^{m_p}}{\partial s^{i_p}}\,\frac{1}{(p-1)!}\,\alpha_{m_2\dots m_p}(\bar x(s))\,\mathrm{d}^{p-1}s\\ &= \int\int_0^1\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}^{p-1}s\,\frac{p}{p!}\,\varepsilon^{i_2\dots i_p}\,\bar x^{m_1}\,\lambda^{p-1}\,\frac{\partial\bar x^{m_2}}{\partial s^{i_2}}\dots\frac{\partial\bar x^{m_p}}{\partial s^{i_p}}\,\omega_{m_1 m_2\dots m_p}(\lambda\bar x) = \int_{\mathcal{F}}\omega\ .\end{aligned} \tag{A.100}$$

Denn es gilt $\bar x^m = \frac{\partial x^m}{\partial\lambda}$ und $\lambda\frac{\partial\bar x^m}{\partial s^i} = \frac{\partial x^m}{\partial s^i}$. Wenn wir λ in s^1 umbenennen und berücksichtigen, daß die Summe mit $\varepsilon^{i_1 i_2\dots i_p}$ mit p Indizes p mal so viele Terme hat wie die Summe mit $\varepsilon^{i_2\dots i_p}$ mit $p-1$ Indizes, dann ist dies das Integral über $\mathcal{F}$ über die p-Form $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

$$\int_{\partial\mathcal{F}}\alpha = \int_{\mathcal{F}}\mathrm{d}\alpha \tag{A.101}$$

Metrik

In den Mannigfaltigkeiten, die wir betrachten, ist eine Metrik gegeben, das heißt ein reelles Skalarprodukt $g(u,v) = u\cdot v$ von Tangentialvektoren am selben Punkt, das symmetrisch, bilinear und nicht entartet ist

$$u\cdot v = v\cdot u\ ,\quad u\cdot(v+w) = u\cdot v + u\cdot w\ ,\quad u\cdot(cw) = c(u\cdot w)\quad \forall c\in\mathbb{R}\ . \tag{A.102}$$

[5] In λ^p ist p der Exponent, in x^m bezeichnet m Komponenten.

Das Skalarprodukt $u \cdot u$ nennen wir Längenquadrat von u. Aus dem Längenquadrat läßt sich durch

$$u \cdot v = \frac{1}{4}\big((u+v)\cdot(u+v) - (u-v)\cdot(u-v)\big) \tag{A.103}$$

das Skalarprodukt rekonstruieren. Das Skalarprodukt der Basisvektoren ∂_m am Punkt x sind die Komponenten $g_{mn}(x)$ der Metrik im Koordinatensystem x

$$g_{mn} = g(\partial_m, \partial_n)\ , \quad g(u,v) = g(u^m\partial_m, v^n\partial_n) = g_{mn}u^m v^n\ .$$

Mit dem symmetrischen Produkt von Differentialen $\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n : (u,v) \mapsto (u^m v^n + u^n v^m)/2$, läßt sich die Metrik als symmetrische Differentialform g schreiben

$$g = g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n\ . \tag{A.104}$$

Wir vermeiden die traditionelle Bezeichnung $\mathrm{d}s^2$, denn g ist nicht die Ableitung d einer Funktion s^2 und auch nicht das Quadrat eines Differentials $\mathrm{d}s$, sondern g ordnet einem Vektor u sein Längenquadrat $g(u,u)$ zu.

Weil die Metrik nicht entartet ist

$$g_{mn}u^n = 0 \Rightarrow u^n = 0\ , \tag{A.105}$$

ist die Matrix $g_{..}$ mit Matrixelementen g_{mn} invertierbar

$$g^{nr}g_{rm} = \delta^n{}_m\ . \tag{A.106}$$

Dabei bezeichnet man die Matrixelemente der inversen Matrix $g_{..}{}^{-1}$ einfach mit g^{nm} und entnimmt der Indexstellung, daß es sich um die inverse Metrik handelt.

Man kann an jedem Punkt eine Basis von Vektoren e_a, $a = 1,\dots,d = p+q$, mit Komponenten $e_a{}^m$ wählen, so daß die Vektoren aufeinander senkrecht und normiert sind

$$e_a \cdot e_b = e_a{}^m e_b{}^n g_{mn} = \eta_{ab} = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad a \neq b\ , \\ 1 & \text{falls} \quad a = b \in \{1,\dots,p\}\ , \\ -1 & \text{falls} \quad a = b \in \{p+1,\dots,d=p+q\}\ . \end{cases} \tag{A.107}$$

Die Zahl $p-q$ heißt Signatur der Metrik.

Die Matrix η stimmt mit ihrem Inversen η^{-1} überein, deren Matrixelemente wir als η^{ab}, $\eta^{ab} = \eta_{ab}$, schreiben

$$\eta^{ab}\eta_{bc} = \delta^a{}_c\ . \tag{A.108}$$

Eine Orthonormalbasis e_a heißt in der vierdimensionalen Raumzeit Vierbein, im dreidimensionalen Räumen Dreibein und allgemeiner Vielbein. Sie ist durch die Bedingung, orthonormal zu sein, an jedem Punkt bis auf eine Lorentztransformation $e'_a = \Lambda^b{}_a e_b$, $\Lambda \in \mathrm{O}(p,q)$, festgelegt.

Die Komponenten u^m eines Vektors $u = u^m\partial_m$ bezeichnen wir als Raumzeitkomponenten und indizieren sie mit Buchstaben aus der Mitte des Alphabets. Schreiben wir $u = u^a e_a$ als Linearkombination des Vielbeins, so nennen wir $u^a = \eta^{ab}u \cdot e_b$ die Vielbeinkomponenten und wählen zur Unterscheidung ihre Indizes vom Anfang des Alphabets.

Die Vielbeinkomponenten u^a hängen umkehrbar mit den Raumzeitkomponenten u^m zusammen

$$u^m = u^a e_a{}^m\ , \quad u^a = u^m e_m{}^a\ , \quad e_m{}^a = \eta^{ab}g_{mn}e_b{}^n\ . \tag{A.109}$$

Daß es sich bei $e_m{}^a$ um die Matrixelemente der Matrix handelt, die invers ist zu der Matrix, die die Komponenten $e_a{}^m$ des Vielbeins enthält,

$$e_m{}^a e_a{}^n = \delta_m{}^n\ , \quad e_b{}^m e_m{}^a = \delta_b{}^a\ , \tag{A.110}$$

wird nicht als $e^{-1}{}_m{}^a$ geschrieben, sondern kürzer durch die Indexstellung angezeigt.

Mit der Vielbeinform

$$e^a = \mathrm{d}x^m e_m{}^a\ , \tag{A.111}$$

die Vektoren u auf ihre Vielbeinkomponenten $u^a = e^a(u)$ abbilden (A.30), und ihrem symmetrischen Produkt, $e^a e^b : (u,v) \mapsto (u^a v^b + u^b v^a)/2$, läßt sich die Metrik (A.104) auch als $g = \eta_{ab}\, e^a e^b$ schreiben.

Tensorprodukt

Seien U und V reelle Vektorräume. Tensoren T über U und V sind bilineare Abbildungen, die Paare von reellen Vektoren $u \in U$ und $v \in V$ in die reellen Zahlen abbilden,

$$T : \begin{cases} U \times V & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto \quad T(u,v) \end{cases}\ , \tag{A.112}$$

$$\begin{aligned} T(a\,u_1 + b\,u_2, v) &= a\,T(u_1,v) + b\,T(u_2,v)\ , \\ T(u, a\,v_1 + b\,v_2) &= a\,T(u,v_1) + b\,T(u,v_2)\ . \end{aligned} \tag{A.113}$$

Tensoren über U und V bilden den Vektorraum $\mathcal{L}(U,V)$ der in U und V bilinearen Abbildungen. Der Dualraum von $\mathcal{L}(U,V)$ ist das Tensorprodukt $U \otimes V$.

Wir bestimmen die Eigenschaften von $U \otimes V$ aus den Eigenschaften der linearen Abbildungen T wie aus einem Spiegelbild.

Die Zahlen $T(u,v)$ definiert die Wirkung der linearen Abbildung $u \otimes v$ auf Tensoren T

$$(u \otimes v)\,(T) = T(u,v)\ . \tag{A.114}$$

Weil T im linken Argument linear ist, gilt für alle Zahlen a und b und für alle T

$$((a\,u_1 + b\,u_2) \otimes v)\,(T) = (a\,u_1 \otimes v)\,(T) + (b\,u_2 \otimes v)\,(T)\ , \tag{A.115}$$

also das Distributivgesetz für den linken Faktor, entsprechend folgt es für den rechten,

$$(a\,u_1 + b\,u_2) \otimes v = a\,u_1 \otimes v + b\,u_2 \otimes v\ , \tag{A.116}$$

$$u \otimes (a\,v_1 + b\,v_2) = a\,u \otimes v_1 + b\,u \otimes v_2\ . \tag{A.117}$$

Dabei ist die Summe von Tensorprodukten als Summe von linearen Abbildungen definiert, die Tensoren T in die reellen Zahlen abbilden.

Weil das Tensorprodukt $U \otimes V$ dual zu den Tensoren über U und V sind, können Tensoren umgekehrt auch als lineare Abbildungen von $U \otimes V$ gedeutet werden, die auf Tensorprodukte gemäß

$$T(u \otimes v) = (u \otimes v)(T) = T(u, v) \tag{A.118}$$

wirken und auf Summen und Vielfachen von Tensorprodukten dadurch erklärt sind, daß sie linear sind,

$$T(a\, u \otimes v + b\, u' \otimes v') = a\, T(u \otimes v) + b\, T(u' \otimes v') \ . \tag{A.119}$$

Das Tensorprodukt ist nicht kommutativ, wohl aber assoziativ. Sei W ein dritter Vektorraum und T eine in allen Argumenten lineare Abbildung von $U \times V \times W$ in die reellen Zahlen. Für $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$\begin{aligned} T(u, v, w) &= T(u \otimes v, w) = T((u \otimes v) \otimes w) \ , \\ &= T(u, v \otimes w) = T(u \otimes (v \otimes w)) \ . \end{aligned} \tag{A.120}$$

Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen, weil T bei festgehaltenem w ein Tensor über U und V ist und das zweite gilt für Tensoren über $U \otimes V$ und W, das dritte Gleichheitszeichen gilt, weil T bei festgehaltenem u ein Tensor über V und W ist und das letzte Gleichheitszeichen gilt für Tensoren über U und $V \otimes W$. Da diese Gleichungen für alle T gelten, ist das Tensorprodukt assoziativ und die Klammern sind überflüssig,

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w) = u \otimes v \otimes w \ . \tag{A.121}$$

Sei $(u_1, u_2, \dots)$ eine Basis von U und sei ebenso $(v_1, v_2, \dots)$ eine Basis von V, dann definiert

$$(u_i \otimes v_j)(T) = T(u_i, v_j) = T_{ij} \tag{A.122}$$

die Komponenten von T und zeigt, daß die Tensorprodukte $(u_i \otimes v_j)$ linear unabhängig sind: jede Linearkombination $c^{ij} u_i \otimes v_j$ mit Koeffizienten c^{ij} verschwindet für alle Tensoren T nur, falls alle Koeffizienten verschwinden,

$$(c^{ij} u_i \otimes v_j)(T) = c^{ij}\, T_{ij} = 0 \ \forall T \ \Leftrightarrow c^{ij} = 0 \ \forall\, i\, j \ . \tag{A.123}$$

Umgekehrt sind alle linearen Abbildungen eines Tensors linear in seinen Komponenten, $L(T) = L^{ij} T_{ij}$, also bilden die Tensorprodukte jeder Basis $u_1, u_2 \dots$ von U mit jeder Basis $v_1, v_2, \dots$ von V eine Basis des Tensorproduktes: die lineare Hülle ihrer Tensorprodukte ist das Tensorprodukt $U \otimes V$

$$U \otimes V = \{c^{ij} u_i \otimes v_j : c^{ij} \in \mathbb{R}\} \ . \tag{A.124}$$

Tensorfelder

Wir betrachten im folgenden nur noch Tensoren, die von mehreren Vektoren des Tangentialraumes und von mehreren dualen Vektoren abhängen. In einer Mannigfaltigkeit mit Punkten x sind reelle Tensorfelder $T(u, \dots, v, \omega, \dots, \chi)$ der Stufe (r, s) an jedem

Punkt x Abbildungen von $\mathcal{T}_x{}^r \times \mathcal{T}^*_x{}^s \to \mathbb{R}$, die in jedem Argument linear sind und r Vektoren $u, \dots, v$ am Punkt x und s duale Vektoren $\omega, \dots, \chi$ am Punkt x in die reellen Zahlen abbilden.

Tensorfelder treten auf viele Arten in der Geometrie auf, wann immer eine geometrische Größe proportional zu Vektoren ist, wie zum Beispiel Differentialformen, das Skalarprodukt $u \cdot v = g_{mn} u^m v^n$ von Vektoren oder die Krümmung, die linear von den Kanten eines Flächenelementes abhängt. p-Formen sind Tensoren der Stufe $(p, 0)$, die Feldstärke ist ein liealgebrawertiger Tensor der Stufe $(2, 0)$ und die Krümmung zeigt sich am Riemanntensor, einem Tensor der Stufe $(3, 1)$. Funktionen (A.7) sind Tensorfelder der Stufe $(0, 0)$ und heißen, wenn man ihr Transformationsgesetz betonen will, Skalarfelder.

Weil Tensoren in jedem Argument linear sind, haben sie in einer Basis e_a, in der sich Vektoren als $u = u^a e_a$ mit Komponenten u^a schreiben, und in der sich duale Vektoren mit Komponenten ω_a in der dualen Basis e^a als $\omega = \omega_a e^a$ schreiben, die Form

$$T(u, \dots, v, \omega, \dots, \chi) = T_{a_1 \dots a_r}{}^{b_1 \dots b_s} u^{a_1} \dots v^{a_r} \omega_{b_1} \dots \chi_{b_s} \ . \tag{A.125}$$

Dabei sind alle Komponentenfunktionen am jeweiligen Punkt x zu nehmen. Die Komponentenfunktionen des Tensors erhält man, wenn man als Argumente $u, \dots, v, \omega, \dots, \chi$ die Basisvektoren $e_{a_1}, \dots, e_{a_r}, e^{b_1}, \dots, e^{b_s}$ einsetzt

$$T_{a_1 \dots a_r}{}^{b_1 \dots b_s}(x) = T(e_{a_1}, \dots, e_{a_r}, e^{b_1}, \dots, e^{b_s})_{|x} \ . \tag{A.126}$$

Insbesondere sind die Komponenten in einer Koordinatenbasis

$$T_{m_1 \dots m_r}{}^{n_1 \dots n_s}(x) = T(\partial_{m_1}, \dots, \partial_{m_r}, \mathrm{d}x^{n_1}, \dots, \mathrm{d}x^{n_s})_{|x} \ . \tag{A.127}$$

Dasselbe Tensorfeld hat im Koordinatensystem $x'(x)$ wegen (A.17) und (A.33) in der Koordinatenbasis die Komponentenfelder

$$T'_{k_1 \dots k_r}{}^{l_1 \dots l_s}(x') = \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{m_r}}{\partial x'^{k_r}} \frac{\partial x'^{l_1}}{\partial x^{n_1}} \dots \frac{\partial x'^{l_s}}{\partial x^{n_s}} T_{m_1 \dots m_r}{}^{n_1 \dots n_s}(x(x')) \ . \tag{A.128}$$

Diese lineare Transformation der Tensorkomponentenfelder heißt Tensortransformation. Am Indexbild der Tensorkomponenten läßt sich ablesen, welche Produkte von Jacobimatrizen auftreten, zum Beispiel transformieren die Komponenten der Metrik, wie ihr Indexbild anzeigt, mit zwei Jacobimatrizen $\frac{\partial x}{\partial x'}$, $g'_{mn}(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} g_{kl}(x(x'))$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{g}$ den Betrag der Determinante der Matrix $g_{..}$ mit Elementen g_{mn} (I.14). Das Transformationsgesetz der Metrik besagt $\mathfrak{g}' = (\det \frac{\partial x}{\partial x'})^2 \mathfrak{g}$. Daher definiert $\sqrt{\mathfrak{g}} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^d$ wegen $\mathrm{d}x'^1 \dots \mathrm{d}x'^d \det \frac{\partial x}{\partial x'} = \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^d$ für orientierungstreue Transformationen mit $\det \frac{\partial x}{\partial x'} > 0$ eine Differentialform vom Grad d, das Volumenelement

$$\sqrt{\mathfrak{g}'}\, \mathrm{d}x'^1 \dots \mathrm{d}x'^d = \sqrt{\mathfrak{g}}\, \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^d \ . \tag{A.129}$$

Falls die Basisvektoren ∂_m aufeinander senkrecht stehen, ist $\sqrt{\mathfrak{g}}$ das Produkt der Kantenlängen der d-Zelle $(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_d)$. Allgemeiner kann man mit einer linearen Abbildung L die d-Zelle auf eine Zelle mit senkrechten Kanten abbilden. Dabei ändert sich das Volumen und $\sqrt{\mathfrak{g}}$ um denselben Faktor $\det L$. Es ist daher $\sqrt{\mathfrak{g}}$ in jedem Fall das metrische Volumen der d-Zelle.

Permutationen von Tensorargumenten

Sei T ein Tensor der Stufe (r,s), $\pi \in \mathrm{S}_r$ eine Permutation und π^{-1} die inverse Permutation, dann definiert

$$P_\pi(T) : (v_1, v_2, \dots, v_r, \omega, \dots, \chi) \mapsto T(v_{\pi^{-1}(1)}, v_{\pi^{-1}(2)}, \dots, v_{\pi^{-1}(r)}, \omega, \dots, \chi) \tag{A.130}$$

den permutierten Tensor $P_\pi(T)$. Er ist von gleicher Stufe (r,s) wie T. Die Zuordnung von Tensor und permutiertem Tensor kann als lineare Abbildung $T \mapsto P_\pi(T)$ im Raum der Tensoren verstanden werden. Diese Abbildungen sind Darstellungen [11] der Permutationsgruppe S_r

$$P_{\pi_2 \circ \pi_1}(T) = P_{\pi_2}(P_{\pi_1}(T)) \ . \tag{A.131}$$

Ebenso wirkt auf den s Argumenten $\omega, \dots, \chi$ die Permutationsgruppe S_s.

Tensoralgebra

Da man reelle Zahlen nicht nur addieren, sondern auch multiplizieren kann, bilden Tensoren auf natürliche Art nicht nur einen Vektorraum, in dem die Summe und das Vielfache von Tensoren erklärt ist, sondern eine Algebra, in der durch

$$\begin{aligned} T\,S : (u, \dots, v, u', \dots, v', \omega, \dots, \chi, \omega', \dots, \chi') \mapsto \\ T(u, \dots, v, \omega, \dots, \chi)\, S(u', \dots, v', \omega', \dots, \chi') \end{aligned} \tag{A.132}$$

der Tensor $T\,S$ der Stufe $(r + r', s + s')$ als Produkt des Tensors T der Stufe (r,s) mit dem Tensor S der Stufe (r', s') definiert ist. Das Produkt von Tensoren ist bilinear und assoziativ $R(ST) = (RS)T$, nicht aber kommutativ, denn TS und ST unterscheiden sich durch eine Permutation der Argumente.

Die Komponenten eines Tensorproduktes $T\,S$ sind einfach die Produkte der Komponenten von T und S.

Eine Funktion mehrerer Variablen definiert für fest gewählten Wert einiger ihrer Argumente eine Funktion der restlichen Variablen, zum Beispiel bei einem Tensor T der Stufe (r,s) mit $r \geq 1$ und $s \geq 1$ für festgewählten Vektor v und festgewählten dualen Vektor φ die Abbildung $T_{v,\varphi} : (w, \dots, \lambda, \dots) \mapsto T(v, w, \dots, \varphi, \lambda \dots)$. Setzt man hier für v und φ Basisvektoren e_a und die dazu dualen Basisvektoren e^a ein und summiert, so hängt bemerkenswerterweise die resultierende Abbildung

$$K_1^1(T) : (w, \dots, \lambda, \dots) \mapsto T(e_a, w, \dots, e^a, \lambda, \dots) \tag{A.133}$$

nicht von der gewählten Basis ab und definiert einen Tensor der Stufe $(r-1, s-1)$. Denn eine andere Basis e'_a hängt mit der ursprünglichen Basis durch $e'_a = e_b M^b{}_a$ mit einer invertierbaren Matrix M zusammen, die dazu duale Basis ist $e'^a = M^{-1\,a}{}_c e^c$, und es gilt

$$T(e'_a, w, \dots, e'^a, \lambda, \dots) = M^b{}_a M^{-1\,a}{}_c T(e_b, w, \dots, e^c, \lambda, \dots) = T(e_a, w, \dots, e^a, \lambda, \dots) \ . \tag{A.134}$$

Der Tensor $K_1^1(T)$ heißt Kontraktion des Tensors T, genauer Kontraktion des ersten Vektorarguments mit dem ersten dualen Vektorargument von T. Natürlich muß die Kontraktion nicht unbedingt das erste Vektorargument von T und den ersten dualen Vektor betreffen, ebenso kann man durch Kontraktion des u-ten Vektors, $1 \leq u \leq r$, mit dem o-ten dualen Vektor, $1 \leq o \leq s$, aus T einen Tensor $K_u^o(T)$ der Stufe $(r-1, s-1)$ erzeugen.

Die Komponenten des kontrahierten Tensors sind einfach die Summe

$$(K_u^o T)_{m_1 \dots m_{r-1}}{}^{n_1 \dots n_{s-1}} = T_{m_1 \dots m_{u-1}\, a\, m_{u+1} \dots m_{r-1}}{}^{n_1 \dots n_{o-1}\, a\, n_{o+1} \dots n_{s-1}} \ , \tag{A.135}$$

in der für gleiche Werte des u-ten unteren Indexes und des o-ten oberen Indexes über den Laufbereich summiert wird. Der Name des Summationsindexpaares ist beliebig, er muß nur verschieden von jedem weiteren Index der Tensorkomponenten gewählt werden.

Die Zweifachkontraktion eines symmetrischen mit einem antisymmetrischen Indexpaar verschwindet (5.17).

Die Kontraktion eines Tensors T der Stufe $(1,1)$ liefert einen Skalar,

$$\operatorname{tr} T = T^j{}_j \ , \tag{A.136}$$

die Spur (englisch trace) der Matrix T.

Summen, Vielfache, Permutationen, Kontraktionen und Produkte von Tensorkomponenten mit passendem Indexbild wie zum Beispiel

$$T_{ab}{}^c = U_{adb}{}^{\mathrm{dc}} + 5 V^c{}_b W_a$$

sind wieder Komponenten von Tensoren. Die Menge aller Tensoren bildet eine Algebra.

Verschleppen und Verketten

Die Transformation (A.128) läßt sich auch als Tensortransformation deuten, die zu einer invertierbaren Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{M} & \to & \mathcal{N} \\ x & \mapsto & x'(x) \end{cases} \tag{A.137}$$

einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mit Punkten x auf eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ mit Punkten x' gehört. Den Wechsel des Koordinatensystems bezeichnet man als passive Transformation, die Abbildung von Punkten auf Bildpunkte als aktive Transformation.

Zu jeder Abbildung Φ gehören, auch wenn sie nicht invertierbar ist, auf natürliche Art lineare Abbildungen, die Verschleppung Φ_* und die Verkettung Φ^*.

Tangentialvektoren werden verschleppt, das heißt: aus Kurven $\Gamma : s \mapsto x(s)$ mit Tangentialvektoren $v_{|x} = v^m(x)\partial_m$ in $\mathcal{M}$ werden Kurven $\Phi \circ \Gamma : s \mapsto x'(x(s))$ in $\Phi(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$ mit Tangentialvektoren

$$\Phi_* v_{|_{x'}} = v^m(x) \frac{\partial x'^n}{\partial x^m} \partial'_n \ . \tag{A.138}$$

Allerdings ist nur dann jedes verschleppte Tangentialvektorfeld eindeutig und ein Tangentialvektorfeld auf $\Phi(\mathcal{M})$, wenn jeder Bildpunkt nur einen Urbildpunkt hat.

Auf $\mathcal{N}$ definierte Funktionen f werden bei der Abbildung Φ durch $\Phi^* f = f \circ \Phi$ zu Funktionen auf $\mathcal{M}$ verkettet, wenn man $f(x'(x)) = (\Phi^* f)(x)$ als Funktion von x auffaßt. Faßt man die Funktion $h = (\Phi_* v)f$, die durch Anwenden des verschleppten Vektorfeldes $\Phi_* v$ auf eine Funktion f entsteht, als Funktion von x auf, so stimmt sie mit der Funktion überein, die man durch Anwenden von v auf die verkettete Funktion erhält

$$v(\Phi^* f) = \Phi^*\big((\Phi_* v) f\big) \ , \quad v(\Phi^* f)_{|x} = v^m(x) \frac{\partial x'^n}{\partial x^m} \partial'_n f(x')_{|x'(x)} \ . \tag{A.139}$$

Ebenso wie Funktionen werden Differentialformen von $\mathcal{N}$ durch

$$\Phi^* \omega'_{|x} = \omega'_{m_1 \dots m_p}(x'(x)) \frac{\partial x'^{m_1}}{\partial x^{n_1}} \dots \frac{\partial x'^{m_p}}{\partial x^{n_p}} \mathrm{d}x^{n_1} \dots \mathrm{d}x^{n_p} \tag{A.140}$$

auf $\mathcal{M}$ zurückgezogen. Der Integralsubstitutionssatz und die Definition (A.76) ist einfach

$$\int_{\Phi(\mathcal{M})} \omega = \int_{\mathcal{M}} \Phi^* \omega \ . \tag{A.141}$$

Gemäß (A.94) vertauscht die äußere Ableitung mit Φ^*, $\Phi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\Phi^*\omega)$.

Eine Metrik g'_{kl} auf $\mathcal{N}$ induziert auf $\mathcal{M}$ die Metrik

$$(\Phi^* g')_{mn\,|x} = g_{mn}(x) = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \frac{\partial x'^l}{\partial x^n} g'_{kl}(x'(x)) \ . \tag{A.142}$$

Dies gilt insbesondere für Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Dort definiert die induzierte Metrik $g = \Phi^* g'$ mit $\sqrt{\mathfrak{g}}\,\mathrm{d}^p x$ (A.129) das Volumenelement. Beispielsweise ist die Weglänge $\int \mathrm{d}s \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s} g_{mn}}$ das metrische Volumen einer Kurve.

Lieableitung

Zu jeder einparametrigen Gruppe von Selbstabbildungen Φ_α der Mannigfaltigkeit gehört ein Vektorfeld ξ. Seien die Transformationen Φ_α einer einparametrigen Gruppe so parametrisiert, daß $\Phi_{\alpha+\beta} = \Phi_\alpha \Phi_\beta = \Phi_\beta \Phi_\alpha$ gilt. Dann gehört $\alpha = 0$ zur identischen Abbildung $\Phi_0 = \mathrm{id}$ und es gilt $(\Phi_\alpha)^{-1} = \Phi_{-\alpha}$. Variiert α, so durchläuft $\Phi_\alpha x = x'(\alpha, x)$ für jedes festgehaltene x als Funktion von α eine Kurve mit Tangentialvektoren

$$\frac{\mathrm{d}(\Phi_\alpha x)^m}{\mathrm{d}\alpha} = \xi^m(\Phi_\alpha(x)) \ . \tag{A.143}$$

Sie definieren ein Vektorfeld, das wegen $\Phi_{\alpha+\varepsilon}(x) - \Phi_\alpha(x) = \Phi_\varepsilon(\Phi_\alpha(x)) - \Phi_0(\Phi_\alpha(x))$ von α und x nur über $\Phi_\alpha(x)$ abhängt. Es kann demnach bei $\alpha = 0$ bestimmt werden.

$$\xi^m(x) = \frac{\mathrm{d}(\Phi_\alpha x)^m}{\mathrm{d}\alpha}_{|\alpha=0} \tag{A.144}$$

Umgekehrt definiert ein Vektorfeld $\xi(x)$ durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} x^m(\alpha, \underline{x}) = \xi^m(x(\alpha, \underline{x})) \ , \quad x(0, \underline{x}) = \underline{x} \ , \tag{A.145}$$

die Abbildung Φ_α als Abbildung der Anfangswerte $\underline{x}$ auf die Lösung $x(\alpha, \underline{x})$

$$\Phi_\alpha(\underline{x}) = x(\alpha, \underline{x}) \ , \tag{A.146}$$

falls die Integralkurven $x(\alpha, \underline{x})$ für beliebige α existieren. Das Vektorfeld ξ heißt infinitesimale Transformation und Erzeugende der Transformation $\Phi_{\alpha=1}$. Diese Transformation läßt sich als exponentiertes Vektorfeld e^ξ schreiben. Zu Φ_α gehört das erzeugende Vektorfeld $\alpha\,\xi$ und der Relation $\Phi_{\alpha+\beta} = \Phi_\alpha \Phi_\beta$ entspricht $\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\xi} = \mathrm{e}^{\alpha\xi}\mathrm{e}^{\beta\xi}$.

Unter den Transformationen Φ_α ändern sich Tensoren gemäß (A.128). Ihre infinitesimale Transformation, das heißt, die Ableitung der Tensortransformation nach dem Transformationsparameter bei $\alpha = 0$, definiert die Lieableitung längs ξ

$$T'_{k_1 \dots k_r}{}^{l_1 \dots l_s} = T_{k_1 \dots k_r}{}^{l_1 \dots l_s} - \mathcal{L}_\xi T_{k_1 \dots k_r}{}^{l_1 \dots l_s} + O(\xi^2) \ . \tag{A.147}$$

Dabei besteht die Lieableitung $\mathcal{L}_\xi T$ aus einem Verschiebungsterm $\xi(\partial T)$ und aus $r + s$ Termen $(\partial\xi)T$, die von Ableitungen der Jacobimatrizen $\frac{\partial x'}{\partial x}$ stammen

$$\frac{\partial(\Phi_\alpha x)^m}{\partial x^k}_{|\alpha=0} = \delta^m{}_k \ , \quad \partial_\alpha \frac{\partial(\Phi_\alpha x)^m}{\partial x^k}_{|\alpha=0} = \partial_k \xi^m \tag{A.148}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi T_{k_1 \dots k_r}{}^{l_1 \dots l_s} = {} & \xi^m \partial_m T_{k_1 \dots k_r}{}^{l_1 \dots l_s} + \\ & + (\partial_{k_1}\xi^m) T_{m \dots k_r}{}^{l_1 \dots l_s} + \dots + (\partial_{k_r}\xi^m) T_{k_1 \dots m}{}^{l_1 \dots l_s} - \\ & - (\partial_m \xi^{l_1}) T_{k_1 \dots k_r}{}^{m \dots l_s} - \dots - (\partial_m \xi^{l_s}) T_{k_1 \dots k_r}{}^{l_1 \dots m} \ . \end{aligned} \tag{A.149}$$

Die Lieableitung $\mathcal{L}_\xi$ eines Skalarfeldes f ist einfach die partielle Ableitung $\xi^m \partial_m f$ längs des Vektorfeldes ξ.

Die Liebableitung $\mathcal{L}_u v$ eines Vektorfeldes v längs eines Vektorfeldes u ist der Kommutator

$$[u, v] = uv - vu \tag{A.150}$$

der Differentialoperatoren $u = u^m \partial_m$ und $v = v^n \partial_n$

$$u^m \partial_m(v^n \partial_n f) - v^m \partial_m(u^n \partial_n f) = (u^m \partial_m v^n - v^m \partial_m u^n)\, \partial_n f = \big(\mathcal{L}_u v^n\big)\, \partial_n f \ . \tag{A.151}$$

Der Kommutator von Vektorfeldern ist ein Vektorfeld, das linear und nach Produktregel (A.12) auf Funktionen wirkt

$$[u, v](fg) = ([u, v]f)\, g + f\, ([u, v]g) \ . \tag{A.152}$$

Er ist antisymmetrisch, linear und erfüllt für Funktionenvielfache fv die Produktregel

$$[u, v] = -[v, u] \ , \quad [u, v + w] = [u, v] + [u, w] \ , \quad [u, fv] = f\,[u, v] + u(f)\, v \ . \tag{A.153}$$

Der bei Transformationen $\Phi : x \mapsto \Phi(x)$ verschleppte Kommutator stimmt mit dem Kommutator der verschleppten Vektorfelder überein

$$\Phi_*[u, v] = [\Phi_* u, \Phi_* v] \ , \tag{A.154}$$

denn es gilt $\Phi^*((\Phi_* u)h) = u(\Phi^* h)$ (A.139) und für $h = (\Phi_* v)f$ folgt $\Phi^* h = v(\Phi^* f)$, also $\Phi^*((\Phi_* u)(\Phi_* v)f) = uv(\Phi^* f)$, und, wenn wir den in u mit v vertauschten Ausdruck abziehen, $\Phi^*([\Phi_* u, \Phi_* v]f) = [u,v](\Phi^* f) = \Phi^*((\Phi_*[u,v])f)$ für alle Funktionen f.

Die Lieableitung der Metrik

$$\mathcal{L}_\xi g_{mn} = \xi^k \partial_k g_{mn} + (\partial_m \xi^k) g_{kn} + (\partial_n \xi^k) g_{mk} \tag{A.155}$$

ist die infinitesimale Änderung der Metrik unter Abbildungen $\Phi_\alpha : x \mapsto \Phi_\alpha(x)$. Ist die Metrik invariant, so verschwindet diese Lieableitung und die zu ξ gehörigen Abbildungen sind Isometrien. Das bilineare Gleichungssystem $\mathcal{L}_\xi g_{mn} = 0$, die nach Wilhelm Killing benannte Killinggleichung, definiert bei gegebener Metrik alle infinitesimalen Isometrien ξ, bei gegebenem Vektorfeld ξ alle Metriken g_{mn} mit der zu ξ gehörigen Isometrie.

B Liegruppe und Liealgebra

B.1 Linksinvariante Vektorfelder

Eine Liegruppe G ist eine Mannigfaltigkeit, deren Punkte Gruppenelemente sind.

Jedes Gruppenelement g bewirkt durch Multiplikation von links oder rechts eine invertierbare Selbstabbildung der Gruppe

$$L_g : h \mapsto gh \ , \quad R_g : h \mapsto hg \ . \tag{B.1}$$

Hintereinander ausgeführt genügen L_g und $R_{g^{-1}}$ derselben Gruppenverknüpfung wie die Gruppenelemente

$$L_{g_2} \circ L_{g_1} = L_{g_2 g_1} \ , \quad R_{(g_2)^{-1}} \circ R_{(g_1)^{-1}} = R_{(g_2 g_1)^{-1}} \ . \tag{B.2}$$

Die Linksmultiplikation vertauscht mit der Rechtsmultiplikation

$$L_{g_2} \circ R_{g_1} = R_{g_1} \circ L_{g_2} \ . \tag{B.3}$$

Folglich genügt auch die adjungierte Abbildung $\mathrm{Ad}_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$

$$\mathrm{Ad}_g : h \mapsto g h g^{-1} \tag{B.4}$$

der Gruppenverknüpfung $\mathrm{Ad}_{g_2}\mathrm{Ad}_{g_1} = \mathrm{Ad}_{g_2 g_1}$.

Betrachten wir eine Kurve $\Gamma : s \mapsto k(s)$ in der Gruppe G, die für $s = 0$ das Einselement e durchläuft. Ihr Tangentialvektor am Einselement $\delta_{|_e}$ heißt infinitesimale Transformation. Die Kurve wird durch Linksmultiplikation auf Kurven $\Gamma_h = L_h \Gamma : s \mapsto hk(s)$ abgebildet, die mit ihrer Ableitung nach s bei $s = 0$ an jedem Punkt h einen Tangentialvektor $\delta_{|_h}$ definieren. Dieses Vektorfeld δ, das durch Linksmultiplikation aus einem Vektor am Einselement entsteht, ist invariant unter Linksmultiplikation oder, kürzer, linksinvariant. Denn die durch Linksmultiplikation verschleppte Kurve $L_g \Gamma_h$ stimmt mit Γ_{gh} überein.

Die linksinvarianten Vektorfelder bilden einen Vektorraum mit derselben Dimension wie die Gruppe G, denn durch das Einselement gibt es $\dim(G)$ Kurven Γ mit linear unabhängigen Tangentialvektoren und zugehörigen linksinvarianten Vektorfeldern und umgekehrt ist ein Vektorfeld auf der ganzen Gruppe durch die geforderte Linksinvarianz festgelegt, wenn es an einem Punkt gewählt ist.

Sind zwei Vektorfelder u und v linksinvariant, so ist auch ihr Kommutator linksinvariant, denn für jede Transformation $y \mapsto y'$ von Punkten der Mannigfaltigkeit ist der

Kommutator der transformierten Vektorfelder u' und v' das Transformierte des Kommutators der ursprünglichen Vektorfelder $[u', v'] = ([u, v])'$ (A.154). Also bilden die linksinvarianten Vektorfelder eine Liealgebra. Das heißt, sie bilden einen Vektorraum, in dem ein bilineares, antisymmetrisches Produkt, die Lie-Klammer $[A, B] = -[B, A]$, existiert, das die Jacobi-Identität erfüllt

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \ . \tag{B.5}$$

Die Lie-Klammer der linksinvarianten Vektorfelder ist ihr Kommutator. Da wiederholtes Anwenden von Vektorfeldern assoziativ ist, heben sich die zwölf Terme, die sich bei Ausschreiben der Kommutatoren in (B.5) ergeben, paarweise weg und die Jacobi-Identität gilt ohne weiteres.

Betrachten wir eine Basis δ_i, $i = 1, \dots, \dim(G)$, linksinvarianter Vektorfelder. Sie bilden an jedem Punkt der Gruppe eine Basis des Tangentialraumes, insbesondere für infinitesimale Transformationen, die den Tangentialraum am Einselement bilden. Der Kommutator solcher Basiselemente ist wieder ein linksinvariantes Vektorfeld und läßt sich als Linearkombination der Basis schreiben

$$[\delta_i, \delta_j] = f_{ij}{}^k \delta_k \ . \tag{B.6}$$

Die Strukturkonstanten $f_{ij}{}^k$ sind antisymmetrisch und reell

$$f_{ij}{}^k = -f_{ji}{}^k \tag{B.7}$$

und durch die Jacobi-Identität eingeschränkt

$$f_{ij}{}^l f_{lk}{}^m + f_{jk}{}^l f_{li}{}^m + f_{ki}{}^l f_{lj}{}^m = 0 \ . \tag{B.8}$$

Die Liealgebra heißt abelsch, falls alle infinitesimalen Transformationen miteinander kommutieren und folglich die Strukturkonstanten verschwinden.

Da zu jeder Lösung der Jacobi-Identität (B.8) eine Liealgebra gehört und umgekehrt, kann man die Algebren durch die Lösungen der Jacobi-Identität klassifizieren [66]. Für die sogenannten einfachen Liealgebren sind die Lösungen vollständig bekannt. Außer den Liealgebren, die zu den Gruppen der unitären oder symplektischen oder orthogonalen Transformationen gehören, gibt es eine Handvoll weiterer Liealgebren, die zu den exzeptionellen Gruppen G_2, F_4, E_6, E_7 und E_8 gehören.

Durch

$$(\delta_i, \delta_j) = -f_{ik}{}^l f_{jl}{}^k \tag{B.9}$$

ist in jeder Liealgebra ein Skalarprodukt erklärt, das bei halbeinfachen Liealgebren nicht entartet ist und auf der Liegruppe eine Metrik definiert, die invariant unter Linksmultiplikation ist.

Wirken die infinitesimalen Transformationen $\delta_i : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear auf einem Vektorraum $\mathcal{V}$, so sind sie durch ihre Wirkung auf eine Basis e_a festgelegt. Denn jeder Vektor u ist eine Linearkombination $u = e_a u^a$ mit Komponenten u^a, die wir einfachheitshalber

nach rechts schreiben, und es gilt $\delta_i(e_a u^a) = (\delta_i e_a) u^a$. Entwickeln wir die transformierten Basisvektoren $\delta_i e_a$

$$\delta_i e_a = e_b T_i{}^b{}_a \ , \tag{B.10}$$

so sind die Koeffizienten $T_i{}^b{}_a$ Elemente von Matrizen T_i, die dieselben Kommutatorrelationen wie die Basis δ_i erfüllen, das heißt, die Matrizen T_i stellen die Liealgebra dar

$$\begin{aligned} \delta_i \delta_j e_a = \delta_i(e_b T_j{}^b{}_a) &= e_c T_i{}^c{}_b T_j{}^b{}_a = e_c (T_i T_j)^c{}_a \ , \\ f_{ij}{}^k e_c T_k{}^c{}_a = f_{ij}{}^k \delta_k e_a = [\delta_i, \delta_j] e_a &= e_c [T_i T_j]^c{}_a \ , \\ [T_i, T_j] &= f_{ij}{}^k T_k \ . \end{aligned} \tag{B.11}$$

Ein Beispiel einer nichtabelschen Liealgebra sind infinitesimale Lorentztransformationen in $d \geq 3$ Dimensionen. Sie bilden Vektoren e_a, die orthonormal sind $e_a \cdot e_b = \eta_{ab}$, auf $\delta_\omega e_a = e_c \, \omega^c{}_a$ ab und lassen die Skalarprodukte unverändert

$$0 = \delta_\omega e_a \cdot e_b + e_a \cdot \delta_\omega e_b = (e_c \, \omega^c{}_a) \cdot e_b + e_a \cdot (e_c \, \omega^c{}_b) = \omega^c{}_a \eta_{cb} + \eta_{ac} \, \omega^c{}_b \ . \tag{B.12}$$

Es ist also $\omega_{ab} = \eta_{ac} \omega^c{}_b$ antisymmetrisch (4.109)

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba} \ . \tag{B.13}$$

Der Kommutator mit einer zweiten solchen Transformation $\delta_{\omega'} e_a = e_b \, \omega'^b{}_a$ ist wieder eine infinitesimale Lorentztransformation, denn

$$\begin{aligned} [\delta_{\omega'}, \delta_\omega] e_a = \delta_{\omega'}(e_b \, \omega^b{}_a) - \delta_\omega(e_b \, \omega'^b{}_a) = e_c(\omega'^c{}_b \, \omega^b{}_a - \omega^c{}_b \, \omega'^b{}_a) = \delta_{\omega''} e_a \ , \\ \omega''^c{}_a = \omega'^c{}_b \, \omega^b{}_a - \omega^c{}_b \, \omega'^b{}_a \ , \end{aligned} \tag{B.14}$$

und $\eta\omega''$ ist antisymmetrisch, da η^{-1} symmetrisch und $\eta\omega'$ und $\eta\omega$ antisymmetrisch sind.

Die infinitesimalen Lorentztransformationen lassen sich mit Koeffizienten $\omega^{ab} = \eta^{bc} \omega^a{}_c$ als Linearkombination $\frac{1}{2} \omega^{ab} l_{ab}$ von Transformationen l_{ab} schreiben

$$l_{ab} e_c = e_a \eta_{bc} - e_b \eta_{ac} = e_d \big(\delta^d{}_a \eta_{bc} - \delta^d{}_b \eta_{ac} \big) \ . \tag{B.15}$$

Wir zählen die Basis $l_{ab} = -l_{ba}$ infinitesimaler Transformationen durch antisymmetrische Indexpaare ab, wobei $a < b$ die natürlichen Zahlen bis d durchlaufen. Um Verwechslungen mit dem Kronecker-Delta $\delta^a{}_b$ (A.29) zu vermeiden, bezeichnen wir die infinitesimalen Lorentztransformationen mit l_{ab}.

Der Kommutator zweier infinitesimaler Lorentztransformationen ist

$$\begin{aligned} [l_{ab}, l_{cd}] e_f &= l_{ab}\big(e_c \eta_{df} - e_d \eta_{cf}\big) - l_{cd}\big(e_a \eta_{bf} - e_b \eta_{af}\big) = \\ &= \big(e_a \eta_{bc} - e_b \eta_{ac}\big) \eta_{df} - \big(e_a \eta_{bd} - e_b \eta_{ad}\big) \eta_{cf} - ab \leftrightarrow cd = \\ &= \big(-\eta_{ac} l_{bd} + \eta_{bc} l_{ad} + \eta_{ad} l_{bc} - \eta_{bd} l_{ac}\big) e_f \ . \end{aligned} \tag{B.16}$$

Die infinitesimalen Lorentztransformationen genügen also der Liealgebra

$$[l_{ab}, l_{cd}] = -\eta_{ac} l_{bd} + \eta_{bc} l_{ad} + \eta_{ad} l_{bc} - \eta_{bd} l_{ac} \ . \tag{B.17}$$

Der Orbit einer Transformationsgruppe

Eine Gruppe G wirkt als Transformationsgruppe auf eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, wenn jedes Element g der Gruppe eine invertierbare Selbstabbildung von $\mathcal{M}$ ist

$$g : \begin{cases} \mathcal{M} \to \mathcal{M} \\ p \mapsto g(p) \end{cases} , \tag{B.18}$$

wobei hintereinander Ausführen das Produkt $g_2(g_1(p)) = (g_2 g_1)(p)$ definiert.

Jeder Punkt p der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ definiert eine Untergruppe, die Stabilitätsgruppe H_p des Punktes p, deren Elemente den Punkt p invariant lassen

$$H_p = \{h \in G : h(p) = p\} . \tag{B.19}$$

Beispielsweise ist der Punkt $x = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ bei Drehungen $G = \mathrm{SO}(n)$ invariant unter den Drehungen $H_x = \mathrm{SO}(n-1)$ in $n-1$ Dimensionen.

Wie jede Untergruppe H einer Gruppe G, so definiert die Stabilitätsgruppe H_p durch

$$g \overset{H_p}{\sim} g' \Leftrightarrow g^{-1} g' \in H_p . \tag{B.20}$$

eine Äquivalenzrelation zwischen Gruppenelementen von G. Zwei Transformationen g und g' sind genau dann H_p-äquivalent, wenn sie p auf denselben Punkt abbilden

$$g(p) = g'(p) \Leftrightarrow p = g^{-1} g'(p) \Leftrightarrow g^{-1} g' \in H_p . \tag{B.21}$$

Die Menge der H_p-Äquivalenzklassen bezeichnet man mit G/H_p.

Auf p angewendet erzeugt die Transformationsgruppe eine Untermannigfaltigkeit, den Orbit O_p durch p, der aus allen Punkten q besteht, in die p durch Elemente der Gruppe G transformiert wird

$$O_p = \{q \in \mathcal{M} : (\exists g \in G : g(p) = q)\} . \tag{B.22}$$

Da jeder Punkt q des Orbits zu genau einer Äquivalenzklasse aus G/H_p gehört, ist der Orbit die gleiche Mannigfaltigkeit wie die Menge aller Äquivalenzklassen

$$O_p = G/H_p . \tag{B.23}$$

Zudem wirkt die Transformationsgruppe G auf dem Orbit O_p und auf G/H_p auf gleiche Weise durch Linksmultiplikation. Der Orbit und seine Transformationen sind vollständig durch die Gruppe G und die Untergruppe H_p festgelegt [31, Kapitel II, Theorem 3.2].

Beispielsweise erzeugen für $n > 2$ die Drehungen $\mathrm{SO}(n)$, auf $x = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ angewendet, als Orbit die $n-1$-dimensionale Kugeloberfläche S^{n-1} (S wie *Sphäre*)

$$\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) = S^{n-1} , \quad S^{n-1} = \{y : \sum (y^i)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n . \tag{B.24}$$

Sind von einem Orbit nur die infinitesimalen Transformationen in einer Umgebung bekannt, so handelt es sich bei dem Orbit um einen Quotienten G/H_p der zu allen infinitesimalen Transformationen gehörigen universellen Überlagerungsgruppe G. H_p ist eine möglicherweise unzusammenhängende Untergruppe, deren mit der Eins zusammenhängende Elemente von den infinitesimalen Transformationen erzeugt werden, die bei p verschwinden.

Man nennt $\widetilde{\mathcal{M}}$ eine Überlagerung einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, wenn es eine stetige Abbildung π von $\widetilde{\mathcal{M}}$ nach $\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft gibt, daß zu jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ eine Umgebung $\mathcal{U}$, $p \in \mathcal{U}$, existiert, deren Urbild $\pi^{-1}\mathcal{U} = \cup_i \mathcal{V}_i$ aus einer abzählbaren Menge disjunkter Umgebungen $\mathcal{V}_i$ besteht, die durch π umkehrbar auf $\mathcal{U}$ abgebildet werden. Ist q ein fest gewählter Punkt in $\mathcal{M}$ und bezeichnet $\Gamma_{p\,i}$ Äquivalenzklassen von Kurven von q zu p, die als äquivalent angesehen werden, wenn sie stetig ineinander verformt werden können, so ist die Menge aller $\Gamma_{p\,i}$ mit $\pi : \Gamma_{p\,i} \mapsto p$ eine Überlagerung von $\mathcal{M}$. Sie ist universell, da sie Überlagerung jeder Überlagerung von $\mathcal{M}$ ist.

Die infinitesimale Erzeugende von $\mathrm{SO}(2)$ erzeugt die additive Gruppe $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, die Überlagerung von $\mathrm{SO}(2)$. Jeder Orbit ist ein Kreis S^1 oder seine Überlagerung $\mathbb{R}$ oder besteht aus nur einem Punkt.

Die Stabilitätsgruppe H_q jedes Punktes $q = g(p)$ des Orbits durch p ist zu H_p konjugiert $H_{g(p)} = g H_p g^{-1}$.

Existiert auf einem Orbit G/H_p ein Tensorfeld v, das unter allen zu $g \in G$ gehörigen Tensortransformationen T_g invariant ist, so hat es am Punkt p einen Wert $v_{|p}$, der unter H_p invariant ist, $T_h v_{|p} = v_{|p}\ \forall h \in H_p$. An allen anderen Punkten $q = g(p)$ des Orbits ist v durch $v_{|p}$ festgelegt, $v_{|g(p)} = T_g v_{|p}$.

B.2 Darstellungen

Verschiedene Gruppen G und L können verwandte Gruppenverknüpfungen haben. In solch einem Fall gibt es eine Abbildung

$$D : \begin{cases} G & \to & L \\ g & \mapsto & D_g \end{cases} \tag{B.25}$$

von Gruppenelementen $g \in G$ auf $D_g \in L$, die Produkte auf Produkte abbildet

$$D_{g_1 \circ g_2} = D_{g_1} \circ D_{g_2} . \tag{B.26}$$

Besteht dabei L aus der Gruppe $\mathrm{GL}(n)$ der invertierbaren, linearen Transformationen eines n-dimensionalen Vektorraumes $\mathcal{V}$, so heißt die Abbildung D Darstellung von G. Eine n-dimensionale Darstellung bildet die Gruppe G auf $\mathrm{GL}(n)$ ab. Das Bild $D(G)$ der Gruppe G ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n)$.

Zum Beispiel gehört zu jeder Lorentztransformation $x \mapsto x' = \Lambda\, x$ der Raumzeit auch eine Transformation $P \mapsto T_\Lambda(P)$ der Erhaltungsgrößen P, die der jeweilige Beobachter zum Beispiel an einem Teilchen feststellt. Hintereinander ausgeführte Transformationen der Erhaltungsgrößen müssen mit derjenigen Transformation übereinstimmen, die zu hintereinander ausgeführten Lorentztransformationen gehört

$$T_{\Lambda_2 \Lambda_1}(P) = T_{\Lambda_2}(T_{\Lambda_1}(P)) \quad \text{oder} \quad T_{\Lambda_2 \Lambda_1} = T_{\Lambda_2} \circ T_{\Lambda_1} . \tag{B.27}$$

Das Transformationsgesetz für Erhaltungsgrößen hat also dieselbe Gruppenverknüpfung wie die Transformationen der Koordinaten. Sind die Erhaltungsgrößen additiv und transformieren Summen und Vielfache der Erhaltungsgrößen in Summen und Vielfache der transformierten Erhaltungsgrößen,

$$(P+Q) \mapsto T(P) + T(Q)\ , \quad (aP) \mapsto aT(P)\ , \tag{B.28}$$

so wirken die Transformationen T_Λ linear auf dem Vektorraum der additiven Erhaltungsgrößen und sind eine Darstellung der Lorentztransformationen. Die einfachste Darstellung der Lorentztransformationen ist die fundamentale Darstellung

$$T_\Lambda(P) = \Lambda\, P\ , \tag{B.29}$$

die als Transformationsgesetz des Viererimpulses auftritt. Die anderen möglichen Darstellungen sind Tensortransformationen. Sie treten bei der Transformation des Drehimpulses und des Energieschwerpunktes (4.118) auf.

Wählen wir im Vektorraum $\mathcal{V}$ Basisvektoren e_a, wobei a die natürlichen Zahlen bis n durchläuft, so gehört zu jeder linearen Transformation D eine Matrix – wir nennen sie einfachheitshalber ebenfalls D und bezeichnen mit $D^b{}_a$ ihre Matrixelemente in der Zeile b und der Spalte a – deren Spalten die Komponenten der transformierten Basisvektoren enthalten

$$D : e_a \mapsto e_b D^b{}_a\ . \tag{B.30}$$

Insbesondere sind $\delta^b{}_a$ (A.29) die Matrixelemente der identischen Abbildung $D = \mathbf{1}$.

Ein Vektor $v = e_a v^a$ mit Komponenten v^a wird von D linear auf einen Vektor mit Komponenten $v'^a = D^a{}_b v^b$ abgebildet

$$D : e_a v^a \mapsto (e_b D^b{}_a) v^a = e_a (D^a{}_b v^b)\ . \tag{B.31}$$

Das Matrixprodukt der zu linearen Transformationen gehörigen Matrizen gehört zu den hintereinander ausgeführten Transformationen

$$\begin{gathered} e_a \overset{D_2}{\mapsto} e_b {D_2}^b{}_a \overset{D_1}{\mapsto} e_c {D_1}^c{}_b {D_2}^b{}_a\ , \\ D_1 \circ D_2 : e_a \mapsto e_c (D_1 \cdot D_2)^c{}_a\ , \qquad (D_1 \cdot D_2)^c{}_a = {D_1}^c{}_b {D_2}^b{}_a\ . \end{gathered} \tag{B.32}$$

Kontragrediente und konjugierte Darstellung

Lineare Abbildungen φ vom Vektorraum $\mathcal{V}$ in die reellen oder komplexen Zahlen können addiert und mit Zahlen multipliziert werden und bilden den zu $\mathcal{V}$ dualen Vektorraum $\mathcal{V}^*$. Die linearen Abbildungen φ werden durch ihre Werte $\varphi(e_a) = \varphi_a$ auf Basisvektoren festgelegt, denn $v = e_a v^a$ wird auf

$$\varphi(v) = \varphi(e_a v^a) = \varphi(e_a) v^a = \varphi_a v^a \tag{B.33}$$

abgebildet. Die Abbildungen $e^a \in \mathcal{V}^*$, die Vektoren v auf ihre Komponenten $e^a(v) = v^a$ abbilden, bilden die zu e_a duale Basis des Dualraumes

$$e^a(e_b) = \delta^a{}_b\ . \tag{B.34}$$

Jedes Element des Dualraumes läßt sich als $\varphi = \varphi_a e^a$ schreiben, dabei sind φ_a die Komponenten bezüglich der dualen Basis.

Zu jeder invertierbaren, linearen Transformation eines Vektorraumes gehört die kontragrediente Transformation des dualen Vektorraumes, die durch die Forderung

$$\varphi'(v') = \varphi(v) \tag{B.35}$$

definiert ist, daß jeder transformierte duale Vektor φ' auf transformierte Vektoren v' angewendet dasselbe ergibt wie der ursprüngliche duale Vektor φ auf den ursprünglichen Vektor v. Für die duale Basis bedeutet dies

$$D : e^a \mapsto e'^a = D^{-1\,a}{}_b e^b\ . \tag{B.36}$$

Transformieren die Komponenten von Vektoren durch Multiplikation mit einer Matrix D, so transformieren unter der zugehörigen kontragredienten Transformation die Komponenten von dualen Vektoren $\varphi = \varphi_a e^a$ durch Multiplikation mit der Matrix $D^{\mathrm{T}\,-1}$

$$\varphi = \varphi_a e^a \mapsto \varphi_a e'^a = \varphi_a D^{-1\,a}{}_b e^b = (D^{\mathrm{T}\,-1}{}_a{}^b \varphi_b) e^a = \varphi'_a e^a = \varphi'\ . \tag{B.37}$$

Sind D_g Darstellungsmatrizen, so sind wegen

$$D_{g_2}^{\mathrm{T}\,-1} \cdot D_{g_1}^{\mathrm{T}\,-1} = (D_{g_1}^{\mathrm{T}} \cdot D_{g_2}^{\mathrm{T}})^{-1} = (D_{g_2} \cdot D_{g_1})^{\mathrm{T}\,-1} = D_{g_2 g_1}^{\mathrm{T}\,-1} \tag{B.38}$$

auch die transponierten, invertierten Matrizen $D_g^{\mathrm{T}\,-1}$ Darstellungsmatrizen. Die Darstellung $D^{\mathrm{T}\,-1}$ heißt zu D kontragrediente Darstellung. Ebenso sind die komplex konjugierten Matrizen $\overline{D}_g$ Darstellungsmatrizen und definieren die zu D komplex konjugierte Darstellung $\overline{D}$.

Mit jeder Darstellung D sind daher vier Darstellungen

$$D\ , \quad \overline{D}\ , \quad D^{\mathrm{T}\,-1}\ , \quad \overline{D}^{\mathrm{T}\,-1}\ , \tag{B.39}$$

natürlich gegeben. Die Darstellung ist reell, wenn die Darstellungsmatrizen reell sind, $\overline{D}_g = D_g$, orthogonal, wenn sie orthogonal sind, $D_g^{\mathrm{T}\,-1} = D_g$, symplektisch, falls mit einer schiefsymmetrischen Matrix $\mathrm{j}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{j}$ für jede Darstellungsmatrix $D_g^{\mathrm{T}\,-1} = \mathrm{j} D_g \mathrm{j}^{-1}$ gilt, und unitär, wenn die Darstellungsmatrizen unitär sind, $\overline{D}_g^{\mathrm{T}\,-1} = D_g$.

Normalerweise sind die Darstellungen D, $\overline{D}$, $D^{\mathrm{T}\,-1}$ und $\overline{D}^{\mathrm{T}\,-1} = D^{\dagger\,-1}$ verschieden. Unter welcher Darstellung ein Vektor transformiert, geben wir durch das Indexbild seiner Komponenten an

$$\begin{aligned} t'^a &= D^a{}_b t^b\ , & u'_a &= (D^{\mathrm{T}\,-1})_a{}^b u_b\ , \\ v'^{\dot a} &= (\overline{D})^{\dot a}{}_{\dot b} v^{\dot b}\ , & w'_{\dot a} &= (D^{\dagger\,-1})_{\dot a}{}^{\dot b} w_{\dot b}\ . \end{aligned} \tag{B.40}$$

Transformiert ein Vektor unter der Darstellung D, so bezeichnen wir seine Komponenten mit einem oberen Index, transformiert er unter $D^{\mathrm{T}\,-1}$, so schreiben wir den Index unten. Zum komplex konjugierten Transformationsgesetz gehört ein gepunkteter Index.

Der erste Index der Matrixelemente $D^a{}_b$ der Transformationsmatrix bezeichnet die Zeile, der zweite die Spalte. Dabei schreiben wir den ersten Index von D nach oben.

Er steht dann in derselben Höhe wie der Index der Komponente des transformierten Vektors. Die Matrix D^{-1} ist wie D und die **1**-Matrix ein Element der Matrixgruppe $D(G)$. Ihre Matrixelemente werden mit demselben Indexbild geschrieben

$$D^a{}_b\,(D^{-1})^b{}_c = \delta^a{}_c\ . \tag{B.41}$$

Die Matrixelemente der transponierten Matrix erhält man durch Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex. Es bezeichnet der erste Index die Zeile, also entsteht das Indexbild

$$(D^{\mathrm{T}\,-1})_a{}^b = (D^{-1})^b{}_a\ . \tag{B.42}$$

das zur Konvention paßt, daß im Transformationsgesetz von Komponenten jeweils der erste Index von D oder $D^{T\,-1}$ die transformierte Komponente bezeichnet und der zweite Index ein Summationsindex ist.

Tensortransformation

Zu jeder invertierbaren, linearen Transformation des Vektorraums $\mathcal{V}$ gehört auf natürliche Art die kontragrediente Transformation des dualen Vektorraumes (B.37) und die Transformation von Tensoren, die durch die Forderung

$$T'(v',\dots,w',\varphi',\dots,\lambda') = T(v,\dots,w,\varphi,\dots,\lambda) \tag{B.43}$$

definiert ist, daß der transformierte Tensor T' angewendet auf die transformierten Argumente $v',\dots,w',\varphi',\dots,\lambda'$ dasselbe ergibt wie der ursprüngliche Tensor T angewendet auf die ursprünglichen Argumente $v,\dots,w,\varphi,\dots,\lambda$.

Folglich hat wegen (B.30) und (B.36) ein transformierter Tensor der Stufe (u,o) die Komponenten (A.126)

$$T'{}_{a_1\dots a_u}{}^{b_1\dots b_o} = (D^{\mathrm{T}\,-1})_{a_1}{}^{c_1}\dots(D^{\mathrm{T}\,-1})_{a_u}{}^{c_u} D^{b_1}{}_{d_1}\dots D^{b_o}{}_{d_o} T_{c_1\dots c_u}{}^{d_1\dots d_o}\ . \tag{B.44}$$

Das Transformationsgesetz der Tensorkomponenten läßt sich leicht am Indexbild ablesen; für jeden oberen Index tritt eine Transformationsmatrix D, für jeden unteren eine Matrix $D^{\mathrm{T}\,-1}$ auf.

Eine Invariante $T' = T$ ist ein Tensor ohne Index, solch ein Tensor heißt auch Skalar. Insbesondere ist die Summe $u_a t^a$ invariant. Hierher rührt der Name kontragrediente Transformation: die Transformation mit $D^{\mathrm{T}\,-1}$ von Komponenten mit unterem Index ist entgegengesetzt zur Transformation mit D.

Das Tensortransformationsgesetz wird wegen der Vielzahl der Indizes als unüberschaubar und kompliziert empfunden. Tatsächlich ist es im Vergleich zu anderen Transformationsgesetzen sehr einfach, denn es ist linear und die Matrixelemente der linearen Transformation sind Produkte der Matrixelemente der Darstellungsmatrizen. Tensortransformationen lassen sich daher leicht hintereinander ausführen. Zum Beispiel transformieren $\tan\theta/2$ (3.21) oder κ (2.14) unter Geschwindigkeitstransformationen längs einer Achse als Tensoren, das Transformationsgesetz von $\cos\theta$ (3.24) oder v (2.16) ist vergleichsweise unübersichtlich.

Als Komponenten einer Tensordichte vom Gewicht w bezeichnet man Funktionen, deren Transformation die Determinante der Transformationsmatrix enthält

$$T'{}_{a_1\dots a_u}{}^{b_1\dots b_o} = |\det D|^{-w}\,(D^{\mathrm{T}\,-1})_{a_1}{}^{c_1}\dots(D^{\mathrm{T}\,-1})_{a_u}{}^{c_u} D^{b_1}{}_{d_1}\dots D^{b_o}{}_{d_o} T_{c_1\dots c_u}{}^{d_1\dots d_o}\ . \tag{B.45}$$

Die Transformationen von Tensoren und Tensordichten sind Darstellungen der Transformationen D, denn aus der linearen Beziehung der Komponenten, $T' = L(D)T$, folgt $L(D_1D_2) = L(D_1)L(D_2)$ für hintereinander ausgeführte Transformationen.

Weil die Transformationen von Tensoren und Tensordichten linear sind, haben sie einen Fixpunkt. Verschwindet ein Tensor, so verschwindet auch der transformierte Tensor.

Das Kronecker-Delta (A.29) definiert numerisch die Komponenten eines Tensors mit einem oberen und einem unteren Index. Der so definierte Tensor ist unter allen linearen Transformationen invariant

$$\delta'^a{}_b = D^a{}_c(D^{T\,-1})_b{}^d\delta^c{}_d = D^a{}_c\delta^c{}_d D^{-1\,d}{}_b = D^a{}_c D^{-1\,c}{}_b = \delta^a{}_b\ . \tag{B.46}$$

Unitäre Transformationen

Unitäre, orthogonale und symplektische Transformationen sind lineare Transformationen, die zugehörige quadratische Formen invariant lassen.

Seien z^a die komplexen Komponenten eines Vektors aus einem komplexen Vektorraum, dann sind die Transformationen

$$z'^a = U^a{}_b z^b \tag{B.47}$$

unitär, wenn das Betragsquadrat $\sum_a (z^a)^* z^a$ für alle Vektoren invariant ist, wenn also die komplex konjugierten Komponenten einen kontragredienten Vektor $\overline{z}_a = (z^a)^*$ definieren.

Mit der Schreibweise $\overline{z}^{\dot a} := (z^a)^*$ und $\overline{U}^{\dot a}{}_{\dot b} = (U^a{}_b)^*$ ergibt sich aus (B.47),

$$\overline{z}'^{\dot a} = \overline{U}^{\dot a}{}_{\dot b}\overline{z}^{\dot b}\ , \tag{B.48}$$

für das invariante Betragsquadrat $\sum_a (z^a)^* z^a = \overline{z}^{\dot a} z^b \delta_{\dot a b}$,

$$\overline{z}'^{\dot a} z'^b \delta_{\dot a b} = \overline{U}^{\dot a}{}_{\dot c}\, U^b{}_d\, \delta_{\dot a b}\, \overline{z}^{\dot c}\, z^d = \delta_{\dot c d}\, \overline{z}^{\dot c}\, z^d\ . \tag{B.49}$$

Da dies für alle z^a erfüllt ist, gilt

$$\overline{U}^{\dot a}{}_{\dot c}\, U^b{}_d\, \delta_{\dot a b} = \delta_{\dot c d}\ . \tag{B.50}$$

Dies ist eine Tensortransformation wie (B.44), wobei dem Indexbild entsprechend auch konjugiert komplexe Transformationen auftreten. Der numerisch definierte Tensor, dessen Komponenten $\delta_{\dot c d} = \delta^c{}_d$ Zahlenwerte Null oder Eins haben, behält seinen Wert, wenn man ihn, so wie sein Indexbild angibt, mit unitären Transformationen transformiert. Mit ihm läßt sich die Beziehung $\overline{z}_b = \overline{z}^{\dot b}$ kovariant schreiben

$$\overline{z}_b = \delta_{\dot a b}\overline{z}^{\dot a}\ . \tag{B.51}$$

Gleichung (B.50) besagt, daß die Matrizen U mit Matrixelementen $U^a{}_b$ die Gleichung $U^{*\mathrm{T}} \cdot U = 1$ oder $U^\dagger = U^{-1}$ erfüllen, also unitär sind. Sie bilden die Gruppe $\mathrm{U}(N)$ der komplexen, unitären $N\times N$-Matrizen. Die Untergruppe der unitären Matrizen, deren Determinante den speziellen Wert 1 hat, heißt *spezielle* unitäre Gruppe $\mathrm{SU}(N)$.

Die Eigenwerte λ von unitären Transformationen liegen auf dem komplexen Einheitskreis $|\lambda|^2 = 1$, denn jeder transformierte Eigenvektor $U^a{}_b z^b = \lambda z^a$ hat unveränderte und nichtverschwindende Länge, $0 = (U^a{}_b z^b)^* U^a{}_c z^c - (z^a)^* z^a = (|\lambda|^2 - 1)(z^a)^* z^a$.

Orthogonale Transformationen

Die Lorentzgruppe $\mathrm{O}(p,q)$ besteht aus den reellen, linearen, längentreuen Transformationen Λ der Punkte x

$$x'^n = \Lambda^n{}_m x^m \tag{B.52}$$

eines reellen, N-dimensionalen Vektorraums, $N = p + q$, des Minkowskiraumes $\mathbb{R}^{p,q}$. Da die Transformationen reell sind, brauchen gepunktete Indizes nicht eingeführt zu werden.

Lorentztransformationen sind längentreu, das heißt, sie lassen das Längenquadrat $x^m x^n \eta_{mn}$ invariant. Dabei sind $\eta_{mn} = \eta_{nm}$ die Matrixelemente einer symmetrischen, invertierbaren Matrix η, die bei geeigneter Wahl der Basis diagonal ist und die p positive und q negative Diagonalelemente hat (A.107). Weil das Längenquadrat aller Vektoren x^m invariant ist

$$x'^m x'^n \eta_{mn} = \Lambda^m{}_k \Lambda^n{}_l \eta_{mn} x^k x^l = \eta_{kl} x^k x^l \ , \tag{B.53}$$

ist η_{mn} ein numerisch invarianter Tensor

$$\Lambda^m{}_k \Lambda^n{}_l \eta_{mn} = \eta_{kl} \ . \tag{B.54}$$

Daher transformiert $\eta_{nm} x^m$, entsprechend zu (B.51), kontragredient zum Vektor x^n. Um Arbeit zu sparen, schreibt man x_n für $\eta_{nm} x^m$. Bezeichnen wir die Matrixelemente der inversen Matrix η^{-1} als η^{mn} (A.108), dann gilt umgekehrt $x^m = \eta^{ml} x_l$. Diese Konvention heißt Index Hoch- und Runterziehen

$$x_n = \eta_{nm} x^m \ , \quad x^m = \eta^{mn} x_n \ . \tag{B.55}$$

Falls das Längenquadrat definit ist, $\eta = -\mathbf{1}$ oder $\eta = \mathbf{1}$, $p = 0$ oder $q = 0$, so schreiben wir kürzer $\mathrm{O}(N)$ statt $\mathrm{O}(N,0)$ oder $\mathrm{O}(0,N)$. Dann besagt (B.54) $\Lambda^{\mathrm{T}} = \Lambda^{-1}$. Die Länge wird von orthogonalen Transformationen $\Lambda \in \mathrm{O}(N)$ oder, weniger mathematisch klingend, von Drehspiegelungen invariant gelassen. Unter Drehspiegelungen transformieren Vektoren mit einem oberen Index und Vektoren mit einem unteren Index gleich, denn Drehspiegelungen Λ sind sich selbst kontragredient, $\Lambda^{\mathrm{T}\,-1} = \Lambda$.

Symplektische Transformationen

Die Gruppe der symplektischen Transformationen $\mathrm{Sp}(N)$ besteht aus Transformationen

$$x'^n = S^n{}_m x^m \ , \tag{B.56}$$

die eine antisymmetrische Bilinearform $\langle x, y\rangle = x^m y^n \mathrm{j}_{mn}$ mit $\mathrm{j}_{mn} = -\mathrm{j}_{nm}$ in einem reellen, $2N$-dimensionalen Vektorraum invariant lassen. Die Bilinearform ist nicht entartet, das heißt, j_{mn} sind Matrixelemente einer invertierbaren Matrix. Sie hat in geeigneter Basis die Form

$$\mathrm{j} = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{j}^2 = -1 \ . \tag{B.57}$$

Solch eine antisymmetrische Matrix tritt als Poisson-Klammer der Phasenraumkoordinaten in der Hamiltonschen Mechanik auf. Unter symplektischen Transformationen ist j_{mn} ein numerisch invarianter Tensor

$$S^m{}_k S^n{}_l \mathrm{j}_{mn} = \mathrm{j}_{kl} \ , \tag{B.58}$$

der zum Runterziehen von Indizes verwendet werden kann. Mit der inversen Matrix j^{-1} werden sie wieder hochgezogen. Wie bei der Metrik η bezeichnet man die Matrixelemente der inversen Matrix $\mathrm{j}^{-1} = -\mathrm{j}$ einfach mit j^{nm} und entnimmt der Indexstellung, daß es sich um die inverse Matrix handelt

$$x_n = \mathrm{j}_{nm} x^m \ , \ x^n = \mathrm{j}^{nm} x_m \ , \ \mathrm{j}^{nm} = -\mathrm{j}_{nm} \ , \ \mathrm{j}^{nl}\mathrm{j}_{lm} = \delta^n{}_m \ . \tag{B.59}$$

Beim Hoch- und Runterziehen der Indizes ist auf die Reihenfolge der Indizes von j zu achten, da j antisymmetrisch ist.

Speziell lineare Transformationen

Die speziellen, linearen Transformationen in N Dimensionen, deren Determinante den speziellen Wert 1 haben, die also volumentreu sind, bilden die Gruppe $\mathrm{SL}(N)$. Sie lassen den ε-Tensor invariant, der durch (A.60) numerisch definiert ist. Denn die Determinante einer Matrix D ist durch

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N} \det D = D^{i_1}{}_{j_1} D^{i_2}{}_{j_2} \dots D^{i_N}{}_{j_N} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_N} \ . \tag{B.60}$$

definiert (I.6). Also ist der ε-Tensor invariant, wenn die Determinante der Transformationsmatrix D Eins ist.

Anders gelesen besagt (B.60), daß $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$ die Komponenten einer Tensordichte vom Gewicht 1 sind (B.45), die unter beliebigen linearen Transformationen invariant ist.

Darstellungen von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Insbesondere ist im Fall $N = 2$ der ε-Tensor

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha} \ , \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \ , \quad \varepsilon^{12} = 1 \ , \tag{B.61}$$

invariant unter der Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ aller linearen Transformationen eines zweidimensionalen, komplexen Raumes, deren Determinante jeweils den speziellen Wert 1 hat. Die Elemente dieses Vektorraumes nennen wir Spinoren. Ihre Transformation

$$\chi'^\alpha = M^\alpha{}_\beta \chi^\beta \ , \quad M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ , \tag{B.62}$$

ist äquivalent zur kontragredienten Spinortransformation. Für jede Matrix M mit Determinante Eins gilt ja wegen (B.60) $\varepsilon^{\alpha\gamma}M^{\beta}{}_{\alpha}M^{\delta}{}_{\gamma} = \varepsilon^{\beta\delta}$ oder $M\varepsilon M^T = \varepsilon$ und daher

$$M^{T\,-1}{}_{\alpha}{}^{\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma}M^{\gamma}{}_{\delta}\varepsilon^{\delta\beta}\ , \tag{B.63}$$

wobei $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ die Matrixelemente der zu ε inversen Matrix bezeichnet

$$\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta}\ , \quad \varepsilon_{\alpha\gamma} = -\varepsilon^{\alpha\gamma}\ . \tag{B.64}$$

Insbesondere definiert

$$\chi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\chi^{\beta}\ , \quad \chi_1 = -\chi^2\ ,\ \chi_2 = \chi^1\ , \tag{B.65}$$

die Komponenten eines kontragredient transformierenden Spinors.

Die komplex konjugierte Spinortransformation

$$\overline{\chi}'^{\dot\alpha} = M^{*\,\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\beta} \tag{B.66}$$

ist nicht äquivalent zur Spinortransformation, denn die Eigenwerte von zum Beispiel

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}}{2} & \\ & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \tag{B.67}$$

sind von den Eigenwerten von M^* verschieden.

Auch die konjugiert komplexe Spinortransformation ist ihrer kontragredienten Transformation äquivalent; mit dem ε-Tensor und seinem Inversen

$$\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} = -\varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\ , \quad \varepsilon^{\dot1\dot2} = 1\ , \quad \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma} = \delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}\ ,\ \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = -\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \tag{B.68}$$

lassen sich Indizes hoch- und runterziehen

$$\overline{\chi}_{\dot\alpha} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\beta}\ , \quad \overline{\chi}^{\dot\beta} = \varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\overline{\chi}_{\dot\gamma}\ , \quad \overline{\chi}_{\dot1} = -\overline{\chi}^{\dot2}\ ,\ \overline{\chi}_{\dot2} = \overline{\chi}^{\dot1}\ . \tag{B.69}$$

Komponenten von Spinoren höherer Stufe mit einem Tensortransformationsgesetz wie zum Beispiel

$$\psi'^{\alpha\beta} = M^{\alpha}{}_{\gamma}M^{\beta}{}_{\delta}\psi^{\gamma\delta} \tag{B.70}$$

können in einen total symmetrischen Anteil $\chi^{\alpha\beta} = \chi^{\beta\alpha}$ und ein antisymmetrischen Anteil $\tau^{\alpha\beta} = -\tau^{\beta\alpha}$ zerlegt werden. Da die Spinorindizes nur zwei Werte annehmen können, ist der antisymmetrische Anteil proportional zum invarianten ε-Tensor

$$\tau^{\alpha\beta} = -\tau^{\beta\alpha} \Leftrightarrow \tau^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\tau_{\gamma}{}^{\gamma}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\ , \quad \tau_{\gamma}{}^{\gamma} = \varepsilon_{\beta\alpha}\tau^{\alpha\beta}\ . \tag{B.71}$$

Die zu Spinortransformationen gehörigen, inäquivalenten Tensortransformationen treten daher bei Tensoren auf, deren $(k+1)(l+1)$ Komponenten total symmetrisch (A.67) in k ungepunkteten und total symmetrisch in l gepunkteten Spinorindizes sind

$$\psi'^{(\alpha_1\dots\alpha_k)\,(\dot\beta_1\dots\dot\beta_l)} = M^{\alpha_1}{}_{\gamma_1}\dots M^{\alpha_k}{}_{\gamma_k}M^{*\,\dot\beta_1}{}_{\dot\delta_1}\dots M^{*\,\dot\beta_l}{}_{\dot\delta_l}\psi^{(\gamma_1\dots\gamma_k)\,(\dot\delta_1\dots\dot\delta_l)}\ . \tag{B.72}$$

Für $k = l$ ist das Transformationsgesetz verträglich mit der Realitätsbedingung

$$(\psi^{(\alpha_1\dots\alpha_k)\,(\dot\beta_1\dots\dot\beta_k)})^* = \psi^{(\beta_1\dots\beta_k)\,(\dot\alpha_1\dots\dot\alpha_k)}\ . \tag{B.73}$$

C Elementare Geometrie

C.1 Parallelverschiebung

Verschiebt man in einem gekrümmten Raum einen Vektor parallel von einem Punkt A zu einem Punkt B, so hängt das Ergebnis vom Weg ab, den man von A nach B durchlaufen hat. Das ist auf einem Globus leicht nachzuvollziehen. Verschiebt man dort von einem Punkt A am Äquator einen nach Norden zeigenden Vektor längs des Äquators zu einem Punkt C, der ein Viertel Kugelumfang entfernt ist, und verschiebt man ihn dann nach Norden zum Nordpol B , so weist er dort von C weg; verschiebt man den Vektor direkt von A nach Norden zum Nordpol B, so weist er von A weg und bildet einen Winkel von 90° mit dem Vektor, der von A über C nach B verschoben wurde.

Die Wegabhängigkeit von Parallelverschiebung läßt sich auf der Kugeloberfläche durch keine geschicktere Vorschrift für Parallelverschiebung vermeiden. Gäbe es eine wegunabhängige Vorschrift, die jedem Vektor am Punkt A einen dazu parallelen Vektor an jedem Punkt B eindeutig und umkehrbar zuordnet, so gäbe es auf der Kugeloberfläche ein Vektorfeld, das nirgends verschwindet. Es gehört aber zu den topologischen Eigenschaften der zweidimensionalen Kugeloberfläche, daß jedes Vektorfeld mindestens an einer Stelle verschwindet. Einen Igel kann man nicht ohne Wirbel kämmen.

Parallelverschiebung ist eine geometrische Struktur, die einen Zusammenhang von Vektoren am Anfangspunkt A und Endpunkt B jeder Kurve Γ herstellt. Wir bezeichnen mit $P_\Gamma v$ den Vektor am Punkt B, den wir durch paralleles Verschieben des Vektors v von A längs Γ nach B erhalten.

Parallelverschiebung ist definitionsgemäß linear: Wird eine Summe $v + w$ parallel verschoben, so stimmt das Ergebnis mit der Summe der parallel verschobenen Teile überein. Zudem wird jedes Vielfache von v in das Vielfache von $P_\Gamma v$ verschoben

$$P_\Gamma(v + w) = (P_\Gamma v) + (P_\Gamma w)\ ,\ P_\Gamma(c\,v) = c\,(P_\Gamma v)\ . \tag{C.1}$$

Parallelverschiebung ist also mit der Vektorraumstruktur verträglich und liegt fest, wenn Parallelverschiebung der Basisvektoren definiert ist.

Jeder Vektor ist definitionsgemäß sich selbst parallel; besteht die gesamte Kurve Γ nur aus einem Punkt, so ist $P_\Gamma v = v$.

Hintereinanderausführen von Parallelverschiebung gibt die Parallelverschiebung längs hintereinander durchlaufener Wege. Für jeden Punkt C auf der Kurve Γ zwischen A und B und die zugehörigen Teilkurven Γ_1 von A nach C und Γ_2 von C nach B und die hintereinander durchlaufene Kurve $\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_1$ soll also gelten

$$P_{\Gamma_2+\Gamma_1}v = P_{\Gamma_2}P_{\Gamma_1}v\ . \tag{C.2}$$

Da Parallelverschiebung hintereinander ausgeführt werden kann, so liegt sie fest, wenn für jeden Vektor v an jedem Ort mit Koordinaten x^m der Vektor $P_\xi v(x)$ am benachbarten Ort mit Koordinaten $x^m+\xi^m$ definiert ist, den man durch Parallelverschiebung längs des infinitesimalen Kurvenstücks von x zu $x+\xi$ erhält.[1] Verschiebt man einen Basisvektor $e_{a\,|x}$ und entwickelt man in der Basis $e_{b\,|x+\xi}$, so ist der parallel verschobene Basisvektor von der Form

$$P_\xi e_{a\,|x} = \bigl(e_a - \xi^m \omega_{m\,a}{}^b e_b\bigr)_{|x+\xi}\ . \tag{C.3}$$

Für $\xi = 0$ bleibt e_a unverändert, jeder Vektor ist sich selbst parallel. Der nächste Term $\xi^m\omega_{m\,a}{}^b$ ist linear in ξ, denn wir vernachlässigen, weil ξ infinitesimal ist, Terme der Ordnung ξ^2.

Die Felder $\omega_{m\,a}{}^b(x)$ heißen Zusammenhang oder Konnektion oder auch Eichfelder oder Yang-Mills-Felder.

Verschiebt man einen beliebigen Vektor $v_{|x} = v^a(x)e_{a\,|x}$ vom Punkt x parallel zu $x+\xi$, so erhält man, weil Parallelverschiebung linear ist,

$$P_\xi\bigl(v^a(x)e_{a\,|x}\bigr) = v^a(x)\bigl(e_a - \xi^m\omega_{m\,a}{}^b e_b\bigr)_{|x+\xi} = \bigl(v^a - \xi^m\omega_{m\,b}{}^a v^b\bigr)e_{a\,|x+\xi}\ . \tag{C.4}$$

Parallelverschiebung längs einer endlichen Kurve $\Gamma : s \mapsto x(s)$ vom Punkt $A = x(\underline{s})$ zu $B = x(\overline{s})$ ergibt sich durch Hintereinanderausführen infinitesimaler Verschiebungen aus der Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\frac{\mathrm{d}v^a}{\mathrm{d}s} = -T_b{}^a\, v^b\ , \quad \text{mit } T_b{}^a(s) = \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\omega_{m\,b}{}^a(x(s))\ , \tag{C.5}$$

als Abbildung des Anfangswertes $v = v^a(\underline{s})e_{a\,|A}$ auf $P_\Gamma v = v^a(\overline{s})e_{a\,|B}$. Diese Abbildung ist linear und von der Parametrisierung der Kurve unabhängig.

Paralleltransport ist invertierbar: verschieben wir längs der rückwärts durchlaufenen Kurve, die wir mit Γ^{-1} bezeichnen, von B nach A, so erhalten wir den ursprünglichen Vektor

$$P_{\Gamma^{-1}}P_\Gamma\ v = v\ . \tag{C.6}$$

Die linearen Abbildungen $\Lambda : v \mapsto \Lambda(v)$ von Vektoren in die reellen oder komplexen Zahlen bilden den dualen Vektorraum. Ihr Paralleltransport ist wie ihr kontragredientes Transformationsgesetz (B.35) auf natürliche Art durch die Forderung

$$P_\Gamma\Lambda(P_\Gamma v) = \Lambda(v) \tag{C.7}$$

definiert, daß der parallel verschobene duale Vektor $P_\Gamma\Lambda$, angewendet auf den parallel verschobenen Vektor $P_\Gamma v$, dasselbe ergibt wie der ursprüngliche duale Vektor Λ, angewendet auf den ursprünglichen Vektor v. Insbesondere gilt für die Parallelverschiebung der dualen Basis e^a, $e^a(e_b) = \delta^a{}_b = P_\xi e^a\bigl(e_b - \xi^m\omega_{m\,b}{}^c e_c\bigr) = P_\xi e^a(e_b) - \xi^m\omega_{m\,b}{}^c P_\xi e^a(e_c)$,

$$P_\xi e^a{}_{|x} = \bigl(e^a + \xi^m\omega_{m\,b}{}^a e^b\bigr)_{|x+\xi}\ . \tag{C.8}$$

[1]Streng genommen bezeichnet $x+\xi$ einen benachbarten Punkt auf einer Kurve durch x mit Tangentialvektor ξ.

Tensoren der Stufe (u, o) sind definitionsgemäß Abbildungen, die u Vektoren und o duale Vektoren auf Zahlen abbilden und linear in jedem ihrer $u+o$ Argumente sind. Auf gleiche Weise wie parallel verschobene duale Vektoren ist der parallel verschobene Tensor $P_\Gamma T$ durch die Forderung

$$P_\Gamma T(P_\Gamma v, \dots, P_\Gamma\Lambda, \dots) = T(v, \dots, \Lambda, \dots) \tag{C.9}$$

definiert, daß er auf parallel verschobene Argumente angewendet dasselbe ergibt, wie der ursprüngliche Tensor angewendet auf die ursprünglichen Argumente. Setzt man als Argumente die Basisvektoren $e_a, \dots, e^b, \dots$ ein und verwendet man die Definition $T(e_a, \dots, e^b, \dots)_{|x} = T_{a\dots}{}^{b\dots}(x)$ der Komponentenfunktionen und (C.3) und (C.8), so gilt

$$P_\xi T_{a\dots}{}^{b\dots}(x+\xi) = T_{a\dots}{}^{b\dots}(x) + \xi^m\omega_{m\,a}{}^c T_{c\dots}{}^{b\dots}(x) + \dots - \xi^m\omega_{m\,c}{}^b T_{a\dots}{}^{c\dots}(x) - \dots\ . \tag{C.10}$$

Die $u+o$ Terme mit der Konnektion $\omega_{m\,a}{}^b$ arbeiten in dieser Gleichung das Indexbild der Komponenten des Tensors T nach der Produktregel der Differentation ab: es entstehen die gleichen $u+o$ Terme, die man erhalten hätte, wenn die Tensorkomponenten als ein Produkt von o Vektorkomponenten und u Komponenten dualer Vektoren gegeben wären und wenn man die Komponenten der parallel verschobenen Vektoren ausmultipliziert und dabei Terme der Ordnung $(\xi)^2$ vernachlässigt hätte.

C.2 Torsion und Krümmung

Hat die Parallelverschiebung keine speziellen Eigenschaften, so hat der Raum Torsion und Krümmung. Torsion zeigt sich daran, daß sich infinitesimale Parallelogramme nicht schließen. Es seien $u = u^a e_a$ und $v = v^a e_a$ zwei Vektoren am Ort x und $e_a{}^m(x)$ bezeichne die Raumzeitkomponenten der Basis e_a. Folgt man dem Vektor u und verschiebt man dabei den Vektor v längs u parallel, so erhält man, wenn man Terme höherer Ordnung in u vernachlässigt, am Ort $x+u$ mit Koordinaten $x^m + u^a e_a{}^m(x)$ den parallelverschobenen Vektor $(P_u v) = v^a e_a(x+u) - u^c e_c{}^m\omega_{m\,a}{}^b v^a e_b(x+u)$ (C.3). Folgt man von $x+u$ diesem parallel verschobenen Vektor, so gelangt man zum Punkt $x+u+P_u v$ mit Koordinaten

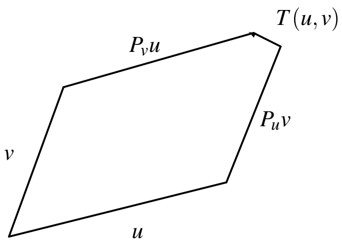

Abbildung C.1: Torsion

$$\begin{aligned} &x^m + u^a e_a{}^m(x) + v^a e_a{}^m(x+u) - u^a v^b e_a{}^n\omega_{n\,a}{}^c e_c{}^m(x+u+P_u v) = \\ &x^m + u^a e_a{}^m(x) + v^a e_a{}^m(x) + v^a u^b e_b{}^n\partial_n e_a{}^m(x) - u^a v^b e_a{}^n\omega_{n\,b}{}^c e_c{}^m(x)\ , \end{aligned} \tag{C.11}$$

wenn man entwickelt und Terme vernachlässigt, die quadratisch in u oder v sind.

Vertauscht man die Reihenfolge des Vorgehens und folgt zunächst v und dann $P_v u$, so gelangt man zum Punkt $x+v+P_v u$, der sich von $x+u+P_u v$ in erster Ordnung in u und v durch die Koordinatendifferenz $T(u,v)^m = u^a v^b T_{ab}{}^c e_c{}^m$ unterscheidet

$$T_{ab}{}^c = e_a{}^m e_b{}^n(\partial_m e_n{}^c - \partial_n e_m{}^c) + \omega_{a\,b}{}^c - \omega_{b\,a}{}^c\ . \tag{C.12}$$

Hierbei haben wir $\omega_{a\,b}{}^{c} = e_a{}^m \omega_{m\,b}{}^{c}$ und $e_b{}^m e_m{}^c = \delta_b{}^c$ (A.110) verwendet, sowie die daraus durch Differenzieren folgende Gleichung $(\partial_n e_b{}^m) e_m{}^c = -e_b{}^m \partial_n e_m{}^c$.

Das längs u und v durchlaufende Parallelogramm schließt sich nicht, wenn der Vektor $T(u,v) = T(u,v)^m \partial_m$ nicht verschwindet. Er hängt linear von den zwei Vektoren u und v ab und definiert daher einen Tensor der Stufe $(2,1)$, die Torsion. Die Torsion ist die bilineare Abbildung von Paaren von Vektoren, die ein infinitesimales Parallelogramm definieren, auf den Vektor, um den sich das Parallelogramm zu schließen fehlt.

Falls u gleich v ist, verschwindet der zugehörige Vektor $T(u,u)$. Eine Größe $T(u,v)$, die linear in den beiden Argumenten u und v ist und die für $u = v$ verschwindet, ist antisymmetrisch bei Vertauschen von u und v (A.45). Daher ist die Torsion antisymmetrisch im ersten Indexpaar

$$T_{ab}{}^{c} = -T_{ba}{}^{c} \ . \tag{C.13}$$

Weil der Vektor $T(u,v)$ linear und antisymmetrisch in u und v ist, sind seine Komponenten T^c antisymmetrische Zweiformen. Sie schreiben sich als äußere Ableitung (A.92) der Vielbeinform $e^c = \mathrm{d}x^m e_m{}^c$ (A.111) und mit ihrem antisymmetrischen Produkt (A.73) mit der Zusammenhangsform $\omega_b{}^c = \mathrm{d}x^m \omega_{m\,b}{}^c = e^a \omega_{a\,b}{}^c$,

$$T^c = \mathrm{d}e^c + \omega_b{}^c e^b = e^a e^b \frac{1}{2} T_{ab}{}^c = \mathrm{d}x^m \mathrm{d}x^n \frac{1}{2}(\partial_m e_n{}^c - \partial_n e_m{}^c + e_n{}^b \omega_{m\,b}{}^c - e_m{}^b \omega_{n\,b}{}^c) \ . \tag{C.14}$$

Wenn die Torsion nicht verschwindet, verhalten sich Parallelogramme wie Schraubengewinde. Folgt man der Rille eines Gewindes, das ist eine abgerundete Version des Parallelogramms, einmal rechts und ein anderes Mal links halb herum, so endet man nicht am selben Ort, sondern um eine Ganghöhe versetzt.

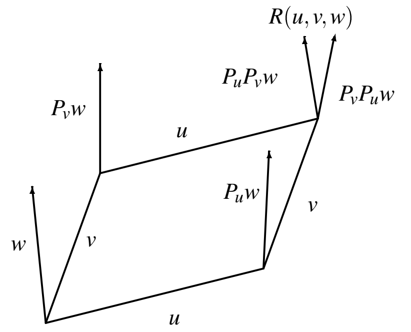

Abbildung C.2: Krümmung

Der Raum ist gekrümmt, wenn ein Vektor w, der parallel um ein von u und v aufgespanntes, infinitesimales Flächenstück verschoben wird, nicht mit dem ursprünglichen Vektor übereinstimmt. Für parallel verschobene Basisvektoren $P_v P_u e_a$ erhalten wir bis auf Terme, die quadratisch in den Komponenten u^m und v^n sind,

$$\begin{aligned} P_v P_u e_a =& \ P_v\big(e_a - u^m \omega_{m\,a}{}^b e_b\big) = \big(\delta_a{}^b - u^m \omega_{m\,a}{}^b\big) P_v e_{b|_{x+u}} = \\ &= \big(\delta_a{}^b - u^m \omega_{m\,a}{}^b\big)\big(\delta_b{}^c - v^n \omega_{n\,b}{}^c{}_{|_{x+u}}\big) e_{c_{|x+u+v}} \ . \end{aligned} \tag{C.15}$$

Entwickeln wir $\omega_{n\,b}{}^c$ nach u

$$P_v P_u e_a = \big(\delta_a{}^b - u^m \omega_{m\,a}{}^b\big)\big(\delta_b{}^c - v^n(\omega_{n\,b}{}^c + u^m \partial_m \omega_{n\,b}{}^c)\big) e_c \tag{C.16}$$

und multiplizieren wir aus, so folgt

$$P_v P_u e_a = \ e_a - u^m \omega_{m\,a}{}^b e_b - v^m \omega_{m\,a}{}^b e_b + u^m \omega_{m\,a}{}^c v^n \omega_{n\,c}{}^b e_b - u^m v^n \partial_m \omega_{n\,a}{}^b e_b \ . \tag{C.17}$$

Hiervon unterscheidet sich der Vektor $P_u P_v e_a$, der anders um das Flächenstück verschoben wurde und sich aus (C.17) durch Vertauschen von u und v ergibt, durch

$$P_v P_u e_a - P_u P_v e_a = -u^m v^n \big(\partial_m \omega_{n\,a}{}^b - \partial_n \omega_{m\,a}{}^b - \omega_{m\,a}{}^c \omega_{n\,c}{}^b + \omega_{n\,a}{}^c \omega_{m\,c}{}^b\big) e_b \ . \tag{C.18}$$

Da diese Differenz bereits bilinear in $u^m = u^c e_c{}^m$ und $v^n = v^d e_d{}^n$ ist, ändern sich ihre Komponenten nicht in der betrachteten Näherung, wenn wir sie längs $-u$ und $-v$ zurück in den Ausgangspunkt verschieben. Wir erhalten so die Abweichung des Vektors e_a, der einmal um das gesamte Flächenstück herum parallel verschoben wurde, vom ursprünglichen Vektor. Diese Abweichung definiert die Krümmung $R(u,v,e_a)$

$$P_{-v} P_{-u} P_v P_u e_a = e_a - R(u,v,e_a) \ , \quad R(u,v,e_a) = u^c v^d R_{cd\,a}{}^b e_b \ , \tag{C.19}$$

$$R_{cd\,a}{}^b = e_c{}^m e_d{}^n \big(\partial_m \omega_{n\,a}{}^b - \partial_n \omega_{m\,a}{}^b - \omega_{m\,a}{}^c \omega_{n\,c}{}^b + \omega_{n\,a}{}^c \omega_{m\,c}{}^b\big) \ . \tag{C.20}$$

Da Paralleltransport linear ist, gilt für einen Vektor $w = w^a e_a$, der um das Flächenelement parallel verschoben wird,

$$P_{-v} P_{-u} P_v P_u w = w - R(u,v,w) = w - u^c v^d w^a R_{cd\,a}{}^b e_b \ . \tag{C.21}$$

Die Krümmung gibt an, um wieviel ein Vektor, der parallel um das von u und v aufgespannte Flächenelement herumgeführt wird, vom ursprünglichen Vektor w abweicht. Dieser Differenzvektor hängt linear von den drei Vektoren u, v und w ab und definiert daher einen Tensor der Stufe $(3,1)$, den Riemanntensor, mit Komponenten $R_{cd\,a}{}^b$.

Aus den gleichen Gründen wie die Torsion (A.45) ist der Riemanntensor antisymmetrisch im ersten Indexpaar

$$R_{cd\,a}{}^b = -R_{dc\,a}{}^b \tag{C.22}$$

und definiert daher eine matrixwertige Zweiform $\mathbf{R}_a{}^b = e^c e^d \frac{1}{2} R_{cd\,a}{}^b$. Sie schreibt sich als äußere Ableitung und Quadrat der matrixwertigen Zusammenhangsform $\omega_a{}^b = \mathrm{d}x^m \omega_{m\,a}{}^b$

$$\mathbf{R}_a{}^b = \mathrm{d}\omega_a{}^b - \omega_a{}^c \omega_c{}^b = \mathrm{d}x^m \mathrm{d}x^n \frac{1}{2}\big(\partial_m \omega_{n\,a}{}^b - \partial_n \omega_{m\,a}{}^b - \omega_{m\,a}{}^c \omega_{n\,c}{}^b + \omega_{n\,a}{}^c \omega_{m\,c}{}^b\big) \ . \tag{C.23}$$

Für die Tangentialvektoren an Weltlinien der Raumzeit ist nicht nur Parallelverschiebung erklärt, sondern auch ein Skalarprodukt $e_a \cdot e_b = g_{ab}$, die Metrik, und ein Längenquadrat $w^2 = w \cdot w = w^a w^b g_{ab}$. Die Parallelverschiebung heißt metrikverträglich, wenn parallel verschobene Vektoren unveränderte Länge haben. Insbesondere haben dann die Vektoren w und $w - R(u,v,w)$ in erster Ordnung in u und v gleiche Länge

$$0 = w^2 - (w - R(u,v,w))^2 = 2R(u,v,w) \cdot w = 2u^c v^d R_{cd\,a}{}^e g_{eb} w^a w^b \ . \tag{C.24}$$

Es ist $R_{cd\,a}{}^e g_{eb} w^a z^b$ linear in w und z und verschwindet für $w = z$, wenn die Parallelverschiebung metrikverträglich ist. Dann sind, wie (A.45) zeigt, die Komponenten des mit der Metrik kontrahierten Riemanntensors antisymmetrisch auch im zweiten Indexpaar

$$R_{cd\,ab} = R_{cd\,a}{}^e g_{eb} \ , \quad R_{cd\,ab} = -R_{cd\,ba} \ . \tag{C.25}$$

Holonomiegruppe

Paralleltransport längs geschlossener Kurven Γ, die von einem Punkt A wieder zu A zurückführen, definiert lineare Abbildungen der Vektoren v auf Vektoren $P_\Gamma v$ in demselben Vektorraum. Die Abbildungen können hintereinander ausgeführt und invertiert werden; sie bilden also eine Gruppe G, die Holonomiegruppe des Punktes A. Schreiben wir diese Abbildungen für Basisvektoren als

$$P_\Gamma e_a = M_\Gamma^{-1}{}_a{}^b e_b \ , \tag{C.26}$$

so genügt das Matrixprodukt der dabei auftretenden Matrizen M_Γ dergleichen Gruppenverknüpfung wie hintereinander ausgeführte Parallelverschiebung. Denn setzt sich ein geschlossener Weg $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ aus hintereinander durchlaufenen, geschlossenen Wegen Γ_1 und Γ_2 zusammen, so gilt wegen

$$\begin{aligned} P_{\Gamma_2\circ\Gamma_1} e_a &= P_{\Gamma_2} P_{\Gamma_1} e_a = P_{\Gamma_2} M_{\Gamma_1}^{-1}{}_a{}^b e_b = M_{\Gamma_1}^{-1}{}_a{}^b P_{\Gamma_2} e_b = \\ &= M_{\Gamma_1}^{-1}{}_a{}^b M_{\Gamma_2}^{-1}{}_b{}^c e_c = (M_{\Gamma_1}^{-1} M_{\Gamma_2}^{-1})_a{}^c e_c = (M_{\Gamma_2} M_{\Gamma_1})^{-1}{}_a{}^b e_b \\ M_{\Gamma_2\circ\Gamma_1} &= M_{\Gamma_2} M_{\Gamma_1} \ . \end{aligned} \tag{C.27}$$

Der Paralleltransport um ein infinitesimales Flächenelement mit Kanten u und v ergibt eine Holonomietransformation $\mathbf{1} + \delta_{<u,v>}$ aus der Umgebung des Einselementes der Holonomiegruppe. Also ist $w - R(u, v, w)$ von der Form $(\mathbf{1} + \delta_{<u,v>})w$, das heißt, $-R(u, v, w) = \delta_{<u,v>} w$ ist eine infinitesimale Holonomietransformation, angewendet auf w.

Die infinitesimalen Transformationen $\delta_{<u,v>}$ wirken linear auf Vektoren w und bilden eine Liealgebra. Mit einer Basis δ_i, $i = 1, \dots, \dim(G)$, schreibt sich $R(u, v, w)$ daher als

$$R(u, v, w) = -R(u, v)^i \delta_i w \ , \quad \delta_i e_a = -T_{i\,a}{}^b e_b \ , \tag{C.28}$$

wobei die Koeffizienten $T_{i\,a}{}^b$ Elemente von Matrizen T_i sind, die dieselben Kommutatorrelationen wie die Basis δ_i erfüllen (B.11). Die Komponenten des Riemanntensors $R(u, v, w) = R_{ab\,c}{}^d u^a v^b w^c e_d$ sind Linearkombinationen von Darstellungsmatrizen T_i

$$R_{ab\,c}{}^d = R_{ab}{}^i T_{i\,c}{}^d \ . \tag{C.29}$$

Die Basis e_a kann so gewählt werden, daß die Matrizen T_i x-unabhängig sind (C.87).

Ist für die Vektoren eine zusätzliche Struktur definiert, zum Beispiel ihre Länge, und ist der Paralleltransport damit verträglich und erhält er Länge, so ist die Holonomiegruppe eine Untergruppe der linearen Transformationen, die Länge erhält, also eine Untergruppe der Drehgruppe oder der Lorentzgruppe. Die infinitesimalen Transformationen δ_i und die Matrizen T_i spannen die zugehörige Liealgebra und ihre Darstellung auf.

Die Holonomiegruppe, die durch Paralleltransport von einem Punkt B längs geschlossener Wege zurück zu B erzeugt wird, ist der Holonomiegruppe des Punktes A isomorph, wenn A und B durch einen Weg Γ_{AB} von B nach A zusammenhängen. Denn ist Γ_{AA} ein geschlossener Weg von A nach A, so ist $\Gamma_{BB} = \Gamma_{AB}^{-1} \circ \Gamma_{AA} \circ \Gamma_{AB}$ ein Weg, der bei B anfängt und endet.

C.3 Kovariante Ableitung

Verschiebt man ein Tensorfeld $T(x)$ vom Ort x parallel an den benachbarten Ort $x+U$,[2] so definiert die Differenz zu $T(x + U)$ in erster Ordnung in U die kovariante Ableitung $D_U T$ des Tensors T längs des Vektors U

$$D_U T(x) = T(x + U) - P_U T(x) \ . \tag{C.30}$$

Die kovariante Ableitung von Tensoren längs U ist linear

$$D_U(T + S) = D_U T + D_U S \ , \quad D_U cT = c D_U T \quad \forall c \in \mathbb{R} \ , \tag{C.31}$$

erfüllt die Produktregel

$$D_U(TS) = (D_U T)S + T(D_U S) \tag{C.32}$$

und stimmt auf Skalarfeldern f (A.7) mit der Ableitung

$$D_U f = U(f) = U^m \partial_m f \tag{C.33}$$

überein. Insbesondere gilt für das Produkt eines Skalarfelds f mit einem Tensor T

$$D_U(fT) = U(f)T + f D_U T \ . \tag{C.34}$$

Die kovariante Ableitung eines Tensors T längs U ist an jedem Punkt linear im Vektor U

$$D_{U+V} T = D_U T + D_V T \ , \quad D_{fU} T = f D_U T \ . \tag{C.35}$$

Sie definiert daher durch $(D_U T)(V, \dots) = DT(U, V, \dots)$ einen Tensor DT, die kovariante Ableitung von T, die ein Vektorargument mehr hat als der Tensor T.

Wir schreiben kürzer $D_a T(V, \dots)$ für die kovariante Ableitung $DT(e_a, V, \dots)$. Aus der Definition der Parallelverschiebung (C.3) und der kovarianten Ableitung folgt

$$D_a e_b = \omega_{a\,b}{}^c e_c \ , \quad \omega_{a\,b}{}^c = e_a{}^m \omega_{m\,b}{}^c \ . \tag{C.36}$$

Hieraus ergibt sich die kovariante Ableitung $D_U T(V, \dots) = U^a D_a T(V, \dots)$ längs eines beliebigen Vektors $U = U^a e_a$, denn D_U ist linear in U.

Mit der Produktregel folgt die kovariante Ableitung $D_a V$ eines Vektorfeldes $V = V^b e_b$ längs des Vektorfeldes $e_a = e_a{}^m \partial_m$

$$D_a(V^b e_b) = e_a(V^b)\, e_b + V^b D_a e_b = e_a{}^m(\partial_m V^b + \omega_{m\,c}{}^b V^c) e_b \ . \tag{C.37}$$

Der Tensor DV hat also Komponenten $(D_a V)^b = DV(e_a, e^b) = e_a{}^m \partial_m V^b + \omega_{a\,c}{}^b V^c$.

Ebenso ergibt sich aus (C.8) die kovariante Ableitung der dualen Basis

$$D_a e^b = -\omega_{ac}{}^b e^c \tag{C.38}$$

[2] Wir wählen in diesem Abschnitt Großbuchstaben zur Bezeichnung von Vektorfeldern, um sie von Indizes von Komponenten zu unterscheiden.

und daraus die kovariante Ableitung DX eines dualen Vektorfeldes $X = X_b e^b$

$$D_a(X_b e^b) = e_a(X_b)e^b + X_b D_a e^b = e_a{}^m(\partial_m X_b - \omega_{m\,b}{}^c X_c)e^b \ . \tag{C.39}$$

Die kovariante Ableitung eines Tensors S der Stufe (u,o) folgt aus (C.10)

$$\begin{aligned} D_a S_{b\dots c}{}^{d\dots e} = e_a{}^m \partial_m S_{b\dots c}{}^{d\dots e} &+ \omega_{af}{}^d S_{b\dots c}{}^{f\dots e} + \dots + \omega_{af}{}^e S_{b\dots c}{}^{d\dots f} - \\ &- \omega_{ab}{}^f S_{f\dots c}{}^{d\dots e} - \dots - \omega_{ac}{}^f S_{b\dots f}{}^{d\dots e} \ . \end{aligned} \tag{C.40}$$

Ein Tensor T der Stufe (u,o) mit einem festgewähltem, ersten Argument V definiert durch $T(V)(W,\dots,X) = T(V,W,\dots,X)$ einen Tensor $T(V)$ der Stufe $(u-1,o)$, zu dessen kovarianter Ableitung $D_U(T(V))$ die Ableitung von T und die Ableitung von V beitragen

$$D_U(T(V)) = (D_U T)(V) + T(D_U V) \ , \quad (D_U T)(V) = D_U(T(V)) - T(D_U V) \ . \tag{C.41}$$

Entsprechendes gilt für andere und mehrere festgewählte Argumente.

Ist insbesondere T die kovariante Ableitung von S, $T = DS$, also $(DS)(V) = D_V S$, so gilt für die zweite kovariante Ableitung DDS

$$(DDS)(U,V) = (D_U DS)(V) = D_U((DS)(V)) - (DS)(D_U V) = D_U D_V S - D_{D_U V} S \ . \tag{C.42}$$

Durch Antisymmetrisieren in U und V erhalten wir die Torsion und die Krümmung

$$\begin{aligned} &DDS(U,V) - DDS(V,U) = \\ &\qquad = (D_U D_V S - D_V D_U S - D_{[U,V]}S) + D_{[U,V]}S - D_{D_U V}S + D_{D_V U}S \\ &\qquad = R(U,V)S - D_{T(U,V)}S \ . \end{aligned} \tag{C.43}$$

Hierbei ist $R(U,V)$ der Differentialoperator

$$R(U,V) = D_U D_V - D_V D_U - D_{[U,V]} \ , \quad R(U,V) = -R(V,U) \ , \tag{C.44}$$

und $T(U,V)$ ist der Vektor

$$T(U,V) = D_U V - D_V U - [U,V] \ , \quad T(U,V) = -T(V,U) \ , \tag{C.45}$$

um den sich ein Parallelogramm mit Seiten U und V zu schließen fehlt. Dies zeigt der Vergleich mit (C.12) für $U = e_a$ und $V = e_b$

$$T(e_a,e_b) = D_a e_b - D_b e_a - [e_a,e_b] \ , \quad T_{ab}{}^m = \omega_{ab}{}^c e_c{}^m - \omega_{ba}{}^c e_c{}^m - e_a{}^n \partial_n e_b{}^m + e_b{}^n \partial_n e_a{}^m \ .$$

Die Gleichung gilt auch für beliebige Vektorfelder U und V, weil $D_U V - D_V U - [U,V]$ wegen der Produktregel $[fU,V] = f\,[U,V] - V(f)\,U$ (A.153) funktionenlinear in U und V

$$\begin{aligned} D_{fU}V - D_V fU - [fU,V] &= f D_U V - V(f)\,U - f\,D_V U - f\,[U,V] + V(f)\,U \\ &= f(D_U V - D_V U - [U,V]) \end{aligned} \tag{C.46}$$

und demnach linear in den Komponentenfunktionen U^a und V^b ist. Daher definiert das Vektorfeld $T(U,V)$ einen Tensor der Stufe $(2,1)$ mit Komponenten $T_{ab}{}^c$, die Torsion.

Der Differentialoperator $R(U,V)$ (C.44) ist funktionenlinear in U und V

$$\begin{aligned} R(fU,V) &= D_{fU}D_V - D_V D_{fU} - D_{[fU,V]} = f D_U D_V - D_V f D_U - D_{f[U,V]-V(f)U} \\ &= f\,R(U,V) - V(f)\,D_U + V(f)\,D_U = f\,R(U,V) \ , \end{aligned} \tag{C.47}$$

und genügt der Produktregel

$$R(U,V)\,SX = (R(U,V)S)\,X + S\,R(U,V)X \ . \tag{C.48}$$

Er verschwindet auf skalaren Feldern f, denn die kovariante Ableitung von f längs V ergibt das Skalarfeld $D_V f = V(f) = V^m \partial_m f$ (C.33), daher gilt $D_U D_V f = U(V(f))$ und

$$R(U,V)f = 0 \ . \tag{C.49}$$

Auf ein Vektorfeld W angewendet, bewirkt $R(U,V)W$ die infinitesimale Holonomietransformationen (C.28), um die der parallel um das Flächenelement (U,V) verschobene Vektor vom Ausgangsvektor W abweicht

$$R(U,V,W) = -R(U,V)^i \delta_i W = R(U,V)\,W = D_U D_V W - D_V D_U W - D_{[U,V]}W \ . \tag{C.50}$$

Die Formel ist richtig für Basisvektoren

$$\begin{aligned} R(e_a,e_b)\,e_c &= D_a(D_b e_c) - D_b(D_a e_c) - D_{[e_a,e_b]}e_c \\ &= D_a(e_b{}^n \omega_{n\,c}{}^d e_d) - D_b(e_a{}^n \omega_{n\,c}{}^d e_d) - [e_a,e_b]^n \omega_{n\,c}{}^d e_d \\ &= e_a{}^m e_b{}^n(\partial_m \omega_{n\,c}{}^d - \partial_n \omega_{m\,c}{}^d - \omega_{m\,c}{}^e \omega_{n\,e}{}^d + \omega_{n\,c}{}^e \omega_{m\,e}{}^d)e_d = R_{abc}{}^d e_d \end{aligned} \tag{C.51}$$

und gilt für beliebige Vektoren, weil $R(U,V)W$ funktionenlinear nicht nur in U und V, sondern auch in W ist: $R(U,V)\,fW = (R(U,V)f)\,W + fR(U,V)\,W = fR(U,V)\,W$. Da das Vektorfeld $R(U,V,W)$ an jedem Punkt linear von den Vektoren U, V und W abhängt, definiert es den Riemanntensor, einen Tensor der Stufe $(3,1)$ mit Komponenten $R_{abc}{}^d$. Den Riemanntensor nennen wir auch einfach die Krümmung.

Auf duale Vektoren $X = X_d e^d$ angewendet, bewirkt $R(e_a,e_b)$ wegen der Produktregel und weil es funktionenlinear ist und auf den Funktionen $e_c(e^d) = \delta_c{}^d$ verschwindet, die kontragrediente Transformation

$$\begin{aligned} 0 = R(e_a,e_b)(e_c(e^d)) = R(e_a,e_b,e_c)(e^d) + e_c(R(e_a,e_b)e^d) = R_{abc}{}^d + e_c(R(e_a,e_b)e^d) \ , \\ R(e_a,e_b)e^d = -R_{abc}{}^d e^c \ , \quad R(U,V)X = -R_{abc}{}^d U^a V^b X_d\, e^c \ . \end{aligned} \tag{C.52}$$

Ein Tensor S der Stufe (u,o) hat nach Anwenden von $R(e_a,e_b)$ die Komponenten

$$\begin{aligned} R(e_a,e_b)S_{c_1\dots c_u}{}^{d_1\dots d_o} = &- R_{abc_1}{}^f S_{f\dots c_u}{}^{d_1\dots d_o} - \dots - R_{abc_u}{}^f S_{c_1\dots f}{}^{d_1\dots d_o} + \\ &+ R_{abf}{}^{d_1} S_{c_1\dots c_u}{}^{f\dots d_o} + \dots + R_{abf}{}^{d_o} S_{c_1\dots c_u}{}^{d_1\dots f} \ . \end{aligned} \tag{C.53}$$

Die infinitesimale Holonomietransformation $R(U,V) = -R(U,V)^i \delta_i$ arbeitet die einzelnen Indizes von Tensorkomponenten $S_{c_1\dots c_u}{}^{d_1\dots d_o}$ so ab, wie eine Ableitung auf $u+o$ Faktoren eines Produktes wirkt. Nach der Produktregel entstehen $u+o$ Terme, in denen jeweils ein Faktor differenziert wird und die restlichen Faktoren ungeändert bleiben.

Für die Komponenten $D_a D_b S = DDS(e_a,e_b)$ besagt (C.43)

$$(D_a D_b - D_b D_a)S = -T_{ab}{}^c D_c S + R(e_a,e_b)S \ . \tag{C.54}$$

Bianchi-Identitäten

So wie jedes Gradientenfeld $\Lambda_m = \partial_m \Lambda$ die Gleichung $\partial_m \Lambda_n - \partial_n \Lambda_m = 0$ identisch erfüllt, so genügen die Torsion und die Krümmung den Bianchi-Identitäten[3].

Schreiben wir die Torsion (C.14) und Krümmung (C.23) als äußere Ableitung der Vielbeinform und der Zusammenhangsform,

$$e^c = \mathrm{d}x^m e_m{}^c\ , \qquad \omega_b{}^c = \mathrm{d}x^m \omega_{m\,b}{}^c\ , \tag{C.55}$$

$$T^c = \mathrm{d}e^c + \omega_b{}^c e^b = e^a e^b \frac{1}{2} T_{ab}{}^c\ , \quad R_a{}^b = \mathrm{d}\omega_a{}^b - \omega_a{}^c \omega_c{}^b = e^c e^d \frac{1}{2} R_{cd\,a}{}^b\ , \tag{C.56}$$

und differenzieren wir erneut, so erhalten wir wegen $\mathrm{d}^2 = 0$ (A.96) und der Produktregel (A.95) einerseits

$$\mathrm{d}T^d = (\mathrm{d}\omega_b{}^d) e^b - \omega_b{}^d de^b = (R_b{}^d + \omega_b{}^c \omega_c{}^d) e^b - \omega_b{}^d (T^b - \omega_c{}^b e^c) = R_b{}^d e^b - \omega_b{}^d T^b \tag{C.57}$$

und andererseits

$$\mathrm{d}T^d = \mathrm{d}(e^a e^b \frac{1}{2} T_{ab}{}^d) = \frac{1}{2}((\mathrm{d}e^a) e^b T_{ab}{}^d - e^a (\mathrm{d}e^b) T_{ab}{}^d + e^a e^b e^c e_c{}^m \partial_m T_{ab}{}^d)\ . \tag{C.58}$$

Ersetzen wir hier $\mathrm{d}e^a$ durch $T^a - \omega_c{}^a e^c$ und bringen wir alle Terme auf eine Seite, so kombinieren sich die partielle Ableitung und die ωT-Terme zur kovarianten Ableitung $D_c T_{ab}{}^d$ und wir erhalten

$$\frac{1}{2} e^a e^b e^c (D_a T_{bc}{}^d + T_{ab}{}^e T_{ec}{}^d - R_{ab\,c}{}^d) = 0\ . \tag{C.59}$$

Der in a, b, c total antisymmetrische Teil der Klammer verschwindet also. Da $T_{ab}{}^d$ und $R_{ab\,c}{}^d$ in a und b antisymmetrisch sind, ist er durch die zyklische Summe gegeben, die wir durch einen Kreis im Summenzeichen andeuten, $\sum_{abc} X_{abc} = X_{abc} + X_{bca} + X_{cab}$,

$$\sum_{abc} (D_a T_{bc}{}^d + T_{ab}{}^e T_{ec}{}^d - R_{ab\,c}{}^d) = 0\ . \tag{C.60}$$

Dies ist die erste Bianchi-Identität. Ebenso folgt aus

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R_d{}^e = -(\mathrm{d}\omega_d{}^c)\omega_c{}^e + \omega_d{}^c \mathrm{d}\omega_c{}^e &= \frac{1}{2}((\mathrm{d}e^a) e^b R_{ab\,d}{}^e - e^a (\mathrm{d}e^b) R_{ab\,d}{}^e + e^a e^b e^c e_c{}^m \partial_m R_{ab\,d}{}^e) \\ &\frac{1}{2} e^a e^b e^c (D_a R_{bc\,d}{}^e + T_{ab}{}^f R_{fc\,d}{}^e) = 0 \end{aligned} \tag{C.61}$$

die zweite Bianchi-Identität

$$\sum_{abc} (D_a R_{bc\,d}{}^e + T_{ab}{}^f R_{fc\,d}{}^e) = 0\ . \tag{C.62}$$

Ihr entsprechen die homogenen Maxwellgleichungen (5.10), also die Quellenfreiheit des Magnetfeldes und das Induktionsgesetz (5.3). Dennoch hat die zweite Bianchi-Identität nicht die gleichen physikalischen Auswirkungen, denn in der Gravitation gibt es keine Entsprechung zu leitenden Drähten in der Elektrodynamik, die die Bewegung von Ladungsträgern, deren Trägheit man vernachlässigen kann, auf den Draht einer Induktionsspule begrenzen.

[3] gesprochen Bianki

C.4 Basiswechsel

In unseren Formeln für die kovariante Ableitung und für Torsion und Krümmung haben wir keine einschränkenden Annahmen über die an jedem Punkt verwendete Basis e_a von Vektoren und die dazu duale Basis e^b gemacht. Sie gelten daher für jede Basis. Wechseln wir die Basis, solch einen Wechsel $e_a \mapsto e'_a$ der Basis an jedem Ort nennt man eine Eichtransformation, so ändern sich unter solch einer Eichtransformation

$$e'_{a\,|x} = M_a{}^b(x) e_{b\,|x}\ , \quad e'^a{}_{|x} = M^{-1}{}_b{}^a(x) e^b{}_{|x} \tag{C.63}$$

die Komponenten $T_{a\ldots}{}^{b\ldots} = T(e_a, \ldots, e^b \ldots)$ von Tensoren linear

$$T'_{a\ldots}{}^{b\ldots} = T(e'_a, \ldots, e'^b \ldots) = T(M_a{}^c e_c, \ldots, M^{-1}{}_d{}^b e^d \ldots) = M_a{}^c \ldots M^{-1}{}_d{}^b \ldots T_{c\ldots}{}^{d\ldots}\ . \tag{C.64}$$

Insbesondere hängen die Komponenten der Torsion und der Krümmung bezüglich einer Basis $e_a = e_a{}^m \partial_m$ und der Koordinatenbasis, den Tangentialvektoren ∂_m längs der Koordinatenlinien, durch

$$T_{ab}{}^c = e_a{}^k e_b{}^l e_m{}^c T_{kl}{}^m\ , \quad R_{abc}{}^d = e_a{}^k e_b{}^l e_c{}^m e_n{}^d R_{klm}{}^n \tag{C.65}$$

zusammen, wobei $e_n{}^d$ die Kurzschrift (A.110) für $e^{-1}{}_n{}^d$ ist, $e_a{}^n e_n{}^d = \delta_a{}^d$.

Ist die Eichtransformation ein Wechsel des Koordinatensystems, so gilt wegen

$$T'_{m\ldots}{}^{n\ldots} = T(\partial'_m, \ldots, \mathrm{d}x'^n, \ldots) \ \text{ und } \ \partial'_m = \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \partial_r \ \text{ sowie } \ \mathrm{d}x'^n = \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \mathrm{d}x^s \tag{C.66}$$

für Torsion und Krümmung

$$T'_{kl}{}^m(x'(x)) = \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x^s}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^t} T_{rs}{}^t(x)\ , \quad R'_{klm}{}^n(x'(x)) = \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial x^s}{\partial x'^l} \frac{\partial x^t}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^u} R_{rst}{}^u(x)\ . \tag{C.67}$$

Die Koordinaten x' und x bezeichnen hierbei denselben Punkt. Aus (C.36) entnehmen wir die zur Basis e'_a gehörigen Komponentenfunktionen der Konnektion

$$\begin{aligned} \omega'_{ab}{}^c e'_c &= D_{e'_a} e'_b \overset{(C.63)}{=} D_{(M_a{}^d e_d)}(M_b{}^c e_c) = M_a{}^d D_d(M_b{}^c e_c) \\ &= M_a{}^d (e_d{}^m \partial_m M_b{}^c + M_b{}^e \omega_{de}{}^c) e_c \\ &= M_a{}^d (e_d{}^m \partial_m M_b{}^f + M_b{}^e \omega_{de}{}^f) M^{-1}{}_f{}^c e'_c \\ \omega'_{ab}{}^c &= M_a{}^d M_b{}^e \omega_{de}{}^f M^{-1}{}_f{}^c - M_a{}^d M_b{}^e e_d{}^m \partial_m M^{-1}{}_e{}^c\ . \end{aligned} \tag{C.68}$$

Beim letzten Schritt haben wir die Gleichung $(\partial_m M_b{}^e) M^{-1}{}_e{}^c = -M_b{}^e \partial_m M^{-1}{}_e{}^c$ verwendet, die man durch Ableiten von $M_b{}^e M^{-1}{}_e{}^c = \delta_b{}^c$ zeigt.

Die Komponentenfunktionen der Konnektion bezüglich einer Koordinatenbasis ∂_m schreibt man als $\Gamma_{kl}{}^m$ und nennt sie affine Konnektion im Unterschied zu den Komponentenfunktionen $\omega_{ab}{}^c$, die man Spinkonnektion nennt, wenn die zugehörige Basis e_a

an jedem Punkt orthonormal ist bezüglich eines Skalarproduktes und wenn der Paralleltransport Längen unverändert läßt. Wegen $\partial_m = e_m{}^a e_a$ oder $e_a = e_a{}^m \partial_m$ gilt nach (C.68) für die affine Konnektion und die Spinkonnektion

$$\Gamma_{kl}{}^m = e_k{}^a e_l{}^b e_c{}^m \omega_{ab}{}^c - e_l{}^b \partial_k e_b{}^m \ , \tag{C.69}$$

$$\omega_{ab}{}^c = e_a{}^k e_b{}^l e_m{}^c \Gamma_{kl}{}^m - e_a{}^k e_b{}^l \partial_k e_l{}^c \ , \tag{C.70}$$

und für verschiedene Koordinatenbasen $\partial'_m = \frac{\partial x^r}{\partial x'^m}\partial_r$ besagt (C.68)

$$\Gamma'_{rs}{}^t(x'(x)) = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial x'^t}{\partial x^m}\Gamma_{kl}{}^m(x) - \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial^2 x'^t}{\partial x^k \partial x^l} \ . \tag{C.71}$$

Ist die Transformation $x'(x)$ nicht affin, also nicht linear inhomogen von der Form $Mx+a$, so transformiert die affine Konnektion inhomogen. In flachen Räumen gilt die einfache Vorschrift für Parallelverschiebung, daß parallel verschobene Vektoren unveränderte Komponenten haben und daß $\Gamma_{kl}{}^n$ verschwindet, nur in kartesischen Koordinatensystemen. Sie hängen durch affine Transformationen miteinander zusammen.

Die symmetrischen und antisymmetrischen Anteile der affinen Konnektion

$$\Gamma_{kl}{}^m = S_{kl}{}^m + \frac{1}{2}T_{kl}{}^m \ , \tag{C.72}$$

$$S_{kl}{}^m = \frac{1}{2}\big(\Gamma_{kl}{}^m + \Gamma_{lk}{}^m\big) = S_{lk}{}^m \ , \quad T_{kl}{}^m = \Gamma_{kl}{}^m - \Gamma_{lk}{}^m = -T_{lk}{}^m \ , \tag{C.73}$$

transformieren getrennt voneinander

$$S'_{rs}{}^t(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial x'^t}{\partial x^m}S_{kl}{}^m(x(x')) - \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial^2 x'^t}{\partial x^k \partial x^l} \tag{C.74}$$

$$T'_{rs}{}^t(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial x'^t}{\partial x^m}T_{kl}{}^m(x(x')) \ . \tag{C.75}$$

Denn die zweiten Ableitungen von x' nach x hängen nicht von der Reihenfolge der Ableitungen ab und sind symmetrisch unter Vertauschen der Indizes k und l. Daher transformiert der antisymmetrische Anteil $T_{kl}{}^m$ homogen als Tensor. Er besteht, wie wir gleich sehen werden, aus den Komponentenfunktionen der Torsion.

Im Koordinatensystem $x'^n = x^n + \frac{1}{2}(x^k - c^k)(x^l - c^l)S_{kl}{}^n$, das in einer Umgebung von $x^n = c^n$ invertierbar mit x-Koordinaten zusammenhängt, verschwindet bei $x^n = c^n$ gemäß (C.74) der symmetrische Teil der Konnektion. Er kann an jedem vorgegebenen Punkt durch Wahl eines Koordinatensystems zum Verschwinden gebracht werden.

Die Torsion verschwindet in allen Koordinatensystemen, wenn sie in einem verschwindet.

Notwendig dafür, daß in einem Koordinatensystem alle Komponenten $\Gamma_{kl}{}^m$ der affinen Konnektion überall verschwinden, ist offensichtlich, daß Torsion und Krümmung verschwinden, denn wenn $\Gamma_{kl}{}^m = 0$ überall gilt, verschwinden die Tensoren $T_{kl}{}^n$ und $R_{klm}{}^n$. Wenn umgekehrt Torsion und Krümmung verschwinden, so lassen sich Koordinatensysteme finden, in denen die Komponenten der Konnektion verschwinden: zur Konstruktion dieser Koordinaten verschleppt man von einem Ausgangpunkt eine Basis von

Tangentialvektoren parallel zu jedem anderen Punkt. Das Ergebnis ist wegunabhängig, weil die Krümmung verschwindet. Zudem verschwindet mit der Torsion der Kommutator dieser parallelen Vektorfelder. Dies ist notwendig und hinreichend dafür, daß sie Tangentialvektorfelder ∂_m mit $[\partial_m, \partial_n] = 0$ sind, die zu Koordinatenlinien gehören.

Fassen wir eine Koordinatenbasis als Spezialfall einer Basis e_a mit $e_a{}^m = \delta_a{}^m$ und mit Konnektion Γ auf, so besagen (C.12) und (C.20) für die Komponenten der Torsion und der Krümmung bezüglich jeder Koordinatenbasis

$$T_{kl}{}^m = \Gamma_{kl}{}^m - \Gamma_{lk}{}^m \ , \quad R_{klm}{}^n = \partial_k \Gamma_{lm}{}^n - \partial_l \Gamma_{km}{}^n - \Gamma_{km}{}^r \Gamma_{lr}{}^n + \Gamma_{lm}{}^r \Gamma_{kr}{}^n \ . \tag{C.76}$$

Die kovarianten Ableitungen von Vektor- und Tensorfeldern (C.37, C.39, C.40) haben in einer Koordinatenbasis die Komponenten

$$D_m V^n = \partial_m V^n + \Gamma_{mk}{}^n V^k \ , \tag{C.77}$$

$$D_m X_n = \partial_m X_n - \Gamma_{mn}{}^k X_k \ , \tag{C.78}$$

$$\begin{aligned} D_r W_{m\dots n}{}^{k\dots l} = \ & \partial_r W_{m\dots n}{}^{k\dots l} + \Gamma_{rs}{}^k W_{m\dots n}{}^{s\dots l} + \dots + \Gamma_{rs}{}^l W_{m\dots n}{}^{k\dots s} - \\ & - \Gamma_{rm}{}^s W_{s\dots n}{}^{k\dots l} - \dots - \Gamma_{rn}{}^s W_{m\dots s}{}^{k\dots l} \ . \end{aligned} \tag{C.79}$$

Obwohl die Lieableitung (A.149) ohne Konnektion gebildet wird, so läßt sie sich dennoch durch kovariante Ableitungen ausdrücken

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi W_{k_1\dots k_r}{}^{l_1\dots l_s} = \ & \xi^m D_m W_{k_1\dots k_r}{}^{l_1\dots l_s} + \\ & + (D_{k_1}\xi^m) W_{m\dots k_r}{}^{l_1\dots l_s} + \xi^n T_{nk_1}{}^m W_{m\dots k_r}{}^{l_1\dots l_s} + \dots - \\ & - (D_m \xi^{l_1}) W_{k_1\dots k_r}{}^{m\dots l_s} - \xi^n T_{nm}{}^{l_1} W_{k_1\dots k_r}{}^{m\dots l_s} - \dots \ , \end{aligned} \tag{C.80}$$

denn alle Konnektionsterme auf der rechten Seite heben sich gegenseitig weg.

Liealgebrawertiger Zusammenhang

In jedem sternförmigen Gebiet kann man durch Basiswahl die Konnektion vereinfachen. Ein sternförmiges Gebiet enthält definitionsgemäß einen Ursprung U und mit jedem Punkt A eine Verbindungslinie, den Strahl Γ_A von U nach A, wobei sich diese Strahlen nur in U schneiden. Wir wählen in solch einem Gebiet am Ursprung eine Basis $e_{a_{|U}}$, verschieben sie parallel längs der Strahlen Γ_A und wählen diese parallel verschobene Basis als Basis an jedem Punkt A auf dem Strahl und daher im gesamten Gebiet

$$e_{a_{|A}} = P_{\Gamma_A} e_{a_{|U}} \ . \tag{C.81}$$

Verschiebt man diese Basis von einem Punkt A im Gebiet parallel längs einer beliebigen Kurve Γ zu einem anderen Punkt B im Gebiet und entwickelt man in der dortigen Basis

$$P_\Gamma e_{a_{|A}} = M^{-1}{}_a{}^b e_{b_{|B}} \ , \tag{C.82}$$

so gehört die hier auftretende Matrix M^{-1} zur Holonomiegruppe G_U des Punktes U, nämlich zur Parallelverschiebung von U längs des Strahls zu A, längs der Kurve Γ zu B und dann zurück längs des Strahls zu U

$$M^{-1}{}_a{}^b e_{b\,|_U} = P_{\Gamma_B^{-1}} P_\Gamma P_{\Gamma_A} e_{a\,|_U}\ . \tag{C.83}$$

Insbesondere gehören zu Paralleltransport P_ξ längs infinitesimaler Kurven von x zu $x+\xi$ Matrizen $M^{-1} = \mathbf{1} - T$ der Holonomiegruppe G_U, die dem Einselement infinitesimal benachbart sind

$$\begin{aligned}(\delta_a{}^b - T_a{}^b) e_{b_{|U}} &= P_{\Gamma^{-1}_{x+\xi}} P_\xi P_{\Gamma_x} e_{a\,|_U} = P_{\Gamma^{-1}_{x+\xi}} P_\xi e_{a\,|_x} = P_{\Gamma^{-1}_{x+\xi}} (e_a - \xi^m \omega_{m\,a}{}^b e_b)_{|x+\xi} \\ &= \big(e_a - \xi^m \omega_{m\,a}{}^b(x) e_b\big)_{|_U}\ .\end{aligned} \tag{C.84}$$

Die Matrix mit Elementen $T_a{}^b = \xi^m \omega_{m\,a}{}^b(x)$ gehört folglich zu infinitesimalen Holonomietransformationen, daher schreibt sich die Konnektion mit einer Basis T_i von Matrizen, die diese Liealgebra aufspannen, als

$$\omega_{m\,a}{}^b(x) = \omega_m{}^i(x) T_{i\,a}{}^b\ , \quad [T_i, T_j] = f_{ij}{}^k T_k\ . \tag{C.85}$$

Der Paralleltransport ist durch liealgebrawertige Vektorfelder $\omega^i_m(x)$ gegeben, deren Anzahl mit der Dimension der Holonomiegruppe übereinstimmt. Die parallel verschobenen Basisvektoren haben an jedem Punkt des sternförmigen Gebietes die Form

$$P_\xi e_{a\,|x} = (e_a - \xi^m \omega^i_m T_{i\,a}{}^b e_b)_{|x+xi}\ . \tag{C.86}$$

Daher sind die Komponenten des Riemanntensors (C.20) Linearkombinationen der x-unabhängigen Matrizen T_i

$$R_{cda}{}^b = e_c{}^m e_d{}^n \big(\partial_m \omega^i_n - \partial_n \omega^i_m - \omega^j_m \omega^k_n f_{jk}{}^i\big) T_{i\,a}{}^b\ . \tag{C.87}$$

Dies gilt allerdings normalerweise nicht in der Koordinatenbasis mit Konnektion $\Gamma_{kl}{}^m$, denn wählt man am Ursprung U des sternförmigen Gebiets als Basis die Tangentialvektoren der Koordinatenlinien und verwendet man, um die Konnektion zu vereinfachen, diese parallel längs Strahlen verschobenen Vektoren als Basis im gesamten Gebiet, so sind sie normalerweise an anderen Punkten nicht die Tangentialvektoren an Koordinatenlinien.

Wir haben zur Vereinfachung mit einer Basis gearbeitet, die durch Paralleltransport vom Ursprung längs Strahlen definiert ist, und den Ursprung dadurch ausgezeichnet, daß dort ω^i_n verschwindet. Gehen wir an jedem Punkt durch eine Holonomietransformation oder eine Transformation aus einer eventuell größeren Gruppe, die wir Eich- oder Strukturgruppe nennen, zu einer anderen Basis über, die differenzierbar mit der bisherigen Basis zusammenhängt, solch einen Basiswechsel nennen wir Eichtransformation, so sind der Ursprung und Strahlen vom Ursprung nicht mehr ausgezeichnet.

Eichtheorien

Die Vektoren, die man parallel verschieben kann, müssen nicht unbedingt geometrisch anschauliche Vektoren sein, wie sie als Tangentialvektoren an Kurven auftreten. In der

Theorie der Elementarteilchen beschreibt man Materie durch ein Feld $\psi(x) = \psi^c(x) f_{c\,|x}$, das Werte in einem Vektorraum $\mathcal{I}$, dem Isoraum, annimmt. Die Komponentenfelder $\psi^c(x)$ gehören zu Teilchen wie Elektronen, Neutrinos oder Quarks. Sie unterscheiden sich in Eigenschaften, den Isoladungen, die in der Elementarteilchenphysik mit Namen wie Ladung, Geschmack (Flavour) und Farbe (Colour) bezeichnet werden.

Für die Isovektoren $f_{c\,|x}$ ist an jedem Punkt x Addition und Multiplikation mit Zahlen erklärt, sie bilden eine Basis, $\psi(x) = \psi^c(x) f_{c\,|x}$. Dabei durchläuft der Index c die natürlichen Zahlen bis zur Dimension $\dim(\mathcal{I})$ des Isoraumes.

Der Paralleltransport von Isovektoren von x zum infinitesimal benachbarten Punkt $x+\xi$ ist aus den gleichen Gründen wie bei Vektoren von der Form

$$P_\xi f_{c\,|x} = \big(f_a - \xi^m A_{m\,c}{}^d f_d\big)_{|x+\xi}\ . \tag{C.88}$$

Ebenso lassen sich die Felder $A_{m\,c}{}^d = A^i_m \tau_{i\,c}{}^d$ als Linearkombination von x-unabhängigen Darstellungsmatrizen τ_i der Liealgebra infinitesimaler Holonomietransformationen oder Eichtransformationen schreiben. Die Felder $A^i_m(x)$, die den Paralleltransport von Isovektoren definieren, heißen in der Physik Viererpotential, Eichfeld oder Yang-Mills-Feld und gehören zu Photonen, W- und Z-Bosonen und Gluonen, die elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkungen verursachen.

Die kovariante Ableitung von Isovektorfeldern ist wie in (C.37) durch

$$D_a(\psi^c f_c) = e_a{}^m (\partial_m \psi^c + A^i_m \tau_{i\,d}{}^c \psi^d) f_c \tag{C.89}$$

gegeben. Nur zählen hier die Indizes c und d die Basis des Isoraumes ab und durchlaufen die natürlichen Zahlen bis $\dim(\mathcal{I})$.

Aus $D_a(D_b f_c) - D_b(D_a f_c) - D_{[e_a,e_b]} f_c = F_{ab}{}^i \tau_{i\,c}{}^d f_d$ liest man die Isokrümmung $F_{ab}{}^i$, die Feldstärke der Eichfelder A^i_m, ab

$$F_{ab}{}^i = e_c{}^m e_d{}^n \big(\partial_m A^i_n - \partial_n A^i_m - A^j_m A^k_n f_{jk}{}^i\big)\ . \tag{C.90}$$

Hier treten die Strukturkonstanten $f_{jk}{}^i$ der Liealgebra der Eichtransformationen auf, $[\tau_i, \tau_j] = f_{ij}{}^k \tau_k$. Sie bestimmen zusammen mit den Darstellungsmatrizen τ_i im Standardmodell der Elementarteilchen die Kopplungen von Eichfeldern und Materiefeldern.

Die Eichfelder $A_m{}^i$ und die Darstellungsmatrizen τ_i definieren durch $A = \mathrm{d}x^m A_m{}^i \tau_i$ eine Liealgebrawertige Differentialform A, mit der sich die Feldstärke, so wie die Krümmung (C.23), indexfrei als Zweiform schreibt

$$F = \mathrm{d}A - A^2\ , \quad F = e^a e^b \frac{1}{2} F_{ab}{}^i \tau_i\ . \tag{C.91}$$

Differenziert man erneut, so folgt mit $\mathrm{d}^2 = 0$ (A.96) und der Produktregel (A.95)

$$\mathrm{d}F = -(\mathrm{d}A)A + A\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\big((\mathrm{d}e^a) e^b F_{ab}{}^i \tau_i - e^a (\mathrm{d}e^b) F_{ab}{}^i \tau_i + e^a e^b e^c e_c{}^m \partial_m F_{ab}{}^i \tau_i\big)\ . \tag{C.92}$$

Setzt man hier (C.14) und (C.91) ein und bringt alle Terme auf eine Seite, so kombinieren sich die partielle Ableitung und die AF- und ωF-Terme zur kovarianten Ableitung und man erhält die zweite Bianchiidentität (C.62)

$$\sum_{abc} (D_a F_{bc}{}^i + T_{ab}{}^e F_{ec}{}^i) = 0\ . \tag{C.93}$$

C.5 Metrikverträgliche Parallelverschiebung

Ist für Tangentialvektoren u an jedem Punkt x ein Längenquadrat erklärt

$$u^2{}_{|x} = g_{mn}(x)u^m(x)u^n(x)\ , \quad g_{mn}(x) = g_{nm}(x)\ , \tag{C.94}$$

so ist Parallelverschiebung verträglich mit der Metrik $g_{mn}(x)$, wenn sie die Länge des Vektors nicht verändert, wenn also bis auf Terme der Ordnung $(\xi)^2$ gilt

$$(P_\xi u)^2 = u^2\ . \tag{C.95}$$

Setzen wir die Komponenten (C.3) des parallel verschobenen Vektors ein und berechnen wir das Längenquadrat am Ort $x+\xi$, so heißt dies

$$\begin{aligned} 0 =& g_{mn}(x+\xi)(u^m - \xi^k\Gamma_{kl}{}^m u^l)(u^n - \xi^k\Gamma_{kl}{}^n u^l) - g_{mn}(x)u^m u^n \\ =& \xi^k\partial_k g_{mn}u^m u^n - g_{mn}u^m\xi^k\Gamma_{kl}{}^n u^l - g_{mn}\xi^k\Gamma_{kl}{}^m u^l u^n \\ =& \xi^k\bigl(\partial_k g_{mn} - g_{ml}\Gamma_{kn}{}^l - g_{ln}\Gamma_{km}{}^l\bigr)u^m u^n\ . \end{aligned} \tag{C.96}$$

Diese Gleichung gilt für alle ξ^k und alle u^m genau dann, wenn

$$\partial_k g_{mn} - g_{ml}\Gamma_{kn}{}^l - g_{ln}\Gamma_{km}{}^l = 0 \tag{C.97}$$

erfüllt ist, denn wir können in der Identität (C.96) die Komponenten von ξ und u als Variable betrachten und nach ihnen differenzieren.

Parallelverschiebung ist genau dann metrikverträglich (C.97), wenn die kovariante Ableitung (C.79) der Metrik verschwindet

$$D_k g_{mn} = \partial_k g_{mn} - \Gamma_{km}{}^l g_{ln} - \Gamma_{kn}{}^l g_{ml} = 0\ . \tag{C.98}$$

In basisunabhängiger Schreibweise heißt dies für Vektorfelder X, U und V

$$0 = (D_X g)(U,V) = D_X(g(U,V)) - g(D_X U, V) - g(U, D_X V) \tag{C.99}$$

oder in der Notation $U\cdot V = g(U,V) = U^m V^n g_{mn}$

$$X^m\partial_m(U\cdot V) = (D_X U)\cdot V + U\cdot(D_X V)\ . \tag{C.100}$$

Die Metrikverträglichkeit legt den symmetrischen Teil $S_{kl}{}^m$ der Konnektion fest. Dies sieht man, wenn man zur Vereinfachung die Notation

$$\Gamma_{kl\,m} = g_{mn}\Gamma_{kl}{}^n \tag{C.101}$$

einführt, $\Gamma_{kl\,m}$ wie in (C.72) in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil zerlegt und die permutierten Versionen von (C.97) geeignet linear kombiniert

$$\begin{aligned} \partial_k g_{mn} - \frac{1}{2}T_{kn\,m} - \frac{1}{2}T_{km\,n} =& \quad S_{kn\,m} + S_{km\,n} \\ \partial_m g_{nk} - \frac{1}{2}T_{mk\,n} - \frac{1}{2}T_{mn\,k} =& \quad S_{mk\,n} + S_{mn\,k} \\ -\partial_n g_{km} + \frac{1}{2}T_{nm\,k} + \frac{1}{2}T_{nk\,m} =& -S_{nm\,k} - S_{nk\,m}\ . \end{aligned} \tag{C.102}$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so heben sich wegen $S_{kn\,m} = S_{nk\,m}$ und $S_{mn\,k} = S_{nm\,k}$ auf der rechten Seite vier Terme weg und man erhält

$$S_{km\,n} = \frac{1}{2}\bigl(\partial_k g_{mn} + \partial_m g_{nk} - \partial_n g_{km}\bigr) - \frac{1}{2}T_{kn\,m} - \frac{1}{2}T_{mn\,k}\ . \tag{C.103}$$

Wir verwenden, daß die Metrik invertierbar ist[4], lösen $S_{kl\,n} = g_{nm}S_{kl}{}^m$ nach $S_{kl}{}^m$ durch Multiplikation mit der inversen Metrik (A.106) auf und setzten in (C.72) ein.

Die Komponenten des metrikverträglichen, affinen Zusammenhangs sind

$$\Gamma_{kl}{}^m = \frac{1}{2}g^{mn}\bigl(\partial_k g_{nl} + \partial_l g_{nk} - \partial_n g_{kl} + T_{nk\,l} + T_{nl\,k} + T_{kl\,n}\bigr)\ . \tag{C.104}$$

Die zugehörige metrikverträgliche Spinkonnektion (C.69) eines Vielbeins, also einer orthonormierten Basis $e_a\cdot e_b = \eta_{ab}$, schreibt sich wegen (A.104) mit der Notation $\omega_{c\,ab} = e_c{}^n\eta_{bd}\omega_{n\,a}{}^d$ und $T_{ab\,c} = e_a{}^k e_b{}^l e_m{}^d\eta_{cd}T_{kl}{}^m$ als

$$\begin{aligned} \omega_{c\,ab} =& \frac{1}{2}\bigl(\eta_{cd}e_a{}^m e_b{}^n + \eta_{ad}e_c{}^m e_b{}^n - \eta_{bd}e_c{}^m e_a{}^n\bigr)\bigl(\partial_m e_n{}^d - \partial_n e_m{}^d\bigr) + \\ &+ \frac{1}{2}\bigl(T_{ca\,b} - T_{cb\,a} - T_{ab\,c}\bigr)\ . \end{aligned} \tag{C.105}$$

Sie ist antisymmetrisch in den letzten beiden Indizes $\omega_{c\,ab} = -\omega_{c\,ba}$. Es sind $\omega_{n\,a}{}^b$ Vektorfelder, die zur Liealgebra infinitesimaler Lorentztransformationen (B.13) gehören.

Der torsionsfreie Teil der metrikverträglichen, affinen Konnektion und der Spinkonnektion ist, anders als die Eichfelder des Standardmodells, aus anderen Feldern, der Metrik oder dem Vielbein, und ihren Ableitungen zusammengesetzt.

Die metrikverträgliche, torsionsfreie Konnektion heißt Levi-Civita-Konnektion. In der Koordinatenbasis ist sie durch das Christoffelsysmbol gegeben

$$\Gamma_{kl}{}^m = \frac{1}{2}g^{mn}\bigl(\partial_k g_{nl} + \partial_l g_{nk} - \partial_n g_{kl}\bigr)\ . \tag{C.106}$$

Verschwindet die Torsion nicht, so trägt sie auch zum symmetrischen Teil $S_{kl}{}^m$ der metrikverträglichen Konnektion bei und macht sich in der Geradengleichung (C.114) bemerkbar. Die Gerade ist dann nicht die Linie, die je zwei ihrer Punkte mit extremaler Länge verbindet.

Schreiben wir die Lieableitung (A.149) der Metrik

$$\mathcal{L}_\xi g_{mn} = \xi^k\partial_k g_{mn} + (\partial_m\xi^k)g_{kn} + (\partial_n\xi^k)g_{mk} \tag{C.107}$$

mit kovarianten Ableitungen (C.80)

$$\mathcal{L}_\xi g_{mn} = \xi^k D_k g_{mn} + (D_m\xi^k)g_{kn} + \xi^l T_{lm}{}^k g_{kn} + (D_n\xi^k)g_{mk} + \xi^l T_{ln}{}^k g_{mk}\ , \tag{C.108}$$

[4]Ist die Parallelverschiebung metrikverträglich und die Metrik in einem Punkt invertierbar, so ist sie in allen damit wegzusammenhängenden Punkten invertierbar.

der Levi-Civita-Konnektion, $T_{kl}{}^m = 0 = D_m g_{nk}$, so erweist sich die Lieableitung der Metrik längs ξ als die symmetrisierte, kovariante Ableitung von $\xi_m = g_{mn}\xi^n$

$$\mathcal{L}_\xi g_{mn} = D_m\xi_n + D_n\xi_m \ . \tag{C.109}$$

Die symmetrisierte, kovariante Ableitung des Feldes ξ_m ist proportional zur Metrik (E.27), falls ξ^m zu einer infinitesimalen konformen Transformation gehört und verschwindet für infinitesimale Isometrien.

Wenn Parallelverschiebung torsionsfrei und metrikverträglich ist, die affine Konnektion also durch das Christoffelsymbol (C.106) gegeben ist, so vereinfacht sich die erste Bianchi-Identität (C.60) zu

$$R_{klm}{}^n + R_{lmk}{}^n + R_{mkl}{}^n = 0 \ . \tag{C.110}$$

Hieraus und aus der Antisymmetrie im ersten und im zweiten Indexpaar (C.25) folgt, daß der Riemanntensor unter Vertauschung der beiden Indexpaare symmetrisch ist

$$\begin{aligned} R_{klmn} &= -R_{lmkn} - R_{mkln} = R_{lmnk} + R_{mknl} \\ &= -R_{mnlk} - R_{nlmk} - R_{knml} - R_{nmkl} \\ &= 2R_{mnkl} + R_{nlkm} + R_{knlm} = 2R_{mnkl} - R_{lknm} \\ R_{klmn} &= R_{mnkl} \end{aligned} \tag{C.111}$$

und daß der Riccitensor $R_{kl} = R_{kml}{}^m$ symmetrisch ist

$$R_{kl} = R_{lk} \ . \tag{C.112}$$

In der Standardformulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie wird der Paralleltransport so gewählt, daß die Torsion verschwindet. Dies ist zunächst eine Einfachheitsforderung; Formulierungen mit nichtverschwindender Torsion sind genauso denkbar. Um zu entscheiden, welcher Paralleltransport physikalisch durch Testteilchen und Licht realisiert ist, müssen die Auswirkungen von Torsion in Spielarten der Allgemeinen Relativitätstheorie untersucht und mit den Beobachtungen verglichen werden. Wir lassen daher zu, daß die Torsion nicht verschwindet, auch wenn wir in Kapitel 7 zeigen, daß Testteilchen und Licht dem torsionsfreien Paralleltransport unterliegen. Dies ist keine Einfachheitsannahme, sondern folgt aus der Koordinateninvarianz der Wirkung

C.6 Geraden

Eine Kurve $x(s)$ ist gerade oder geodätisch, wenn der Tangentialvektor $U^m(s) = \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}$ bei Parallelverschiebung längs der Kurve zum Punkt $x(s+\varepsilon) = x + \varepsilon U$ mit dem dortigen Tangentialvektor bis auf Terme der Ordnung ε^2 übereinstimmt. Dann verschwindet auf der Kurve die kovariante Ableitung $D_U U$ des Tangentialvektors in Richtung des Tangentialvektors.

Auf einer Kurve $x(s)$ erfordert der Begriff der kovarianten Ableitung $D_U V$ eines Vektors $V(s)$ längs des Tangentialvektors $U = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ nicht, daß $V(s)$ ein in der Umgebung der

Kurve definiertes Vektorfeld $V(x)$ ist, denn die Ableitung $\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\partial_m$ wirkt als Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ nach dem Kurvenparameter

$$\frac{\delta V^n}{\delta s} = D_{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}} V^n = \frac{\mathrm{d}V^n}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\Gamma_{kl}{}^n V^l \ . \tag{C.113}$$

Hierbei haben wir die Kurzschrift $\frac{\delta}{\delta s}$ für die kovariante Ableitung $D_{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}}$ eingeführt.

Da Geraden definitionsgemäß $D_U U = 0$ mit $U^m = \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}$ erfüllen, lösen ihre Koordinatenfunktionen die Geodätengleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^m}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma_{kl}{}^m \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} = 0 \ . \tag{C.114}$$

Falls die affine Konnektion überall verschwindet, sind die Koordinaten von Geraden lineare Funktionen $x^m(s) = U^m \cdot s + x^m(0)$ des Bahnparameters.

Es ist $\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}$ symmetrisch unter Vertauschung der Indizes. Daher trägt zur Geradengleichung nur der symmetrische Teil $S_{kl}{}^m$ der Konnektion bei.

Ungleichmäßige Gravitation verändert durch Gezeiteneffekte den Abstand zwischen frei fallenden Teilchen, die gerade Weltlinien durchlaufen und die Geodätengleichung erfüllen. Parametrisieren wir die Teilchen durch Parameter v und parametrisieren wir für festes v jede Weltlinie durch einen Bahnparameter u, so ist diese Schar von Weltlinien durch $x^m(u,v)$ gegeben. Dabei ist $\frac{\partial x^m}{\partial u} = U^m$ der Tangentialvektor an die jeweilige geodätische Linie und erfüllt die Geodätengleichung $D_U U = 0$, der Vektor $V^m = \frac{\partial x^m}{\partial v}$ zeigt zur benachbarten geodätischen Linie.

Wenn die Vektoren U und V, längs derer differenziert wird, nur auf Kurven oder Flächen oder allgemeiner Untermannigfaltigkeiten definiert sind, wobei die r-dimensionale Untermannigfaltigkeiten in einem Koordinatensystem durch Funktionen $x^m(s^1,...,s^r)$ gegeben sei, so behalten die Gleichungen (C.45) und (C.44) ihre Gültigkeit, falls U und V tangential, das heißt von der Form

$$U^m{}_{|x(s)} = U^a(s)\frac{\partial x^m}{\partial s^a} \ , \quad a = 1,\dots,r \ , \tag{C.115}$$

sind. Dann wirken die Ableitungen $U^m\partial_{x^m}$ als Ableitungen $U^a\partial_{s^a}$ innerhalb der Untermannigfaltigkeit. Das gilt insbesondere für den Kommutator

$$[U,V]^m{}_{|x(s)} = (U^b\partial_{s^b}V^a - V^b\partial_{s^b}U^a)\frac{\partial x^m}{\partial s^a} \ . \tag{C.116}$$

Auf der zweidimensionalen Fläche $x(u,v)$ sind $U = U^m\partial_{x^m}$ und $V = V^m\partial_{x^m}$ tangentiale Vektorfelder, deren Kommutator verschwindet

$$[U,V]^m = \frac{\partial x^k}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial v} - \frac{\partial x^k}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}x^m - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}x^m = 0 \ .$$

Daher unterscheidet sich die kovariante Ableitung von V längs U von der Ableitung von U längs V um die Torsion (C.45)

$$D_U V = D_V U + T(U,V) \ , \tag{C.117}$$

und bei verschwindender Torsion gilt $D_U V = D_V U$.

Längs jeder geodätischen Linie ist die Länge des Tangentialvektors wegen (C.100) und $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(U \cdot U) = (D_U U) \cdot U = 0$ konstant. Sind die geodätischen Linien zudem so parametrisiert, daß diese Länge für jede geodätische Linie gleich ist, und verschwindet die Torsion, so ist das Skalarprodukt von V mit U konstant

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(U \cdot U) = (D_V U) \cdot U = (D_U V) \cdot U = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(V \cdot U) \ . \tag{C.118}$$

Ist also der Vektor V zu Beginn für ein u senkrecht zur Tangente U und zeigt er demnach von der geodätischen Weltlinie zu einem gleichzeitigen Ereignis auf der benachbarten geodätischen, so tut er das auch später. Der Vektor V heißt geodätische Abweichung.

Längs jeder geodätischen Linie gilt für die Änderung von V wegen (C.44, C.45) und, weil $D_U U$ und $[U, V]$ verschwinden, die Gleichung

$$D_U D_U V = D_U(D_V U + T(U, V)) = R(U, V, U) + D_U(T(U, V)) \ . \tag{C.119}$$

In Komponenten lautet die Gleichung der geodätischen Abweichung

$$\frac{\delta^2 V^m}{\delta u^2} = R_{kln}{}^m U^k V^l U^n + \frac{\delta}{\delta u}\left(U^k T_{kl}{}^m V^l\right) \ . \tag{C.120}$$

Längs jeder geodätischen Linie ist dies ein linear homogenes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für den Vektor V^m, der zur benachbarten Geodäten zeigt. Im flachen Raum verschwinden die Krümmung und Torsion und die Differenz V^m zur Nachbargeraden wächst linear an.

Wegen (C.111) ist die Matrix ω^2

$$\omega^2_{mn} = -R_{kmln} U^k U^l = \omega^2_{nm} \ , \quad \omega^2_{mn} U^n = 0 \ , \tag{C.121}$$

symmetrisch, wenn der Paralleltransport metrikverträglich und torsionsfrei ist. Sie bildet U^m auf Null und den zu U^m orthogonalen Raum auf sich ab. Die Gleichung der geodätischen Abweichung (C.120) hat dann die Form

$$\frac{\delta^2 V^m}{\delta u^2} + \omega^2{}_n{}^m V^n = 0 \ . \tag{C.122}$$

An jedem vorgegebenen Punkt P der geodätischen Linie kann ein Koordinatensystem eingeführt werden, so daß an diesem Punkt die Konnektion verschwindet, die Metrik gleich der flachen Metrik $g_{mn\,|P} = \eta_{mn}$ ist, der Tangentialvektor $U^m = (1, 0, 0, 0)$ nur eine Zeitkomponente hat und die Matrix ω^2 diagonal mit Diagonalelementen κ_i ist. In einer kleinen Umgebung dieses Punktes lautet dann die Gleichung für geodätische Abweichung ungefähr

$$\frac{\mathrm{d}^2 V^i}{\mathrm{d}t^2} + \kappa_i V^i = 0 \ , \quad \text{(keine Summe über } i) \ , \quad i = 1, 2, 3 \ . \tag{C.123}$$

Ist κ_i positiv, so ist dies die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit Einheitsmasse $m = 1$ und Federkonstante κ_i. Zu negativem κ_i gehört Abstoßung in Richtung der Auslenkung. Im Vakuum und bei verschwindender kosmologischen Konstante besagen die Einsteingleichungen $R_{kmln} g^{mn} = 0$ (8.19), daß die Matrix ω^2 spurfrei ist und daß die Summe der drei Federkonstanten $\sum_i \kappa_i$ verschwindet. Wirken die Gezeitenkräfte zwischen zwei benachbarten geodätischen Linien wie eine rücktreibende, anziehende Kraft, so gibt es in einer Richtung senkrecht dazu Abstoßung.

Gleiches gilt übrigens auch in Newtonscher Gravitation. Denn das Newtonsche Gravitationspotential im Vakuum erfüllt die Laplace-Gleichung (5.51)

$$\Delta\phi = 0 \ . \tag{C.124}$$

Entwickelt man das Potential um einen Punkt

$$\phi(x, y, z) = \phi(0, 0, 0) + \sum_{i=1}^{i=3} g^i x^i + \frac{1}{2}\left(ax^2 + by^2 + cz^2\right) + O(x^3) \ , \tag{C.125}$$

wobei die quadratischen Terme durch Basiswahl diagonalisiert sind, dann besagt die Laplace-Gleichung, daß die Summe $a + b + c$ der drei Federkonstanten verschwindet.

Wenn in Newtonscher Gravitation im Vakuum Teilchen im freien Fall die Erde umkreisen, so pendeln die Weltlinien von nebeneinander laufenden Teilchen umeinander, die Gezeitenkräfte wirken also in dieser Richtung anziehend. Ist der Abstandsvektor zweier Teilchen dazu senkrecht und laufen sie mit unterschiedlichem Abstand um die Erde, so bewirken die Gezeitenkräfte Abstoßung und die Teilchen entfernen sich voneinander.

Ein senkrecht auf eine Zentralmasse fallender Körper wird durch Gezeitenkräfte in Fallrichtung gestreckt und quer dazu gestaucht. Ein so durch Gezeitenkräfte zerrissener Komet, der Komet Shoemaker-Levy, schlug 1994 als Kette von hintereinander fallenden Bruchstücken auf dem Jupiter ein.

In einem fiktiven Tunnel, der durch eine Zentralmasse gebohrt ist, die sich einfachheitshalber nicht dreht, wirken Gezeitenkräfte für hintereinander fallende Teilchen anziehend, auf nebeneinander fallende Teilchen wirken sie abstoßend.

Gravitation bewirkt, daß sich der Abstand frei fallender Teilchen ändert, ohne daß die Teilchen einer spürbaren Kraft ausgesetzt sind. Diese Änderung der beiderseitigen Abstände durch geodätische Abweichung beruht auf Gezeitenkräften der Gravitation, die von anderen Massen verursacht wird, nicht auf gegenseitiger Gravitation der Testteilchen. Die geodätische Abweichung ist unabhängig von den Massen der beteiligten Testteilchen, wächst mit ihrem Abstand, sofern er klein ist, und ist normalerweise richtungsabhängig.

C.7 Drehungsfreie Bewegung

Ein Beobachter durchlaufe eine Weltlinie $x^m(s)$, die mit der Zeit parametrisiert sei, die seine Uhr anzeigt. Dann hat der Tangentialvektor $\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} = e_0{}^m$ Einheitslänge. Senkrecht im Sinne des Skalarproduktes stehen an jedem Punkt der Weltlinie drei Basisvektoren e_i, $i =$

1, 2, 3, die räumlichen Maßstäbe des Beobachters, die von der Weltlinie zu gleichzeitigen, benachbarten Ereignissen zeigen, und die paarweise orthogonal und normiert sein mögen. Die vier orthonormalen Basisvektoren definieren längs der Weltlinie ein Vierbein (A.107)

$$e_a{}^m e_b{}^n g_{mn} = e_a \cdot e_b = \eta_{ab} \ , \quad a, b \in \{0, 1, 2, 3\} \ . \tag{C.126}$$

Auf der Weltlinie des Beobachters ist bei metrikverträglichem Paralleltransport die Ableitung eines Skalarprodukts $(a \cdot b) = a^m b^n g_{mn}$ nach dem Kurvenparameter gleich dem Skalarprodukt der gemäß Produktregel kovariant längs der Kurve differenzierten Vektoren (C.100). Da die Skalarprodukte $e_a \cdot e_b$ längs der Weltlinie konstant sind, gilt

$$\frac{\delta e_a}{\delta s} \cdot e_b + e_a \cdot \frac{\delta e_b}{\delta s} = 0 \ . \tag{C.127}$$

Drückt man die kovariante Ableitung des Vierbeins wieder als Linearkombination des Vierbeins aus

$$\frac{\delta e_a{}^k}{\delta s} = \omega_a{}^c \, e_c{}^k \ , \tag{C.128}$$

so besagt (C.127), daß die Koeffizienten ω_{ab} antisymmetrisch sind

$$\omega_{ab} = \omega_a{}^c \eta_{bc} \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba} \ . \tag{C.129}$$

ω ist eine infinitesimale Lorentztransformation (B.13, E.101).

Die kovariante Ableitung des normierten Tangentialvektors e_0 einer zeitartigen Weltlinie definiert einen Vektor be_1, die Beschleunigung, die wir als Betrag b und einen zu e_0 senkrechten, normierten Vektor e_1 schreiben. Die kovariante Ableitung des Vektors e_1 kann als Linearkombination von e_0, e_1 und einem weiteren, normierten Vektor e_2 geschrieben werden, der senkrecht auf e_0 und e_1 steht. Durch fortlaufendes Differenzieren erhält man so die Gleichungen (C.128); allerdings verschwinden die Koeffizienten $\omega_a{}^c$ für $c > a + 1$. Daher vereinfacht sich (C.128) zu den Frenet-Serretschen Formeln

$$\begin{aligned} \frac{\delta e_0}{\delta s} &= -\omega_{01}\, e_1 & \frac{\delta e_1}{\delta s} &= -\omega_{01}\, e_0 - \omega_{12}\, e_2 \\ \frac{\delta e_2}{\delta s} &= \omega_{12}\, e_1 - \omega_{23}\, e_3 & \frac{\delta e_3}{\delta s} &= \omega_{23}\, e_2 \ . \end{aligned} \tag{C.130}$$

Die Koeffizientenfunktion ω_{01} ist der Betrag der Beschleunigung, ω_{12} ist der Betrag der Änderung der Richtung der Beschleunigung und wirkt sich durch Coriolis-Kräfte und zusammen mit ω_{23} durch Präzession aus. Verschwindet ω_{23}, so ist im flachen Raum die Bahnkurve eben. Verschwindet ω_{12}, so ist im flachen Raum die Bahn räumlich gerade, verschwindet ω_{01}, so ist die Bahnkurve eine Gerade in der Raumzeit, also geodätisch.

Aus vorgegebenen Koeffizientenfunktionen $\omega_{01}(s)$, $\omega_{12}(s)$ und $\omega_{23}(s)$ und den Anfangsbedingungen $x(0), e_a(0)$ kann die Bahnkurve $x(s)$ eindeutig bestimmt werden. Es ist ohne weiteres möglich, daß die Weltlinien zweier Zwillinge, die vom gleichen Ereignis $x(0)$ mit unterschiedlicher Geschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}_{|s=0} = e_0(0)$ starten, sich später schneiden. Auch wenn alle Koeffizientenfunktionen $\omega_{01}(s)$, $\omega_{12}(s)$ und $\omega_{23}(s)$ des ersten Zwillings

zwischen Start bei $s = 0$ und Treffen bei $s = s_1$ mit denjenigen des anderen Zwillings zwischen $s = 0$ und $s = s_1$ übereinstimmen, kann der zweite Zwilling eine andere Weltlinie durchlaufen haben, auf der das Treffen zu einer anderen Zeit bei $s_2 \neq s_1$ stattfindet.

Das Vierbein, das durch die Frenet-Serretschen Formeln definiert ist, ist normalerweise nicht drehungsfrei. Drehungsfrei ist die Bewegung der Basisrichtungen e_1, e_2 und e_3 eines Beobachters, wenn genügend kurze Lichtwege umkehrbar sind und reflektierte Lichtstrahlen wieder aus der Richtung einfallen, in die sie ausgesendet worden waren.

Was Drehungsfreiheit besagt, klärt die folgende Rechnung. Wir entwickeln bis zur zweiten Ordnung die nicht notwendig gerade Weltlinie $\Gamma : s \mapsto x(s)$ mit Tangentialvektor $e_0{}^m = \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}$ und das gemäß (C.128) mitgeführte Vierbein $e_a{}^m(s)$ um einen Punkt $x(0)$ und betrachten einen Lichtstrahl, der zur Zeit $-s$ in Richtung n^i ausgesendet wird, dann zurück gestreut und zur Zeit s wieder aus Richtung n_E^i empfangen wird.

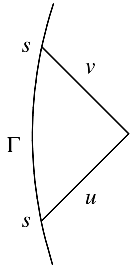

Abbildung C.3: Drehungsfreie Richtung

Die ausgesendeten und empfangenen Lichtstrahlen $y_A(\lambda)$ und $y_E(\lambda)$ lösen die Geodätengleichung. Die Weltlinie des Beobachters ist eventuell beschleunigt

$$\frac{\mathrm{d}e_0{}^m}{\mathrm{d}s} + \Gamma_{kl}{}^m e_0{}^k e_0{}^l = \omega_0{}^b e_b{}^m \ . \tag{C.131}$$

Daher sind die Weltlinien in quadratischer Näherung in s und λ

$$x^m(s) = x^m(0) + s e_0{}^m + \frac{1}{2} s^2 \big(-\Gamma_{kl}{}^m e_0{}^k e_0{}^l + \omega_0{}^b e_b{}^m\big) \ , \tag{C.132}$$

$$y_A^m(\lambda) = x^m(-s) + \lambda u^m - \frac{1}{2} \lambda^2 \Gamma_{kl}{}^m u^k u^l \ , \tag{C.133}$$

$$y_E^m(\lambda) = x^m(s) - \lambda v^m - \frac{1}{2} \lambda^2 \Gamma_{kl}{}^m v^k v^l \ . \tag{C.134}$$

Dabei haben die Tangentialvektoren u und v an die Weltlinie der ein- und auslaufenden Lichtstrahlen räumliche Komponenten n_E^i und n^i

$$u = e_0{}^m(-s) + n^i e_i{}^m(-s) \ , \quad v = e_0{}^m(s) - n_E^i e_i{}^m(s) \ , \quad \sum_{i=1}^{i=3} n^{i2} = 1 = \sum_{i=1}^{i=3} n_E^{i\,2} \ . \tag{C.135}$$

Die Vierbeine lösen die Differentialgleichung (C.128) und sind in linearer Ordnung

$$e_a{}^m(s) = e_a{}^m(0) + s\big(-\Gamma_{kl}{}^m e_0{}^k e_a{}^l + \omega_a{}^b e_b{}^m\big) \ . \tag{C.136}$$

Die Bedingung, daß sich die Lichtstrahlen in einem Punkt schneiden

$$y_A(\lambda) = y_E(\lambda') \ , \tag{C.137}$$

sind vier Gleichungen, die λ, λ' und die zwei unabhängigen Komponenten von n_E als Funktion von n und s festlegen.

Wertet man diese Gleichungen zunächst in linearer Ordnung in s aus, indem man Skalarprodukte mit e_0 und e_j, $j = 1, 2, 3$, betrachtet, so ergibt sich $\lambda = \lambda' = s$ und $n_E^i = n^i$. Bis zur nächsten Ordnung gilt also

$$\lambda = s + s^2 \lambda_2 \ , \quad \lambda' = s + s^2 \lambda'_2 \ , \quad n_E^i = n^i + s\,\delta n^i \ . \tag{C.138}$$

In Ordnung s^2 heben sich in den Gleichungen (C.137) die symmetrischen Anteile $\Gamma_{kl}{}^m + \Gamma_{lk}{}^m$ der Konnektion weg. Für die Torsion $T_{kl}{}^m = \Gamma_{kl}{}^m - \Gamma_{lk}{}^m$ verwenden wir die Kurzschrift $T_{ab\,c} = T_{kl}{}^m e_a{}^k e_b{}^l e_c{}^n g_{mn}$. Dann besagt (C.137) in quadratischer Ordnung

$$\delta n_i = (\lambda_2 - \lambda_2')n_i - 2n^j\omega_{ji} + T_{0j\,i}n^j \ , \quad \lambda_2 + \lambda_2' = 2n^j\omega_{j0} - T_{0i\,0}n^i \ . \tag{C.139}$$

Der reflektierte Lichtstrahl kommt jeweils aus derselben Richtung zurück, und das Bezugssystem ist drehungsfrei, wenn die Gleichung $\delta n^i = 0$ für alle Richtungen n^i gilt.

Wir zerlegen $T_{0i\,j} = S_{ij} + A_{ij}$ in den symmetrischen und antisymmetrischen Teil

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{0i\,j} + T_{0j\,i}) \ , \ A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{0i\,j} - T_{0j\,i}) \ . \tag{C.140}$$

Die Gleichung $\delta n^i = 0$ für alle Richtungen n besagt, daß $n^j(S_{ji}+A_{ji}-2\omega_{ji}+(\lambda_2-\lambda_2')\delta_{ji}) = 0$ für alle n^j verschwindet, daß also die Matrixgleichung $S_{ji}+A_{ji}-2\omega_{ji}+(\lambda_2-\lambda_2')\delta_{ji} = 0$ gilt.

Es muß also beim drehungsfreien Transport des Vierbeins ω_{ij} so gewählt werden, daß $\omega_{ij} = \frac{1}{2}A_{ij}$ gilt. Zudem muß S_{ji} ein Vielfaches von δ_{ji} sein, $S_{ji} = (\lambda_2' - \lambda_2)\delta_{ji}$. Verschwindet der symmetrische, spurfreie Teil von $T_{0i\,j}$ nicht, so kann man nicht durch Wahl des Bezugssystems Drehungsfreiheit bezüglich aller Achsen sicherstellen.

Der symmetrische, spurfreie Teil von $T_{0i\,j}$ verschwindet für alle Beobachter, das heißt für alle Tangentialvektoren e_0 und darauf senkrechten Vektoren e_i, genau dann, wenn, wie wir ohne Beweis angeben, die Torsion die Form $T_{ab\,c} = \eta_{ca}u_b - \eta_{cb}u_a + \varepsilon_{abcd}v^d$ hat.

Falls die Torsion verschwindet, so ist das Bezugssystem drehungsfrei, wenn $\omega_{ij} = 0$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt und das Vierbein die Gleichungen des Fermi-Walker-Transports erfüllt,

$$\frac{\delta e_0}{\delta s} = b_1\, e_1 + b_2\, e_2 + b_3\, e_3 \ , \ \frac{\delta e_1}{\delta s} = b_1 e_0 \ , \ \frac{\delta e_2}{\delta s} = b_2 e_0 \ , \ \frac{\delta e_3}{\delta s} = b_3 e_0 \ . \tag{C.141}$$

Fermi-Walker-Transport längs einer Weltlinie ändert das Vierbein über Paralleltransport hinaus durch die drehungsfreie Lorentztransformation, die den zum Nachbarort parallel verschobenen Tangentialvektor in den dortigen Tangentialvektor transformiert.

Demgegenüber verdrehte räumliche Richtungen $\hat e_i = O_{ij}e_j$, $O_{ji} = O^{-1}{}_{ij}$, genügen dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{\delta e_0}{\delta s} = \hat b_i \hat e_i \ , \quad \frac{\delta \hat e_i}{\delta s} = \hat b_i e_0 + \omega_{ij}\hat e_j \tag{C.142}$$

mit $\hat b_i = O_{ij}b_j$ und rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk} \ , \quad \omega_{ij} = \big(\frac{\mathrm d}{\mathrm ds}O_{ik}\big)O_{jk} \tag{C.143}$$

um die drehungsfrei transportierten Richtungen.

D Die Lorentzgruppe

D.1 Drehungen

Drehspiegelungen $D : \mathcal V \to \mathcal V$ sind lineare Transformationen eines d-dimensionalen, Euklidischen Vektorraums $\mathcal V$, die das Skalarprodukt $\vec u \cdot \vec v = u^i v^i$ aller Vektoren, also Längen und Winkel, invariant lassen

$$D^i{}_j u^j D^i{}_k v^k = u^j \delta_{jk} v^k \ . \tag{D.1}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn die Orthogonalitätsrelation (B.54)

$$D^i{}_j D^i{}_k = \delta_{jk} \tag{D.2}$$

gilt, die besagt, daß die Spalten der Matrix D die Komponenten von orthonormalen Vektoren sind, oder, als Matrixeigenschaft formuliert, wenn die transponierte Matrix D^T, $D^T{}_j{}^i = D^i{}_j$, die inverse Matrix ist,

$$D^T D = \mathbf 1 \ . \tag{D.3}$$

Insbesondere gilt $(\det D)^2 = 1$ wegen $\det D^T = \det D$ und wegen des Determinantenproduktsatzes. Die Determinante von D ist also entweder 1 oder -1.

Die Drehspiegelungen bilden die Gruppe $\mathrm O(d)$ der orthogonalen Transformationen in d Dimensionen. Als Drehungen bezeichnen wir die orientierungstreuen, orthogonalen Transformationen mit $\det D = 1$. Sie bilden die Untergruppe $\mathrm{SO}(d)$ der speziellen orthogonalen Transformationen, deren Determinante den Wert 1 hat.

Da die Determinante eine stetige Funktion der Matrixelemente ist, gibt es keine stetig von einem Parameter λ abhängende Schar von Drehspiegelungen D_λ mit $\det D_{\lambda=0} = 1$ und $\det D_{\lambda=1} = -1$: Drehungen hängen nicht stetig mit Spiegelungen zusammen.

Jede Drehung kann durch Hintereinanderausführen einer infinitesimalen Drehung erzeugt werden. Sie hängt demnach stetig mit der $\mathbf 1$ zusammen. Folglich ist die Drehgruppe zusammenhängend. Dies ergibt sich aus der Eigenwertgleichung

$$D\vec w = \lambda \vec w \ , \quad \vec w \neq 0 \ , \tag{D.4}$$

von Drehspiegelungen D. Die Eigenwerte λ müssen die charakteristische Gleichung

$$\det(D - \lambda \mathbf 1) = 0 \tag{D.5}$$

lösen. Dies ist für reelle $d \times d$-Matrizen D eine polynomiale Gleichung vom Grad d mit reellen Koeffizienten und mit d nicht notwendig verschiedenen, komplexen Lösungen. Dabei zählen wir jede reelle Lösung als, wenn auch spezielle, komplexe Lösung.

Zu jedem komplexen Eigenwert $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\tau$ der reellen Drehspiegelung $D = D^*$ gehört ein Eigenvektor mit komplexen Komponenten $w^i = u^i + \mathrm{i}\, v^i$. Zudem ist $\lambda^* = \sigma - \mathrm{i}\tau$ Eigenwert zu $w^{*i} = u^i - \mathrm{i}\, v^i$. Denn da $D = D^*$ reell ist, gilt $0 = ((D - \lambda \mathbf{1})^i{}_j w^j)^* = (D - \lambda^* \mathbf{1})^i{}_j w^{*j}$.

Wegen der Orthogonalitätsrelation (D.2) und der Eigenwertgleichung gilt auch bei komplexen Komponenten

$$(D\vec{w}^*)^i (D\vec{w})^i - w^{*i} w^i = 0 = (\lambda^* \lambda - 1) w^{*i} w^i = (|\lambda|^2 - 1)(\vec{u}^2 + \vec{v}^2) \ , \qquad \text{(D.6)}$$

und weil $\vec{u}^2 + \vec{v}^2$ nicht Null ist, hat jeder Eigenwert einer Drehspiegelung den Betrag $|\lambda|^2 = 1$. Jeder reelle Eigenwert λ ist 1 oder -1. Der zugehörige reelle Eigenvektor ist invariant, $D\vec{n} = \vec{n}$, oder wird gespiegelt, $D\vec{a} = -\vec{a}$.

Ist der Eigenwert λ nicht reell, so bezeichnen wir im Eigenwertpaar λ und λ^* mit λ den Eigenwert mit negativem Imaginärteil. Wegen $|\lambda| = 1$ und $\Im(\lambda) < 0$ läßt sich λ mit einem Winkel α aus dem Intervall $0 < \alpha < \pi$ als $\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha$ schreiben. In Real- und Imaginärteil zerlegt, besagt dann die Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} D(\vec{u} + \mathrm{i}\vec{v}) &= (\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha)(\vec{u} + \mathrm{i}\,\vec{v}) \\ D\vec{u} &= (\cos\alpha)\,\vec{u} + (\sin\alpha)\,\vec{v} \\ D\vec{v} &= -(\sin\alpha)\,\vec{u} + (\cos\alpha)\,\vec{v} \ . \end{aligned} \qquad \text{(D.7)}$$

Die Gleichung $(D\vec{w})^i (D\vec{w})^i - w^i w^i = 0 = (\lambda^2 - 1) w^i w^i = (\lambda^2 - 1)(\vec{u}^2 - \vec{v}^2 + 2\mathrm{i}\vec{u}\cdot\vec{v})$ erzwingt $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$ und $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, falls λ nicht reell, also $\lambda^2 \neq 1$ ist.

Der reelle Unterraum $U_\perp$ der Vektoren $\vec{y}$, die auf einem reellen oder komplexen Eigenvektor $\vec{w}$ senkrecht stehen, $\vec{y}\cdot\vec{w} = 0$, wird durch D auf sich abgebildet

$$\vec{y}\cdot\vec{w} = 0 = (D\vec{y})\cdot(D\vec{w}) = \lambda (D\vec{y})\cdot\vec{w} \ , \quad D(U_\perp) \subset U_\perp \ . \qquad \text{(D.8)}$$

$U_\perp$ spannt zusammen mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ oder $\vec{n}$ oder $\vec{a}$ den gesamten Raum auf, denn da das Skalarprodukt positiv definit ist, sind die Vektoren in $U_\perp$ linear unabhängig von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ oder $\vec{n}$ oder $\vec{a}$.

Ergänzen wir eine Basis von $U_\perp$ durch $\vec{e}_1 = \vec{u}/|\vec{u}|$ und $\vec{e}_2 = \vec{v}/|\vec{v}|$ oder durch $\vec{n}/|\vec{n}|$ oder durch $\vec{a}/|\vec{a}|$ zu einer Basis von $\mathcal{V}$, so hat die Matrix D in dieser Basis die Form

$$D = \begin{pmatrix} D_\alpha & \\ & \hat{D} \end{pmatrix} \ , \quad D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \ , \quad \text{oder} \quad D = \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \hat{D} \end{pmatrix} \ , \qquad \text{(D.9)}$$

wobei Nullen nicht ausgeschrieben sind und $\hat{D}$ eine orthogonale Transformation in $U_\perp$ ist. Sie ist in angemessener Basis wieder von obiger Form. Es gibt daher für jede Drehung D eine Orthonormalbasis, in der die zugehörige Matrix blockdiagonal von der Form

$$D = \begin{pmatrix} D_\alpha & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & D_\beta & & \\ & & & \mathbf{1} & \\ & & & & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \text{(D.10)}$$

ist, wobei $\mathbf{1}$ für einen Block von Eigenwerten 1 und $-\mathbf{1}$ für einen anderen Block von Eigenwerten -1 steht. Wenn die Dimension des Vektorraumes ungerade ist, muß ein reeller Eigenwert 1 oder -1 auftreten, es gibt eine Drehachse oder eine Spiegelachse.

Bei Spiegelungen ist die Anzahl der Eigenwerte -1 ungerade, bei Drehungen gerade. Jedes Paar

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \ , \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(D.11)}$$

von Eigenwerten -1 oder 1 kann als zu einer Drehung D_π um 180° oder als zu einer Drehung D_0 um $\alpha = 0$ gehörig aufgefaßt werden.

Jede Drehung D kann als wiederholte infinitesimale Drehung δ geschrieben werden, $D = \mathrm{e}^\delta$. Denn definiert man für jeden 2×2-Block

$$\delta\vec{u} = \alpha\,\vec{v} \ , \quad \delta\vec{v} = -\alpha\,\vec{u} \ , \qquad \text{(D.12)}$$

so gilt einfach $\delta^2\vec{u} = -\alpha^2\vec{u}$ und $\delta^2\vec{v} = -\alpha^2\vec{v}$. Verwendet man dies in der auf u oder v angewendeten Exponentialreihe e^δ und trennt man dort gerade und ungerade Potenzen

$$\mathrm{e}^\delta = \sum_k \frac{1}{(2k)!}\delta^{2k} + \sum_k \frac{1}{(2k+1)!}\delta^{2k+1} = \sum_k \frac{(-1)^k}{(2k)!}\alpha^{2k} + \sum_k \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\alpha^{2k}\delta \ , \qquad \text{(D.13)}$$

so erhält man (D.7)

$$\mathrm{e}^\delta\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{u} + \sin\alpha\,\vec{v} \ , \quad \mathrm{e}^\delta\vec{v} = -\sin\alpha\,\vec{u} + \cos\alpha\,\vec{v} \ . \qquad \text{(D.14)}$$

Definiert man für die zu den Eigenwerten 1 gehörigen Vektoren $\delta\vec{n} = 0$, so ist $\mathrm{e}^\delta\vec{n} = \delta^0\vec{n} = \vec{n}$ und es gilt $D = \mathrm{e}^\delta$ auf den Vektoren $\vec{u}_i$ und $\vec{v}_i$, die um einen Drehwinkel α_i gedreht werden, auf Paaren von Vektoren $\vec{a}_k$, die um $\alpha = \pi$ gedreht werden, $D\vec{a}_k = -\vec{a}_k$, und auf den Drehachsen $\vec{n}_j$, $D\vec{n}_j = \vec{n}_j$. Also gilt $D = \mathrm{e}^\delta$ auf einer Basis und daher im ganzen Raum.

Da man die Drehwinkel stetig von Null auf α vergrößern kann, hängen alle Drehungen stetig mit der $\mathbf{1}$ und untereinander zusammen. Folglich besteht die Gruppe der Drehspiegelungen $\mathrm{O}(d)$ aus zwei Zusammenhangskomponenten, $\mathrm{SO}(d)$ und $\mathcal{P}\cdot\mathrm{SO}(d)$, wobei die Paritätstransformation $\mathcal{P}$ einen Unterraum ungerader Dimension spiegelt, $\mathcal{P}\vec{a} = -\vec{a}$, und den dazu orthogonalen Unterraum punktweise invariant läßt, $\mathcal{P}\vec{n} = \vec{n}$.

Drehungen in drei Dimensionen

In ungeraden Dimensionen hat jede Drehung einen Eigenwert 1, denn die Determinante eines 2×2-Blocks (D.7) ist 1 und Eigenwerte -1 treten paarweise auf. Es gibt also in drei Dimensionen für jede Drehung eine Achse $\vec{n}$, deren Punkte ungeändert bleiben, $D\vec{n} = \vec{n}$. Die Drehachse steht senkrecht auf Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, auf die die Drehung mit (D.7) mit $0 \le \alpha \le \pi$ wirkt. Normiert man $\vec{n}$ und $\vec{u}$ und wählt man geeignet das Vorzeichen von $\vec{n}$, so bilden $\vec{n}$, $\vec{u}$ und $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}$ eine rechtshändige Orthonormalbasis.

Zerlegen wir einen Vektor $\vec{k}$ in Anteile, die parallel und senkrecht zur Drehachse sind, $\vec{k} = \vec{k}_\parallel + \vec{k}_\perp$, so schreibt sich in drei Dimensionen die Drehung als

$$D(\vec{k}_\parallel + \vec{k}_\perp) = \vec{k}_\parallel + (\cos\alpha)\,\vec{k}_\perp + (\sin\alpha)\,(\vec{n} \times \vec{k}_\perp) \ . \qquad \text{(D.15)}$$

Sie wird durch Angabe eines Vektors $\vec{d} = \alpha\vec{n}$ der Länge $0 \leq \alpha \leq \pi$ charakterisiert. Bis auf die Komplikation, daß die Drehung um $\alpha = \pi$ um jede Achse $\vec{n}$ mit der Drehung um $-\vec{n}$ übereinstimmt, ist die Beziehung von Drehungen und Vektoren $\vec{d}$ mit $|\vec{d}| \leq \pi$ umkehrbar eindeutig.

Die Drehgruppe SO(3) kann als Mannigfaltigkeit $S^3/\mathbb{Z}_2$ aufgefaßt werden. Dabei ist S^3 die dreidimensionale *Sphäre*, die Oberfläche der Einheitskugel in vier Dimensionen. Auf S^3 wirkt die *zyklische* Gruppe $\mathbb{Z}_2$ mit zwei Elementen $\mathbf{1}$ und $-\mathbf{1}$, wobei $-\mathbf{1}$ jeden Punkt p auf seinen antipodalen Punkt $-p$ abbildet. Mit $S^3/\mathbb{Z}_2$ bezeichnet man die Menge, die von antipodalen Punktpaaren gebildet wird. Jedes antipodale Punktepaar, das nicht auf dem Äquator liegt, kann man durch den Punkt auf der Nordhalbkugel repräsentieren. Diesen Punkt kann man eindeutig durch einen Vektor $\vec{d} = \alpha\vec{n}$, $0 \leq \alpha < \pi$, bezeichnen, wobei $\vec{n}$ die Richtung vom Nordpol zum Punkt und $\alpha/2$ die Länge des Kreisbogens vom Nordpol zum Punkt angibt. Am Äquator $\alpha = \pi$ bezeichnen $\vec{d} = \pi\vec{n}$ und $-\vec{d}$ dasselbe Paar antipodaler Punkte.

In drei Dimensionen gehört zur Drehung um die Achse $\vec{n}$, $\vec{n}^{\,2} = 1$, um den Winkel α die infinitesimale Transformation δ, die jeden Vektor $\vec{k}$ auf das Kreuzprodukt mit $\alpha\,\vec{n}$ abbildet

$$\delta : \vec{k} \mapsto \alpha\,\vec{n} \times \vec{k}\ . \tag{D.16}$$

Angewendet auf $\vec{n}$, gilt $\delta\vec{n} = 0$. Auf einen zu $\vec{n}$ senkrechten Vektor $\vec{u}$ angewendet, ergibt sich $\delta\vec{u} = \alpha\,\vec{n} \times \vec{u} = \alpha\,\vec{v}$, wobei $\vec{v}$ die Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{u}$ zu einer rechtshändigen Orthonormalbasis ergänzt; auf $\vec{v}$ angewendet gilt $\delta\vec{v} = \alpha\,\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{u}) = -\alpha\,\vec{u}$, also (D.12).

Die infinitesimale Transformation ist eine Linearkombination $\alpha\,n^i\delta_i$ der infinitesimalen Drehungen δ_i, $i = 1, 2, 3$, um die x-, y- und z-Achse. Diese infinitesimalen Drehungen um die Koordinatenachsen ändern die Komponenten x^j von Vektoren um

$$\delta_i x^k = -\varepsilon^{ikl} x^l\ . \tag{D.17}$$

Der Kommutator zweier infinitesimaler Drehungen ist wieder eine infinitesimale Drehung

$$\begin{aligned}[\delta_i, \delta_j]x^r &= -\varepsilon^{irs}(\delta_j x)^s - i \leftrightarrow j = \varepsilon^{irs}\varepsilon^{jst}x^t - i \leftrightarrow j \\ &= (-\delta_{ij}\delta_{rt} + \delta_{it}\delta_{rj})x^t - i \leftrightarrow j = \varepsilon^{ijk}\delta_k x^r\ .\end{aligned} \tag{D.18}$$

Es bilden also infinitesimale Drehungen in drei Dimensionen die Liealgebra

$$[\delta_i, \delta_j] = \varepsilon^{ijk}\delta_k\ , \quad \text{zum Beispiel} \quad [\delta_x, \delta_y] = \delta_z\ . \tag{D.19}$$

D.2 Drehungsfreie Lorentztransformationen

Die Lorentzgruppe $\mathrm{O}(p, q)$ besteht aus den reellen, linearen Transformationen Λ der Punkte x des N-dimensionalen Minkowskiraumes $\mathbb{R}^{p,q}$, $N = p + q$,

$$x' = \Lambda\,x\ , \tag{D.20}$$

die das Skalarprodukt $x \cdot y$ invariant lassen. Es ist in Matrixschreibweise $x \cdot y = x^T\eta\,y$. Dabei ist η eine symmetrische, invertierbare Matrix, die bei geeigneter Wahl der Basis

diagonal ist, und die p positive und q negative Diagonalelemente hat (A.107). Lorentztransformationen gehören also zu den Matrizen Λ, die für alle x und alle y die Gleichung $(\Lambda x)^T\eta\,\Lambda y = x^T\eta\,y$ und demnach die folgende Matrixgleichung erfüllen (B.54)

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta\ . \tag{D.21}$$

Nehmen wir hiervon die Determinante, so folgt

$$(\det\Lambda)^2 = 1 \tag{D.22}$$

wegen $\det(\Lambda^T\eta\,\Lambda) = (\det\Lambda^T)(\det\eta)(\det\Lambda)$ und wegen $\det\Lambda^T = \det\Lambda$.

Die Determinante einer Lorentztransformation kann also nur die Werte $+1$ oder -1 haben. Die speziellen Transformationen Λ, deren Determinante den Wert 1 hat, bilden die spezielle, orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(p, q)$, oder $\mathrm{SO}(N)$, falls $p = 0$ oder $q = 0$ ist.

Für $p > 0$ und $q > 0$ ist die Gruppe $\mathrm{O}(p, q)$ die Mannigfaltigkeit $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ und hat vier Zusammenhangskomponenten.

Um dies zu zeigen, zerlegen wir die $(p+q) \times (p+q)$-Matrizen η und Λ

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\ , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{D.23}$$

in einen $p \times p$-Block 1 und A, einen $q \times q$-Block -1 und D, einen $q \times p$-Block C und einen $p \times q$-Block B und schreiben (D.21) aus

$$A^TA = 1 + C^TC\ , \quad D^TD = 1 + B^TB\ , \quad A^TB = C^TD\ . \tag{D.24}$$

Da für jede reelle Matrix C die symmetrische Matrix C^TC durch eine Drehung diagonalisierbar ist, und da C^TC nicht negative Diagonalelemente $\lambda_j = \sum_i C_{ij}C_{ij}$ hat, hat $1 + C^TC$ Eigenwerte, die nicht kleiner als 1 sind. Also ist A invertierbar, $(\det A)^2 = \det(1 + C^TC) \geq 1$, und ebenso D, $(\det D)^2 \geq 1$.

Jede reelle, invertierbare Matrix A kann eindeutig in ein Produkt einer orthogonalen Matrix O, $O^T = O^{-1}$, mit einer positiv definiten, symmetrischen Matrix S, $S = S^T$, zerlegt werden,

$$A = OS\ . \tag{D.25}$$

Denn A^TA definiert eine symmetrische Matrix S^2 mit positiven Eigenwerten $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots p$, und dadurch auch die positive, symmetrische Matrix

$$S = \sqrt{A^TA}\ , \quad S = S^T\ , \tag{D.26}$$

mit denselben Eigenvektoren wie S^2 und den positiven Eigenwerten $\sqrt{\lambda_i}$. Die Matrix

$$O = AS^{-1}\ , \quad O^T = O^{-1}\ , \tag{D.27}$$

ist orthogonal, wie $S^{T-1}A^TAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = 1$ zeigt.

Da A und D invertierbar sind, kann Λ (D.23) eindeutig zerlegt werden

$$\Lambda = \begin{pmatrix} O & \\ & \hat{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & Q \\ P & \hat{S} \end{pmatrix}\ , \tag{D.28}$$

wobei wir abkürzend $P = \hat{O}^{-1}C$ und $Q = O^{-1}B$ schreiben. S und $\hat{S}$ sind invertierbar und symmetrisch, O und $\hat{O}$ sind orthogonale Matrizen. Gleichung (D.21) besagt

$$S^2 = 1 + P^TP\ , \quad SQ = P^T\hat{S}\ , \quad \hat{S}^2 = 1 + Q^TQ\ . \tag{D.29}$$

Setzen wir $Q = S^{-1}P^T\hat{S}$ und $S^{-2} = (1+P^TP)^{-1}$ in der letzten Gleichung ein, so folgt

$$\hat{S}^2 = 1 + \hat{S}PS^{-1}S^{-1}P^T\hat{S} \quad \text{oder} \quad 1 = \hat{S}^{-2} + P(1+P^TP)^{-1}P^T\ . \tag{D.30}$$

Was dies für $\hat{S}^{-2}$ besagt, finden wir heraus, indem wir die Matrizen auf eine Basis, nämlich die Eigenvektoren w von PP^T anwenden, $PP^Tw = \lambda w$. Wenn P^Tw nicht verschwindet, ist P^Tw Eigenvektor von P^TP, $(P^TP)P^Tw = \lambda P^Tw$, zu demselben Eigenwert. Dann gilt

$$P(1+P^TP)^{-1}P^Tw = P\frac{1}{1+\lambda}P^Tw = \frac{\lambda}{1+\lambda}w\ . \tag{D.31}$$

Dies gilt auch, wenn P^Tw verschwindet, denn dann ist $PP^Tw = 0$, also $\lambda = 0$. In (D.30) eingesetzt ergibt sich $\frac{1}{1+\lambda}w = \hat{S}^{-2}w$ oder $\hat{S}^2w = (1+\lambda)w$. Also ist

$$\hat{S}^2 = 1 + PP^T\ . \tag{D.32}$$

Dies gilt auf Eigenvektoren von PP^T angewendet. Da sie eine Basis in $\mathbb{R}^q$ bilden, gilt dies auch angewendet auf einen beliebigen Vektor, also als Matrixgleichung.

Aus gleichen Grund ist, angewendet auf Eigenvektoren von PP^T und demnach für alle Vektoren,

$$Q = S^{-1}P^T\hat{S} = \sqrt{1+P^TP}^{\,-1}P^T\sqrt{1+PP^T} = P^T\ . \tag{D.33}$$

Also ist jede Lorentzmatrix eindeutig durch ein Paar von Drehspiegelungen $O \in \mathrm{O}(p)$, $\hat{O} \in \mathrm{O}(q)$ und eine drehungsfreie Lorentztransformation L_P, $L_P = (L_P)^T$, gegeben, die durch eine Matrix P mit q Zeilen und p Spalten bestimmt ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} O & \\ & \hat{O}\end{pmatrix} L_P\ , \quad L_P = \begin{pmatrix}\sqrt{1+P^TP} & P^T \\ P & \sqrt{1+PP^T}\end{pmatrix}\ , \quad (L_P)^{-1} = L_{-P}\ . \tag{D.34}$$

Da $q \times p$ Matrizen P den Vektorraum $\mathbb{R}^{qp}$ bilden, gehört zu jeder Lorentztransformation genau ein Punkt in der Mannigfaltigkeit $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{qp}$, die aus Tripeln $(O, \hat{O}, P)$ besteht. Da $\mathbb{R}^{qp}$ zusammenhängend ist und die Drehspiegelungen jeweils zwei Zusammenhangskomponenten haben, hat $\mathrm{O}(p,q)$ mit $p > 0$ und $q > 0$ genau vier Zusammenhangskomponenten.

Lorentztransformationen Λ mit $\det O = \det \hat{O} = 1$ erhalten die Orientierung der zeitartigen und der raumartigen Richtungen und bilden die eigentliche Lorentzgruppe $\mathrm{SO}(p,q)^{\uparrow}$, die zusammenhängend ist. Die anderen Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{O}(p,q)$ erhält man durch Multiplikation mit der Zeitumkehr $\mathcal{T}$ und mit der Raumspiegelung $\mathcal{P}$, die eine ungerade Anzahl zeitlicher oder räumlicher Koordinaten spiegeln, sowie mit $\mathcal{TP}$.

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\ , \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1\end{pmatrix} \tag{D.35}$$

Die Lorentztransformation L_P wirkt jeweils in 1+1-dimensionalen Unterräumen U_i des Minkowskiraumes $\mathbb{R}^{p,q}$, die zueinander senkrecht stehen, wie die Lorentztransformation (3.4). Der zu diesen Unterräumen senkrechte Unterraum bleibt punktweise invariant.

Dies sieht man durch Betrachtung der Eigenvektoren w_i von PP^T. Sie stehen aufeinander senkrecht, wenn sie zu verschiedenen Eigenwerten gehören, und können zueinander senkrecht gewählt werden, wenn der Eigenwert entartet ist. Wir wählen sie zudem normiert $w_j^Tw_i = \delta_{ij}$. Gleiches gilt für die Eigenvektoren von P^TP, die durch $P^Tw_i/\sqrt{\lambda_i}$ gegeben sind, wenn der zugehörige Eigenwert nicht verschwindet. Im weiteren bezeichne w_i einschränkender Eigenvektoren mit nichtverschwindendem Eigenwert.

Die Eigenvektoren u_j von PP^T zum Eigenwert 0, $PP^Tu_j = 0$, werden schon von P^T vernichtet, $P^Tu_j = 0$, denn aus $PP^Tu_j = 0$ folgt $u_j^TPP^Tu_j = 0$. Dies ist die Summe der Quadrate der Komponenten von P^Tu_j und verschwindet nur, falls $P^Tu_j = 0$ ist. Entsprechend gilt $Pv_k = 0$ für Eigenvektoren v_k von P^TP zum Eigenwert 0.

Da die Eigenvektoren von PP^T ebenso wie die Eigenvektoren von P^TP aufeinander senkrecht stehen, sind die N Vektoren des Minkowskiraumes

$$t_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\begin{pmatrix}P^Tw_i \\ 0\end{pmatrix}\ , \quad x_i = \begin{pmatrix}0 \\ w_i\end{pmatrix}\ , \quad n_k = \begin{pmatrix}v_k \\ 0\end{pmatrix}\ , \quad m_j = \begin{pmatrix}0 \\ u_j\end{pmatrix}\ , \tag{D.36}$$

ein Vielbein, also eine orthonormierte Basis.

Die Vektoren n_k und m_j werden von L_P invariant gelassen. Die Punkte $at_i + bx_i$ der Unterräume U_i, die von t_i und x_i aufgespannt werden, transformieren ineinander

$$\begin{aligned} L_Pt_i &= \sqrt{1+\lambda_i}\,t_i + \sqrt{\lambda_i}\,x_i\ , \quad L_Px_i = \sqrt{\lambda_i}\,t_i + \sqrt{1+\lambda_i}\,x_i\ , \\ L_P(at_i + bx_i) &= a't_i + b'x_i\ , \quad \begin{pmatrix}a' \\ b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{1+\lambda_i} & \sqrt{\lambda_i} \\ \sqrt{\lambda_i} & \sqrt{1+\lambda_i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}\ . \end{aligned} \tag{D.37}$$

Dies sind zweidimensionale Lorentztransformationen wie in (3.4) mit Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}}\ . \tag{D.38}$$

Beim Vorzeichen der Geschwindigkeit v ist zu beachten, daß (3.4) eine Koordinatentransformation beschreibt und nicht eine Transformation von Punkten.

In der vierdimensionalen Raumzeit $\mathbb{R}^{1,3}$ hat die drehungsfreie Lorentztransformation (D.34) die Form

$$L_p = \frac{1}{m}\begin{pmatrix}p^0 & p^j \\ p^i & m\delta^{ij} + \frac{p^ip^j}{p^0+m}\end{pmatrix}\ , \quad p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}\ . \tag{D.39}$$

Dabei haben wir die Komponenten der 3×1-Matrix P als p^i/m, $i = 1,2,3$, bezeichnet, die räumlichen Spalten zählen wir durch j, $j = 1,2,3$, ab. Die Koeffizienten bei δ^{ij} und p^ip^j sind dadurch bestimmt, daß die 3×3-Matrix, in der sie auftreten, auf Eigenvektoren der Matrix PP^T wie $\sqrt{1+PP^T}$ wirkt. Da P einfach ein Spaltenvektor ist, sind dazu senkrechte Vektoren Eigenvektoren von PP^T zum Eigenwert 0, P ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = \vec{p}^{\,2}/m^2$.

Die drehungsfreie Lorentztransformation L_p transformiert den Vierimpuls $\underline{p}$ eines ruhenden Teilchens der Masse m, $\underline{p} = (m, 0, 0, 0)^T$, in den Viererimpuls $p = (p^0, p^1, p^2, p^3)^T$ eines Teilchens, das sich mit Geschwindigkeit $v^i = p^i/p^0$ (3.50) bewegt.

$$L_p\,\underline{p} = p \tag{D.40}$$

D.3 Die Drehgruppe $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$

Die Gruppe SO(3) der Drehungen der dreidimensionalen reellen Raumes ist isomorph zur Faktorgruppe $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$. Dieser mathematische Sachverhalt wird in diesem Abschnitt erläutert.

Jede Untergruppe H einer Gruppe G definiert durch (B.20)

$$g \overset{H}{\sim} g' \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H\ . \tag{D.41}$$

eine Äquivalenzrelation zwischen Gruppenelementen von G. Für die Menge der Äquivalenzklassen steht das Symbol G/H. Gilt zudem $ghg^{-1} \in H$ für alle $g \in G$ und alle $h \in H$, so heißt die Untergruppe H normal. Dann bilden die H-Äquivalenzklassen eine Gruppe, die Faktorgruppe G/H. Denn das Produkt $g_2 g_1$ ist äquivalent dem Produkt äquivalenter Elemente $g_2 h_2 g_1 h_1 = g_2 g_1 (g_1^{-1} h_2 g_1) h_1 = g_2 g_1 h'$.

Beispielsweise ist $\mathbb{Z}_2$, die *zyklische* Gruppe mit 2 Elementen, die Untergruppe von SU(2), die aus $\mathbf{1}$ und $-\mathbf{1}$ besteht, eine normale Untergruppe. Matrizen $U \in \mathrm{SU}(2)$ sind $\mathbb{Z}_2$-äquivalent, wenn sie sich höchstens im Vorzeichen unterscheiden. Die Gruppe $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$ besteht aus SU(2)-Transformationen „bis auf das Vorzeichen".

Daß $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$ isomorph zu SO(3) ist, besagt: es gibt eine bijektive, also invertierbare und ausschöpfende, Abbildung von $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$, die jedem Paar $\pm U$ unitärer 2×2-Matrizen mit $\det U = 1$ eine 3×3-Drehmatrix $D_U = D_{-U}$ zuordnet und mit der Gruppenverknüpfung verträglich ist, $D_{U_1 U_2} = D_{U_1} D_{U_2}$. Die Darstellung ist ausschöpfend, jede Drehung $D \in \mathrm{SO}(3)$ läßt sich als Darstellung D_U einer unitären 2×2-Matrix U schreiben. Dabei ist das Urbild von D_U in $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$ eindeutig. Wenn $D_U = D_V$ gilt, dann ist $U = V$ oder $U = -V$.

Die Gruppe SU(2) ist die dreidimensionale Kugeloberfläche S^3. Denn die Spalten jeder unitären 2×2-Matrix U bilden wegen $U^\dagger U = \mathbf{1}$ eine Orthonormalbasis. Hat also U die Form

$$U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\ , \tag{D.42}$$

so gilt $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Die zweite Spalte steht genau dann senkrecht auf der ersten, $a^*c + b^*d = 0$, wenn (c, d) ein Vielfaches von $(-b^*, a^*)$ ist, und dieses Vielfache wird dadurch festgelegt, daß die Determinante von U Eins ist. Daher hat U die Form

$$U = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}\ , \quad (\Re a)^2 + (\Im a)^2 + (\Re b)^2 + (\Im b)^2 = 1\ . \tag{D.43}$$

Zu jedem U gehört ein Punkt auf $S^3 = \{(v, w, x, y) \in \mathbb{R}^4 : v^2 + w^2 + x^2 + y^2 = 1\}$ und zu jedem Punkt auf S^3 gehört ein $U \in \mathrm{SU}(2)$ mit $a = v + \mathrm{i}w$ und $b = x + \mathrm{i}y$.

Da sich jeder Punkt auf S^3 mit einem Winkel $0 \le \alpha \le 2\pi$ und einem dreidimensionalen Einheitsvektor (n_x, n_y, n_z) als $(v, w, x, y) = \cos\alpha/2\,(1, 0, 0, 0) - \sin\alpha/2\,(0, n_z, -n_y, n_x)$ schreiben läßt, kann jede SU(2)-Matrix als folgende Linearkombination der $\mathbf{1}$-Matrix σ^0 und der drei Pauli-Matrizen σ^i, $i = 1, 2, 3$, geschrieben werden:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\ ,\quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\ ,\quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix}\ ,\quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\ , \tag{D.44}$$

$$U = (\cos\frac{\alpha}{2})\,\mathbf{1} - \mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} - \mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,n_z & -\mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,(n_x - \mathrm{i}n_y) \\ -\mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,(n_x + \mathrm{i}n_y) & \cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,n_z \end{pmatrix}\ . \tag{D.45}$$

Für die neun Produkte der drei Pauli-Matrizen gilt, wie man elementar nachrechnet,

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\mathbf{1} + \mathrm{i}\,\varepsilon^{ijk}\sigma^k\ ,\quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}\ . \tag{D.46}$$

Multipliziert und summiert mit m^i und n^j lautet dies

$$(\vec{m}\vec{\sigma})(\vec{n}\vec{\sigma}) = (\vec{m}\cdot\vec{n})\mathbf{1} + \mathrm{i}(\vec{m}\times\vec{n})\vec{\sigma}\ . \tag{D.47}$$

Insbesondere ist für einen Einheitsvektor $\vec{n}$ das Quadrat $(\vec{n}\vec{\sigma})^2 = \mathbf{1}$ und mit $(\vec{n}\vec{\sigma})^{2k} = \mathbf{1}$ und $(\vec{n}\vec{\sigma})^{2k+1} = \vec{n}\vec{\sigma}$ vereinfachen sich Potenzreihen der Matrix $\vec{n}\vec{\sigma}$

$$\begin{aligned} \exp(-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\vec{\sigma}) &= \sum_k \frac{(-\mathrm{i}\alpha/2)^{2k}}{(2k)!}\,\mathbf{1} + \sum_k \frac{(-\mathrm{i}\alpha/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\vec{n}\vec{\sigma} \\ &= \sum_k \frac{(-1)^k(\frac{\alpha}{2})^{2k}}{(2k)!}\,\mathbf{1} - \mathrm{i}\sum_k \frac{(-1)^k(\frac{\alpha}{2})^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\vec{n}\vec{\sigma} \\ &= (\cos\frac{\alpha}{2})\,\mathbf{1} - \mathrm{i}\,(\sin\frac{\alpha}{2})\,\vec{n}\vec{\sigma}\ . \end{aligned} \tag{D.48}$$

Es wird also jedes $U \in \mathrm{SU}(2)$ von einer infinitesimalen Transformation $-\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\vec{\sigma}$ erzeugt,

$$U = \exp(-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\vec{\sigma}) = \cos\frac{\alpha}{2}\,\mathbf{1} - \mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\ . \tag{D.49}$$

Die zu $U \in \mathrm{SU}(2)$ gehörige Drehung $D_U \in \mathrm{SO}(3)$ ist die lineare Abbildung

$$D_U : K \mapsto K' = UKU^\dagger \tag{D.50}$$

von hermiteschen, spurfreien 2×2-Matrizen K auf hermitesche, spurfreie Matrizen K'. Eine 2×2-Matrix K ist hermitesch

$$\begin{pmatrix} k^{11} & k^{12} \\ k^{21} & k^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^{11} & k^{12} \\ k^{21} & k^{22} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} k^{11\,*} & k^{21\,*} \\ k^{12\,*} & k^{22\,*} \end{pmatrix}\ , \tag{D.51}$$

wenn die Matrixelemente k^{11} und k^{22} reell sind und k^{12} das komplex konjugierte von k^{21} ist. Sie ist spurfrei, wenn $k^{11} = -k^{22}$ gilt. Solche Matrizen bilden einen dreidimensionalen reellen Vektorraum und können als reelle Linearkombinationen der Pauli-Matrizen (D.44) geschrieben werden

$$K = \vec{k}\vec{\sigma} = k^i\sigma^i = \begin{pmatrix} k^3 & k^1 - \mathrm{i}k^2 \\ k^1 + \mathrm{i}k^2 & -k^3 \end{pmatrix}\ . \tag{D.52}$$

Die lineare Transformation $\vec{k}\vec{\sigma} \mapsto U(\vec{k}\vec{\sigma})U^\dagger = \vec{k}'\vec{\sigma}$ ist eine Drehung $\vec{k} \mapsto \vec{k}' = D_U\vec{k}$. Um dies nachzurechnen, schreiben wir (D.49) mit $c = \cos\frac{\alpha}{2}$ und $s = \sin\frac{\alpha}{2}$ kurz als $U = c - \mathrm{i}s\vec{n}\vec{\sigma}$ und zerlegen $\vec{k} = k_\parallel\vec{n} + \vec{k}_\perp$ in einen zu $\vec{n}$ parallelen und einen senkrechten Teil, $K = K_\parallel + K_\perp$, wobei $K_\parallel = k_\parallel\vec{n}\vec{\sigma}$ und $K_\perp = \vec{k}_\perp\vec{\sigma}$ ist.

Der Anteil $K_\parallel$ vertauscht mit jeder Potenzreihe von $\vec{n}\vec{\sigma}$, also mit U, und ist daher invariant

$$UK_\parallel U^\dagger = K_\parallel UU^\dagger = K_\parallel \ . \tag{D.53}$$

Bei der Berechnung der Transformation von $\vec{k}_\perp\vec{\sigma}$ berücksichtigen wir, daß $\vec{k}_\perp\vec{\sigma}$ mit $\vec{n}\vec{\sigma}$ antivertauscht (D.47)

$$(\vec{k}_\perp\vec{\sigma})(\vec{n}\vec{\sigma}) = -(\vec{n}\vec{\sigma})(\vec{k}_\perp\vec{\sigma}) \ , \tag{D.54}$$

weil $\vec{k}_\perp$ und $\vec{n}$ senkrecht aufeinander stehen. Mit $(\vec{n}\vec{\sigma})^2 = \mathbf{1}$ und (D.47) erhalten wir

$$\begin{aligned} U(\vec{k}_\perp\vec{\sigma})U^\dagger &= (c - \mathrm{i}s\vec{n}\vec{\sigma})(\vec{k}_\perp\vec{\sigma})(c + \mathrm{i}s\vec{n}\vec{\sigma}) = (c - \mathrm{i}s\vec{n}\vec{\sigma})(c - \mathrm{i}s\vec{n}\vec{\sigma})(\vec{k}_\perp\vec{\sigma}) \\ &= U^2(\vec{k}_\perp\vec{\sigma}) = (\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha\,\vec{n}\vec{\sigma})(\vec{k}_\perp\vec{\sigma}) = (\cos\alpha\,\vec{k}_\perp + \sin\alpha\,\vec{n}\times\vec{k}_\perp)\,\vec{\sigma} \ . \end{aligned} \tag{D.55}$$

Es bewirkt also $U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\vec{n}\vec{\sigma}}$ durch $\vec{k}\vec{\sigma} \mapsto U\vec{k}\vec{\sigma}U^\dagger = (D_U\vec{k})\vec{\sigma}$ die Drehung D_U von Vektoren $\vec{k}$ um die Achse $\vec{n}$ und den Winkel α

$$D_U : \ \vec{k} \mapsto \vec{k}' = \vec{k}_\parallel + \cos\alpha\,\vec{k}_\perp + \sin\alpha\,\vec{n}\times\vec{k}_\perp \ . \tag{D.56}$$

Umgekehrt gehört zu jeder Drehmatrix D mit Drehachse $\vec{n}$ und Drehwinkel α das Paar unitärer Matrizen $U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\vec{n}\vec{\sigma}}$ und $-U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha+2\pi}{2}\vec{n}\vec{\sigma}}$.

Die infinitesimale Transformation $\alpha\,n^j(-\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^j)$ erzeugt die Matrix U, mit anderen Worten $U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\vec{n}\vec{\sigma}}$. Wie man mit (D.46) bestätigt, stellen die Basismatrizen $-\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^j$ der infinitesimalen Erzeugenden die Liealgebra (D.19) infinitesimaler Drehungen dar

$$[(-\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^i), (-\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^j)] = \varepsilon^{ijk}(-\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^k) \ . \tag{D.57}$$

D.4 Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Jede invertierbare, komplexe Matrix M kann eindeutig in ein Produkt einer unitären Matrix U, $U^\dagger = U^{-1}$, und einer hermiteschen Matrix e^H, $H = H^\dagger$, mit positiven Eigenwerten zerlegt werden

$$M = U\mathrm{e}^H \ . \tag{D.58}$$

Denn die Gleichung

$$\mathrm{e}^{2H} = M^\dagger M \tag{D.59}$$

ist für hermitesches $H = H^\dagger$ lösbar und legt H eindeutig fest: $M^\dagger M$ ist hermitesch, also diagonalisierbar, und hat positive Eigenwerte $\lambda = \mathrm{e}^{2h}$. Demnach existiert diejenige hermitesche Matrix $H = \frac{1}{2}\ln M^\dagger M$, die dieselben Eigenvektoren wie $M^\dagger M$ hat und die reellen Eigenwerte h. Die Matrix

$$U = M\mathrm{e}^{-H} \tag{D.60}$$

ist unitär, wie $(M\mathrm{e}^{-H})^\dagger(M\mathrm{e}^{-H}) = \mathrm{e}^{-H}M^\dagger M\mathrm{e}^{-H} = \mathrm{e}^{-H}\mathrm{e}^{2H}\mathrm{e}^{-H} = \mathbf{1}$ zeigt.

Weil jede invertierbare, komplexe Matrix M eindeutig zu einem Paar (U,H) einer unitären und einer hermiteschen Matrix gehört, und weil die hermiteschen $N\times N$-Matrizen einen reellen, N^2-dimensionalen Vektorraum bilden, ist die Gruppe $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ der *generellen* linearen Transformationen in N komplexen Dimensionen die Mannigfaltigkeit $\mathrm{U}(N)\times\mathbb{R}^{N^2}$.

Wenn die Matrix M aus der Untergruppe $\mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$ der *speziellen* linearen Transformationen mit $\det M = 1$ ist, dann verschwindet die Spur von H, $\mathrm{tr}\,H = 0$, denn es ist $\det(\mathrm{e}^{2H}) = \det(M^\dagger M) = 1$, und $\det(\mathrm{e}^{2H})$ ist das Produkt der Eigenwerte e^{2h}. Zudem hat die Determinante von U den Wert 1, $\det U = \det(M\mathrm{e}^{-H}) = 1$. Die Gruppe $\mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$ ist also die Mannigfaltigkeit $\mathrm{SU}(N)\times\mathbb{R}^{(N^2-1)}$.

Insbesondere ist $\mathrm{SU}(2)$ die Mannigfaltigkeit S^3 (D.43), und $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ist die Mannigfaltigkeit $S^3\times\mathbb{R}^3$.

Die eindeutige Zerlegung von Lorentztransformationen in orthogonale Transformationen und drehungsfreie Lorentztransformationen (D.34) zeigt, daß die zeit- und raumorientierungstreuen Lorentztransformationen $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$ die Mannigfaltigkeit $\mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}^3$ bilden. Die Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ ist $S^3/\mathbb{Z}_2$. Also ist $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ die Überlagerungsmannigfaltigkeit von $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$.

Auch als Gruppe ist $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ die Überlagerung von $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$. Das heißt: es gibt eine vierdimensionale, reelle Darstellung von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, die jeder komplexen 2×2-Matrix M mit $\det M = 1$ eine Lorentztransformation Λ_M mit $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ und $\det\Lambda = 1$ zuordnet und mit der Gruppenverknüpfung verträglich ist, $\Lambda_{M_1M_2} = \Lambda_{M_1}\Lambda_{M_2}$. Die Darstellung ist ausschöpfend, jede Lorentztransformation Λ mit $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ und $\det\Lambda = 1$ läßt sich als Darstellung Λ_M einer komplexen Matrix M mit $\det M = 1$ schreiben. Dabei ist das Urbild von Λ eindeutig bis auf das Vorzeichen. Es gilt $\Lambda_M = \Lambda_N$ genau dann, wenn $M = N$ oder $M = -N$ ist.

Die zu M und $-M$ gehörige Transformation Λ_M ist die lineare Abbildung

$$\Lambda_M : \ \hat{k} \mapsto \hat{k}' = M\hat{k}M^\dagger \tag{D.61}$$

hermitescher 2×2-Matrizen $\hat{k} = \hat{k}^\dagger$ auf hermitesche Matrizen $\hat{k}'$. Sie sind reelle Linearkombinationen

$$\hat{k} = k^m\eta_{mn}\sigma^n = \begin{pmatrix} k^0 - k^3 & -k^1 + \mathrm{i}k^2 \\ -k^1 - \mathrm{i}k^2 & k^0 + k^3 \end{pmatrix} \tag{D.62}$$

der Matrix $\sigma^0 = \mathbf{1}$ und der drei Pauli-Matrizen (D.44), bilden also einen vierdimensionalen, reellen Vektorraum. Auch $\hat{k'} = \hat{k'}^\dagger$ ist hermitesch, $\hat{k'} = k'^m\eta_{mn}\sigma^n$ mit reellen k'^m, und

$$k'^m = \Lambda^m{}_n k^n \tag{D.63}$$

ist linear in k mit reellen Matrixelementen $\Lambda^m{}_n$.

Die Matrizen Λ sind eine Darstellung der Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, da $\Lambda_{M_1M_2} = \Lambda_{M_1}\Lambda_{M_2}$ für hintereinander ausgeführte Transformationen gilt

$$\begin{gathered} \hat{k''} = M_1M_2\hat{k}M_2^\dagger M_1^\dagger \ , \\ k''^m = (\Lambda_{M_1})^m{}_r k'^r = (\Lambda_{M_1})^m{}_r(\Lambda_{M_2})^r{}_n k^n = (\Lambda_{M_1M_2})^m{}_n k^n \ . \end{gathered} \tag{D.64}$$

Die Transformation Λ_M ist eine Lorentztransformation, denn die Determinante von $\hat{k}$ ist das Längenquadrat des Vierervektors k,

$$\det \hat{k} = (k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2 \ , \tag{D.65}$$

und sie stimmt, weil $\det M = 1$ und $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ist, mit der Determinante von $\hat{k}' = M\hat{k}M^\dagger$ überein. Also ist $k'^2 = k^2$ und $k' = \Lambda k$ eine Lorentztransformation.

Daß sich jedes $U \in \mathrm{SU}(2)$ als $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\vec{n}\vec{\sigma}}$ schreiben läßt (D.49) und ebenso wie $-U$ eine Drehung von $\vec{k}$ um die Achse $\vec{n}$ um den Winkel α bewirkt, haben wir schon gezeigt (D.56). Wir berechnen die zu e^H, $M = U\mathrm{e}^H$, gehörige Lorentztransformation.

Die spurfreie, hermitesche Matrix H können wir als Linearkombination $H = -\frac{\beta}{2}\vec{n}\vec{\sigma}$ der drei Pauli-Matrizen (D.44) schreiben, wobei wir $\vec{n}$ normiert wählen, $(\vec{n})^2 = 1$. Die Exponentialreihe e^H vereinfacht sich wegen $(\vec{n}\vec{\sigma})^2 = \mathbf{1}$ wie in (D.48)

$$\mathrm{e}^H = \exp(-\frac{\beta}{2}\vec{n}\vec{\sigma}) = (\cosh\frac{\beta}{2}) - (\sinh\frac{\beta}{2})\,\vec{n}\vec{\sigma} \ , \tag{D.66}$$

wobei wir die $\mathbf{1}$-Matrix nicht explizit schreiben.

Die Matrix $\hat{k}$, die auf $\hat{k}' = \mathrm{e}^H\hat{k}\,(\mathrm{e}^H)^\dagger = \mathrm{e}^H\hat{k}\,\mathrm{e}^H$ abgebildet wird, schreiben wir als $\hat{k} = \hat{k}_\parallel + \hat{k}_\perp$, wobei $\hat{k}_\parallel = k^0 - k_\parallel\vec{n}\vec{\sigma}$ und $\hat{k}_\perp = -\vec{k}_\perp\vec{\sigma}$ ist und $\vec{k} = k_\parallel\vec{n} + \vec{k}_\perp$ den Vektor in seinen zu $\vec{n}$ parallelen und senkrechten Anteil zerlegt.

Zur Berechnung der Transformation von $\hat{k}_\perp$ brauchen wir nur, daß $\hat{k}_\perp$ mit $H \propto \vec{n}\vec{\sigma}$ antivertauscht (D.54), $\hat{k}_\perp H = -H\hat{k}_\perp$, weil $\vec{k}_\perp$ und $\vec{n}$ senkrecht aufeinander stehen,

$$\mathrm{e}^H\hat{k}_\perp\mathrm{e}^H = \mathrm{e}^H\mathrm{e}^{-H}\hat{k}_\perp = \hat{k}_\perp \ . \tag{D.67}$$

Der zu $\vec{n}$ senkrechte Anteil $\vec{k}_\perp$ bleibt unverändert.

Die Matrix $\hat{k}_\parallel$ vertauscht mit e^H. Wegen $(\vec{n}\vec{\sigma})^2 = \mathbf{1}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^H\hat{k}_\parallel\,\mathrm{e}^H &= \hat{k}_\parallel\,\mathrm{e}^{2H} = (k^0 - k_\parallel\vec{n}\vec{\sigma})(\cosh\beta - (\sinh\beta)\vec{n}\vec{\sigma})\\
&= \big((\cosh\beta)\,k^0 + (\sinh\beta)\,k_\parallel\big) - \big((\sinh\beta)\,k^0 + (\cosh\beta)\,k_\parallel\big)\vec{n}\vec{\sigma}\\
&= k'^0 - k'_\parallel\vec{n}\vec{\sigma} \ .
\end{aligned} \tag{D.68}$$

Hieraus lesen wir ab

$$\begin{pmatrix} k'^0 \\ k'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k^0 \\ k_\parallel \end{pmatrix} \ . \tag{D.69}$$

Dies ist die drehungsfreie Lorentztransformation in $\vec{n}$-Richtung mit Geschwindigkeit $v = \tanh\beta$. Bis auf das Vorzeichen der Geschwindigkeit stimmt diese Transformation mit (3.4) überein.

Schreiben wir e^H als Darstellung der Lorentztransformation L_p (D.39), die ein ruhendes Teilchen mit Masse m auf ein Teilchen mit Viererimpuls p, $p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$, abbildet, so ist $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$ und $\tanh\beta = v = |\vec{p}|/p^0$. Um e^H durch p statt durch β und $\vec{n}$ zu parametrisieren, brauchen wir die Hyperbelfunktionen von $\beta/2$. Wegen

$$\cosh\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\beta}} = \frac{p^0}{m} \tag{D.70}$$

und der Additionstheoreme sind sie

$$\cosh\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh\beta + 1)} = \sqrt{\frac{p^0 + m}{2m}} \ , \quad \sinh\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh\beta - 1)} = \sqrt{\frac{p^0 - m}{2m}} \ . \tag{D.71}$$

Die zur drehungsfreien Lorentztransformation L_p (D.39) gehörige Matrix e^H (D.66) ist

$$D(L_p) = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0 + m)}}(m + p^0 - \vec{p}\vec{\sigma}) = \frac{m + \hat{p}}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \ . \tag{D.72}$$

Mit ihr konstruiert man die Spinoren des massiven Diracfeldes. Den definierenden Relationen $\det D(L_p) = 1$, $D(L_p) = D(L_p)^\dagger$ und $D(L_p)mD(L_p)^\dagger = \hat{p}$ entsprechen $L_p\,\underline{p} = p$ (D.40).

Da sich jede zeitrichtungstreue und volumentreue Lorentztransformation eindeutig in eine Drehung D und eine drehungsfreie Lorentztransformation L_P zerlegen läßt (D.34) und ebenso jede Matrix M mit $\det M = 1$ in ein Produkt $U\mathrm{e}^H$ (D.58) einer unitären Matrix U, $\det U = 1$, mit einer hermiteschen Matrix e^H, $\det \mathrm{e}^H = 1$, und da zu jeder Drehung in drei Dimensionen genau ein Paar $\pm U$ unitärer Matrizen aus $\mathrm{SU}(2)$ gehört (D.56) und zu jeder drehungsfreien Lorentztransformation L_p aus $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$ genau eine Matrix $D(L_p)$ (D.72), die durch $\hat{k} \mapsto \hat{k}' = M\hat{k}M^\dagger$ die entsprechende Lorentztransformation bewirkt, ist, wie behauptet, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ die Überlagerung von $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$.

Die Basismatrizen $-\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^i$ und $-\frac{1}{2}\sigma^j$, die zu infinitesimalen Drehungen und drehungsfreien Lorentztransformationen gehören, fassen wir mit der Schreibweise

$$\sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\sigma^a\overline{\sigma}^b - \sigma^b\overline{\sigma}^a) \ , \quad \sigma^{ab} = -\sigma^{ba} \ , \quad a, b \in \{0,1,2,3\} \ , \tag{D.73}$$

zusammen. Dabei sind die Matrizen $\overline{\sigma}^a = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$. Die untere Indexstellung ist vereinbarungsgemäß $\sigma_{ab} = \eta_{ac}\eta_{bd}\sigma^{cd}$. Explizit gilt

$$\sigma_{0i} = -\sigma^{0i} = \frac{1}{2}\sigma^i \ , \quad \sigma_{ij} = \sigma^{ij} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma^k \ , \quad i, j, k \in \{1,2,3\} \ . \tag{D.74}$$

Diese Matrizen stellen, wie man mit (D.46) nachprüft, die reelle Lorentzalgebra (B.17) dar

$$[\sigma_{ab}, \sigma_{cd}] = -\eta_{ac}\sigma_{bd} + \eta_{bc}\sigma_{ad} + \eta_{ad}\sigma_{bc} - \eta_{bd}\sigma_{ac} \ . \tag{D.75}$$

Anders als bei Drehungen oder drehungsfreien Lorentztransformationen können nicht alle Matrizen $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ als Exponentialreihe infinitesimaler Transformationen

$$N = \exp((\vec{k} + \mathrm{i}\vec{l})\vec{\sigma}) = \cosh z + \frac{\sinh z}{z}(\vec{k} + \mathrm{i}\vec{l})\vec{\sigma} \ , \quad (\vec{k} + \mathrm{i}\vec{l})^2 = z^2 \ , \tag{D.76}$$

geschrieben werden. Die Ausnahmen sind von der Form

$$M = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad b \neq 0 \ . \tag{D.77}$$

Denn damit $M = N$ gelten kann, muß $\frac{\sinh z}{z}$ von Null verschieden sein, sonst wäre N diagonal. Damit die Hauptdiagonalelemente übereinstimmen, muß $k^3 = l^3 = 0$ sein. $N_{12} = 0$ besagt $k^1 + \mathrm{i}l^1 + \mathrm{i}(k^2 + \mathrm{i}l^2) = 0$. Als Folge ist $z = 0$ und $N_{11} = \cosh z = 1 \neq M_{11}$.

D.5 Möbiustransformationen von Lichtstrahlen

Für jeden Wellenvektor k^m eines Lichtstrahls verschwindet die Determinante der Matrix $\hat{k} = k^m \eta_{mn} \sigma^n$, denn sie ist das Längenquadrat des Vierervektors k (D.65) und k ist lichtartig, $k^2 = 0$. Weil die Matrix $\hat{k}$ nur Rang 1 hat, lassen sich ihre Matrixelemente als Produkte $k_{\alpha\dot{\beta}} = \chi_\alpha \chi^*_{\dot{\beta}}$ der Komponenten eines zweidimensionalen, komplexen Vektors χ schreiben

$$\begin{pmatrix} k^0 - k^3 & -k^1 + \mathrm{i}k^2 \\ -k^1 - \mathrm{i}k^2 & k^0 + k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} (\chi_1^*, \chi_2^*) \ , \quad \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} \begin{pmatrix} \sqrt{k^0 - k^3} \\ -\frac{k^1 + \mathrm{i}k^2}{\sqrt{k^0 - k^3}} \end{pmatrix} . \tag{D.78}$$

Dabei ist χ durch ein gegebenes $\hat{k}$, $\hat{k} = \hat{k}^\dagger \neq 0$, $\det \hat{k} = 0$, bis auf eine Phase bestimmt.

Lorentztransformationen ändern $k_{\alpha\dot{\beta}} = \chi_\alpha \chi^*_{\dot{\beta}}$ in $k'_{\alpha\dot{\beta}} = M_\alpha{}^\gamma M^{*\dot{\delta}}_{\dot{\beta}} k_{\gamma\dot{\delta}}$ (D.61) und transformieren demnach χ in $\chi'_\alpha = M_\alpha{}^\beta \chi_\beta$

$$\begin{pmatrix} \chi'_1 \\ \chi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\chi_1 + b\chi_2 \\ c\chi_1 + d\chi_2 \end{pmatrix} \ , \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \ , \quad ad - bc = 1 \ . \tag{D.79}$$

Einen zweidimensionalen, komplexen Vektor, der wie χ linear unter $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ transformiert, nennen wir Spinor.

Das Verhältnis $z = \chi_1/\chi_2$ der Komponenten des zum Lichtstrahl gehörigen Spinors hängt umkehrbar eindeutig mit der Richtung $\vec{e}$ zusammen, aus der man den Lichtstrahl einfallen sieht. Denn der Wellenvektor eines Lichtstrahls hat die Form $(k^0, \vec{k}) = k^0(1, -\vec{e})$. Drücken wir die Richtung wie in (2.25) durch die Winkel θ und φ aus, $\vec{e} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, so ergibt sich mit der trigonometrischen Identität (3.20)

$$z = \frac{\chi_1}{\chi_2} = -\frac{k^0 - k^3}{k^1 + \mathrm{i}k^2} = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \cot\frac{\theta}{2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \ . \tag{D.80}$$

Da die Richtung z eines Lichtstrahls das Verhältnis von Spinorkomponenten ist, ändern es Lorentztransformationen Λ durch die zum Matrixpaar $\pm M(\Lambda) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ gehörige Möbiustransformation

$$T_M : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \ . \tag{D.81}$$

Aberration und Drehung sind Möbiustransformationen von $z = \cot\frac{\theta}{2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$.

Zu gegebener Möbiustransformation mit Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gehört jeweils ein Paar von linearen Transformationen mit Matrizen $\pm M$. Also ist die Möbiusgruppe zur Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ und demnach zur eigentlichen Lorentzgruppe $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$ isomorph.

Sind z_1, z_2, z_3 drei verschieden Punkte der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \infty$ und sind w_1, w_2, w_3 ebenfalls verschieden, dann gibt es genau eine Möbiustransformation [46]

$$z \mapsto Tz : \quad \frac{(Tz - w_1)(w_2 - w_3)}{(Tz - w_2)(w_1 - w_3)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(z_1 - z_3)} \ , \tag{D.82}$$

die z_1 in $w_1 = Tz_1$, z_2 in $w_2 = Tz_2$ und z_3 in $w_3 = Tz_3$ überführt.

Demnach gibt es an einem Ort genau einen Beobachter, der drei vorgegebene Sterne in drei vorgegebenen Richtungen sieht. Die Örter der anderen Sterne liegen dann fest.

Der Spinorkalkül ist in [52] der Zugang zur relativistischen Physik.

E Konforme Abbildungen

E.1 Konform verwandte Metriken

Zwei Metriken $\hat{g}_{mn}(x)$ und $g_{mn}(x)$ auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ heißen konform verwandt, wenn sie an jedem Punkt zueinander proportional sind

$$\hat{g}_{mn}(x) = \Omega^2(x) g_{mn}(x) \ . \tag{E.1}$$

Der konforme Faktor Ω^2 darf vom Ort abhängen, aber nirgends verschwinden.

Metriken sind genau dann konform verwandt, wenn ihre Lichtkegel übereinstimmen. Es gibt an jedem Punkt eine Orthonormalbasis e_a mit $g(e_a, e_b) = \eta_{ab}$ (A.107). wobei η p-Pluszeichen und q-Minuszeichen habe. Lichtartige Vektoren von g sind Linearkombinationen $k = k^a \mathrm{e}_a$ mit $\sum_{a=1}^p (k^a)^2 = \sum_{a=p+1}^{p+q} (k^a)^2$. Sie sind invariant unter der Reflektion $k \mapsto \bar{k}$, die das Vorzeichnen der raumartigen Komponenten spiegelt. Damit k und $\bar{k}$ auch lichtartig bezüglich $\hat{g}$ sind, muß der Anteil im beider Längenquadrat verschwinden, der unter Spiegelung sein Vorzeichne wechselt. Daher ist $\hat{g}(e_a, e_b) = 0$, falls e_a zeitartig und e_b raumartig ist. Weiterhin definiert $\hat{g}(e_a, e_b)$ quadratische Formen im zeitartigen und im raumartigen Unterraum, die mit Drehungen aus $O(p) \times O(q)$ diagonalisiert werden können und die invariant unter allen Drehungen $O(p) \times O(q)$ sein müssen, denn der Lichtkegel von g ist darunter invariant. Daher ist $\hat{g}(e_a, e_b) = \Omega^2 \eta_{ab} = \Omega^2 g(e_a, e_b)$.

Größenverhältnisse von Tangentialvektoren und Winkel zwischen ihnen, die man mit konform verwandten Metriken mißt, stimmen überein. Denn sie sind durch Verhältnisse von Skalarprodukten definiert; und für die Skalarprodukte $u \cdot v = u^m v^n g_{mn}$ und $u * v = u^m v^n \Omega^2 g_{mn} = \Omega^2 u \cdot v$ und für beliebige Vektoren u, v, w und x gilt

$$\frac{u * v}{w * x} = \frac{u \cdot v}{w \cdot x} \ . \tag{E.2}$$

Verwandte geodätische Linien

Lichtstrahlen, die Weltlinien von Lichtpulsen, sind lichtartige geodätische Linien $x(s)$ und stimmen bei konform verwandten Metriken überein. Denn das Christoffelsymbol $\hat{\Gamma}_{kl}{}^m$ der Metrik $\hat{g}_{mn}$ hängt mit dem Christoffelsymbol $\Gamma_{kl}{}^m$ der Metrik g_{mn} durch

$$\hat{\Gamma}_{kl}{}^m = \Gamma_{kl}{}^m + S_{kl}{}^m \ , \quad S_{kl}{}^m = \Omega^{-1}(\partial_k \Omega \delta_l{}^m + \partial_l \Omega \delta_k{}^m - g_{kl} g^{mn} \partial_n \Omega) \tag{E.3}$$

zusammen. Wenn wir den Tangentialvektor $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\hat{s}}$ längs des Lichtstrahls mit $\hat{\Gamma}$ kovariant ableiten (C.114)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^m}{\mathrm{d}\hat{s}^2} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\hat{s}} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\hat{s}} \hat{\Gamma}_{kl}{}^m = \frac{\mathrm{d}^2 x^m}{\mathrm{d}\hat{s}^2} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\hat{s}} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\hat{s}} \Gamma_{kl}{}^m + 2\,\Omega^{-1} \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\hat{s}} \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\hat{s}} - \Omega^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\hat{s}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\hat{s}} g^{mn} \partial_n \Omega \ , \tag{E.4}$$

wobei wir $\Omega(\hat s) = \Omega(x(\hat s))$ als Funktion des Bahnparameters $\hat s$ auffassen, so verschwindet der letzte Term, weil $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\hat s}$ lichtartig ist. Der vorletzte Term kann durch eine Reparametrisierung absorbiert werden; deuten wir die Terme als Ableitungen von $x^m(s(\hat s))$, so haben sie die Form

$$\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\hat s}\Big)^2\Big(\frac{\mathrm{d}^2x^m}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\Gamma_{kl}{}^m\Big) + \Big(2\,\Omega^{-1}\frac{\mathrm{d}\,\Omega}{\mathrm{d}\hat s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\hat s} + \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\hat s^2}\Big)\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\ . \tag{E.5}$$

Die letzte Klammer verschwindet, wenn der Bahnparameter $s(\hat s)$ als

$$s(\hat s) = \int^{\hat s}\mathrm{d}s'\,\Omega^{-2}(s') \tag{E.6}$$

gewählt wird. In dieser Parametrisierung ist die Geodätengleichung für Lichtstrahlen bezüglich der Metrik g_{mn} erfüllt, wenn sie für die Metrik $\hat g_{mn}$ gilt.

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2x^m}{\mathrm{d}\hat s^2} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\hat s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\hat s}\hat\Gamma_{kl}{}^m = \Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\hat s}\Big)^2\Big(\frac{\mathrm{d}^2x^m}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\Gamma_{kl}{}^m\Big) \tag{E.7}$$

Geodätische Linien der Metrik $\hat g_{mn}$ sind, wenn sie nicht lichtartig sind und wenn Ω nicht konstant ist, keine Geraden der Metrik g_{mn}. Denn in der Parametrisierung

$$s(\hat s) = \int^{\hat s}\mathrm{d}s'\,\Omega^{-1}(s') \tag{E.8}$$

gilt $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 1$, wenn $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\hat s} * \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\hat s} = 1$ erfüllt ist, und

$$\frac{\mathrm{d}^2x^m}{\mathrm{d}\hat s^2} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\hat s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\hat s}\hat\Gamma_{kl}{}^m = \Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\hat s}\Big)^2\Big(\frac{\mathrm{d}^2x^m}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\Gamma_{kl}{}^m - \big(g^{mn} - \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s}\big)\,\Omega^{-1}\partial_n\Omega\Big)\ . \tag{E.9}$$

Weyltensor

Wir unterstellen im folgenden, daß die Dimension d der Mannigfaltigkeit größer als 2 ist. In einer Dimension und auch in jeder $d = 2$ dimensionalen Mannigfaltigkeit (E.54) sind alle Metriken gleicher Signatur konform verwandt.

Der zur Konnektion $\hat\Gamma_{kl}{}^m$ (E.3) gehörige Riemanntensor $\hat R_{klm}{}^n$ (C.76) unterscheidet sich vom Riemanntensor $R_{klm}{}^n$ der Konnektion $\Gamma_{kl}{}^m$ nur um Terme

$$\begin{aligned}\hat R_{klm}{}^n - R_{klm}{}^n =& D_kS_{lm}{}^n - D_lS_{km}{}^n - S_{km}{}^rS_{lr}{}^n + S_{lm}{}^rS_{kr}{}^n\\ =& \big(\delta_l^n D_kD_m\Omega - \delta_k^n D_lD_m\Omega + g_{km}g^{nr}D_lD_r\Omega - g_{lm}g^{nr}D_kD_r\Omega\big)\Omega^{-1} +\\ &+ \big(2\delta_k^n(\partial_l\Omega)(\partial_m\Omega) - 2\delta_l^n(\partial_k\Omega)(\partial_m\Omega) + (g_{km}\delta_l^n - g_{lm}\delta_k^n)g^{rs}(\partial_r\Omega)(\partial_s\Omega) +\\ &+ 2(g_{lm}\partial_k\Omega - g_{km}\partial_l\Omega)g^{nr}\partial_r\Omega\big)\Omega^{-2}\ ,\end{aligned} \tag{E.10}$$

bei denen ein Indexpaar von der Metrik oder vom Kronecker-Delta getragen wird. Daher stimmt der total spurfreie Anteil beider Riemanntensoren, der Weyltensor $W_{klm}{}^n$, bei konform verwandten Metriken überein, $\hat W_{klm}{}^n = W_{klm}{}^n$. In der Indexstellung

$$\begin{aligned}W_{mnkl} = R_{mnkl} &- \frac{1}{d-2}\big(g_{lm}R_{kn} - g_{ln}R_{km} - g_{km}R_{ln} + g_{kn}R_{lm}\big)\\ &+ \frac{1}{(d-2)(d-1)}\big(g_{lm}g_{kn} - g_{lm}g_{kn}\big)R\ ,\end{aligned} \tag{E.11}$$

sind die Komponenten der Weyltensoren einander mit dem Faktor Ω^2 proportional, $\hat W_{klmn} = \Omega^2 W_{klmn}$, der vom Herunterziehen des vierten Index rührt, $\hat W_{klmn} = \hat g_{nr}\hat W_{klm}{}^r$.

Der Weyltensor hat dieselben Permutationssymmetrien wie der Riemanntensor

$$W_{mnkl} = -W_{nmkl} = -W_{mnlk} = W_{klmn}\ ,\quad W_{mnkl} + W_{nkml} + W_{kmnl} = 0\ . \tag{E.12}$$

Der Weyltensor verschwindet in $d = 3$ Dimensionen: in einer Dreibeinbasis ist die Spurfreiheit ein invertierbares, linear homogenes Gleichungssystem, $0 = W_{acbd}\eta^{cd}$,

$$\begin{aligned}0 &= W_{1212}\eta^{22} + W_{1313}\eta^{33}\ , & 0 &= W_{1323}\eta^{33}\ ,\\ 0 &= W_{1232}\eta^{22}\ , & 0 &= W_{2121}\eta^{11} + W_{2323}\eta^{33}\ ,\\ 0 &= W_{2131}\eta^{11}\ , & 0 &= W_{3131}\eta^{11} + W_{3232}\eta^{22}\ ,\end{aligned} \tag{E.13}$$

das $W_{abcd} = 0$ zur Folge hat.

Skalarfeld

Der zur Konnektion $\hat\Gamma_{kl}{}^m$ (E.3) gehörige Riccitensor $\hat R_{km} = \hat R_{klm}{}^l$ ist dem Riccitensor R_{km} der Konnektion $\Gamma_{kl}{}^m$ gemäß (E.10) verwandt

$$\begin{aligned}\hat R_{km} =& R_{km} + \Omega^{-1}\big((d-2)D_kD_m\Omega + g_{km}g^{rs}D_rD_s\Omega\big) +\\ &+ \Omega^{-2}\big(-2(d-2)(\partial_k\Omega)(\partial_m\Omega) + (d-3)g_{mk}g^{rs}(\partial_r\Omega)(\partial_s\Omega)\big)\ .\end{aligned} \tag{E.14}$$

Für den Krümmungsskalar $\hat R = \hat g^{km}\hat R_{km} = \Omega^{-2}g^{km}\hat R_{km}$ gilt

$$\hat R = \Omega^{-2}R + 2(d-1)\Omega^{-3}g^{rs}D_rD_s\Omega + (d-4)(d-1)\Omega^{-4}g^{rs}(\partial_r\Omega)(\partial_s\Omega)\ . \tag{E.15}$$

Insbesondere erfüllt $\phi = \Omega^{\frac{d-2}{2}}$ bei konstantem Krümmungsskalar $R = \frac{4(d-1)}{d-2}m^2$ und $\hat R = -\frac{4(d-1)}{d-2}\lambda$ die Bewegungsgleichung eines selbstgekoppelten Skalarfeldes ähnlich dem Higgsfeld im Standardmodell der elementaren Wechselwirkungen

$$g^{rs}D_rD_s\phi + m^2\phi + \lambda\phi^{\frac{d+2}{d-2}} = 0\ . \tag{E.16}$$

Diese Bewegungsgleichung des Skalarfeldes ϕ besagt, daß die Wirkung mit der Einstein-Hilbert-Lagrangedichte (8.3)

$$\begin{gathered}\mathscr{L} = \frac{d-2}{8(d-1)}\sqrt{\hat{\mathfrak g}}(\hat R - 2\Lambda) = -\sqrt{\mathfrak g}\Big(\frac12 g^{rs}(\partial_r\phi)(\partial_s\phi) - \frac12 m^2\phi^2 - \frac{d-2}{2d}\lambda\phi^{\frac{2d}{d-2}}\Big) + \partial_r X^r\ ,\\ m^2 = \frac{d-2}{4(d-1)}R\ ,\quad \lambda = -\frac{d}{2(d-1)}\Lambda\ ,\quad X^r = \frac12\big(\sqrt{\mathfrak g}g^{rs}\phi\partial_s\phi\big)\ ,\end{gathered} \tag{E.17}$$

bei festgehaltener Metrik g_{mn} extremal ist bei beliebigen, lokalen Variationen des konformen Faktors $\Omega^2 = \phi^{\frac{4}{d-2}}$. Jeder nullstellenfreien Lösung seiner Bewegungsgleichung in einem Raum mit konstantem Krümmungsskalar $(d-2)R = 4(d-1)m^2$ entspricht eine konform verwandte Metrik mit ebenfalls konstantem Krümmungsskalar $(d-2)\hat R = 2d\Lambda$.

In $d = 3$, 4 oder 6 Dimensionen ist $\sqrt{\mathfrak g}\phi^{\frac{2d}{d-2}}$ eine polynomiale Selbstkopplung, nämlich $\sqrt{\mathfrak g}\phi^6$, $\sqrt{\mathfrak g}\phi^4$ oder $\sqrt{\mathfrak g}\phi^3$.

Konform flache Metrik

Wir nennen eine Metrik g_{km} konform flach, wenn sie in einer genügend kleinen Umgebung jedes Punktes einer flachen Metrik $\hat{g}_{km}$, $\hat{R}_{klm}{}^n = 0$, konform verwandt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Weyltensor und der Cottontensor

$$R_{kl\,m} = D_k R_{lm} - D_l R_{km} - \frac{1}{2(d-1)}(g_{ml} D_k R - g_{mk} D_l R) \tag{E.18}$$

verschwinden. Um dies zu zeigen, schreiben wir (E.14) mit Hilfe von (E.15) im Fall $\hat{R}_{km} = 0$ als Differentialgleichungssystem für Ω und $v_k = D_k\Omega$

$$D_k\Omega = v_k\ , \quad D_k v_m = -\frac{1}{d-2}\Omega(R_{km} - \frac{1}{2(d-1)} g_{km} R) + \Omega^{-1}(2 v_k v_m - \frac{1}{2} g_{km} g^{rs} v_r v_s)\ . \tag{E.19}$$

Notwendigerweise müssen nach erneutem Ableiten und Antisymmetrisieren in den Ableitungsindizes beide Seiten übereinstimmende Ergebnisse liefern.

Ohne weitere Einschränkung ist die Bedingung $[D_l, D_k]\Omega = 0 = D_l v_k - D_k v_l$ erfüllt. Die Bedingung $-R_{lkm}{}^n v_n \overset{C.54}{=} [D_l, D_k] v_m = D_l(D_k v_m) - D_k(D_l v_m)$ besagt mit der abkürzenden Notation

$$r_{km} = R_{km} - \frac{1}{2(d-1)} g_{km} R\ , \tag{E.20}$$

$$-R_{lkmn} v^n = \frac{1}{d-2}\big((g_{km} r_{ln} - g_{kn} r_{lm} - g_{lm} r_{kn} + g_{ln} r_{km}) v^n + \Omega(D_k r_{lm} - D_l r_{km})\big)\ . \tag{E.21}$$

Auf die linke Seite gebracht kombinieren sich die r_{km}-Terme mit dem Riemanntensor zum Weyltensor. Er verschwindet notwendig, weil er mit dem Weyltensor der konform verwandten, flachen Metrik übereinstimmt. Folglich gilt bei konform flacher Metrik

$$-W_{lkmn} v^n = 0 = \frac{\Omega}{d-2}\big(D_k r_{lm} - D_l r_{km}\big)\ . \tag{E.22}$$

Weil Ω nicht verschwindet, muß notwendig der Cottontensor verschwinden.

Verschwinden der Weyltensor und der Cottontensor, dann existiert nach dem Satz von Frobenius, den man leicht auf kovariante Ableitungen verallgemeinert, in einer genügend kleinen Umgebung jedes Punktes eine nullstellenfreie Lösung Ω von (E.19). Sie ist eindeutig durch den frei wählbaren Wert von Ω und $D_k\Omega$ an einem Punkt festgelegt. Die konform verwandte Metrik $\Omega^2 g_{mn}$ hat nach (E.14) verschwindenden Riccitensor $\hat{R}_{km}$ und verschwindenden Weyltensor, also verschwindenden Riemanntensor, $\hat{R}_{klm}{}^n = 0$.

Im $d = 3$ dimensionalen Raum sind Metriken genau dann konform flach, wenn $R_{kl\,m} = 0$ verschwindet, denn der Weyltensor verschwindet dort identisch. In mehr als drei Dimensionen sind Metriken genau dann konform flach, wenn der Weyltensor verschwindet; denn wenn man für $D_n W_{klm}{}^n$ die kontrahierte zweite Bianchi-Identität (C.62)

$$D_n R_{klm}{}^n = -D_k R_{lnm}{}^n - D_l R_{nkm}{}^n = -D_k R_{lm} + D_l R_{km} \tag{E.23}$$

verwendet, erhält man

$$D_n W_{klm}{}^n = -\frac{d-3}{d-2} R_{kl\,m}\ . \tag{E.24}$$

E.2 Killinggleichung

Eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mit Metrik $g_{mn}(x)$ ist einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ mit Metrik $g_{mn}(x')$ konform, wenn es eine invertierbare Abbildung $\Phi : x \mapsto x'(x)$ von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{N}$ gibt, die auf $\mathcal{M}$ eine zu $g_{mn}(x)$ konform verwandte Metrik induziert (A.142)

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^l} g_{mn}(x'(x)) = e^{\lambda(x)} g_{kl}(x)\ . \tag{E.25}$$

Der konforme Faktor $e^{\lambda(x)}$ kann vom Ort abhängen, aber nicht verschwinden.

Die Abbildung Φ bleibt konform, wenn statt $g_{mn}(x)$ auf $\mathcal{M}$ und statt $g_{mn}(x')$ auf $\mathcal{N}$ konform verwandte Metriken $\Omega^2 g_{mn}$ zugrunde gelegt werden.

Unter der konformen Abbildung Φ bleiben Größenverhältnisse von Tangentialvektoren am selben Punkt x, die durch Φ_* (A.138) verschleppt werden, und insbesondere Winkel unverändert

$$\Phi_* v \cdot \Phi_* w = v^k \frac{\partial x'^m}{\partial x^k}\, w^l \frac{\partial x'^n}{\partial x^l}\, g_{mn}(x'(x)) = e^{\lambda(x)} v^k w^l g_{kl}(x) = e^{\lambda(x)} v \cdot w\ . \tag{E.26}$$

Infinitesimale Kugelflächen $v^2 =$ konst werden auf infinitesimale Kugelflächen abgebildet.

Wenn der konforme Faktor überall $e^{\lambda(x)} = 1$ ist, so läßt die Abbildung Φ alle Längenquadrate von Tangentialvektoren unverändert und ist eine Isometrie.

Die konforme Abbildung ist bis auf konforme Selbstabbildungen von $\mathcal{M}$ oder $\mathcal{N}$ eindeutig. Ist Φ_2 eine weitere konforme Abbildung von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{N}$, so ist $g = \Phi^{-1} \circ \Phi_2$ eine konforme Selbstabbildung oder Transformation von $\mathcal{M}$ und $h = \Phi_2 \circ \Phi^{-1}$ ist eine konforme Transformation von $\mathcal{N}$ und es gilt $\Phi_2 = \Phi \circ g = h \circ \Phi$.

Die konformen Transformationen von $\mathcal{M}$ bilden eine Gruppe G. Sie ist $H = \Phi\circ G\circ\Phi^{-1}$, der konformen Gruppe von $\mathcal{N}$, ähnlich.

Differenzieren wir eine einparametrige Schar Φ_α von konformen Transformationen (E.25) nach dem Transformationsparameter bei $\alpha = 0$, $\Phi_0 = \mathrm{id}$, so erhalten wir mit (A.144, A.148) und $\epsilon = \frac{1}{2}\partial_\alpha \lambda_{|\alpha=0}$ die nach Wilhelm Killing [37] benannte konforme Killinggleichung

$$\xi^k \partial_k g_{mn} + (\partial_m \xi^k) g_{kn} + (\partial_n \xi^k) g_{mk} - 2\epsilon g_{mn} = 0\ . \tag{E.27}$$

Falls ϵ verschwindet, sprechen wir von der Killinggleichung. Das Killingfeld ξ ist eine infinitesimale Isometrie; die Lieableitung der Metrik längs ξ verschwindet

$$\xi^k \partial_k g_{mn} + (\partial_m \xi^k) g_{kn} + (\partial_n \xi^k) g_{mk} = 0\ . \tag{E.28}$$

Die Killinggleichung schränkt sowohl das Killingfeld ξ ein, nämlich, eine Symmetrie der Metrik zu sein, als auch die Metrik, eine Symmetrie zu haben.

Mit kovarianten Ableitungen (C.109) geschrieben, lautet die Killinggleichung

$$D_m \xi_n = \omega_{mn} \ , \quad \omega_{mn} = -\omega_{nm} \ . \tag{E.29}$$

Dabei ist $\xi_m = g_{mn}\xi^n$, und die kovariante Ableitung wird mit der metrikkompatiblen, torsionsfreien Levi-Civita-Konnektion, dem Christoffelsymbol (C.106), gebildet.

Notwendigerweise müssen nach erneutem Ableiten und Antisymmetrisieren in den Ableitungsindizes beide Seiten von (E.29) übereinstimmende Ergebnisse liefern

$$-R_{klm}{}^n \xi_n \overset{(C.54)}{=} [D_k, D_l]\xi_m = D_k \omega_{lm} - D_l \omega_{km} \ . \tag{E.30}$$

Summieren wir die zyklisch vertauschten Versionen dieser Gleichung, so verschwindet wegen der ersten Bianchi-Identität $\circlearrowright\!\!\sum_{kml} R_{klm}{}^n = 0$ (C.110). Folglich verschwindet auch $\circlearrowright\!\!\sum_{klm} D_k\omega_{lm}$, und es gilt $D_k\omega_{lm} + D_l\omega_{mk} = -D_m\omega_{kl}$ und

$$D_m \omega_{kl} = R_{klm}{}^n \xi_n \ . \tag{E.31}$$

Auch bei (E.31) müssen bei erneutem Differenzieren und Antisymmetrisieren in den Ableitungsindizes beiden Seiten dasselbe ergeben

$$-R_{klm}{}^r \omega_{rn} - R_{kln}{}^r \omega_{mr} = [D_k, D_l]\omega_{mn} = D_k\big(R_{mnl}{}^r \xi_r\big) - D_l\big(R_{mnk}{}^r \xi_r\big) \ . \tag{E.32}$$

Also erfüllt jedes Killingfeld ξ und seine ersten Ableitungen ω das linear homogene, algebraische Gleichungssystem

$$0 = \big(D_k R_{mnl}{}^s - D_l R_{mnk}{}^s\big)\xi_s + \big(R_{klm}{}^r \delta^s_n - R_{kln}{}^r \delta^s_m + R_{mnl}{}^s \delta^r_k - R_{mnk}{}^s \delta^r_l\big)\omega_{rs} \ . \tag{E.33}$$

Maximal symmetrische Räume

Wenn das Gleichungssystem (E.33) den Rang Null hat, wenn also alle Koeffizienten bei ξ_s und bei ω_{rs} verschwinden, dann existieren in einer genügend kleinen Umgebung nach dem Satz von Frobenius Lösungen des Gleichungssystems (E.29, E.31). Dabei kann man die Werte von ξ_s und $\omega_{rs} = -\omega_{sr}$, dies sind in d Raumzeitdimensionen $d + \frac{1}{2}d(d-1)$ Parameter, an einem Punkt frei wählen. Ist das Gleichungssystem (E.33) nicht identisch in ξ und ω erfüllt, sind diese Parameter eingeschränkt und es gibt weniger als $\frac{1}{2}d(d+1)$ linear unabhängige Killingfelder.

In einem maximal symmetrischen Raum gilt also $D_k R_{mnl}{}^s - D_l R_{mnk}{}^s = 0$ und

$$R_{klm}{}^r \delta^s_n - R_{kln}{}^r \delta^s_m + R_{mnl}{}^s \delta^r_k - R_{mnk}{}^s \delta^r_l = 0 \ . \tag{E.34}$$

Summieren mit δ^n_s ergibt

$$(d-1)R_{klm}{}^r = R_{mk}\delta_l{}^r - R_{ml}\delta_k{}^r \ , \tag{E.35}$$

wobei $R_{kl} = R_{knl}{}^n$ der Riccitensor ist, und, wenn wir mit g_{nr} multiplizieren,

$$(d-1)R_{klmn} = R_{mk}g_{ln} - R_{ml}g_{kn} \ . \tag{E.36}$$

Weil der Riemanntensor im zweiten Indexpaar antisymmetrisch (C.25) und der Riccitensor symmetrisch (C.112) ist, gilt

$$R_{mk}g_{ln} - R_{ml}g_{kn} = -R_{nk}g_{lm} + R_{nl}g_{km} \ , \tag{E.37}$$

woraus durch Summieren mit g^{ln} folgt

$$R_{kl} = \frac{1}{d} g_{kl} R \ , \quad R = g^{kl} R_{kl} \ . \tag{E.38}$$

Wegen $D_k R_{mnl}{}^s - D_l R_{mnk}{}^s = 0$ ist der Krümmungsskalar R in maximal symmetrischen Räumen konstant

$$0 = d(d-1)\big(D_k R_{mnls} - D_l R_{mnks}\big) = \partial_k R\big(g_{ml}g_{ns} - g_{nl}g_{ms}\big) - k \leftrightarrow l \ . \tag{E.39}$$

Also ist der Riemanntensor maximal symmetrischer Räume durch

$$R_{klmn} = K\big(g_{km}g_{ln} - g_{lm}g_{kn}\big) \ , \quad K = \frac{1}{d(d-1)} R \ , \tag{E.40}$$

mit einer Konstanten K gegeben.

Liealgebra der Killingfelder

Die Menge der Killingfelder ist eine Liealgebra: sind $\xi_1^m\partial_m$ und $\xi_2^m\partial_m$ zwei Killingfelder, so hat ihr Kommutator $[\xi_2{}^m\partial_m, \xi_1{}^n\partial_n] = \xi_3{}^n\partial_n$ die Komponenten

$$\xi_3{}^n = \xi_2{}^m\partial_m\xi_1{}^n - \xi_2{}^m\partial_m\xi_1{}^n = \xi_2{}^m D_m\xi_1{}^n - \xi_2{}^m D_m\xi_1{}^n = \xi_2{}^m\omega_{1\,m}{}^n - \xi_1{}^m\omega_{2\,m}{}^n \ . \tag{E.41}$$

Insbesondere ist $\omega_{3\,mn} = D_m\xi_{3\,n} = -\omega_{3\,nm}$ und $\xi_3{}^m\partial_m$ folglich ein Killingfeld

$$\omega_{3\,mn} = \omega_{2\,m}{}^l\omega_{1\,ln} - \omega_{1\,m}{}^l\omega_{2\,ln} + \xi_2{}^l\xi_1{}^k(R_{lnmk} - R_{lmnk}) \ . \tag{E.42}$$

Im maximal symmetrischen Raum (E.40) lautet diese Algebra in Vielbeinkomponenten $\xi^a = \xi^m e_m{}^a$, $\omega_{ab} = e_a{}^m e_b{}^n\omega_{mn}$ und $\omega_a{}^b = \eta^{bc}\omega_{ac}$,

$$\xi_3{}^a = \xi_2{}^b\omega_{1\,b}{}^a - \xi_1{}^b\omega_{2\,b}{}^a \ , \quad \omega_{3\,ab} = \omega_{2\,a}{}^c\omega_{1\,cb} - \omega_{1\,a}{}^c\omega_{2\,cb} + K(\xi_{2\,a}\xi_{1\,b} - \xi_{1\,a}\xi_{2\,b}) \ . \tag{E.43}$$

Verwenden wir für $K \neq 0$ die Bezeichnungen $\omega_{a0} = -\omega_{0a} = \sqrt{|K|}\xi_a$, dann ist $K\xi_{2\,a}\xi_{1\,b} = \eta^{00}\omega_{2\,a0}\omega_{1\,0b}$ mit $\eta^{00} = -\mathrm{sign}(K)$, und die Liealgebra (E.43) ist, wie der Vergleich mit (B.14) zeigt, für $K > 0$ die Liealgebra SO$(p, q+1)$ und für $K < 0$ die Liealgebra SO$(p+1, q)$. Im flachen Raum, also für $K = 0$, ist (E.43) die Liealgebra der Poincaré-Gruppe, die aus Lorentztransformationen SO(p, q) kombiniert mit Translationen besteht, und die wir ISO(p, q), inhomogene, spezielle, orthogonale Gruppe, nennen.

In allen drei Fällen ist SO(p, q) die Unteralgebra der Killingfelder $\xi_{|_p} = 0$, die an einem Punkt p verschwinden. Sie erzeugen die Stabilitätsgruppe dieses Punktes, genauer ihren mit der identischen Abbildung zusammenhängenden Teil.

Da die Killingfelder an jedem Punkt des maximal symmetrischen Raumes den Tangentialraum aufspannen, ist jeder maximal symmetrische Raum ein Orbit (B.23). Dies ist für $K = 0$ der Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{p,q} = \mathrm{ISO}(p,q)/\mathrm{SO}(p,q)$ mit der flachen Metrik $g_{mn} = \eta_{mn}$. Für $K \neq 0$ ist er ein Quotient der universellen Überlagerung des Orbits $\mathrm{SO}(p,q+1)/\mathrm{SO}(p,q)$ oder $\mathrm{SO}(p+1,q)/\mathrm{SO}(p,q)$ und lokal isometrisch zur Fläche

$$z^M z^N \eta_{MN} = -K^{-1} \ , \quad M,N = 1,2,\dots,d+1 \ , \tag{E.44}$$

im $d+1$ dimensionalen flachen Raum $\mathbb{R}^{p,q+1}$ oder $\mathbb{R}^{p+1,q}$. Diese Fläche wird von Lorentztransformationen des einbettenden Raumes auf sich abgebildet. Sie bilden die maximale, $\frac{1}{2}d(d+1)$-dimensionale Isometriegruppe dieser Fläche. Insbesondere ist die Metrik eines d dimensionalen, maximal symmetrischen Raumes festgelegt durch den Wert der Konstante K und durch die Signatur $p-q$, also durch die Anzahl p und $q = d-p$ von Vektoren einer orthogonalen Basis mit positivem und negativem Längenquadrat.

Quotienten der universellen Überlagerung werden zum Beispiel in [15, 65] untersucht.

Zu Killingvektoren gehörige Erhaltungsgrößen

Zu jedem Killingvektor ξ_m gehört bei frei fallenden Teilchen die Erhaltungsgröße

$$Q_\xi = u^m \xi_m \ . \tag{E.45}$$

Es bezeichnet u^m den normierten Tangentialvektor (6.7) an die Weltlinie des Teilchens, das die zur Wirkung (6.5) gehörige Euler-Lagrange-Gleichung (6.9)

$$-g_{mn}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u^n + \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\Gamma_{kl}{}^n u^l\Big) = -g_{mn}\frac{\delta}{\delta s}u^n = 0 \tag{E.46}$$

erfüllt. Daß Q_ξ sich längs der Weltlinie nicht ändert, bestätigt man elementar durch kovariante Differentation $\frac{\delta}{\delta s} = \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s}D_n$ längs der Weltlinie

$$\frac{\delta}{\delta s}\big(u^m\xi_m\big) = \frac{\delta u^m}{\delta s}\xi_m + u^m\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s}D_n\xi_m \ . \tag{E.47}$$

Der erste Term verschwindet aufgrund der Euler-Lagrange-Gleichung und der zweite aufgrund der Killinggleichung (E.29), denn die Doppelsumme mit $u^m\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s} \propto u^m u^n$ symmetrisiert in den Summationsindizes (5.19).

Ein Killingtensor ist nach Definition total symmetrisch und seine total symmetrisierte, kovariante Ableitung verschwindet. Mit der Schreibweise (A.67), daß runde Klammern um Indizes vollständige Symmetrisierung bezeichnen, erfüllt ein Killingtensor

$$\xi_{m_1m_2\dots m_n} = \xi_{(m_1m_2\dots m_n)} \ , \quad D_{(m_0}\xi_{m_1m_2\dots m_n)} = 0 \ . \tag{E.48}$$

Die gleiche Rechnung wie bei Killingvektoren zeigt, daß bei frei fallenden Teilchen zu jedem Killingtensor $\xi_{m_1m_2\dots m_n}$ die Erhaltungsgröße

$$Q_\xi = u^{m_1}u^{m_2}\dots u^{m_n}\xi_{m_1m_2\dots m_n} \tag{E.49}$$

gehört. Gemäß Noether-Theorem (4.51) gehört zu dieser Erhaltungsgröße bis auf einen Faktor $-m\,n\,c$ folgende infinitesimale Symmetrie der Wirkung (6.5)

$$\delta x^k = g^{km_1}u^{m_2}\dots u^{m_n}\xi_{m_1m_2\dots m_n} \ . \tag{E.50}$$

Jeder Killingvektor ξ definiert zusammen mit der kovariant erhaltenen Energie-Impulstensordichte $\mathcal{T}^{mn}$ einen erhaltenen Strom $j^m = \mathcal{T}^{mn}\xi_n$ (7.7). Um mit Killingtensoren der Stufe n einen erhaltenen Strom zu konstruieren, bräuchte man einen kovariant erhaltenen, total symmetrischen Tensor $T^{(mm_1m_2\dots m_n)}$, $j^m = \sqrt{\mathfrak{g}}\,T^{(mm_1\dots m_n)}\xi_{(m_1\dots m_n)}$.

Uhren auf Meereshöhe

Uhren werden auf der Erdoberfläche durch die Erddrehung mitgeführt und gehen daher vergleichsweise langsamer als unbewegte Uhren. Die Drehung bewirkt aber auch eine Abplattung des Erdballs, aufgrund derer die schneller bewegte Uhr am Äquator weiter vom Erdmittelpunkt entfernt ist als die am Nordpol ruhende Uhr. Idealisieren wir die Meeresoberfläche als überall waagerecht, also als überall senkrecht zur Lotrechten, so bewirken die unterschiedliche Gravitation und die unterschiedliche Geschwindigkeit insgesamt, daß Uhren auf Meereshöhe synchron laufen.

Denn die Uhren auf Meereshöhe durchlaufen in der Schwarzschildmetrik (und in der Kerr-Metrik) mit festem r und θ und konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi/\mathrm{Tag}$ Weltlinien $x(t)$, die Integralkurven eines Killingfeldes ξ sind,

$$x(t) = \begin{pmatrix} t \\ r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r(0) \\ \theta(0) \\ t\,\Omega + \varphi(0) \end{pmatrix} \ , \quad \dot{x} = \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \ . \tag{E.51}$$

In Koordinatenintervallen t läuft auf den Uhren die Eigenzeit $\tau = \sqrt{\xi^2}\,t$ ab. Uhren auf einer Fläche $\mathcal{O}$, die aus Weltlinien $x(t)$ mit festem ξ^2 besteht, $\mathcal{O} = \{x : \xi^2(x) = \mathrm{konst}\}$, laufen daher synchron.

Da ξ^2 auf der Fläche synchroner Uhren konstant ist, verschwindet $u^m\partial_m\xi^2$ für jeden Tangentialvektor u an Kurven, die in $\mathcal{O}$ verlaufen. Zusammen mit der Killinggleichung $D_m\xi_n = -D_n\xi_m$ (C.109) folgt hieraus

$$0 = \frac{1}{2}u^m\partial_m\dot{x}^2 = u^m\dot{x}^n(D_m\dot{x}_n) = -u^m(\dot{x}^n D_n\dot{x}_m) \ , \tag{E.52}$$

daß u senkrecht auf der Beschleunigung $b^m \propto \dot{x}^n D_n\dot{x}^m$ steht, also waagerecht ist. Insbesondere ist $\dot{x}$ waagerecht, die Länge jedes Killingvektors ist längs seiner Integralkurve konstant.

Da alle Tangentialvektoren an die Fläche synchroner Uhren waagerecht sind, ist $\mathcal{O}$ waagerecht. Umgekehrt ist ξ^2 konstant auf waagerechten Flächen, die aus Integralkurven eines Killingfeldes bestehen. Auf Meereshöhe mit der Erddrehung mitgeführte Uhren laufen synchron.

Dies gilt nicht nur in einer nichtrelativistischen Näherung [19] sondern ohne Näherung in der Schwarzschildmetrik und in der Kerr-Metrik, die Killingvektorfelder $\xi = \partial_t + \Omega\partial_\varphi$ besitzen. In der Schwarzschildmetrik ist die Fläche synchroner Uhren, $\dot{x}^2 = \text{konst}$, durch die Lösung $r(\theta)$ von

$$\frac{r_0}{r} + r^2\,\Omega^2\,\sin^2\theta = \frac{r_0}{R} \tag{E.53}$$

gegeben. Dabei ist $R = r_{|\theta=0}$ die halbe Länge der Erdachse, genauer der r-Wert am Nord- oder Südpol.

E.3 Konforme Transformationen in zwei Dimensionen

Jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit einer invertierbaren Metrik[1] ist konform flach, ihre Metrik ist einer genügend kleinen Umgebung jedes Punktes in geeigneten Koordinaten, $x'^1 = u$, $x'^2 = v$, ein Vielfaches der flachen Metrik η_{mn} mit derselben Signatur

$$g_{mn}(u,v) = \Omega^2(u,v)\,\eta_{mn}\ , \quad \Omega^2 > 0\ . \tag{E.54}$$

Denn für die inverse Metrik gilt im x'-Koordinatensystem[2]

$$g'^{12} = \frac{\partial u}{\partial x^k}\frac{\partial v}{\partial x^l}g^{kl} = 0\ , \tag{E.55}$$

$$g'^{11} = \frac{\partial u}{\partial x^k}\frac{\partial u}{\partial x^l}g^{kl} = \pm\frac{\partial v}{\partial x^k}\frac{\partial v}{\partial x^l}g^{kl} = g'^{22}\ , \tag{E.56}$$

wenn v durch

$$\partial_k u = \varepsilon_{km}\sqrt{\mathfrak{g}}g^{mn}\partial_n v \tag{E.57}$$

den Gradienten von u definiert. Hierbei ist $\varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{lk}$, $\varepsilon_{12} = -1$ (B.64), und $\mathfrak{g}$ bezeichnet den Betrag der Determinante der Metrik $\mathfrak{g} = |g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}|$. Die Gleichung (E.55) gilt wegen $\varepsilon_{km} = -\varepsilon_{mk}$. Beim Bestätigen von (E.56) verwendet man die Definition der Determinante (I.6) $\varepsilon_{kl}g^{km}g^{ln} = \varepsilon_{mn}\det g^{\cdot\cdot} = \pm\varepsilon_{mn}\mathfrak{g}^{-1}$ und $\varepsilon_{mr}\varepsilon_{ms} = \delta_{rs}$.

Nach Poincaré-Lemma (A.97) ist (E.57) ist genau dann integrabel, wenn

$$(\varepsilon_{km}\partial_l - \varepsilon_{lm}\partial_k)\sqrt{\mathfrak{g}}g^{mn}\partial_n v \tag{E.58}$$

verschwindet. Da dieser Ausdruck in k und l antisymmetrisch ist und k und l nur zwei Werte annehmen können, ist er proportional zu ε_{kl} (B.71), $\varepsilon_{km}\partial_l - \varepsilon_{lm}\partial_k = \varepsilon_{kl}\partial_m$. Demnach ist (E.57) integrabel, wenn v der Laplacegleichung oder Wellengleichung

$$\partial_m\big(\sqrt{\mathfrak{g}}g^{mn}\partial_n v\big) = 0 \tag{E.59}$$

genügt. Die Laplacegleichung hat bekanntermaßen [67] in einer genügend kleinen Umgebung jedes Punktes Lösungen mit nichtverschwindendem Gradienten, ebenso hat die Wellengleichung Lösungen mit zeitartigem Gradienten.

[1] Die induzierte Metrik der offenen String ist am Rand nicht invertierbar.
[2] Das untere Vorzeichen ist für den Fall $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} < 0$ zu nehmen.

Da jede zweidimensionale Metrik konform flach ist, können wir uns bei der Untersuchung konformer Transformationen in der Umgebung eines Punktes ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf konforme Transformationen der Metrik η_{mn} beschränken. Dort lautet die konforme Killinggleichung (E.27) für $\xi_n = \eta_{nk}\xi^k$

$$\partial_m\xi_n + \partial_n\xi_m - 2\epsilon\,\eta_{mn} = 0\ . \tag{E.60}$$

Multiplizieren wir mit η^{mn}, so ergibt sich wegen $d = \eta^{mn}\eta_{nm} = 2$

$$\epsilon = \frac{1}{2}\partial_k\xi^k\ , \tag{E.61}$$

und die konforme Killinggleichung des zweidimensionalen flachen Raums lautet

$$\partial_m\xi_n + \partial_n\xi_m - \partial_k\xi^k\eta_{mn} = 0\ , \tag{E.62}$$

$$\partial_1\xi_2 + \partial_2\xi_1 = 0\ , \qquad \partial_1\xi_1 - \eta_{11}\eta_{22}\,\partial_2\xi_2 = 0\ . \tag{E.63}$$

Für $\det\eta = \eta_{11}\eta_{22} = -1$ führt dies auf

$$(\partial_1 - \partial_2)(\xi_1 - \xi_2) = 0\ , \quad (\partial_1 + \partial_2)(\xi_1 + \xi_2) = 0 \tag{E.64}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\xi_1 = f(x^1 - x^2) + g(x^1 + x^2)\ , \quad \xi_2 = f(x^1 - x^2) - g(x^1 + x^2)\ , \tag{E.65}$$

$$\xi = \xi^m\,\partial_m = f(x^1 - x^2)\,(\partial_1 - \partial_2) + g(x^1 + x^2)\,(\partial_1 + \partial_2) \tag{E.66}$$

mit beliebigen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Die konforme Killinggleichung hat für $d = 2$ unendlich viele, linear unabhängige Lösungen. Zu den konformen Killingfeldern gehören die endlichen Transformationen

$$T_{F,G} : (x^1 - x^2, x^1 + x^2) \mapsto (F(x^1 - x^2), G(x^1 + x^2)) \tag{E.67}$$

mit Funktionen F und G. Sie sind genau dann invertierbare Transformationen von $\mathbb{R}^{1,1}$, wenn sie strikt monoton sind und $\mathbb{R}$ invertierbar auf sich abbilden.

Durch die konforme Abbildung $T_{F,G}$ mit $F(x) = G(x) = (2/\pi)\arctan(x)$ wird der zweidimensionale Minkowskiraum $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,1}$ invertierbar auf das Penrose-Diagramm

$$\mathcal{N} = \{(x^1, x^2) : -1 < (x^1 - x^2) < 1,\ -1 < (x^1 + x^2) < 1\} \tag{E.68}$$

abgebildet, in dem Lichtstrahlen wie im flachen Raum verlaufen.

Für $\eta_{11}\eta_{22} = +1$ sind die Gleichungen (E.63) die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für Real- und Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion

$$f(z) = \xi_1(x^1, x^2) + \mathrm{i}\,\xi_2(x^1, x^2)\ , \quad z = x^1 + \mathrm{i}\,x^2\ , \quad \partial_{\bar z}f(z) = 0\ . \tag{E.69}$$

Zu jeder komplex differenzierbaren Funktion $f(z)$ gehört ein konformes Killingfeld.

Schreiben wir Funktionen von x^1 und x^2 als Funktionen $g(z,\overline{z})$, so wirkt wegen $\partial_1 g(z,\overline{z}) = (\partial_z + \partial_{\overline{z}})g$ und $\partial_2 g(z,\overline{z}) = \mathrm{i}\,(\partial_z - \partial_{\overline{z}})g$ das konforme Killingfeld $\xi_1\,\partial_1 + \xi_2\,\partial_2$ als Differentialoperator

$$\xi = \xi^m \partial_m = f(z)\,\partial_z + \overline{f}(\overline{z})\,\partial_{\overline{z}}\ . \tag{E.70}$$

Als Basis für Vektorfelder mit polynomialen Koeffizientenfunktionen kann man zum Beispiel die Vektorfelder

$$L_n = -z^{n+1}\partial_z\ ,\quad \overline{L}_n = -\overline{z}^{n+1}\partial_{\overline{z}}\ ,\quad n = -1,0,1,2,\dots \tag{E.71}$$

mit zueinander konjugiert komplexen Koeffizienten wählen. Sie erfüllen die Witt-Algebra

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}\ ,\quad [\overline{L}_m, \overline{L}_n] = (m-n)\overline{L}_{m+n}\ ,\quad [L_n, \overline{L}_m] = 0\ . \tag{E.72}$$

Insbesondere spannen die Vektorfelder $\frac{\mathrm{i}}{2}(-L_{-1}+L_1+\overline{L}_{-1}-\overline{L}_1)$, $\frac{1}{2}(L_{-1}+L_1+\overline{L}_{-1}+\overline{L}_1)$ und $\mathrm{i}(L_0-\overline{L}_0)$ die dreidimensionale, reelle Liealgebra (D.19) der Drehungen SO(3) auf. Davon verschwindet $\mathrm{i}(L_0-\overline{L}_0)$ bei $z=0$ und erzeugt die Stabilitätsgruppe SO(2).

Es können nicht zu allen diesen konformen Killingfeldern endliche, konforme Transformationen, also holomorphe Selbstabbildungen mit nirgends verschwindender Ableitung, gehören. Wenn die zur Drehgruppe SO(3) gehörigen Vektorfelder zu endlichen Transformationen gehören, so ist der Orbit $S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$ (B.24) die Mannigfaltigkeit, auf die sie wirken. Auf $S^2 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ sind konforme Killingfelder von der Form $f(z)\partial_z + \overline{f}(\overline{z})\partial_{\overline{z}}$ mit holomorphen Koeffizientenfunktionen, für die zudem $z^{-2}f(z)\to 0$ für $z\to\infty$ gilt, damit sie als Vektorfeld im Koordinatensystem $z' = 1/z$ bei $z'=0$ wohldefiniert sind. Dies sind reelle Linearkombinationen von $L_{-1}+\overline{L}_{-1}$, $L_0+\overline{L}_0$, $L_1+\overline{L}_1$, $\mathrm{i}(L_{-1}-\overline{L}_{-1})$, $\mathrm{i}(L_0-\overline{L}_0)$ und $\mathrm{i}(L_1-\overline{L}_{-1})$, die die Liealgebra von SO(1,3) aufspannen. Sie erzeugen die konforme Gruppe von S^2, die aus den Möbiustransformationen (D.81) der komplexen Zahlenkugel $S^2 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ besteht.

E.4 Konforme Killinggleichung

Wir untersuchen, welche Räume und Metriken in mehr als zwei Dimensionen eine maximale Zahl von konformen Killingfeldern zulassen. Schreiben wir die Lieableitung der Metrik mit der Levi-Civita-Konnektion als symmetrisierte, kovariante Ableitung von ξ_m (C.109), so lautet mit den Bezeichnungen

$$\omega_{kl} = \frac{1}{2}(D_k\xi_l - D_l\xi_k)\ ,\quad \omega_{kl} = -\omega_{lk}\ ,\quad \epsilon = \frac{1}{d}D_r\xi^r\ , \tag{E.73}$$

die konforme Killinggleichung (E.27)

$$D_k\xi_n = \omega_{kn} + \epsilon g_{kn}\ . \tag{E.74}$$

Notwendigerweise müssen beide Seiten bei erneutem Ableiten und Antisymmetrisieren der Ableitungsindizes übereinstimmen

$$-R_{kln}{}^m\xi_m \overset{C.54}{=} [D_k, D_l]\xi_n = D_k\omega_{ln} - D_l\omega_{kn} + g_{ln}D_k\epsilon - g_{kn}D_l\epsilon\ . \tag{E.75}$$

Diese Gleichung legt die Ableitung von ω_{mn} als Funktion von ξ und der Ableitung von ϵ, $b_k = D_k\epsilon$, fest. Denn die zyklische Summe $\sum\!\!\!\!\!\!\bigcirc_{kln} R_{kln}{}^m$ verschwindet wegen der ersten Bianchi-Identität (C.110). Zudem verschwindet wegen $g_{mn} = g_{nm}$ die zyklische Summe $\sum\!\!\!\!\!\!\bigcirc_{kln}(g_{ln}D_k\epsilon - g_{kn}D_l\epsilon)$, es ist also $\sum\!\!\!\!\!\!\bigcirc_{kln} D_k\omega_{ln} = 0$ oder $D_k\omega_{ln} - D_l\omega_{kn} = -D_n\omega_{kl}$

$$D_k\omega_{mn} = R_{mnkl}\xi^l - g_{km}b_n + g_{kn}b_m\ , \tag{E.76}$$

$$D_k\epsilon = b_k\ . \tag{E.77}$$

Auch hier ist notwendig, daß bei erneutem Differenzieren und Antisymmetrisieren in den Ableitungsindizes beide Seiten übereinstimmen

$$\begin{aligned} &-R_{klm}{}^r\omega_{rn} - R_{kln}{}^r\omega_{mr} \overset{C.54}{=} [D_k, D_l]\omega_{mn} \overset{E.76}{=} \\ &D_k(R_{mnlr}\xi^r) - D_l(R_{mnkr}\xi^r) - g_{lm}D_kb_n + g_{ln}D_kb_m + g_{km}D_lb_n - g_{kn}D_lb_m\ . \end{aligned} \tag{E.78}$$

Die Gleichung $D_k\epsilon = b_k$ erfordert $D_kb_l - D_lb_k = 0$, also ist D_kb_l symmetrisch unter Vertauschung der Indizes.

Kontrahieren wir (E.78) mit g^{lm} und g^{kn}, so folgt

$$g^{kl}D_kb_l = \frac{1}{d-1}D^s(R_{sr}\xi^r)\ . \tag{E.79}$$

In die einmal mit g^{lm} kontrahierte Gleichung (E.78) eingesetzt, ergibt sich für $d>2$ die kovariante Ableitung von b_n

$$D_kb_n = \frac{1}{d-2}\big(D_k(R_{nr}\xi^r) - D^s(R_{snkr}\xi^r) - R_k{}^r\omega_{rn} - R_{rkns}\omega^{rs} - \frac{1}{d-1}g_{kn}D^s(R_{sr}\xi^r)\big) \tag{E.80}$$

Werten wir die kovarianten Ableitungen mit (E.74) aus und berücksichtigen wir (E.23) sowie $(R_{rnks}+R_{rkns})\omega^{rs} = 0$ wegen der Antisymmetrie von ω^{rs} und den Permutationssymmetrien von R_{rkns}, so ist D_kb_n symmetrisch in k und n und mit der Notation $r_{kn} = R_{kn} - \frac{1}{2(d-1)}g_{kn}R$ (E.20) von der Form

$$D_kb_n = \frac{1}{d-2}\big(\xi^rD_rr_{kn} + 2\epsilon\, r_{kn} + r_{nr}\omega_k{}^r + r_{kr}\omega_n{}^r\big)\ . \tag{E.81}$$

Damit ist (E.78) noch nicht erfüllt. Setzen wir dort (E.81) ein, so erhalten wir ein lineares, algebraisches Gleichungssystem für ξ_k, ϵ und ω_{kl}. Dabei sind die Koeffizienten bei ϵ bis auf einen Faktor -2 die Komponenten des Weyltensors W_{mnkl} (E.11), des spurfreien Teils des Riemanntensors. Nur wenn das lineare Gleichungssystem den Rang 0 hat, wenn also alle Koeffizienten bei ξ_k, ϵ und ω_{kl} verschwinden, hat der Raum die maximal mögliche Zahl von konformen Killingfeldern. Insbesondere verschwindet also bei einem maximal konform symmetrischen Raum der Weyltensor. Dann verschwinden auch die Koeffizienten bei ξ_k und bei ω_{kl} und (E.78) ist erfüllt.

Die Gleichung (E.81) erfordert, daß nach weiterem Ableiten und Antisymmetrisieren in den Ableitungsindizes beide Seiten übereinstimmen. Wenn wir in

$$-R_{kln}{}^rb_r = [D_k, D_l]b_n = D_k(D_lb_n) - D_l(D_kb_n) \tag{E.82}$$

auf der rechten Seite (E.81, E.74, E.76, E.77) einsetzen, erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für ξ_k, ϵ, ω_{kl} und b_k. Beispielsweise tritt ϵ mit den Koeffizienten $\frac{3d}{d-2}R_{kl\,n}$ auf, wobei $R_{kl\,n}$ der Cottontensor (E.18) ist. Nur wenn der Weyltensor W_{mnkl} und der Cottontensor verschwinden, ist der Raum maximal konform symmetrisch.

Auch die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems bei ξ_k, ω_{kl} und b_k verschwinden, wenn der Weyltensor und der Cottontensor verschwinden.

Jeder maximal konform symmetrische Raum ist also konform flach. Umgekehrt erfüllt jeder konform flache Raum die notwendigen Bedingungen für die Existenz einer maximalen Anzahl konformer Killingfelder. Der Satz von Frobenius besagt, daß dann das Gleichungssystem (E.74, E.76, E.77, E.81) zumindest in einer genügend kleinen Umgebung eine Lösung hat, die durch die an einem Punkt frei wählbaren Werte von $\xi_m, \omega_{mn}, \epsilon, b_m$ festgelegt ist. Dies sind $(d+2)(d+1)/2$ Werte.

Auf welchen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ die konformen Killingfelder und die dazu gehörigen konformen Transformationen mit nullstellenfreiem konformen Faktor existieren, zeigt die Untersuchung der Liealgebra der konformen Killingfelder.

Liealgebra der konformen Killingfelder

Die Menge der konformen Killingfelder ist eine Liealgebra: sind $\xi_1^m\partial_m$ und $\xi_2^m\partial_m$ zwei konforme Killingfelder, so hat ihr Kommutator $[{\xi_2}^m\partial_m, {\xi_1}^n\partial_n] = {\xi_3}^n\partial_n$ wegen (E.74) die Komponenten

$$ {\xi_3}^n = {\xi_2}^m D_m {\xi_1}^n - {\xi_1}^m D_m {\xi_2}^n = {\xi_2}^m {\omega_{1\,m}}^n - {\xi_1}^m {\omega_{2\,m}}^n + \xi_2^n\epsilon_1 - \xi_1^n\epsilon_2\ . \tag{E.83} $$

Insbesondere ist $D_m\xi_{3\,n}$ wegen (E.76, E.77) von der Form $\omega_{3\,mn} + \epsilon_3 g_{mn}$ und ${\xi_3}^m\partial_m$ ist folglich ein konformes Killingfeld

$$ \begin{aligned} \omega_{3\,mn} &= {\omega_{2\,m}}^l\omega_{1\,ln} - {\omega_{1\,m}}^l\omega_{2\,ln} + {\xi_2}^k{\xi_1}^l(R_{knml} - R_{kmnl}) - \\ &\quad - \xi_{2\,m}b_{1\,n} + \xi_{1\,m}b_{2\,n} + \xi_{2\,n}b_{1\,m} - \xi_{1\,n}b_{2\,m}\ , \\ \epsilon_3 &= \xi_2\cdot b_1 - \xi_1\cdot b_2\ . \end{aligned} \tag{E.84} $$

Der maximal konform symmetrische Raum ist konform flach. Wir können daher die maximale konforme Liealgebra im flachen Raum ablesen. Dort vereinfachen sich die Gleichungen (E.74, E.76, E.77, E.81)

$$ \begin{aligned} \partial_m\xi_n &= \omega_{mn} + \epsilon\eta_{mn}\ , & \partial_k\omega_{mn} &= -\eta_{km}b_n + \eta_{kn}b_m\ , \\ \partial_m\epsilon &= b_m\ , & \partial_m b_n &= 0 \end{aligned} \tag{E.85} $$

und können mit Konstanten b_m, a, $\Omega_{mn} = -\Omega_{nm}$ und t^m integriert werden

$$ \begin{aligned} b_m(x) &= b_m\ , \\ \epsilon(x) &= x\cdot b + a\ , \\ \omega_{mn}(x) &= -x_m b_n + x_n b_m + \Omega_{mn}\ , \\ \xi^m(x) &= t^m + {\Omega^m}_l\, x^l + a x^m - 2b\cdot x\, x^m + b^m\, x\cdot x\ . \end{aligned} \tag{E.86} $$

Das konforme Killingfeld $\xi^m(x)$ setzt sich zusammen aus infinitesimalen Translationen mit d Parametern t^m, Lorentztransformationen mit $\frac{d(d-1)}{2}$ Parametern $\Omega_{mn} = -\Omega_{nm}$, einer Dilatation mit einem Parameter a und aus eigentlich konformen Transformationen mit d Parametern b^m. Folglich bilden die konformen Killingfelder des flachen Raumes einen Vektorraum der Dimension $\frac{(d+2)(d+1)}{2}$, genauso wie die Liealgebra infinitesimaler Lorentztransformationen in $d+2$ Dimensionen.

Diese Übereinstimmung der Dimension ist nicht zufällig. Die konformen Killingfelder $\xi = \xi^m\partial_m$ in $\mathbb{R}^{p,q}$ bilden die Liealgebra der Lorentzgruppe $\mathrm{SO}(p+1, q+1)$ in einer Raumzeit mit einer zeitartigen und einer raumartigen Dimension mehr.

Denn jedes ξ ist eine Linearkombination

$$ \xi = \frac{1}{2}\Omega^{ab}l_{ab} = \Omega^{0s}l_{0s} + \frac{1}{2}\Omega^{rs}l_{rs} + \Omega^{sN}l_{sN} + \Omega^{0N}l_{0N}\ , \tag{E.87} $$

wobei die Indizes a und b die Werte von 0 bis $N = p+q+1$ und die Indizes r und s die Werte 1 bis $p+q$ durchlaufen, von Basisvektorfeldern $l_{ab} = -l_{ba}$

$$ \begin{aligned} l_{rs} &= x_r\partial_s - x_s\partial_r\ , & l_{0s} &= \frac{1}{2}(x^2-1)\partial_s - x_s x^r\partial_r\ , \\ l_{Ns} &= \frac{1}{2}(x^2+1)\partial_s - x_s x^r\partial_r\ , & l_{0N} &= -x^r\partial_r\ . \end{aligned} \tag{E.88} $$

Man rechnet einfach nach, daß diese Vektorfelder der Liealgebra infinitesimaler Lorentztransformationen (B.17) mit $\eta_{00} = 1$ und $\eta_{NN} = -1$ genügen.

Man kann die Liealgebra auch durch weitere Differentation, $b_{3\,m} = \partial_m\epsilon_3$, aus (E.84) im flachen Raum $R_{klmn} = 0$ mit Hilfe von (E.85) bestimmen

$$ \begin{aligned} {\xi_3}^n &= {\xi_2}^m{\omega_{1\,m}}^n - {\xi_1}^m{\omega_{2\,m}}^n + \xi_2^n\epsilon_1 - \xi_1^n\epsilon_2\ , \\ \omega_{3\,mn} &= {\omega_{2\,m}}^l\omega_{1\,ln} - {\omega_{1\,m}}^l\omega_{2\,ln} - \xi_{2\,m}b_{1\,n} + \xi_{1\,m}b_{2\,n} + \xi_{2\,n}b_{1\,m} - \xi_{1\,n}b_{2\,m}\ , \\ \epsilon_3 &= \xi_2\cdot b_1 - \xi_1\cdot b_2\ , \\ {b_3}^n &= {b_2}^m{\omega_{1\,m}}^n - {b_1}^m{\omega_{2\,m}}^n - {b_2}^n\epsilon_1 + {b_1}^n\epsilon_2\ . \end{aligned} \tag{E.89} $$

Dies ist mit den Definitionen $\omega_{0m} = -\omega_{m0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_m + b_m)$, $\omega_{mN} = -\omega_{Nm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_m - b_m)$ und $\omega_{0N} = -\omega_{N0} = -\epsilon$ die Liealgebra (B.14) von $\mathrm{SO}(p+1, q+1)$

$$ \omega_{3\,ab} = {\omega_{2\,a}}^c\omega_{1\,cb} - {\omega_{1\,a}}^c\omega_{2\,cb}\ , \tag{E.90} $$

wobei a, b und c die Werte $0, 1, \dots N = p+q+1$ durchlaufen und $\eta^{00} = -\eta^{NN} = 1$ ist.

Die Stabilitätsgruppe eines Punktes p, genauer ihr mit der Identität zusammenhängender Teil, wird von den konformen Killingfeldern erzeugt, die bei p verschwinden $\xi^m_{|p} = 0$. Dort liest man die zugehörige Unterliealgebra von (E.89) ab

$$ \begin{aligned} \omega_{3\,mn\,|p} &= {\omega_{2\,m}}^l\omega_{1\,ln} - {\omega_{1\,m}}^l\omega_{2\,ln}\ , \\ \epsilon_{3\,|p} &= 0\ , \\ {b_3}^n{}_{|p} &= {b_2}^m{\omega_{1\,m}}^n - {b_1}^m{\omega_{2\,m}}^n - {b_2}^n\epsilon_1 + {b_1}^n\epsilon_2\ . \end{aligned} \tag{E.91} $$

Bis auf die Umbenennung $b^n \to \xi^n$ und $\epsilon \to -\epsilon$ ist dies dieselbe Algebra, wie sie ohne eigentliche konforme Transformationen für $b^n = 0$ zu Translationen t^n, Lorentztransformationen ω_{mn} und Dilatationen ϵ gehört. Der zusammenhängende Teil der Fixpunktgruppe ist daher der Gruppe $\mathrm{W}(p,q)$ (E.98) ähnlich, die von Translationen, Lorentztransformationen $\mathrm{SO}(p,q)$ und Dilatationen erzeugt wird.

Die maximale Gruppe konformer Transformationen wirkt daher auf einer Mannigfaltigkeit, die ein Quotient der Überlagerung von $\mathrm{SO}(p+1,q+1)/\mathrm{W}(p,q)$ ist.

E.5 Endliche Transformationen

Zu infinitesimalen Translationen $\xi^m = t^m$ gehören endliche Translationen, die durch die Lösungen $x^m(\alpha) = x^m(0) + \alpha t^m$ des Differentialgleichungssystems

$$\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\alpha} = t^m \tag{E.92}$$

gegeben sind (A.146). Es reicht, die Transformation für $\alpha = 1$ zu untersuchen, da jeder andere Wert von α in ξ absorbiert werden kann. Mit der Notation $x(1) = x'$ und $x(0) = x$ lautet die endliche Translation

$$x'^m = x^m + t^m \ . \tag{E.93}$$

Endliche Dilatationen gehören zum Differentialgleichungssystem

$$\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\alpha} = a x^m \tag{E.94}$$

mit der Lösung $x(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a} x(0)$ und lauten in der obigen Notation

$$x'^m = \mathrm{e}^a x^m \ . \tag{E.95}$$

Endliche Lorentztransformationen, die zu $\xi^m = \Omega^m{}_n x^n$ gehören, sind lineare Transformationen $x' = \Lambda x$ mit Matrizen Λ, die das Längenquadrat in $\mathbb{R}^{p,q}$ invariant lassen. Die zur Lorentzgruppe gehörigen Matrizen Λ erfüllen die Gleichungen (B.54)

$$\Lambda^m{}_k \Lambda^n{}_l \, \eta_{mn} = \eta_{kl} \ , \tag{E.96}$$

die besagen, daß in den Spalten von Λ die Komponenten von Vektoren stehen, die normiert und zueinander orthogonal sind, wobei ihre Skalarprodukte mit η berechnet werden.

Die aus Translationen und Lorentztransformationen $\mathrm{SO}(p,q)$ bestehenden Transformationen

$$T_{\Lambda,t} : x^m \mapsto \Lambda^m{}_n x^n + t^m \tag{E.97}$$

heißen Poincaré-Transformationen und bilden die Poincaré-Gruppe, die inhomogene, spezielle, orthogonale Gruppe $\mathrm{ISO}(p,q)$. Die von Poincaré-Transformationen und Dilatationen erzeugten Weyltransformationen

$$T_{(\Lambda,\mathrm{e}^a,b)} : x \mapsto \mathrm{e}^a \Lambda x + b \tag{E.98}$$

bilden die Gruppe $\mathrm{W}(p,q)$.

Für $d = 2$ lassen sich die von $\xi^m = \Omega^m{}_n x^n$ erzeugten Lorentztransformationen $\mathrm{SO}(1,1)$ und $\mathrm{SO}(2)$ leicht angeben. Die Matrix Ω ist η mal einer antisymmetrischen Matrix (B.13) und im ersten Fall durch Ω_{Lorentz} und im zweiten Fall durch Ω_{Drehung} gegeben

$$\Omega_{\text{Lorentz}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \Omega_{\text{Drehung}} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{E.99}$$

Das zu $\mathrm{SO}(1,1)$ gehörige Differentialgleichungssystem $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = \Omega x$ wird durch

$$\begin{pmatrix} x^0(\alpha) \\ x^1(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha\lambda) & \sinh(\alpha\lambda) \\ \sinh(\alpha\lambda) & \cosh(\alpha\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0(0) \\ x^1(0) \end{pmatrix} \tag{E.100}$$

gelöst[3]. Die Lorentztransformation ist

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & \sinh\lambda \\ \sinh\lambda & \cosh\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \ . \tag{E.101}$$

Diese Transformation bildet die Weltlinie $\Gamma : s \mapsto x^m(s) = \delta^m_0 \, s + x^m(0)$ eines ruhenden Teilchens auf die Weltlinie eines Teilchens ab, das sich mit Geschwindigkeit $\frac{v}{c} = \tanh\lambda$ in x^1-Richtung bewegt. Drückt man λ durch $\frac{v}{c}$ aus, so lautet die Transformation

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \ . \tag{E.102}$$

Die Lösungen des zu Drehungen gehörigen Differentialgleichungssystems sind

$$\begin{pmatrix} x^1(\alpha) \\ x^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha\theta) & -\sin(\alpha\theta) \\ \sin(\alpha\theta) & \cos(\alpha\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1(0) \\ x^2(0) \end{pmatrix} \ , \tag{E.103}$$

und die endliche Drehung um den Winkel θ ist

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \ . \tag{E.104}$$

Zu $\xi^m = -2b \cdot x \, x^m + b^m \, x \cdot x$, den infinitesimalen, eigentlich konformen Transformationen, gehört das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\alpha} = (\delta^m{}_n x^2 - 2x^m x_n) b^n \ . \tag{E.105}$$

Wir lösen durch Multiplikation mit der inversen Matrix nach b^m auf

$$\Big(\frac{\delta^m{}_n x^2 - 2x^m x_n}{x^4}\Big) \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}\alpha} = b^m \tag{E.106}$$

[3]Der Indexbereich der Koordinaten ist wie üblich zu $x^0 = ct$ und $x^1 = x$ verschoben.

und bemerken, daß die linke Seite die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{x^m}{x^2}$ ist. Daher können beide Seiten leicht über α integriert werden

$$\frac{x^m(\alpha)}{x^2(\alpha)} - \frac{x^m(0)}{x^2(0)} = \alpha b^m \ . \tag{E.107}$$

Eigentlich konforme Transformationen sind Translationen der am Einheitshyperboloid invertierten Punkte $\frac{x^m}{x^2}$.

Schreiben wir x'^m für $x^m(1)$ und x^m für $x^m(0)$ und lösen wir nach $\frac{x'^m}{x'^2}$ auf

$$\frac{x'^m}{x'^2} = \frac{x^m + b^m x^2}{x^2} \tag{E.108}$$

und bestimmen wir daraus x'^2,

$$x'^2 = \frac{x^2}{(1 + 2b\cdot x + b^2x^2)} \ , \tag{E.109}$$

so erhalten wir

$$x'^m = \frac{x^m + b^m x^2}{1 + 2b\cdot x + b^2x^2} \ . \tag{E.110}$$

Die eigentlich konforme Transformation (E.110) wird für $b^2 \neq 0$ genau dann singulär, wenn x auf dem Lichtkegel mit Ursprung bei $y = -\frac{b}{b^2}$ liegt, denn es gilt $(x-y)^2 = (x + b/b^2)^2 = 1/b^2(b^2x^2 + 2b\cdot x + 1)$. Für $b^2 = 0$ wird die Transformation auf der Ebene $b\cdot x = -1/2$ singulär.

E.6 Maximal konforme Mannigfaltigkeit

Da die Transformationen (E.110) singulär sind, sind sie keine invertierbaren Selbstabbildungen des Raumes $\mathbb{R}^{p,q}$. Vielmehr wirkt die maximale konforme Gruppe, wie die Untersuchung ihrer Liealgebra gezeigt hat, auf einem Quotienten von $\mathcal{M}$, der Überlagerung von $\mathrm{SO}(p+1,q+1)/\mathrm{W}(p,q)$.

Um diese Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ zu identifizieren, betrachten wir Lichtstrahlen u in $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$, $u^2 = 0$, $u \neq 0$,

$$\sum_{i=0}^{p}(u^i)^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q+1}(u^i)^2 = 0 \ . \tag{E.111}$$

Die Zerlegung von $u = \lambda e$ in seine Größe $\lambda = \sqrt{\sum_{i=0}^{p}(u^i)^2} > 0$ und seine Richtung e

$$\sum_{i=0}^{p}(e^i)^2 = 1 = \sum_{i=p+1}^{p+q+1}(e^i)^2 \ , \tag{E.112}$$

zeigt, daß wir die Richtung eines Lichtstrahls als Punkt der Mannigfaltigkeit $S^p \times S^q$ auffassen können.

Lorentztransformationen bilden lichtartige Vektoren auf lichtartige Vektoren ab, und da diese Transformationen linear sind $\Lambda(\lambda e) = \lambda\Lambda e$, bilden sie die Richtungen lichtartiger Vektoren unabhängig von der Größe der Vektoren aufeinander ab

$$\Lambda(\lambda e) = \lambda'(\lambda, e)e'(e) \ , \quad e'(e) = \frac{\lambda}{\lambda'(\lambda, e)}\Lambda e = \frac{1}{\lambda'(1,e)}\Lambda e \ . \tag{E.113}$$

Diese Selbstabbildungen von $S^p \times S^q$ nennen wir Aberration.

Zur Bestimmung der Stabilitätsgruppe einer Richtung betrachten wir den Lichtstrahl $u^a = \delta^a{}_0 + \delta^a{}_N \in \mathbb{R}^{p+1,q+1}$, $a = 0,1,\dots,N = p+q+1$, und seine Änderung unter infinitesimalen Lorentztransformationen $\delta u^a = \Omega^a{}_b u^b$, $\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$. Die Richtung des Vektors u^a bleibt von den Lorentztransformationen ungeändert, für die $\delta u^a = \epsilon u^a$ ein Vielfaches von u^a ist, für die also $\Omega^a{}_0 + \Omega^a{}_N = \epsilon(\delta^a{}_0 + \delta^a{}_N)$ gilt. Die Einschränkung besagt $\Omega^0{}_N = \epsilon = \Omega^N{}_0$ für $a = 0$ und $a = N$ sowie $b^m = \Omega^m{}_0 = -\Omega^m{}_N$ für $a = m = 1,\dots,p+q$. Dies definiert eine Unterliealgebra von (E.90)

$$\begin{aligned} \Omega_{3\,mn} &= \Omega_{2\,m}{}^l\Omega_{1\,ln} - \Omega_{1\,m}{}^l\Omega_{2\,ln} \ , \\ b_{3\,m} &= \Omega_{2\,m}{}^l b_{1\,l} - \Omega_{1\,m}{}^l b_{2\,l} + \epsilon_2 b_{1\,m} - \epsilon_1 b_{2\,m} \ , \\ \epsilon_3 &= 0 \ , \end{aligned} \tag{E.114}$$

nämlich die Liealgebra (E.91) der Gruppe $\mathrm{W}(p,q)$, die von Translationen b^m Lorentztransformationen $\Omega_{mn} = -\Omega_{nm}$ und Dilatationen ϵ erzeugt wird.[4] Die Richtung eines lichtartigen Vektors $u^a \in \mathbb{R}^{p+1,q+1}$ wird von solchen Lorentztransformationen invariant gelassen, die der Gruppe $\mathrm{W}(p,q)$ in $1+1$ weniger Dimensionen ähnlich ist.

Damit ist die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, die Überlagerung des Orbits $\mathrm{SO}(p+1,q+1)/\mathrm{W}(p,q)$ identifiziert, denn sie ist eindeutig und stimmt daher für $p > 1$ und $q > 1$ mit $S^p \times S^q$ überein, für $p = 1$ oder $q = 1$ ist $\mathbb{R}$ statt S^1 zu lesen. Die maximale, konforme Gruppe $\mathrm{SO}(p+1,q+1)$ wirkt auf $S^p \times S^q$ durch Aberration.

Die Metrik auf $\mathcal{M}$ ist bis auf einen konformen Faktor festgelegt. Dies ergibt sich daraus, daß die metrische Dichte $\Gamma^{mn} = \mathfrak{g}^{\frac{1}{d}} g^{mn}$ als Tensordichte vom Gewicht $\frac{2}{d}$ transformiert

$$\Gamma'^{mn}(x') = \left|\det\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^{\frac{2}{d}} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k}\frac{\partial x'^n}{\partial x^l}\,\Gamma^{kl}(x(x')) \tag{E.115}$$

und bei konformen Transformationen (E.25) unverändert bleibt $\Gamma'^{mn}(x') = \Gamma^{mn}(x')$. Da sie durch konforme Transformationen von einem Punkt x an jeden anderen Punkt $x'(x)$ von $\mathcal{M}$ verschleppt wird, liegt sie überall fest. Aus ihrem Inversen $\Gamma_{mn} = \mathfrak{g}^{-\frac{1}{d}} g_{mn}$ läßt sich die Metrik

$$g_{mn} = \Omega^2\Gamma_{mn} \tag{E.116}$$

bis auf einen konformen Faktor rekonstruieren.

[4] Auf gleiche Art zeigt man durch Untersuchung der Unteralgebra $\delta u^a = 0$, daß die Stabilitätsgruppe des lichtartigen Vektors $u^a \in \mathbb{R}^{p+1,q+1}$ der Poincaré-Gruppe $\mathrm{ISO}(p,q)$ ähnlich ist. Die Stabilitätsgruppe des zeitartigen Vektor $u^a = \delta^a{}_0$ wird von den Transformationen mit $\Omega_{a0} = -\Omega_{0a} = 0$ erzeugt und ist $\mathrm{SO}(p,q+1)$. Entsprechend hat der raumartige Vektor $u^a = \delta^a{}_N$ die Stabilitätsgruppe $\mathrm{SO}(p+1,q)$.

E.7 Konforme Transformationen von $\mathbb{R}\times S^3$

Betrachten wir die Überlagerung $\mathcal{M}=\mathbb{R}\times S^3$ der Untermannigfaltigkeit $S^1\times S^3$ von $\mathbb{R}^{2,4}$. Diese Überlagerung ist in Kugelkoordinaten durch die Projektion

$$\begin{aligned}(t,\alpha,\theta,\varphi)\mapsto&(x^0,x^1,x^2,x^3,x^4,x^5)=\\&(\cos t,\sin t,\cos\alpha,\sin\alpha\cos\theta,\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi,\sin\alpha\sin\theta\sin\varphi)\end{aligned}\tag{E.117}$$

gegeben. Die Winkel α und θ variieren zwischen 0 und π, φ zwischen 0 und 2π, die Koordinate t durchläuft alle reellen Zahlen. Auf $\mathbb{R}\times S^3$ wird von $\mathbb{R}^{2,4}$ die Metrik

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)&=\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}s}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right)^2\\&=\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right)^2-\sin^2\alpha\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2-\sin^2\alpha\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2\end{aligned}\tag{E.118}$$

induziert. Die in $\mathrm{SO}(2,4)$ enthaltenen $\mathrm{SO}(2)$-Drehungen wirken als Isometrien auf den Kreis $(x^0,x^1)=(\cos t,\sin t)$ durch Translation der Zeit $t\mapsto t{+}a$. Die in der Überlagerung von $\mathrm{SO}(2,4)$ enthaltenen Überlagerungen von Drehungen $\mathrm{SO}(2)$ wirken ebenso, nur daß nicht die Punkte mit Koordinate t und mit Koordinate $t+2\pi$ identifiziert werden. Die in $\mathrm{SO}(2,4)$ enthaltenen Drehungen $\mathrm{SO}(4)$ drehen S^3 und sind ebenfalls Isometrien. Die Isometrien von $\mathbb{R}\times S^3$ bilden die Produktgruppe $\mathbb{R}{\times}\mathrm{SO}(4)$.

Die Lorentztransformation auf bewegte Bezugssysteme mischt in $\mathbb{R}^{2,4}$ zeitartige Koordinaten (x^0,x^1) und räumliche Koordinaten (x^2,x^3,x^4,x^5). Zum Beispiel ändert eine infinitesimale Lorentztransformation in der 0-2-Ebene die x^0- und x^2-Koordinaten um

$$\delta x^0=x^2\,,\quad\delta x^2=x^0\ .$$

Auf Richtungen lichtartiger Vektoren angewendet wird dies eine infinitesimale Transformation auf $S^1\times S^3$, wenn wir sie um eine Streckung $\delta x^m=-ax^m$ mit $a=x^0x^2$ so ergänzen, daß δx^m senkrecht auf dem Ortsvektor in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$ steht, so daß der transformierte Punkt wieder auf $S^1\times S^3$ liegt

$$\begin{aligned}\delta x^0=x^2-ax^0\ ,\ \delta x^1=-ax^1\ ,\\\delta x^2=x^0-ax^2\ ,\ \delta x^3=-ax^3\ ,\ \delta x^4=-ax^4\ ,\ \delta x^5=-ax^5\ .\end{aligned}\tag{E.119}$$

Wir lesen aus $\delta x^0=\delta\cos t=-\sin t\,\delta t$ und $\delta x^2=\delta\cos\alpha=-\sin\alpha\,\delta\alpha$ (E.117) die infinitesimale Transformation von t und α ab

$$\delta t=-\sin t\cos\alpha\,,\ \delta\alpha=-\cos t\sin\alpha\,.\tag{E.120}$$

Die Winkel θ und φ bleiben unverändert.

Das Transformationsgesetz (E.120) zerfällt in zwei eindimensionale Transformationen

$$\delta(t\pm\alpha)=-\sin(t\pm\alpha)\ .\tag{E.121}$$

Die zu $\delta x=-\sin x$ gehörige endliche Transformation (A.146) mit Transformationsparameter σ erhalten wir aus der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma}=-\sin x\,,\quad\frac{1}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma}=\frac{\mathrm{d}\ln\tan\frac{x}{2}}{\mathrm{d}\sigma}=-1\tag{E.122}$$

mit der Lösung

$$\tan\frac{x(\sigma)}{2}=\mathrm{e}^{-\sigma}\,\tan\frac{x(0)}{2}\tag{E.123}$$

als Abbildung des Anfangswerts $x(0)$ auf $x(\sigma)$. Diese Abbildung ist uns von der Aberration (3.21) wohlvertraut. Bei $x=\pi$ liegt keine Singularität, sondern ein Fixpunkt vor, wie die äquivalente Form $\cot\frac{x(\sigma)}{2}=\mathrm{e}^{\sigma}\,\cot\frac{x(0)}{2}$ zeigt.

Unter einer drehungsfreien Lorentztransformation in der 0-2-Ebene bleiben also θ und φ unverändert, t' und α' kann man den folgenden Gleichungen entnehmen

$$\tan\frac{t'+\alpha'}{2}=\mathrm{e}^{-\sigma}\,\tan\frac{t+\alpha}{2}\,,\quad\tan\frac{t'-\alpha'}{2}=\mathrm{e}^{-\sigma}\,\tan\frac{t-\alpha}{2}\,,\tag{E.124}$$

$$\tan t'=\sqrt{1-v^2}\,\frac{\sin t}{\cos t+v\cos\alpha}\,,\quad\tan\alpha'=\sqrt{1-v^2}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+v\cos t}\ .\tag{E.125}$$

Diese Transformation ist typisch für alle konformen Transformationen von $\mathbb{R}\times S^3$, denn jede Transformation aus $\mathrm{SO}(2,4)^{\uparrow}$ wirkt bis auf eine nachfolgende Drehung auf $\mathbb{R}^{2,4}$ als drehungsfreie Lorentztransformation in zueinander senkrechten zweidimensionalen Unterräumen (D.34).

Obwohl jede Kugelfläche S^n eine Längenskala, nämlich den an der Krümmung ablesbaren Radius enthält, ist $\mathbb{R}\times S^3$ ein maximal konform symmetrischer Raum. Er hat eine größere konforme Gruppe als der Minkowskiraum $\mathbb{R}^{1,3}$, der nur die von Poincaré-Transformationen und Dilatationen erzeugten Weyltransformationen (E.98) zuläßt. Mit der de Sitter-Metrik (F.31) ist $\mathbb{R}\times S^3$ zudem maximal symmetrisch.

Konform invariante Materiewirkung

Konform invariante Langrangedichten $\mathscr{L}(\phi,\partial\phi)$ für Materiefelder ϕ auf $\mathbb{R}\times S^{d-1}$ kann man aus denjenigen Lagrangedichten $\mathscr{L}(g,\partial g,\phi,\partial\phi)$ erhalten, die unter allgemeinen Koordinatentransformationen wie eine Dichte transformieren $\delta_\xi\mathscr{L}=\partial_m(\xi^m\mathscr{L})$ und die spezieller nicht von Metrik, sondern nur von der metrischen Dichte $\Gamma^{mn}=\mathfrak{g}^{\frac{1}{d}}g^{mn}$ abhängen, wie beim Skalarfeld ϕ mit Lagrangedichte $\mathscr{L}=\frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{g}}\,g^{mn}\,\partial_m\phi\,\partial_n\phi$ in $d=2$ Dimensionen und für $d=4$ beim Vektorfeld A_m mit $\mathscr{L}=-\frac{1}{4}\sqrt{\mathfrak{g}}\,g^{kl}\,g^{mn}\,F_{km}F_{ln}$ (7.62).

Solch eine Wirkung ist unter allgemeinen Koordinatentransformationen invariant, wenn wir Γ^{mn} und ϕ transformieren. Wenn Γ^{mn} unter konformen Transformationen invariant ist und als Hintergrundfeld fest vorgegeben wird, so ist die Wirkung unter konformen Transformationen von ϕ allein invariant.

In d Dimensionen müßte ein Skalarfeld als Dichte vom Gewicht w

$$\phi'(x')=\left|\det\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^w\phi(x)\tag{E.126}$$

mit $w = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$ eingeführt werden, damit $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\Gamma^{mn} D_m\phi D_n\phi$ eine skalare Dichte vom Gewicht 1 und die quadratische Lagrangefunktion einer invarianten Wirkung ist. Allerdings erfordert für $w \neq 0$, also $d > 2$, die kovariante Ableitung einer Dichte

$$D_m\phi = \partial_m\phi + w\, a_m\phi \tag{E.127}$$

ein Eichfeld a_m mit Transformationsgesetz

$$a'_m(x') = \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} a_n(x) - \partial_m \ln\left|\det \frac{\partial x}{\partial x'}\right| . \tag{E.128}$$

Solch ein Feld kann aber auf $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ nicht als Hintergrundfeld vorgegeben werden, das invariant unter konformen Transformationen ist. Denn es muß an jedem Punkt x invariant unter der Stabilitätsgruppe H_x sein. Es ist aber kein Wert des Eichfeldes $a_m(0)$ invariant unter eigentlich konformen Transformationen.

Für $d > 2$ führt die Einstein-Hilbert-Lagrangedichte $\mathscr{L} = \sqrt{\hat{\mathfrak{g}}}(\hat{R} - 2\Lambda)$ (E.17) zu einer konform invarianten Wirkung für ein skalares Feld, das Dilaton ϕ. Die Metrik $\hat{g}_{mn}$

$$\hat{g}_{mn} = \phi^{\frac{4}{d-2}} g_{mn} \tag{E.129}$$

ist dabei zusammengesetzt aus einem konformen Faktor $\phi^{\frac{4}{d-2}}$ und einer konform symmetrischen, fest vorgegebenen Hintergrundmetrik g_{mn} (E.116). Unter infinitesimalen konformen Transformationen ist die Wirkung invariant, wenn $(\delta\phi^{\frac{4}{d-2}})g_{mn}$ die Lieableitung von $\hat{g}_{mn}$ ergibt

$$(\delta\phi^{\frac{4}{d-2}})g_{mn} = \mathcal{L}_\xi(\phi^{\frac{4}{d-2}} g_{mn}) = (\xi^m\partial_m\phi^{\frac{4}{d-2}} + \frac{2}{d} D_l\xi^l \phi^{\frac{4}{d-2}})g_{mn} . \tag{E.130}$$

Dabei haben wir die konforme Killinggleichung $\mathcal{L}_\xi g_{mn} = 2\epsilon g_{mn}$, $\epsilon = \frac{1}{d} D_l\xi^l$, (E.27) verwendet. Wir lesen die infinitesimale konforme Transformation des Dilatons ϕ ab

$$\delta\phi = \xi^m\partial_m\phi + \frac{d-2}{2d} D_l\xi^l\phi , \tag{E.131}$$

unter der die Wirkung mit Lagrangefunktion $\mathscr{L} = \sqrt{\hat{\mathfrak{g}}}(\hat{R} - 2\Lambda)$ (E.17) invariant ist.

F Einige Standardformen der Metrik

Harmonische Eichung

In der Umgebung jedes Punktes lassen sich Koordinaten finden, in denen die Metrik die Lorenzbedingung

$$\partial_m(\sqrt{\mathfrak{g}} g^{mn}) = 0 , \quad \mathfrak{g} = |\det g_{..}| \tag{F.1}$$

erfüllt. Diese Eichung heißt auch harmonische Eichung.

Ist die Bedingung noch nicht erfüllt, so betrachte man neue Koordinatenfunktionen x'^m. Für die Lorenzbedingung in diesen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned}\partial'_m(\sqrt{\mathfrak{g}'} g'^{mn}) &= \frac{\partial x^r}{\partial x'^m}\partial_r\big(\sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl}\partial_k x'^m \partial_l x'^n |\det \frac{\partial x}{\partial x'}|\big)\\ &= |\det \frac{\partial x}{\partial x'}|\sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl}\partial_k\partial_l x'^n + \frac{\partial x^r}{\partial x'^m}\partial_k\partial_r x'^m \partial_l x'^n \sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl} |\det \frac{\partial x}{\partial x'}| + \\ &\quad + \sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl}\partial_l x'^n \partial_k |\det \frac{\partial x}{\partial x'}| + \partial_k(\sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl})\partial_l x'^n |\det \frac{\partial x}{\partial x'}|\end{aligned} \tag{F.2}$$

Hierbei ist $\frac{\partial x^r}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} = \delta^r_k$ verwendet worden. Der zweite und der dritte Term heben sich auf, denn die Ableitung der Determinante ergibt (I.11)

$$\partial_k |\det \frac{\partial x}{\partial x'}| = |\det \frac{\partial x}{\partial x'}| \frac{\partial x'^s}{\partial x^r}\partial_k \frac{\partial x^r}{\partial x'^s} = -|\det \frac{\partial x}{\partial x'}| \frac{\partial x^r}{\partial x'^s}\partial_k \frac{\partial x'^s}{\partial x^r} , \tag{F.3}$$

und es gilt einfach

$$\partial'_m(\sqrt{\mathfrak{g}'} g'^{mn}) = |\det \frac{\partial x}{\partial x'}| \partial_k(\sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl}\partial_l x'^n) . \tag{F.4}$$

Wählt man also in der Umgebung eines Punktes die Funktionen x'^m als Lösung von

$$0 = \partial_k(\sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl}\partial_l x'^n) = \sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl}\partial_k\partial_l x'^n + \partial_k(\sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl})\partial_l x'^n , \tag{F.5}$$

und Lösungen dieser linearen Wellengleichung (7.74) existieren [20], so definieren sie bei geeignet gewählten Anfangsbedingungen, $\det \frac{\partial x'}{\partial x} \neq 0$, neue Koordinaten, in denen die Lorenzbedingung gilt.

Die Lorenzbedingung legt die Koordinaten nicht vollständig fest. Ist sie schon erfüllt, so gilt sie auch in allen weiteren Koordinatensystemen x'^m, deren Koordinatenfunktionen die Wellengleichung erfüllen

$$\sqrt{\mathfrak{g}} g^{kl}\partial_k\partial_l x'^n = 0 . \tag{F.6}$$

Die Schwarzschildlösung ist in harmonischen Koordinaten (t, x^1, x^2, x^3) und in zugehörigen Kugelkoordinaten $(t, \hat{r}, \theta, \varphi)$, wenn i die Werte $1, 2, 3$ durchläuft,

$$\begin{aligned} g_{kl}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l &= \frac{\hat{r}-l}{\hat{r}+l}(\mathrm{d}t)^2 - (1+\frac{l}{\hat{r}})^2\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^i - (\frac{\hat{r}+l}{\hat{r}-l})\frac{l^2}{\hat{r}^4}(x^i\mathrm{d}x^i)^2 \ , \quad \hat{r}^2 = x^i x^i \ , \\ &= \frac{\hat{r}-l}{\hat{r}+l}(\mathrm{d}t)^2 - \frac{\hat{r}+l}{\hat{r}-l}(\mathrm{d}\hat{r})^2 - (\hat{r}+l)^2\big((\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2\big) \ . \end{aligned} \tag{F.7}$$

Identifiziert man $r = \hat{r} + l$ und $l = r_0/2$, so stimmt die Metrik mit (6.15) überein.

Das Volumenelement $\sqrt{\mathfrak{g}}$ in harmonischen Koordinaten berechnet man aus dem Produkt der Eigenwerte der Matrix mit Elementen g_{kl}. Durch Multiplikation mit der Metrik werden Vektoren u mit nur einer Zeitkomponente mit $g_{00} = (\hat{r}-l)/(\hat{r}+l)$ gestreckt, Vektoren v in Richtung von x^i mit $-(\hat{r}+l)/(\hat{r}-l)$ und zwei zu u und v senkrechte Vektoren mit $-(1+l/\hat{r})^2$,

$$\sqrt{\mathfrak{g}} = (1+\frac{l}{\hat{r}})^2 \ . \tag{F.8}$$

Mit dem Ansatz $\sqrt{\mathfrak{g}}g^{ij} = a\delta^{ij} + bx^i x^j$ berechnet man $\sqrt{\mathfrak{g}}g^{mp}$ aus $\sqrt{\mathfrak{g}}g^{mp}g_{pn} = \sqrt{\mathfrak{g}}\delta^m{}_n$,

$$\sqrt{\mathfrak{g}}g^{ij} = -\delta^{ij} + \frac{l^2}{\hat{r}^4}x^i x^j \ , \quad \sqrt{\mathfrak{g}}g^{0i} = 0 \ , \quad \sqrt{\mathfrak{g}}g^{00} = \frac{(\hat{r}+l)}{(\hat{r}-l)}\big(1+\frac{l}{\hat{r}}\big)^2 \ , \tag{F.9}$$

und kann $\partial_m(\sqrt{\mathfrak{g}}g^{mn}) = 0$ einfach durch Differenzieren bestätigen.

Synchronisiertes Bezugssystem

Durch Wahl einer Funktion T kann man Schichten $T = \text{konst}$ definieren. Der Vektor u, $u^m = g^{mn}\partial_n T$, ist, wenn sein Längenquadrat nicht verschwindet, $\partial_m T\partial_n T g^{mn} \neq 0$, linear unabhängig von den Tangentialvektoren v der Schichten, denn er steht auf ihnen senkrecht, $v^m\partial_m T = 0$, und ist nicht lichtartig.

Führt man in in einer genügend kleinen Umgebung U eines Punktes p in der Schicht, in der er liegt, Koordinaten $(x^1, \dots, x^{d-1})$ ein und verwendet man als x^0-Koordinate für alle Punkte q in U den Wert T der Schicht, in der q liegt, so kann man als weitere Koordinaten von q die Koordinaten $(x^1, \dots, x^{d-1})$ des Punktes wählen, in dem die Integralkurve von u durch q diejenige Schicht schneidet, in der p liegt. In diesen Koordinaten ist die Metrik blockdiagonal

$$g_{0i} = \partial_0 \cdot \partial_i = 0 \ , \quad i \in \{1, 2, \dots, d-1\} \ , \tag{F.10}$$

denn ∂_0 ist in Richtung von u und senkrecht auf ∂_i, $i = 1, \dots, d-1$.

Durch geschickte Wahl von Schichten $x^0 = \text{konst}$, wenn man nämlich als Funktion $T(q)$ den Abstand des Punktes q zur Fläche $T = 0$ wählt, läßt sich zudem $g_{00} = 1$ erreichen. Dazu wählen wir zunächst eine Schicht $x^0 = 0$ so, daß ihre Tangentialvektoren überall raumartig sind. Durch jeden Punkt p in einer genügend kleinen Umgebung der Schicht geht genau eine geodätische Linie (6.13), deren Tangentialvektor v Einheitslänge hat und die Schicht $x^0 = 0$ senkrecht schneidet. Verwenden wir als Zeitkoordinate x^0 für p die Länge dieser Linie zur Schicht und wählen wir die übrigen Koordinaten $x^1, \dots, x^{d-1}$ so, daß sie längs der Linie konstant sind, also gleich den Koordinaten des Schnittpunktes der geodätischen Linie mit der Schicht, so sind die Koordinatenlinien $x^0(s) = s$, $x^i(s) = x^i(0)$, $i = 1, \dots, d-1$, geodätisch und haben einen Tangentialvektor $\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} = (1, 0, \dots, 0)$. Da er Einheitslänge hat, gilt $g_{00} = 1$. Zudem erfüllt $x^m(s)$ die Geodätengleichung (6.13), $0 = \ddot{x}^n + \Gamma_{kl}{}^n\dot{x}^k\dot{x}^l = 0 + \Gamma_{00}{}^n$. Dies besagt $0 = 2g_{mn}\Gamma_{00}{}^n = \partial_0 g_{m0} + \partial_0 g_{m0} - \partial_m g_{00}$, und da $g_{00} = 1$ ist, ändert sich g_{m0} nicht mit der Zeit längs der geodätischen Linien. Da sie die Schicht $x^0 = 0$ senkrecht schneiden, gilt dort $g_{0i} = 0$, also gilt überall

$$g_{00} = 1 \ , \quad g_{0i} = 0 \ , \quad i \in \{1, 2, \dots, d-1\} \ , \tag{F.11}$$

in einer genügend kleinen Umgebung der Schicht $x^0 = 0$. Die zugehörigen Koordinaten heißen Gaußsche Koordinaten oder synchronisiertes Bezugssystem.

Im synchronisierten Bezugssystem ruhende Teilchen sind frei fallend, denn sie durchlaufen geodätische Weltlinien. Das Bezugssystem heißt daher auch mitfallendes Bezugssystem. Es wird singulär, wenn sich die Weltlinien der ortsfesten, frei fallenden Teilchen schneiden.

Statische Raumzeit

Ein d-dimensionales Raumzeitgebiet, in dem ein zeitartiges Killingfeld ξ^m, $\xi^2 > 0$, existiert, heißt stationär. Das Killingfeld definiert an jedem Punkt einen $d-1$-dimensionalen Raum $\mathcal{V}_\perp$ derjenigen Tangentialvektoren v, die senkrecht auf ξ stehen, $v^n(g_{nm}\xi^m) = 0$. Die Raumzeit heißt statisch, wenn dieser Unterraum $\mathcal{V}_\perp$ an jedem Punkt tangential zu einer Schicht gleicher Zeit $T(x) = \text{konst}$ ist.

Für Tangentialvektoren v an Schichten gleicher Zeit gilt $v(T) = v^n\partial_n T = 0$, denn T ändert sich nicht längs Kurven, die in einer Schicht gleicher Zeit verlaufen. Der Raum $\mathcal{V}_\perp$ stimmt mit dem Tangentialraum an eine Schicht gleicher Zeit genau dann überein, wenn $\xi_n = g_{nm}\xi^m$ an jedem Punkt ein nichtverschwindendes Vielfaches des Gradienten von T ist, $\xi_n = f\partial_n T$, $f \neq 0$. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn die antisymmetrisierte Ableitung von ξ_n/f verschwindet. Dann gilt

$$\partial_m\xi_n - \partial_n\xi_m = a_m\xi_n - a_n\xi_m \ . \tag{F.12}$$

In $d = 2$ Dimensionen ist diese Gleichung immer erfüllt. Wir rechnen mit der torsionsfreien, metrikverträglichen kovarianten Ableitung und können die partiellen Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzen. Die symmetrisierte, kovariante Ableitung $D_m\xi_n + D_n\xi_m = 0$ verschwindet, da ξ ein Killingfeld ist (E.29). Folglich gilt

$$D_m\xi_n = \frac{1}{2}\big(a_m\xi_n - a_n\xi_m\big) \ , \tag{F.13}$$

und durch Multiplikation mit ξ können wir a_m, das nur bis auf beliebige Vielfache von ξ_m definiert ist, identifizieren

$$\partial_m(\xi\cdot\xi) = 2(D_m\xi_n)\xi^n = (\xi\cdot\xi)a_m - (a\cdot\xi)\xi_m \ , \quad a_m = \frac{1}{\xi^2}\partial_m\xi^2 + b\,\xi_m \ . \tag{F.14}$$

Setzen wir a_m in (F.13) ein, so folgt: ein Raumzeitgebiet ist statisch, wenn ein Feld ξ mit $\xi^2 > 0$ existiert, das den Gleichungen

$$D_m\xi_n + D_n\xi_m = 0 \ , \quad D_m\frac{\xi_n}{\xi^2} - D_n\frac{\xi_m}{\xi^2} = 0 \tag{F.15}$$

genügt. Dann kann eine Funktion $T(x)$ aus $\partial_n T = \xi_n/\xi^2$ bestimmt und als Koordinatenzeit $x^0 = T$ verwendet werden. Die Koordinatenzeit ist in einer statischen Raumzeit geometrisch durch das Killingfeld ξ ausgezeichnet. Das Feld ξ hat dann Komponenten $\xi_n = (1, 0, \dots, 0)\, \xi^2 = (1/g^{00}, 0, \dots, 0)$.

Führen wir in einer Schicht gleicher Zeit Koordinaten $x^1, \dots, x^{d-1}$ ein und verwenden wir in anderen Schichten gleicher Zeit dieselben räumlichen Koordinaten $x^1, \dots, x^{d-1}$ jeweils für die Punkte, die durch Integralkurven von ξ verbunden sind, so ändern sich längs solcher Integralkurven von ξ nicht die räumlichen Koordinaten, also gilt für die Integralkurven

$$0 = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} = \xi^i = g^{i0}\xi_0 \ , \quad i \in \{1, \dots, d-1\} \ , \tag{F.16}$$

und die Metrik ist blockdiagonal $g^{i0} = 0$, $g_{0i} = 0$. Dann gilt $\xi^m = g^{mn}\xi_n = (1, 0, \dots, 0)$ und $\xi^2 = g_{00}$. Zudem hängt die Metrik nur von den räumlichen Koordinaten ab, da ihre Lieableitung längs ξ verschwindet $\mathcal{L}_\xi g_{mn} = \partial_0 g_{mn} = 0$. Die Christoffelsymbole haben daher folgende Werte

$$\begin{aligned} &{\Gamma_{00}}^0 = 0 \ , \qquad {\Gamma_{0j}}^0 = \frac{\partial_j g_{00}}{2g_{00}} \ , \quad {\Gamma_{jk}}^0 = 0 \ , \quad i,j,k,l \in \{1, \dots, d-1\} \\ &{\Gamma_{00}}^i = -\frac{1}{2} g^{ij}\partial_j g_{00} \ , \quad {\Gamma_{0j}}^i = 0 \ , \qquad {\Gamma_{jk}}^i = \frac{1}{2} g^{il}(\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{ij}) \ . \end{aligned} \tag{F.17}$$

Mannigfaltigkeiten mit Drehsymmetrie

Wenn eine Mannigfaltigkeit Drehungen als Isometrien zuläßt, so erzeugen sie wie jede kontinuierliche Gruppe G, angewendet auf einen Punkt p, den Orbit $O_p = G/H_p$, wobei $G = SO(3)$ ist und H_p die Untergruppe derjenigen Transformationen ist, die p invariant lassen (B.23). Wir unterstellen, daß in einer Umgebung U, die wir betrachten, die Orbits zweidimensionale Kugelschalen $SO(3)/SO(2) = S^2$ sind.

Die infinitesimalen Drehungen definieren an jedem Punkt $p \in U$ den von den Killingvektoren aufgespannten Tangentialraum T_p^O an die Kugelschalen sowie den Raum der dazu senkrechten Tangentialvektoren $T_p^\perp$. Die Räume T_p^O und $T_p^\perp$ enthalten keinen gemeinsamen, von 0 verschiedenen, lichtartigen Vektor, denn die Kugelschalen sind maximal symmetrisch und haben eine definite Metrik.[1]

Da die Dimension der Stabilitätsgruppe H_q von Punkten q in der Umgebung U konstant ist, läßt H_p, wie wir zunächst zeigen wollen, jeden Vektor $v \in T_p^\perp$ invariant.

Betrachten wir dazu die zu SO(3) gehörigen Killingfelder in einer Umgebung von p. Die Stabilitätsgruppe von p wird von einem Feld $f = f^m\partial_m$ erzeugt, das bei p verschwindet,

[1]Um auszuschließen, daß T_p^O lichtartig ist, beschränken wir uns auf Metriken der Signatur $2-d$.

dessen Komponenten also von der Form $f^m = -{M^m}_n x^n$ sind, wenn wir p die Koordinaten $x = 0$ geben und uns auf die niedrigste Ordnung in x beschränken.

Die von f erzeugte Transformation bildet den Tangentialraum des Orbits T_p^O auf sich ab, denn er wird von den zu $G = SO(3)$ gehörigen Tangentialvektorfeldern t aufgespannt, die eine Liealgebra bilden, und $\delta t = [f, t]$ ist wieder ein zu G gehöriges Killingfeld.

Da die Stabilitätsgruppe aus Isometrien besteht und T_p^O auf sich abbildet, bildet sie auch den zu T_p^O senkrechten Raum $T_p^\perp$ auf sich ab, denn sie läßt Skalarprodukte invariant.

Da in der Umgebung U die Dimension der Stabilitätsgruppe konstant ist, ist einschränkender jeder Vektor $v \in T_p^\perp$ invariant unter der Stabilitätsgruppe. Denn dann gibt es an jedem Punkt x in dieser Umgebung eine Linearkombination $f + \varepsilon^a t_a$ der zu SO(3) gehörigen Killingfelder, die bei x verschwindet und die Stabilitätsgruppe erzeugt

$$0 = -{M^m}_n x^n + \varepsilon^a t_a^m + O(x^2) \ . \tag{F.18}$$

Hierbei ist ε^a linear in x und t_a^m sind die Komponenten von t_a bei $x = 0$, wo sie T_p^O aufspannen. Diese Gleichung kann aber für $x^n = v^n$, $v \in T_p^\perp$, nur gelten, wenn v invariant unter der Stabilitätsgruppe ist

$${M^m}_n v^n = 0 \quad \forall v \in T_p^\perp \ , \tag{F.19}$$

denn ${M^m}_n v^n = \delta v^m$ ist aus $T_p^\perp$ und nur in T_p^O, wenn es verschwindet. Also läßt, wie behauptet, die Stabilitätsgruppe H_p jeden Vektor in $T_p^\perp$ invariant.

Da die Stabilitätsgruppe H_p keinen Tangentialvektor an den Orbit SO(3)/SO(2) invariant läßt, ist ein Vektor genau dann aus $T_p^\perp$, wenn er unter H_p invariant ist.

Die Menge $O_p^\perp$ der Punkte q auf geodätischen Linien, die in p den Orbit senkrecht schneiden, nennen wir die Achse durch p. Da die Isometrien der Stabilitätsgruppe H_p geodätische Linien auf geodätische abbilden und weil H_p den Punkt p und die Vektoren aus $T_p^\perp$ invariant läßt, ist jeder Punkt q auf der Achse durch p invariant unter H_p. Denn jeder solcher Punkt q ist durch die Geodätengleichung, den Anfangspunkt p und den Tangentialvektor v festgelegt

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^m}{\mathrm{d}t^2} + {\Gamma_{kl}}^m \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t} = 0, \quad x^m(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}(0) = v^m, \quad v^m \leftrightarrow x^m(1) \ . \tag{F.20}$$

Die Punkte auf der Achse durch p, die zu Tangentialvektoren aus einer Umgebung von $v = 0$ gehören, nennen wir einen Achsenabschnitt. Bei genügend kleinen Abschnitten ist die Abbildung von Tangentialvektor v auf den Achsenpunkt q mit Koordinaten $x^m(1)$ umkehrbar.

Da die Dimension der Stabilitätsgruppe in der betrachteten Umgebung U von p konstant ist, ist für alle Punkte $q \in U$ auf der Achse durch p wegen $H_p \subset H_q$ die Stabilitätsgruppe gleich $H_q = H_p$.

Da die Punkte auf der Achse invariant unter H_p sind, sind es auch die Tangentialvektoren an Kurven, die in der Achse verlaufen. Die Tangentialvektoren an die Achse stehen daher in jedem Achsenpunkt $q \in O_p^\perp$ senkrecht auf T_q^O, denn sie sind invariant unter H_q. Die Achse durch p schneidet überall die Kugelschalen senkrecht [55].

Auf einen Achsenabschnitt angewendet erzeugen SO(3)-Transformationen eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, die aus Kugelschalen besteht. Diese Kugelschalen schneiden den Abschnitt genau einmal, wenn er genügend klein gewählt ist.

Jeder Punkt r in einer genügend kleinen Umgebung von p läßt sich daher als $g(q)$ schreiben, wobei $q = O_r \cap O_p^\perp$ der eindeutige Schnittpunkt des Orbits durch r mit der Achse durch p ist und $g \in \mathrm{SO}(3)$ eindeutig bis auf eine Stabilitätstransformation $h \in H_p = H_q$ ist, $g'(q) = g(q) \Leftrightarrow g'^{-1}g = h \in H_q$.

Verwenden wir in der vierdimensionalen Raumzeit für die Achse $O_p^\perp$ Koordinaten u^i, $i = 0, 1$, und Kugelkoordinaten θ und φ für SO(3)/SO(2), so hat die Metrik in der Umgebung U die Form

$$g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n = g_{ij}(u)\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j + k(u)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{F.21}$$

Denn jeder Orbit ist eine maximal symmetrische Kugelschale und die Metrik auf jeder Kugelschale liegt daher bis auf einen Vorfaktor $k(u)$ fest, der von Orbit zu Orbit verschieden sein kann. Das Längenquadrat $g_{ij}(u)\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$ von Tangentialvektoren an die Achse durch p ist nicht weiter eingeschränkt. Tangentialvektoren an $T_q^\perp$ stehen in allen Punkten q der Achse durch p senkrecht auf den Orbits. Daher treten keine Mischterme $\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u$ und $\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}u$ auf. Die Isometrien $g \in \mathrm{SO}(3)$ lassen die Skalarprodukte und die Koordinaten u^i, $i = 0, 1$, invariant und verschleppen die Tangentialvektoren an die Achse durch p in Tangentialvektoren mit gleichen Komponenten am Punkt $g(p)$. Daher hat die Metrik nicht nur auf der Achse durch p, sondern überall in U die angegebene Form.

Da die Raumzeit die Signatur -2 hat, ist der Faktor $k(u)$ negativ und kann dort, wo seine Ableitung nicht verschwindet, zur Definition der Koordinate r, $k(u) = -r^2$, verwendet werden. Wie auf Seite 294 diskutiert, kann man in der zweidimensionalen Achse durch p zu gegebenen Schichten mit konstantem r eine weitere Koordinate t einführen, so daß die Metrik $g_{ij}(u)\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$ dort, wo die Fläche $r = \text{konst}$ nicht lichtartig ist, blockdiagonal wird. Dort hat die Metrik die Form

$$g_{kl}(x)\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l = g_{tt}(t,r)(\mathrm{d}t)^2 + g_{rr}(t,r)(\mathrm{d}r)^2 - r^2(\mathrm{d}\theta)^2 - r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2 \ , \tag{F.22}$$

die wir als Ansatz zur Berechnung der Schwarzschildlösung verwenden.

Der de Sitter-Raum

Ein de Sitter-Raum ist eine Fläche von Punkten $(t, \vec{x}, w)$,

$$t^2 - \vec{x}^2 - w^2 = -\alpha^2 \ , \quad \alpha = \text{konst} \ , \tag{F.23}$$

im flachen fünfdimensionalen Raum $\mathbb{R}^{1,4}$. Er hat die Topologie $\mathbb{R} \times S^3$, denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ bilden die Lösungen $(\vec{x}, w)$ von $\vec{x}^2 + w^2 = \alpha^2 + t^2$ eine Kugelschale S^3. Insbesondere sind die Schichten gleicher Zeit, $t = \text{konst}$, kompakt.

Lorentztransformationen SO(1,4) des einbettenden Raumes $\mathbb{R}^{1,4}$ bilden den de Sitter-Raum isometrisch auf sich ab; er ist maximal symmetrisch und konform flach, allerdings nicht maximal konform symmetrisch, da der konforme Faktor bei Abbildung auf $\mathbb{R} \times S^3$ mit Standardmetrik nicht nullstellenfrei ist.

Die Koordinaten $(t', \vec{x}')$

$$t = \frac{\alpha}{2}(\vec{x}'^2 + 1)\,\mathrm{e}^{t'} - \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{-t'} \ , \quad \vec{x} = \alpha\,\mathrm{e}^{t'}\vec{x}' \ , \quad w = \frac{\alpha}{2}(\vec{x}'^2 - 1)\,\mathrm{e}^{t'} - \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{-t'} \ , \tag{F.24}$$

überdecken die Hälfte, $t > w$, des de Sitter-Raumes. Für die Differentiale gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= \frac{\alpha}{2}\big((\vec{x}'^2 + 1)\mathrm{e}^{t'} + \mathrm{e}^{-t'}\big)\,\mathrm{d}t' + \alpha\,\mathrm{e}^{t'}\vec{x}' \cdot \mathrm{d}\vec{x}' \ , \\ \mathrm{d}\vec{x} &= \alpha\,\vec{x}'\mathrm{e}^{t'}\mathrm{d}t' + \alpha\,\mathrm{e}^{t'}\mathrm{d}\vec{x}' \ , \\ \mathrm{d}w &= \frac{\alpha}{2}\big((\vec{x}'^2 - 1)\mathrm{e}^{t'} + \mathrm{e}^{-t'}\big)\,\mathrm{d}t' + \alpha\,\mathrm{e}^{t'}\vec{x}' \cdot \mathrm{d}\vec{x}' \ . \end{aligned} \tag{F.25}$$

Daher hat das Längenquadrat $(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}\vec{x})^2 - (\mathrm{d}w)^2$ die Form

$$g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n = \alpha^2(\mathrm{d}t')^2 - \alpha^2\mathrm{e}^{2t'}(\mathrm{d}\vec{x}')^2 = (\mathrm{d}\bar{t})^2 - \exp\big(2\frac{\bar{t}}{\alpha}\big)\,(\mathrm{d}\vec{x}')^2 \ . \tag{F.26}$$

Die Schichten gleicher Zeit $\bar{t} = \alpha(t' + \ln\alpha)$ sind der $\mathbb{R}^3$ mit seiner flachen Metrik. Ob in einer Raumzeit Schichten gleicher Zeit kompakt sind, ist, wie der de Sitter-Raum zeigt, auch eine Eigenschaft der Schichtung und nicht allein der Raumzeit.

Die Koordinaten $(\bar{t}, \vec{x}')$ sind ein synchronisiertes Bezugssystem (F.11) für eine Hälfte, $t > w$, des de Sitter-Raumes. Teilchen, die in diesem Bezugssystem ruhen, durchlaufen geodätische Weltlinien. Ihre Abstände wachsen exponentiell mit der Zeit.

Im Koordinatensystem $(\hat{t}, r, \theta, \varphi)$

$$t = \sqrt{\alpha^2 - \vec{x}^2}\sinh\frac{\hat{t}}{\alpha} \ , \quad w = -\sqrt{\alpha^2 - \vec{x}^2}\cosh\frac{\hat{t}}{\alpha} \ , \tag{F.27}$$

wobei $\vec{x} = r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ mit $r \leq \alpha$ durch Kugelkoordinaten (2.25) gegeben ist, hat das Längenquadrat $(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}w)^2 - (\mathrm{d}\vec{x})^2$ wegen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= -\frac{\vec{x}\mathrm{d}\vec{x}}{\sqrt{\alpha^2 - \vec{x}^2}}\sinh\frac{\hat{t}}{\alpha} + \sqrt{\alpha^2 - \vec{x}^2}\,\big(\cosh\frac{\hat{t}}{\alpha}\big)\,\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\alpha} \ , \\ \mathrm{d}w &= \quad \frac{\vec{x}\mathrm{d}\vec{x}}{\sqrt{\alpha^2 - \vec{x}^2}}\cosh\frac{\hat{t}}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2 - \vec{x}^2}\,\big(\sinh\frac{\hat{t}}{\alpha}\big)\,\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\alpha} \ , \end{aligned} \tag{F.28}$$

und $\vec{x}\mathrm{d}\vec{x} = r\mathrm{d}r$ und $(\mathrm{d}\vec{x})^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2$ die Form

$$g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n = (1 - \frac{r^2}{\alpha^2})\,(\mathrm{d}\hat{t})^2 - \frac{(\mathrm{d}r)^2}{1 - \frac{r^2}{\alpha^2}} - r^2(\mathrm{d}\theta)^2 - r^2\sin^2\theta\,(\mathrm{d}\varphi)^2 \ . \tag{F.29}$$

Die $(\hat{t}, r, \theta, \varphi)$-Koordinaten überdecken nur den Bereich $w < -|t|$ des de Sitter-Raums. Durchläuft r bei konstantem θ und φ für $\hat{t} = 0$ die Werte zwischen $r = 0$ und $r = \alpha$, so durchlaufen die $(t, \vec{x}, w)$-Punkte einen Viertelkreis in $\mathbb{R}^{1,4}$.

Wie jeder maximal symmetrische Raum ist der de Sitter-Raum konform flach. In einer Umgebung eines jeden Punktes p, dem wir durch Wahl des Bezugssystems in $\mathbb{R}^{1,4}$

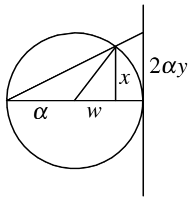

Abbildung F.1: Stereographische Projektion

die Koordinaten $(t, \vec{x}, w) = (0, 0, \alpha)$ geben, können wir durch stereographische Projektion, angepaßt an die Signatur der vorliegenden Metrik, Koordinaten y^m, $m = 0, 1, 2, 3$, einführen

$$x^m = 2\alpha \frac{y^m}{1 - y^2}\ ,\ w = \alpha \frac{1 + y^2}{1 - y^2}\ , \tag{F.30}$$

mit $x^0 = t$ und $y^2 = y \cdot y = (y^0)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2$. Wegen

$$\mathrm{d}x^m = \frac{2\alpha}{1 - y^2} \mathrm{d}y^m + 4\alpha y^m \frac{y \cdot \mathrm{d}y}{(1 - y^2)^2}\ , \quad \mathrm{d}w = 4\alpha \frac{y \cdot \mathrm{d}y}{(1 - y^2)^2}\ ,$$

stimmt das Längenquadrat $(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}\vec{x})^2 - (\mathrm{d}w)^2$ bis auf einen konformen Faktor mit der flachen Metrik überein

$$g_{kl} \mathrm{d}x^m \mathrm{d}x^n = \frac{4\alpha^2}{(1 - y^2)^2}\, \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}y\ . \tag{F.31}$$

G Die Noethertheoreme

G.1 Abwälzen von Ableitungen

Die Abkürzung d stehe für die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ oder jede andere Ableitung, die der Produktregel genügt. Wegen

$$u\,(\mathrm{d}v) = \mathrm{d}(u\,v) - (\mathrm{d}u)\,v \tag{G.1}$$

können in Produkten $u\,(\mathrm{d}^n v)$ die Ableitungen, die auf v wirken, bis auf vollständige Ableitungen auf u abgewälzt werden

$$u\,(\mathrm{d}^n v) = \mathrm{d}\,\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \big((-1)^k \mathrm{d}^k u\big)\big(\mathrm{d}^{n-k-1} v\big)\Big) + \big((-1)^n \mathrm{d}^n u\big)\,v\ . \tag{G.2}$$

Die Wirkung jedes Differentialoperators $D = \sum_n f_n \mathrm{d}^n$ mit irgendwelchen Koeffizientenfunktionen f_n und n-fachen Ableitungen d^n auf v können wir schreiben als Summe einer vollständigen Ableitung einer Größe $X_{D,v}$ und eines Produktes, das v ohne Ableitung als Faktor enthält

$$Dv = \sum_n f_n \mathrm{d}^n v = \mathrm{d}\, X_{D,v} + Y_D\, v\ , \tag{G.3}$$

$$X_{D,v} = \sum_{k,l} \big((-1)^k \mathrm{d}^k f_{k+l+1}\big)\big(\mathrm{d}^l v\big)\ , \tag{G.4}$$

$$Y_D = \sum_n (-1)^n (\mathrm{d}^n f_n)\ . \tag{G.5}$$

Die Relation macht nur Gebrauch davon, daß der Differentialoperator d der Produktregel genügt und gilt unabhängig davon, was f_n oder v ist, oder ob d für die Zeitableitung oder für irgendeine andere Ableitung steht.

Die infinitesimale Änderung einer Lagrangefunktion $\mathscr{L}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots)$ kann als Differentialoperator gelesen werden, der auf δx wirkt

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} &= \mathscr{L}(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta\dot{x}, \ddot{x} + \delta\ddot{x}, \dots) - \mathscr{L}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots) \\ &= \delta x \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x)\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} + (\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\delta x)\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{x}} + \dots\ . \end{aligned} \tag{G.6}$$

Wälzen wir die Ableitung von δx ab und schreiben wir $\delta\mathscr{L}$ als Summe einer vollständigen Ableitung und eines Produktes, das δx als Faktor enthält, so definiert der Koeffizient bei δx die Eulerableitung der Lagrangefunktion $\mathscr{L}$

$$\delta\mathscr{L} = \delta x \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial} x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_{\mathscr{L},\delta x} \ , \tag{G.7}$$

$$Z_{\mathscr{L},\delta x} = \sum_{k,l} (-1)^k \Big(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_{(k+l+1)}}\Big) \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l} \delta x \ , \tag{G.8}$$

$$\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial} x} = \sum_n (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_{(n)}} \ . \tag{G.9}$$

Dabei haben wir die Notation $x_{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$ für die Jet-Variablen verwendet.

Die Eulerableitung verschwindet genau dann identisch in den Jet-Variablen, wenn die Lagrangefunktion eine Ableitung ist (G.62).

Multipliziert man Dv mit einer Funktion u, so definiert das Abwälzen der Ableitungen von v auf u den transponierten Differentialoperator D^{T}

$$uDv = u \sum_n f_n \mathrm{d}^n v = \mathrm{d}\, X_{u,D,v} + (D^{\mathrm{T}}(u))\, v \ , \tag{G.10}$$

$$X_{u,D,v} = \sum_{k,l} \big((-1)^k \mathrm{d}^k (f_{k+l+1} u)\big)\big(\mathrm{d}^l v\big) \ , \tag{G.11}$$

$$D^{\mathrm{T}} u = \sum_n (-1)^n \mathrm{d}^n (f_n u) \ , \tag{G.12}$$

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_k \Big(\sum_l (-1)^{k+l} (\mathrm{d}^l f_{k+l})\Big) \mathrm{d}^k \ . \tag{G.13}$$

Der transponierte Operator D^{T} hängt linear von D ab. Wenn wir seine Koeffizientenfunktionen komplex konjugieren, erhalten wir den adjungierten Operator $D^\dagger = (D^{\mathrm{T}})^*$. u und v treten in der algebraischen Identität (G.10) bilinear wie in einem Skalarprodukt auf, ohne daß es sich bei ihnen um Vektoren eines Hilbertraums handeln muß.

G.2 Symmetrie und erhaltene Ströme

Wir betrachten eine einparametrige Gruppe T_α von Transformationen, die Felder ϕ_l auf Felder abbilden und die so parametrisiert sei, daß $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ gilt und folglich T_0 zur identischen Abbildung gehört. Als infinitesimale Transformation oder Änderung $\delta\phi_l$ bezeichnen wir die Ableitung der Transformation bei $\alpha = 0$

$$\delta\phi_l(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} T_\alpha \phi_l(x)\Big|_{\alpha=0} \ . \tag{G.14}$$

Wir nennen eine Transformation lokal, wenn $\delta\phi_l$ am Ort x nur von den Koordinaten x, den Feldern ϕ_n und endlich vielen ihrer Ableitungen $\partial_{m_1} \dots \partial_{m_r} \phi_n$ an diesem Ort x, nicht aber von $\phi_n(y)$ oder seinen Ableitungen an einem anderen Punkt $y \neq x$ abhängt.

Die Wirkung $W[T_\alpha \phi]$ ändert sich mit α bei $\alpha = 0$ nach Definition der Variationsableitung (5.189) bis auf Randterme um

$$\delta W[\phi, \delta\phi] = \int \mathrm{d}^4 x\, \delta\phi_l(x) \frac{\delta W[\phi]}{\delta\phi_l(x)} + \text{ Randterme} \ . \tag{G.15}$$

Die Transformation T_α heißt Symmetrie der Wirkung W, wenn sich die Wirkung nur um Randterme ändert, das heißt genauer [13], wenn sich der Integrand in (G.15) identisch in den Jet-Variablen als Summe von Ableitungen schreiben läßt

$$\delta\phi_l \frac{\delta W}{\delta\phi_l} + \partial_m j^m = 0 \ . \tag{G.16}$$

Physikalische Felder erfüllen $\frac{\delta W}{\delta\phi_l} = 0$, demnach gehört zu jeder Symmetrie der Wirkung ein Strom j^m, der die Kontinuitätsgleichung erfüllt, falls die Felder die Bewegungsgleichungen erfüllen!

Da nach dem algebraischen Poincaré-Lemma (G.59), dessen Beweis wir an das Ende dieses Kapitels verschieben, die Identität $\partial_m J^m = 0$ für Funktionen J^m der Jet-Variablen genau dann gilt, wenn die Funktionen $J^m = \partial_n B^{nm}$ die Ableitung beliebiger, unter Vertauschung der Indizes antisymmetrischer Funktionen B^{mn} der Jet-Variablen sind,

$$\partial_m J^m = 0 \Leftrightarrow J^m = \partial_n B^{mn} \ , \ B^{mn} = -B^{nm} \ , \tag{G.17}$$

ist der zur Symmetrie gehörige Strom eindeutig bis auf einen sogenannten Verbesserungsterm

$$j^m_{\text{Verbesserung}} = \partial_n B^{mn} \ , \ B^{mn} = -B^{nm} \ . \tag{G.18}$$

Die zum Verbesserungsterm gehörige Ladung Q_V in einem Volumen V ist durch die Werte von B^{0i} (B^{00} verschwindet wegen $B^{mn} = -B^{nm}$) auf dem Rand ∂V des Volumens V bestimmt,

$$Q_V = \int_V \mathrm{d}^3 x\, j^0 = \int_V \mathrm{d}^3 x\, \partial_i B^{0i} = \int_{\partial V} \mathrm{d}^2 f^i\, B^{0i} \ . \tag{G.19}$$

Die Lagrangedichte $\mathscr{L}$ einer lokalen Wirkung bleibt unter jeder infinitesimalen Symmetrietransformation wegen (5.197) und (5.200)

$$\delta\mathscr{L} = \delta\phi_l \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}\phi_l} + \partial_k \big(\delta\phi_l \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_k\phi_l)}\big) \ , \quad \frac{\delta W}{\delta\phi_l} = \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}\phi_l}$$

bis auf vollständige Ableitungen $\partial_m K^m$ mit $K^m = \delta\phi_l \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_m\phi_l)} - j^m$ ungeändert

$$\delta\mathscr{L} = \delta\phi_l \frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}\phi_l} + \partial_m \big(\delta\phi_l \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_m\phi_l)}\big) = \partial_m K^m \ . \tag{G.20}$$

Der erhaltene Strom ist daher

$$j^m = \delta\phi_l \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_m\phi_l)} - K^m + \partial_n B^{mn} \ , \ B^{mn} = -B^{nm} \ . \tag{G.21}$$

Der Strom ist lokal, wenn die Symmetrie lokal ist.

Bei einer lokalen Wirkung kann man für jede gegebene infinitesimale Transformation $\delta\phi_l$ nach Ausrechnen von $\delta\mathscr{L}$ leicht entscheiden, ob sie zu einer kontinuierlichen Symmetrie gehört. $\delta\mathscr{L}$ läßt sich als Funktion der Jet-Variablen genau dann als Ableitung $\partial_m K^m$ schreiben (G.62), wenn die Eulerableitung von $\delta\mathscr{L}$ verschwindet.

Umgekehrt gehört zu jedem Strom, der aufgrund der Bewegungsgleichungen erhalten ist, eine Symmetrie der Wirkung. Denn Funktionen $\bar{\jmath}^m$ der Felder und ihrer Ableitungen gehören zu einem Strom, der aufgrund der Bewegungsgleichungen erhalten ist, wenn identisch in den Jet-Variablen gilt

$$0 = \partial_m \bar{\jmath}^m + n_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + d_l^m \partial_m \big(\frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big) \ . \tag{G.22}$$

Dabei sind n_l und d_l^m Jetfunktionen und hängen auf nicht weiter festgelegte Art von den Koordinaten x, den Feldern ϕ_l und ihren Ableitungen ab. Durch Abwälzen der Ableitung[1] können wir diese Gleichung in die Form (G.16) bringen

$$0 = \partial_m (\bar{\jmath}^m + d_l^m \frac{\delta W}{\delta \phi_l}) + \big(n_l - \partial_m d_l^m\big) \frac{\delta W}{\delta \phi_l} \ . \tag{G.23}$$

Zu jedem erhaltenen Strom $\bar{\jmath}^m$ gehört also insbesondere die infinitesimale Symmetrie

$$\delta \phi_l = n_l - \partial_m d_l^m \tag{G.24}$$

und zu dieser Symmetrie der Wirkung der Strom

$$j^m = \bar{\jmath}^m + d_l^m \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + \partial_n B^{mn} \ , \ B^{mn} = -B^{nm} \ . \tag{G.25}$$

Die Ströme $\bar{\jmath}^m$ und j^m sind äquivalent, sie stimmen für Felder, die die Bewegungsgleichungen erfüllen, bis auf einen Verbesserungsterm überein.

Aus der Kontinuitätsgleichung (5.20) folgt (5.22), daß die zum erhaltenen Strom gehörige Ladung erhalten ist

$$Q(t) = \int \mathrm{d}^3 x\, j^0(t, \vec{x}) \ , \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0 \ , \tag{G.26}$$

wenn die Stromdichten $\vec{\jmath}$ für große Abstände genügend schnell abfallen und das Integrationsvolumen so groß gewählt ist, daß keine Ladung über die Randfläche strömt.

Wir fassen zusammen:

Noethertheorem der Feldtheorie: *Zu jeder infinitesimalen, lokalen Symmetrie der lokalen Wirkung gehört ein erhaltener, lokaler Strom* (G.21) *und eine Erhaltungsgröße Q* (G.26). *Umgekehrt gehört zu jedem lokalen, erhaltenen Strom eine infinitesimale, lokale Symmetrie der lokalen Wirkung.*

Wie in der Mechanik (4.45) ist am Noethertheorem nichts zu beweisen, man muß nur erkennen, daß eine infinitesimalen Symmetrie der Wirkung einen erhaltenen Strom definiert (G.16) und umgekehrt. Der zu einer infinitesimalen Symmetrie gehörige erhaltene Strom ist eindeutig bis auf einen Verbesserungsterm; umgekehrt ist, wie wir anschließend zeigen, die zu einem erhaltenen Strom gehörige infinitesimale Symmetrie eindeutig bis auf Identitäten zwischen den Variationsableitungen, zu denen Eichsymmetrien gehören.

[1] Falls höhere Ableitungen von $\frac{\delta W}{\delta \phi_l}$ auftreten, wälzt man auch sie wie in G.1 ab.

G.3 Eichsymmetrien und Noetheridentitäten

Wir haben bisher infinitesimale Transformationen der Felder ϕ betrachtet, die sich als Linearkombination $\delta_\xi = \xi^i \delta_i$ einer Basis δ_i schreiben lassen. Dabei sind die Transformationsparameter ξ^i, die zum Beispiel Richtung und Größe einer Drehung oder einer Verschiebung angeben können, Komponenten eines x-unabhängigen Vektors im Tangentialraum der Transformationsgruppe.

Wir sprechen von einer infinitesimalen, lokalen Eichtransformation, wenn $\delta_\xi \phi(x)$ linear ist in einer frei wählbaren Funktion $\xi(x)$ und endlich vielen ihrer partiellen Ableitungen $\partial_{m_1} \dots \partial_{m_n} \xi(x)$. Wenn beispielsweise δ_ξ nur von höchstens den ersten Ableitungen von ξ abhängt, ist die infinitesimale Eichtransformation von der Form

$$\delta_\xi \phi_l(x) = N_l\, \xi(x) + N_l^m\, \partial_m \xi(x) \ . \tag{G.27}$$

Dabei zählt l die Komponenten der Felder ϕ ab und N_l und N_l^m sind Funktionen der Jet-Variablen, also der Koordinaten x, der Felder $\phi(x)$ und endlich vieler partieller Ableitungen von $\phi(x)$. So gehört die Eichtransformation des Viererpotentials $\delta A_l = \partial_l \xi$ (5.84) zu $N_l = 0$ und $N_l^m = \delta^m{}_l$.

Ist eine Wirkung $W[\phi]$ von Feldern ϕ unter einer infinitesimalen, lokalen Eichtransformation δ_ξ invariant, so sind die Variationsableitungen, deren Verschwinden die Bewegungsgleichungen der physikalischen Felder ausmacht, nicht unabhängig voneinander, und der zugehörige erhaltene Strom j^m kann mit den Bewegungsgleichungen als Ableitung $\partial_n B^{mn}$ von antisymmetrischen Jetfunktionen $B^{mn} = -B^{nm}$ geschrieben werden. Zu Eichsymmetrien gehören also Identitäten der Variationsableitungen und erhaltene Ladungen, die man mit Oberflächenintegralen über B^{0i} bestimmen kann. Gelten umgekehrt zwischen den Variationsableitungen Identitäten, dann ist die Wirkung eichinvariant.

Dies folgt aus der Definition (G.16) einer infinitesimalen Symmetrie [13]

$$\delta_\xi \phi_l \, \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + \partial_m j_\xi^m = 0 \ . \tag{G.28}$$

Da die linke Seite verschwindet, verschwindet auch ihre Eulerableitung nach ξ. Zudem verschwindet die Eulerableitung von $\partial_m j_\xi^m$, denn integriert trägt der Ableitungsterm nur zu Randtermen bei. Folglich verschwindet die Eulerableitung des ersten Terms,

$$\frac{\hat{\partial}}{\hat{\partial} \xi} \big(\delta_\xi \phi_l \, \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big) = N_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l} - \partial_m \big(N_l^m \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big) = 0 \ . \tag{G.29}$$

Zu jeder Eichinvarianz der Wirkung gehört eine Identität der Variationsableitungen!

Zudem ist der Strom $j_\xi^m + \xi N_l^m \frac{\delta W}{\delta \phi_l}$ von der Form $\partial_n B^{mn}$ mit $B^{mn} = -B^{nm}$ (G.18), denn er erfüllt wegen (G.29) die Kontinuitätsgleichung identisch in den Jet-Variablen. Also hat der Strom j_ξ^m die Form

$$j_\xi^m = -\xi N_l^m \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + \partial_n B^{mn} \ , \ B^{mn} = -B^{nm} \ , \tag{G.30}$$

wobei B^{mn} geeignete, unter Vertauschung der Indizes antisymmetrische Funktionen der Jet-Variablen sind. Insbesondere lassen sich die Ladungen in einem Volumen aufgrund der Bewegungsgleichungen als Oberflächenintegral über B^{0i} über die einhüllende Randfläche berechnen (G.19).

Umgekehrt gehört zu jeder Identität der Variationsableitungen

$$0 = S_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + S_l^m \partial_m \frac{\delta W}{\delta \phi_l} \ , \tag{G.31}$$

die identisch in den Jet-Variablen gilt, eine Eichsymmetrie der Wirkung und ein erhaltener Strom, der aufgrund der Bewegungsgleichungen verschwindet! Um dies zu zeigen, multiplizieren wir die Identität mit einer beliebigen Funktion ξ und schreiben sie als Definition (G.28) einer Eichinvarianz

$$0 = \xi\big(S_l \frac{\delta W}{\delta \phi_l} + S_l^m \partial_m \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big) = \big(S_l\, \xi - \partial_m\big(\xi S_l^m\big)\big)\frac{\delta W}{\delta \phi_l} + \partial_m\big(\xi S_l^m \frac{\delta W}{\delta \phi_l}\big) \ . \tag{G.32}$$

Damit ist das zweite Noethertheorem bewiesen.

Zweites Noethertheorem: *Zu jeder Eichsymmetrie der Wirkung gehört eine Identität zwischen den Variationsableitungen und umgekehrt. Die zur Eichsymmetrie gehörende erhaltene Ladung Q_V in einem Volumen V ist durch ein Oberflächenintegral über den Rand von V gegeben* (G.19).

Doppelte Noetheridentität

Ist die Wirkung wie in (5.187) die Summe einer eichinvarianten Wirkung für Felder A_k, die wir Eichfelder nennen und die bei Eichtransformationen unter einander transformieren, und einer zweiten, ebenfalls eichinvarianten Wirkung, die die Felder A_k an weitere Felder ϕ_i, die wir Materiefelder nennen, koppelt

$$W[A,\phi] = W_{\text{Eich}}[A] + W_{\text{Materie}}[A,\phi] \ , \tag{G.33}$$

so gilt die Noetheridentität für die Variationsableitung der Felder A_k

$$\frac{\delta W_{\text{Eich}}}{\delta A_k} = -\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_k} \tag{G.34}$$

zweifach. Die linke Seite erfüllt wegen (G.29) die Noetheridentität

$$0 = \frac{\hat\partial}{\hat\partial \xi}\big(\delta_\xi A_k \frac{\delta W_{\text{Eich}}}{\delta A_k}\big) \ . \tag{G.35}$$

Die Noetheridentität der Variationsableitungen der Materiewirkung

$$0 = \frac{\hat\partial}{\hat\partial \xi}\big(\delta_\xi A_k \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_k} + \delta_\xi \phi_i \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta \phi_i}\big) \tag{G.36}$$

gilt für alle Felder, insbesondere auch für solche Materiefelder ϕ_i, die ihre Bewegungsgleichungen $\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta \phi_i} = 0$ erfüllen. Dann fallen die Beiträge der Materiefelder zur Noetheridentität weg. Wenn die Materiewirkung eichinvariant ist und die Materiefelder ihre Bewegungsgleichungen erfüllen, so erfüllt auch die Variationsableitung der Materiewirkung identisch in den Feldern A_k die Noetheridentität

$$0 = \frac{\hat\partial}{\hat\partial \xi}\big(\delta_\xi A_k \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_k}\big) \ , \quad \text{wenn} \quad \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta \phi_i} = 0 \ . \tag{G.37}$$

Ströme und Variationsableitungen

Da die Variationsableitung der Materiewirkung in den Bewegungsgleichungen der Eichfelder (G.34) als Quelle so auftritt wie der elektromagnetische Strom in den Maxwellgleichungen, bezeichnet man $-\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_k}$ als Strom. Dieser Strom ist eng verwandt dem Noetherstrom, der zur Invarianz der Materiewirkung unter einer Symmetrietransformation gehört, die die Eichfelder nicht ändert.

Dies zeigt die folgende Kombination der beiden Noethertheoreme. Die Eichinvarianz (G.20) besagt für die Lagrangefunktion $\mathscr{L}$ der Materiewirkung

$$\delta_\xi \phi_i \frac{\hat\partial \mathscr{L}}{\hat\partial \phi_i} + \delta_\xi A_k \frac{\hat\partial \mathscr{L}}{\hat\partial A_k} + \partial_m j^m_\xi = 0 \ . \tag{G.38}$$

Dabei ist nach erstem Noethertheorem der Strom (G.21)

$$j^m_\xi = \delta_\xi \phi_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_m \phi_i} + \delta_\xi A_k \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_m A_k} - K^m_\xi \ , \tag{G.39}$$

wobei K^m_ξ in $\delta_\xi \mathscr{L} = \partial_m K^m_\xi$ bis auf einen Verbesserungsterm (G.18) eindeutig ist. Nach dem zweiten Noethertheorem hat der Strom die Form (G.30)

$$j^m_\xi = -\xi(N^m_{\phi_i} \frac{\hat\partial \mathscr{L}}{\hat\partial \phi_i} + N^m_{A_k} \frac{\hat\partial \mathscr{L}}{\hat\partial A_k}) + \partial_n \hat B^{mn} \ . \tag{G.40}$$

Also gilt bei einer eichinvarianten Lagrangefunktion

$$\delta_\xi \phi_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_m \phi_i} + \delta_\xi A_k \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_m A_k} - K^m_\xi + \partial_n B^{mn} = -\xi(N^m_{\phi_i} \frac{\hat\partial \mathscr{L}}{\hat\partial \phi_i} + N^m_{A_k} \frac{\hat\partial \mathscr{L}}{\hat\partial A_k}) \tag{G.41}$$

für alle Felder ϕ_i und alle Felder A_k. Sie gilt insbesondere für jedes fest vorgegebene Eichfeld A_k, egal, ob es Bewegungsgleichungen erfüllt. Solch ein Feld nennt man Hintergrundfeld.

Die Symmetrien des Hintergrundfeldes sind diejenigen Eichtransformationen, die es invariant lassen, $\delta_\xi A_k = 0$. Setzt man das Hintergrundfeld in die eichinvariante Lagrangefunktion ein, so ist sie invariant unter der Symmetrien des Hintergrundfeldes. Der zugehörige Noetherstrom

$$\delta_\xi A_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_\xi \phi_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_m \phi_i} - K^m_\xi + \partial_n B^{mn} = -\xi(N^m_{A_k} \frac{\hat\partial \mathscr{L}}{\hat\partial A_k} + N^m_{\phi_i} \frac{\hat\partial \mathscr{L}}{\hat\partial \phi_i}) \ . \tag{G.42}$$

ist eine Linearkombination der Variationsableitungen der eichinvarianten Materiewirkung nach dem Eichfeld, bis auf Beiträge, die verschwinden, wenn die Materiefelder ihre Bewegungsgleichungen erfüllen.

Die Gleichung $\delta_\xi A_k = 0$ schränkt die Parameterfunktionen ξ ein, eine Symmetrie von A_k zu sein, und die Eichfelder A_k, eine Symmetrie zu haben. Zum Beispiel haben Yang-Mills-Felder mit Transformationsgesetz $\delta_\xi A^i_k = D_k \xi^i$ nur dann Symmetrien, wenn die Holonomiegruppe, die von den Feldstärken erzeugt wird, ξ^i invariant läßt. Denn die Gleichung $D_m \xi^i = 0$ erfordert

$$0 = [D_m, D_n]\xi^i = (F_{mn}\xi)^i = F_{mn}{}^j f_{kj}{}^i \xi^k \ . \tag{G.43}$$

Noetheridentität der Elektrodynamik

Die Wirkung der Elektrodynamik $W_{\text{Maxwell}}[A] + W_{\text{Materie}}[A, \phi]$ (5.187) ist invariant unter infinitesimalen Eichtransformationen (5.84)

$$\delta_\xi A_k = \partial_k \xi \tag{G.44}$$

und Eichtransformationen der Materiefelder, wie zum Beispiel $\delta\phi = \mathrm{i}\,\xi\phi$, von denen wir nur zu wissen brauchen, daß sie so gefunden werden können, daß die Wirkung eichinvariant ist. Diese Eichtransformation des Vektorpotentials ist (G.27) mit $N_k = 0$ und $N_k^m = \delta^m{}_k$. Daher erfüllen W_{Maxwell} und W_{Materie} die Noetheridentität (G.29) und (G.34)

$$\partial_m \frac{\delta W_{\text{Maxwell}}}{\delta A_m} = 0 = \partial_m \frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_m} \ . \tag{G.45}$$

Dabei ist die erste Gleichung $\partial_m(\partial_n F^{mn}) = 0$ eine Identität und gilt für beliebige Felder A_m. Die zweite Gleichung ist die Kontinuitätsgleichung $\partial_m j^m = 0$ für den elektromagnetischen Strom $j^m = -\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta A_m}$ (5.193). Sie gilt aufgrund der Eichinvarianz der Wirkung, wenn die restlichen Felder ϕ ihre Bewegungsgleichungen erfüllen, identisch in A_m. Die Stromidentifizierungsgleichung (G.42) zusammen mit $N^m_{A_k} = \delta^m{}_k$ besagt, daß, falls die Materiefelder ihre Bewegungsgleichungen erfüllen, der Strom, der durch die Variationsableitung nach dem Eichfeld A_m definiert ist, mit dem Strom übereinstimmt, der zur Invarianz der Materiewirkung unter Eichtransformationen mit konstanten Parametern gehört.

Noetheridentität für Punktteilchen

Die Wirkung von Punktteilchen ist invariant unter infinitesimalen Transformationen $\delta_\xi x^n = \xi \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s}$, die zu Reparametrisierungen $s' = s - \xi(s)$ gehören. Diese Transformation ist, richtig gelesen, von der Form (G.27) mit $N_{x^n} = \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s}$ und $N^m_{x^n} = 0$, wobei der Index m zu der Ableitung nach dem Bahnparameter s gehört und nur einen Wert annimmt. Die zugehörige Noetheridentität (G.29) lautet

$$0 = \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s}\frac{\delta W}{\delta x^n(s)} \ . \tag{G.46}$$

Dies ist eine Identität in s, x^n und den Ableitungen von x^n, falls alle weiteren Freiheitsgrade, die ebenfalls unter der Reparametrisierung transformieren, ihre Bewegungsgleichungen erfüllen.

Für die Wirkung freier Teilchen W_{Teilchen} (4.14) besagt die Noetheridentität

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}s}}{\sqrt{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}}} = 0 \ . \tag{G.47}$$

Sie ist ohne Einschränkung an x^m erfüllt, denn die Änderung eines Einheitsvektors ist stets auf ihm senkrecht (2.51).

Für die Ankopplung an das elektromagnetische Feld W_{Kopplung} (5.230) lautet die Identität (G.46)

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s}\big(\frac{q}{c}F_{nm}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\big) = 0 \, . \tag{G.48}$$

Sie ist unabhängig davon erfüllt, ob die elektromagnetischen Felder ihren Bewegungsgleichungen genügen, denn eine Doppelsumme eines symmetrischen Indexpaares mit einem antisymmetrischen Indexpaar verschwindet (5.17).

Der Viererimpuls P^n (4.103) ist proportional zum Tangentialvektor $\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s}$. Daher besagt die Noetheridentität, daß sich P^2 und damit die Masse (3.52) selbst bei Wechselwirkung nicht längs der Bahn ändert $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}P^2 = 2P^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}P_n = 0$. Denn fügen wir der Wirkung W_{Teilchen} einen reparametrisierungsinvarianten Teil $W_{\text{Potential}}$ hinzu, so lauten die Bewegungsgleichungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}P_n = F_n$ und die Kraft $F_n = -\frac{\delta W_{\text{Potential}}}{\delta x^n}$ steht senkrecht auf dem Viererimpuls

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}s}\frac{\delta W_{\text{Potential}}}{\delta x^n} = 0 \ . \tag{G.49}$$

Das Quadrat des Viererimpulses eines Punktteilchens, dessen Wirkung reparametrisierungsinvariant ist, ist also auch bei Wechselwirkung erhalten. Diese theoretische Schlußfolgerung stimmt mit den Beobachtungen von Teilchen im elektromagnetischen oder gravitativen Feld überein, ist aber meßbar falsch bei Teilchenumwandlungen wie zum Beispiel Kernzerfällen. Teilchenumwandlung kann nicht Auswirkung von Kräften auf Punktteilchen sein.

Noetheridentität der Gravitation

Die Wirkung $W_{\text{Metrik}}[g] + W_{\text{Materie}}[g, \phi]$ der Gravitation besteht aus zwei Teilen, die beide invariant unter Koordinatentransformationen sind. Unter infinitesimalen Koordinatentransformationen $x'^m = x^m - \xi^m$ transformiert die Metrik mit der Lieableitung (C.107)

$$\delta_\xi g_{kl} = \xi^n \partial_n g_{kl} + \partial_k \xi^n g_{nl} + \partial_l \xi^n g_{kn} \ .$$

Dieses Transformationsgesetz ist von der Form (G.27), verallgemeinert auf den Fall, daß der Parameter der Eichtransformation mehrere Komponenten ξ^n hat und daß die Felder durch zwei Indizes abgezählt werden

$$\delta_\xi g_{kl} = N_{kl\,n}\xi^n + N_{kl\,n}{}^m \partial_m \xi^n \ , \ N_{kl\,n} = \partial_n g_{kl} \ , \ N_{kl\,n}{}^m = \delta^m{}_k g_{ln} + \delta^m{}_l g_{kn} \ . \tag{G.50}$$

Die Invarianz der Wirkung unter infinitesimalen Koordinatentransformationen mit beliebigen Funktionen ξ^k führt daher zur Noetheridentität (G.29)

$$\frac{\hat\partial}{\hat\partial\xi^k}\big(\delta_\xi g_{mn}\frac{\delta W}{\delta g_{mn}}\big) = 0\ . \tag{G.51}$$

Für die Einstein-Wirkung (8.3) ohne kosmologische Konstante heißt dies, daß die kovariante Divergenz des Einsteintensors verschwindet,

$$\frac{\hat\partial}{\hat\partial\xi^k}\big(\delta_\xi g_{mn}\sqrt{\mathfrak g}\,G^{mn}\big) = \sqrt{\mathfrak g}\,D_m G^m{}_k = 0\ , \tag{G.52}$$

was auch aus der zweiten Bianchi-Identität (C.62) durch zweifache Kontraktion folgt.

Für die Materiewirkung gilt (G.51), wenn die Materiefelder ihre Bewegungsgleichungen erfüllen. Mit der Bezeichnung (7.4)

$$\frac{\delta W_{\text{Materie}}}{\delta g_{mn}} = -\frac{1}{2}\mathcal{T}^{mn} \tag{G.53}$$

für die Variationsableitung besagt die Noetheridentität

$$(\partial_k g_{mn})\mathcal{T}^{mn} - \partial_m(g_{kn}\mathcal{T}^{mn}) - \partial_n(g_{mk}\mathcal{T}^{mn}) = \sqrt{\mathfrak g}D_m\mathcal{T}^m{}_k = 0\ . \tag{G.54}$$

Dies ist Gleichung (7.3), aus der wir lokale Energie-Impulserhaltung und die Geodäteneigenschaft der Weltlinien frei fallender Teilchen abgeleitet haben.

Die Stromidentifizierungsgleichung (G.42) besagt, daß bis auf einen Verbesserungsterm $\partial_n B^{nm}$, $B^{mn} = -B^{nm}$, der Strom

$$j^m = \frac{1}{2}\xi^n N_{kl\,n}{}^m\mathcal{T}^{kl} = \mathcal{T}^{mn}\xi_n \tag{G.55}$$

derjenige erhaltene Strom ist, der zur Invarianz der Wirkung $W_{\text{Materie}}[g_{\text{B}},\phi]$ unter Isometrien der fest gewählten Hintergrundmetrik g_{B} gehört. Insbesondere sind die Isometrien der flachen Metrik $g_{mn} = \eta_{mn}$ die Poincaré-Transformationen und definitionsgemäß bilden die Ströme, die zur Invarianz unter Translationen gehören, den Energie-Impulstensor. Es stimmt also $\mathcal{T}^{mn}$ im flachen Raum bis auf Verbesserungsterme mit dem Energie-Impulstensor überein. Dies identifiziert die Variationsableitung (G.53), die als Quellenterm in den Bewegungsgleichungen der Metrik auftritt, als Energie-Impulstensordichte.

Daß die Quelle von Gravitation der Energie-Impulstensor ist, macht ein Äquivalenzprinzip aus: alle Materie erzeugt unabhängig von ihrer Zusammensetzung auf gleiche Art durch ihren Energie-Impulstensor Gravitation.

Die träge Masse ist der gravitationserzeugenden Masse gleich, denn der Energie-Impulstensor ist nicht nur Quelle der Gravitation, er bestimmt auch durch seine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Teilchen ihre Trägheit, weil er unter anderem die Impulsdichten enthält. Der Impulserhaltungssatz $\partial_m\mathcal{T}^{mi} + \Gamma_{mn}{}^i\mathcal{T}^{mn} = 0$ ist verantwortlich für Trägheit, denn er besagt, daß für ein Teilchen eine Abweichung vom freien Fall nur durch Impulsübertrag möglich ist, also durch eine Kraft, die einige Zeit wirkt.

G.4 Algebraisches Poincaré-Lemma

Nach dem Lemma von Poincaré (A.97) verschwindet in sternförmigen Gebieten die äußere Ableitung einer Differentialform $\omega(x,\mathrm{d}x)$ genau dann, wenn sie ihrerseits bis auf einen von x und $\mathrm{d}x$ unabhängigen Teil die äußere Ableitung einer Form $\eta(x,\mathrm{d}x)$ ist

$$\mathrm{d}\omega(x,\mathrm{d}x) = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega(0,0) + \mathrm{d}\eta(x,\mathrm{d}x)\ . \tag{G.56}$$

Für Differentialformen, deren Komponenten Jetfunktionen sind,

$$\omega = \omega(x,\mathrm{d}x,\phi,\partial\phi,\partial\partial\phi,\dots)\ , \tag{G.57}$$

wie sie als Integrand einer lokalen Wirkung $\mathscr{L}\,\mathrm{d}^Dx$ einer D-dimensionalen Feldtheorie auftreten und die nicht nur von den Koordinaten, sondern auch von Feldern ϕ und ihren Ableitungen abhängen,

$$\{\phi\} = \phi,\partial\phi,\partial\partial\phi,\dots\ , \tag{G.58}$$

gilt in sternförmigen Gebieten das algebraische Poincaré-Lemma

$$\mathrm{d}\omega(x,\mathrm{d}x,\{\phi\}) = 0 \Leftrightarrow \omega(x,\mathrm{d}x,\{\phi\}) = \omega(0,0,0) + \mathrm{d}\eta(x,\mathrm{d}x,\{\phi\}) + \mathscr{L}(x,\{\phi\})\mathrm{d}^Dx\ . \tag{G.59}$$

Dabei wirkt die äußere Ableitung $\mathrm{d} = \mathrm{d}x^m\partial_m$ auf Jet-Differentialformen durch Differentation der Koordinaten x^m, die Ableitung der Jet-Variablen ist algebraisch und fügt einen Index hinzu

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}x^m\partial_m\ ,\quad \partial_m x^n = \delta_m{}^n\ ,\quad \partial_k(\partial_l\dots\partial_m\phi) = \partial_k\partial_l\dots\partial_m\phi\ . \tag{G.60}$$

Die Felder genügen keinen Bewegungsgleichungen, das heißt die Variablen $\partial_k\partial_l\dots\partial_m\phi$ sind unabhängig bis auf die Tatsache, daß partielle Ableitungen in der Reihenfolge vertauscht werden können $\partial_k\dots\partial_m\phi{=}\partial_m\dots\partial_k\phi$.

Die Lagrangeform $\mathscr{L}(x,\{\phi\})\mathrm{d}^Dx$ in (G.59) ist nicht die Ableitung einer $D-1$-Form χ, wenn nicht alle Eulerableitungen

$$\frac{\hat\partial\mathscr{L}}{\hat\partial\phi^i} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^i} - \partial_m\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_m\phi^i)} + \dots \tag{G.61}$$

identisch in den Jet-Variablen verschwinden (4.38)

$$\mathscr{L}(x,\{\phi\})\,\mathrm{d}^Dx = \mathrm{d}\chi(x,\mathrm{d}x,\{\phi\}) \Leftrightarrow \frac{\hat\partial\mathscr{L}}{\hat\partial\phi^i} \equiv 0\ . \tag{G.62}$$

Eine wichtige Folgerung des algebraischen Poincaré-Lemmas ist, daß die Divergenz eines Vektorfeldes j^m genau dann identisch in den Jet-Variablen, also ohne Benutzung von Bewegungsgleichungen, verschwindet, wenn es seinerseits die Divergenz eines Feldes $B^{mn} = -B^{nm}$ ist

$$\partial_m j^m = 0 \quad\Leftrightarrow\quad j^n = \partial_m B^{mn}\ ,\quad B^{mn} = -B^{nm}\ . \tag{G.63}$$

Wir führen den Beweis [21] von (G.59) getrennt für p-Formen mit $p < D$ und mit $p = D$. Dabei beschränken wir uns auf den feldabhängigen Teil der Differentialformen, für den feldunabhängigen Anteil $\omega(x, \mathrm{d}x, 0)$ gilt (G.56). Wir unterstellen, daß ω analytisch in ϕ und polynomial in den Ableitungen $\partial\phi$, $\partial\partial\phi$, ... ist.

Für $p = D$, $\omega = \mathscr{L}\mathrm{d}^D x$, schreiben wir die Lagrangefunktion als Integral über ihre Ableitung

$$\mathscr{L}(x, \phi, \partial\phi, \dots) = \int_0^1 \mathrm{d}\lambda \, \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathscr{L}(x, \lambda\phi, \lambda\partial\phi, \dots) \ . \tag{G.64}$$

Der Beitrag von der unteren Integrationsgrenze $\mathscr{L}(x, 0, 0, \dots)$ verschwindet, da wir nur feldabhängige D-Formen betrachten. Die Ableitung $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\lambda}$ ist bis auf vollständige Ortsableitungen ein Vielfaches der Eulerableitung

$$\phi\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} + \partial_m\phi\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_m\phi)} + \dots = \phi\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}\phi} + \partial_m X^m \ , \quad X^m(\lambda, x, \{\phi\}) = \phi\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_m\phi)} + \dots \ . \tag{G.65}$$

Hier sind alle Ableitungen von $\mathscr{L}$ bei $(x, \lambda\phi, \lambda\partial\phi, \dots)$ zu nehmen.

Für $\mathscr{L}\mathrm{d}^D x$ folgt

$$\mathscr{L}(x, \phi, \partial\phi, \dots)\mathrm{d}^D x = \int_0^1 \mathrm{d}\lambda \, \phi\frac{\hat{\partial}\mathscr{L}}{\hat{\partial}\phi^i}\Big|_{(x,\lambda\phi,\lambda\partial\phi)}\mathrm{d}^D x + \mathrm{d}\chi \ , \tag{G.66}$$

mit $\chi = \chi_{m_2\dots m_D}\mathrm{d}x^{m_2}\dots\mathrm{d}x^{m_D}$ und

$$\chi_{m_2\dots m_D}(x, \{\phi\}) = \frac{1}{(D-1)!}\varepsilon^{m\,m_2\dots m_D}\int_0^1 \mathrm{d}\lambda \, X^m(\lambda, x, \{\phi\}) \ . \tag{G.67}$$

Dies zeigt (G.62) und (G.59) für D-Formen.

Der Beweis des algebraischen Poincaré-Lemmas für $p < D$ verwendet algebraische Operationen, die so gut wie möglich das Umgekehrte der äußeren Ableitung bewirken.

Auf Jet-Formen kann man algebraisch Operationen t^n definieren, die linear sind, also Term für Term wirken, und jeden Term nach der Produktregel $t^n(fg) = (t^n f)g + f(t^n g)$ abarbeiten. Dann ist t^n vollständig durch seine Wirkung auf die elementaren Variablen

$$\begin{aligned} &t^n(x^m) = 0 \ , \qquad t^n(\mathrm{d}x^m) = 0 \ , \\ &t^n(\phi^i) = 0 \ , \qquad t^n(\partial_{m_1}\dots\partial_{m_l}\phi^i) = \sum_{k=1}^{l}\delta^n_{m_k}\partial_{m_1}\dots\hat{\partial}_{m_k}\dots\partial_{m_l}\phi^i \ , \end{aligned} \tag{G.68}$$

festgelegt. Das Symbol ˆ bedeutet die Auslassung des damit bezeichneten Objektes. t^n läßt also eine Ableitung ∂_n von Feldern weg, genauer wirkt t^n als Ableitung nach Ableitungen der Felder ϕ, das heißt $t^n = \frac{\partial}{\partial(\partial_n)}$.

Offensichtlich vertauschen t^m und t^n, $[t^m, t^n] = 0$. Weniger offensichtlich ist

$$[t^n, \partial_m] = \delta^n_m N_{\{\phi\}} \ , \quad N_{\{\phi\}} = \phi^i\frac{\partial}{\partial\phi^i} + \partial_m\phi^i\frac{\partial}{\partial(\partial_m\phi^i)} + \dots \ . \tag{G.69}$$

Dabei zählt $N_{\{\phi\}}$ die Felder und ihre Ableitungen $\{\phi\}$; für Jet-Formen ω, die homogen vom Grad N in den Feldern und ihren Ableitungen sind, gilt $N_{\{\phi\}}\omega = N\omega$. Die Gleichung (G.69) gilt, wie man leicht nachrechnet, wenn man t^n und ∂_m auf elementare Variable anwendet, und sie gilt daher auch für Polynome, denn die linke und die rechte Seite sind linear und genügen der Produktregel.

Ebenso wie t^n ist die Ableitung nach Differentialen durch ihre Wirkung auf den elementaren Variablen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)}x^n = 0 \ , \qquad \frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)}\mathrm{d}x^n = \delta_m{}^n \ , \\ &\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)}\phi^i = 0 \ , \qquad \frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)}\partial_{m_1}\dots\partial_{m_l}\phi^i = 0 \ , \end{aligned} \tag{G.70}$$

und durch Linearität und die Produktregel

$$\frac{\partial(\omega\chi)}{\partial(\mathrm{d}x^m)} = \frac{\partial\omega}{\partial(\mathrm{d}x^m)}\chi + (-1)^{|\omega|}\omega\frac{\partial\chi}{\partial(\mathrm{d}x^m)} \tag{G.71}$$

auf allen Jet-Formen definiert. Die Gradierung $|\omega|$ ist 0 oder 1, je nachdem, ob der Formengrad von ω gerade oder ungerade ist. Man bestätigt leicht, daß das Differenzieren nach $\mathrm{d}x^m$ gefolgt von Multiplizieren mit $\mathrm{d}x^m$ den Formengrad abzählt. Für p-Formen ω erhalten wir

$$N_{\mathrm{d}x} = \mathrm{d}x^m\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)} \ , \quad N_{\mathrm{d}x}\omega = p\,\omega \ . \tag{G.72}$$

Wir betrachten die algebraische Operation

$$b = t^m\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)} \ , \tag{G.73}$$

die entgegengesetzt zur äußeren Ableitung d nicht mit einer Differentialform $\mathrm{d}x$ multipliziert, sondern danach differenziert, und die nicht nach x^m differenziert, sondern eine Differentation von den Feldern entfernt. Der Antikommutator

$$\{A, B\} = AB + BA \tag{G.74}$$

von b mit der äußeren Ableitung $\mathrm{d} = \mathrm{d}x^m\partial_m$ kann mit der Produktregel

$$\{A, BC\} = ABC + BCA = ABC + BAC - BAC + BCA = \{A, B\}C - B[A, C] \tag{G.75}$$

als Differenz eines Antikommutators und eines Kommutators geschrieben werden

$$\{b, \mathrm{d}\} = \{b, \mathrm{d}x^m\partial_m\} = \{t^m\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)}, \mathrm{d}x^n\}\partial_n - \mathrm{d}x^n[t^m\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)}, \partial_n] \ , \tag{G.76}$$

die ihrerseits mit $\{AB, C\} = A\{B, C\} - [A, C]B$ und mit $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ zerlegt werden können

$$\{t^m\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)}, \mathrm{d}x^n\} = t^m\{\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)}, \mathrm{d}x^n\} - [t^m, \mathrm{d}x^n]\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)} = t^m\delta_m{}^n \ , \tag{G.77}$$

$$[t^m\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)}, \partial_n] = t^m[\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)}, \partial_n] + [t^m, \partial_n]\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)} = \delta^m_n N_{\{\phi\}}\frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^m)} \ . \tag{G.78}$$

Wir erhalten die wichtige Relation

$$\begin{aligned}\{\mathrm{d}, b\} &= t^n \partial_n - \mathrm{d}x^n N_{\{\phi\}} \frac{\partial}{\partial(\mathrm{d}x^n)} \\ &= \partial_n t^n + \delta_n{}^n N_{\{\phi\}} - N_{\{\phi\}} N_{\mathrm{d}x} \\ &= P_1 + N_{\{\phi\}}(D - N_{\mathrm{d}x}) \ . \end{aligned} \tag{G.79}$$

Die algebraische Operation

$$P_1 = \partial_k t^k \tag{G.80}$$

ordnet eine Ableitung um, indem sie zunächst nach der Produktregel eine Ableitung wegnimmt und anschließend wieder differenziert. Da die äußere Ableitung d nilpotent ist, $\mathrm{d}^2 = 0$, vertauscht sie mit $\{\mathrm{d}, b\}$,

$$[\mathrm{d}, \{\mathrm{d}, b\}] = \mathrm{d}^2 b + \mathrm{d}b\mathrm{d} - \mathrm{d}b\mathrm{d} - b\mathrm{d}^2 = 0 \ . \tag{G.81}$$

Also gilt wegen (G.79)

$$[\mathrm{d}, P_1 + N_{\{\phi\}}(D - N_{\mathrm{d}x})] = 0 \ . \tag{G.82}$$

Zudem vertauscht d mit $N_{\{\phi\}}$, weil es die Zahl der Jet-Variablen $\{\phi\}$ nicht ändert und erhöht die Anzahl der Differentiale um 1, $N_{\mathrm{d}x}\mathrm{d} = \mathrm{d}(N_{\mathrm{d}x} + 1)$. Daraus ergibt sich

$$[\mathrm{d}, P_1] = -N_{\{\phi\}}\mathrm{d} \tag{G.83}$$

und die Folgerung

$$\mathrm{d}\omega = 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{d}(P_1\omega) = 0 \ . \tag{G.84}$$

Wir betrachten allgemeiner die algebraischen Operationen P_n

$$P_n = \partial_{k_1} \dots \partial_{k_n} t^{k_1} \dots t^{k_n} \ , \quad P_0 = 1 \ , \tag{G.85}$$

die zunächst n Ableitungen wegnehmen und dann wieder n-mal ableiten. Für jedes Polynom ω in den Ableitungen der Felder gibt es eine Zahl $\bar{n}(\omega)$, so daß

$$P_n\omega = 0 \quad \forall n \geq \bar{n}(\omega) \ , \tag{G.86}$$

denn jedes Monom von ω hat eine beschränkte Zahl von Ableitungen.

Aus den Vertauschungsrelationen (G.69) folgt die Rekursion

$$P_1 P_k = P_{k+1} + k N_{\{\phi\}} P_k \ , \tag{G.87}$$

mit der P_k iterativ durch P_1 und $N_{\{\phi\}}$ ausgedrückt werden kann

$$P_k = \prod_{l=0}^{k-1} (P_1 - l N_{\{\phi\}}) \ . \tag{G.88}$$

Aus (G.84) folgt auch $\mathrm{d}\omega = 0 \Rightarrow \mathrm{d}(P_1 - lN_{\{\phi\}})\omega = 0$ und daher $\mathrm{d}\omega = 0 \Rightarrow \mathrm{d}(P_k\omega = 0)$.

Wenn für eine p-Form ω, $p < D$, die zudem homogen vom Grad $N \geq 1$ in den Feldern und ihren Ableitungen ist, die äußere Ableitung verschwindet, $\mathrm{d}\omega = 0$, und wenn demnach $\mathrm{d}(P_k\omega) = 0$ ist, dann können wir mit (G.79) $P_k\omega$ für $k = 0, 1, \dots$ bis auf einen Term $P_{k+1}\omega$ als äußere Ableitung schreiben.

$$\begin{aligned} N(D-p)\omega &= -P_1\omega + \mathrm{d}(b\omega) \\ \mathrm{d}(bP_k\omega) &= P_1 P_k\omega + N(D-p)P_k\omega \\ &= P_{k+1}\omega + kNP_k\omega + N(D-p)P_k\omega \\ N(D-p+k)P_k\omega &= -P_{k+1}\omega + \mathrm{d}(bP_k\omega) \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{G.89}$$

Da ω polynomial von Ableitungen der Felder abhängt, bricht diese Rekursion nach endlich vielen Schritten ab (G.86). Für $p < D$ und $N > 0$ erhalten wir

$$\mathrm{d}\omega = 0 \Rightarrow \quad \omega = \mathrm{d}\left(b \sum_{k=0}^{\bar{n}(\omega)} \frac{(-)^k}{N^{k+1}} \frac{(D-p-1)!}{(D-p+k)!} P_k\omega \right) = \mathrm{d}\eta \ . \tag{G.90}$$

Damit ist das algebraische Poincaré-Lemma gezeigt. Die Einschränkung auf Differentialformen mit Homogenitätsgrad N ist unerheblich, denn nichthomogene Differentialformen lassen sich aus homogenen zusammensetzen, wenn sie, wie wir unterstellen, analytisch von den Feldern und ihren Ableitungen abhängen.

Das algebraische Poincaré-Lemma gilt nicht, wenn die Mannigfaltigkeit nicht sternförmig ist oder wenn die Felder ϕ Abbildungen nicht in die reellen Zahlen sondern in einen topologisch nichttrivialen Raum sind. Zum Beispiel sind die algebraischen Operationen t^n nicht definiert, wenn die Felder nur Werte auf einer Kugel $\phi^i\phi^i = \text{konst} > 0$ annehmen, denn dann folgt $\partial_n\phi^i\phi^i = 0$ und eine algebraische Operation $t^n = \frac{\partial}{\partial(\partial_n)}$ würde darauf angewendet zum Wiederspruch $\phi^i\phi^i = 0$ führen.

H Divergenz einer symmetrischen Jetfunktion

Die Divergenz einer in zwei Indizes symmetrischen Jetfunktion $C^{mn}(x, \phi, \partial\phi)$ verschwindet in sternförmigen Raumzeitgebieten genau dann, wenn sie die zweifache Divergenz einer Jetfunktion X^{kmln} mit den Permutationssymmetrien des Riemanntensors ist,

$$\begin{aligned} &C^{mn} = C^{nm} \text{ und } \partial_m C^{mn} = 0 \Leftrightarrow \\ &C^{mn} = \partial_k \partial_l X^{kmln} \ , \ X^{klmn} = -X^{lkmn} = -X^{klnm} \ , \ X^{klmn} + X^{lmkn} + X^{mkln} = 0 \, . \end{aligned} \tag{H.1}$$

Diese Identität gilt, obwohl sie nicht Tensoren betrifft.

Aus dem Poincaré-Lemma (G.59) folgt nämlich $C^{mn} = \partial_k B^{kmn}$ für jedes n, wobei $B^{kmn} = -B^{mkn}$ antisymmetrisch im ersten Indexpaar ist. Weil C^{mn} symmetrisch ist, gilt zudem

$$\partial_k (B^{kmn} - B^{knm}) = 0 \ , \tag{H.2}$$

also nach Poincaré-Lemma für jeden Wert des antisymmetrischen Indexpaares $m\,n$

$$B^{kmn} - B^{knm} = -2\partial_l A^{lkmn} \ , \ A^{lkmn} = -A^{klmn} = -A^{lknm} \ . \tag{H.3}$$

Dies kann man nach B^{kmn} auflösen, indem man die in klm zyklisch vertauschten Gleichungen geeignet addiert und subtrahiert (C.102),

$$B^{kmn} = -\partial_l (A^{lkmn} + A^{lmnk} - A^{lnkm}) \ . \tag{H.4}$$

Für $C^{mn} = \partial_k B^{kmn}$ besagt dies

$$C^{mn} = \partial_k \partial_l (A^{lmkn} + A^{knlm}) \ , \tag{H.5}$$

wobei wir beim zweiten Term ausgenutzt haben, daß über ein symmetrisches Indexpaar k, l summiert wird. Die Größe $3Y^{lmkn} = A^{lmkn} + A^{knlm}$ ist antisymmetrisch in ersten und im zweiten Indexpaar und symmetrisch unter Vertauschung der Indexpaare. Zieht man von $3Y^{lmkn}$ seinen total antisymmetrischen Anteil ab, so verändert sich C^{mn} nicht,

$$C^{mn} = 3\partial_k \partial_l Y^{lmkn} = \partial_k \partial_l X^{lmkn}, \ X^{lmkn} = 2Y^{lmkn} - Y^{mkln} - Y^{klmn} \ . \tag{H.6}$$

Es ist aber die Größe X^{lmkn} antisymmetrisch im ersten und im zweiten Indexpaar, symmetrisch unter Vertauschung beider Paare und die Summe über die zyklischen Permutationen der ersten drei Indizes verschwindet.

I Ableitung der Determinante

Jede lineare Transformation L bildet Basisvektoren e_j, $j = 1, 2, \dots, n$, auf Vektoren

$$L : e_j \mapsto L(e_j) = e_i L^i{}_j \tag{I.1}$$

ab. Dabei bezeichnet $L^i{}_j$ die Matrixelemente der zu L und zur Basis e_j gehörigen Matrix. Sie enthält in der Spalte j die Komponenten des transformierten j-ten Basisvektors. Die Vektoren $L(e_j)$ spannen ein Volumen auf, das proportional ist zu dem nichtverschwindenden Volumen, das die Basisvektoren e_j aufspannen. Der Proportionalitätsfaktor definiert die Determinante von L

$$\mathrm{vol}(L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)) = \det(L)\,\mathrm{vol}(e_1, e_2, \dots, e_n) \ . \tag{I.2}$$

Da Volumen linear in jedem seiner Argumente ist, können wir die Koeffizienten $L^i{}_j$ herausziehen und erhalten

$$\mathrm{vol}(L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)) = L^{i_1}{}_1 L^{i_2}{}_2 \dots L^{i_n}{}_n \mathrm{vol}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \ . \tag{I.3}$$

Das Volumen, das von einem Vektor mit sich selbst und weiteren Vektoren aufgespannt wird, verschwindet

$$\mathrm{vol}(e_1, \dots, a, \dots, a, \dots, e_n) = 0 \ . \tag{I.4}$$

Daraus folgt in Kombination mit der Linearität, daß das Volumen total antisymmetrisch unter Vertauschung seiner Argumente ist (A.45), und daher

$$\mathrm{vol}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \mathrm{vol}(e_1, e_2, \dots, e_n) \ , \tag{I.5}$$

wobei $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ total antisymmetrisch ist und $\varepsilon_{12\dots n} = 1$ ist (A.60). Die Determinante von L ist daher das folgende Polynom der Matrixelemente (B.60)

$$\det L = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} L^{i_1}{}_1 L^{i_2}{}_2 \dots L^{i_n}{}_n \ . \tag{I.6}$$

Allgemeiner gilt $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} L^{i_1}{}_{j_1} L^{i_2}{}_{j_2} \dots L^{i_n}{}_{j_n} = \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \det L$, denn beide Seiten sind total antisymmetrisch. Für hintereinander ausgeführte lineare Transformationen A und B ergibt sich hieraus unmittelbar der Determinantenproduktsatz, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ und $\det L = \det L^T$, denn $\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} L^{i_1}{}_{j_1} L^{i_2}{}_{j_2} \dots L^{i_n}{}_{j_n} = \det L^T \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

Durch Differenzieren folgt aus (I.6)

$$\frac{\partial \det L}{\partial L^i{}_j} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{j-1}\, i\, i_{j+1} \dots i_n} L^{i_1}{}_1 \dots L^{i_{j-1}}{}_{j-1} L^{i_{j+1}}{}_{j+1} \dots L^{i_n}{}_n =: M^j{}_i \ . \tag{I.7}$$

Es ist $M^j{}_i$ bis auf das Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ die Determinante derjenigen Untermatrix von L, die man durch Weglassen der Zeile i und der Spalte j erhält. Wenn wir $M^j{}_i$ mit $L^i{}_l$ multiplizieren und über i summieren, dann erhalten wir wieder die Determinante, wenn $l = j$ ist. Im Fall $l \neq j$ erhalten wir Null, weil in der Summe mit dem ε-Symbol schon $L^{i_l}{}_l$ steht und ε total antisymmetrisch ist. Also ist die Ableitung der Determinante einer Matrix ein Vielfaches der inversen Matrix

$$\frac{\partial \det L}{\partial L^i{}_j} = M^j{}_i = (\det L)\; L^{-1j}{}_i \;, \tag{I.8}$$

falls die inverse Matrix existiert. Die Ableitung der Determinante, der Minor von L mit Matrixelementen $M^j{}_i$, ist polynomial in den Matrixelementen von L.

Für Matrizen $L = 1 + N$ in der Umgebung der 1-Matrix heißt dies in erster Ordnung

$$\det(1+N) = 1 + N^i{}_j \frac{\partial \det L}{\partial L^i{}_j}_{|L=1} + O(N^2) = 1 + \operatorname{tr} N + O(N^2) \;, \tag{I.9}$$

wie man auch direkt aus (I.6) schließen kann. Hat N spezieller Rang 1, läßt es sich also als Produkt schreiben, $N^i{}_j = u^i\, w_j$, so verschwinden wegen $\varepsilon_{ij\ldots k}\, u^i\, u^j = 0$ alle Beiträge höherer Ordnung zur Determinante und es gilt

$$L^i{}_j = \delta^i{}_j + u^i\, w_j \;\Rightarrow \det L = 1 + u^i\, w_i \;. \tag{I.10}$$

Die Ableitung der Determinante einer einparametrigen Schar von Matrizen L_α ist nach Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\det L_\alpha = \frac{\partial \det L_\alpha}{\partial L^i{}_j}\frac{\partial}{\partial\alpha}L^i{}_j = \det L_\alpha\; L_\alpha^{-1j}{}_i\,\frac{\partial}{\partial\alpha}L^i{}_j \;. \tag{I.11}$$

Die Matrixelemente $(L^{-1})^i{}_j$ der inversen Matrix sind rationale Funktionen der Matrixelemente $L^m{}_n$ der Matrix L. Ihre Ableitung

$$\frac{\partial (L^{-1})^i{}_j}{\partial L^r{}_s} = -(L^{-1})^i{}_r (L^{-1})^s{}_j \tag{I.12}$$

erhält man, wenn man in der definierenden Relation $L^{-1}L = 1$ die Matrizen variiert $(\delta L^{-1})L + L^{-1}\delta L = 0$ und nach δL^{-1} auflöst

$$\delta L^{-1} = -L^{-1}(\delta L)L^{-1} \;. \tag{I.13}$$

Als metrisches Volumenelement bezeichnet man $\sqrt{\mathfrak{g}}\,\mathrm{d}^n x$, wobei

$$\mathfrak{g} = |\det g_{..}| \;, \quad (g_{..})_{kl} = g_{kl} \tag{I.14}$$

der Betrag der Determinante derjenigen Matrix $g_{..}$ ist, deren Elemente die Komponenten der Metrik sind. Die Ableitung von $\sqrt{\mathfrak{g}}$ nach den Koordinaten x^k ist nach Kettenregel

$$\partial_k \sqrt{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{g}}}\,\mathfrak{g}\, g^{rs}\,\partial_k g_{rs} = \sqrt{\mathfrak{g}}\,\Gamma_{kl}{}^l \;, \tag{I.15}$$

wobei $\Gamma_{kl}{}^m$ das Christoffelsymbol (C.106) ist, das im metrikverträglichen, torsionsfreien Paralleltransport auftritt. Daher gehört zu jedem kovariant erhaltenen Vektorstrom j^m, $D_m j^m = 0$, die Stromdichte $\sqrt{\mathfrak{g}}\, j^m$, die eine Kontinuitätsgleichung erfüllt,

$$\sqrt{\mathfrak{g}}\, D_m j^m = \sqrt{\mathfrak{g}}\left(\partial_m j^m + \Gamma_{mk}{}^m j^k\right) = \partial_m\!\left(\sqrt{\mathfrak{g}}\, j^m\right) \;. \tag{I.16}$$

J Das Schursche Lemma

Eine Menge von linearen Abbildungen K, die einen Vektorraum $\mathcal{V}$ auf sich abbilden und dabei einen echten Unterraum $\mathcal{U}$, $\{0\} \neq \mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, auf sich abbilden, heißt reduzibel. Wählt man die Basis für $\mathcal{V}$ so, daß die ersten Basisvektoren $\mathcal{U}$ aufspannen, so haben die zu den reduziblen Abbildungen gehörigen Matrizen einen gemeinsamen Block verschwindender Matrixelemente und sind von der Form

$$K = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \;. \tag{J.1}$$

Eine Menge von linearen Abbildungen K heißt irreduzibel, wenn keine anderen Unterräume als $\{0\}$ und $\mathcal{V}$ von allen Abbildungen K auf sich abgebildet werden.

Ist bekannt, daß eine Menge linearer Abbildungen K nur mit Vielfachen der $\mathbf{1}$ vertauscht, dann ist sie irreduzibel. Denn jeder Projektor auf einen invarianten Unterraum vertauscht mit jedem K und kann, weil er ein Vielfaches der $\mathbf{1}$ und ein Projektor ist, nur $\mathbf{1}$ oder 0 sein. Folglich ist der invariante Unterraum $\mathcal{V}$ oder $\{0\}$.

Wenn eine Abbildung W mit einer Abbildung K vertauscht, wenn also $WK = KW$ gilt, so bildet K für jede Zahl σ den Nullraum von $W - \sigma\mathbf{1}$,

$$\mathcal{N}_\sigma = \{v \in \mathcal{V} : (W - \sigma\mathbf{1})v = 0\} \;, \tag{J.2}$$

auf sich ab. Denn aus $(W - \sigma\mathbf{1})v = 0$ folgt $0 = K(W - \sigma\mathbf{1})v = (W - \sigma\mathbf{1})(Kv)$.

Ist die Menge von linearen Abbildungen K, die mit W vertauschen, irreduzibel und hat W einen Eigenvektor zu einem Eigenwert λ, dann ist der zugehörige Nullraum $\mathcal{N}_\lambda$ ein invarianter Unterraum und mindestens eindimensional, und folglich ist $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{V}$, das heißt $W = \lambda\mathbf{1}$. Demnach gilt das

Schursche Lemma: *Wenn eine lineare Selbstabbildung W eines Vektorraumes einen Eigenvektor hat und mit einer irreduziblen Menge von linearen Selbstabbildungen K vertauscht, dann ist $W = \lambda\mathbf{1}$ ein Vielfaches der Eins.*

Die Bedingung, einen Eigenvektor zu haben, ist für jede lineare Selbstabbildung eines komplexen, endlichdimensionalen Vektorraumes erfüllt, ebenso für alle symmetrischen, reellen Matrizen.

Als Gegenbeispiel hat die Drehung D_α (D.9)

$$D_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{J.3}$$

für $\alpha \neq n\pi$ keinen reellen, eindimensionalen, invarianten Unterraum, ist also reell irreduzibel. Obwohl die Drehung D_α irreduzibel ist, vertauscht sie mit $W = D_\alpha$, obwohl W

kein Vielfaches der Eins ist. Es ist eben die Voraussetzung des Schurschen Lemmas, daß W einen Eigenvektor habe, nicht erfüllt.

Sei eine Menge von linearen Selbstabbildungen K eines Vektorraum $\mathcal{V}$ irreduzibel und gebe es eine lineare Abbildung W von $\mathcal{V}$ in einen Vektorraum $\mathcal{W}$. Wenn jedes K durch W mit einer linearen Selbstabbildung K' von $\mathcal{W}$ verflochten ist,

$$K'W = WK \ , \tag{J.4}$$

und die Menge dieser K' ebenfalls irreduzibel ist, dann ist W entweder invertierbar und K und K' einander äquivalent, $K' = WKW^{-1}$, oder $W = 0$ verschwindet.

Denn das Bild $W\mathcal{V}$ ist ein invarianter Unterraum der Abbildungen K' und der Nullraum von W ist ein invarianter Unterraum der Abbildungen K. Falls nun W nicht verschwindet, so ist, weil die Menge der K' irreduzibel ist, $W\mathcal{V} = \mathcal{W}$, und der Nullraum von W ist nicht $\mathcal{V}$, sondern $\{0\}$, da die Menge der K irreduzibel ist. Also ist W invertierbar, oder W verschwindet.

Literaturverzeichnis

[1] Marek A. Abramowicz, Black Holes and the Centrifugal Force Paradox, Scientific American, March 1993, p. 26 – 31

[2] Vladimir I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1980

[3] Alain Aspect, Jean Dalibard and Gérard Roger, Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1804 – 1807

[4] J. Bailey et al., Precise Measurement of the Anomalous Magnetic Moment of the Muon, Il Nuovo Cimento 9A (1972) 369 – 432

[5] John S. Bell, On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, Physics 1 (1964) 195 – 200

[6] John S. Bell, Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1987

[7] Michael Victor Berry, Regular and Irregular Motion, in S. Jorna (ed.), Topics in Nonlinear Dynamics, Amer. Inst. Phys. Conf. Proceedings Nr.46 (1978) 16

[8] Luc Blanchet, Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries, Living Reviews in Relativity, (2002-3), zitiert am 6. Oktober 2004, http://relativity.livingreviews.org/Articles/Volume5/2002-3blanchet/

[9] Christian Böhmer, Eleven spherically symmetric constant density solutions with cosmological constant, Gen. Rel. Grav. 36 (2004) 1039-1054,

[10] Hermann Bondi, Einsteins Einmaleins, Droemersche Verlagsanstalt, München, 1971

[11] Hermann Boerner, Darstellung von Gruppen, Springer-Verlag, Berlin, 1967

[12] Nicolas Boulanger, Thibault Damour, Leonardo Gualtieri, Marc Henneaux, Inconsistency of interacting, multi-graviton theories, Nucl. Phys. B 597 (2001) 127 – 171

[13] Friedemann Brandt, Die Noethertheoreme, Antrittsvorlesung, Hannover, 12. April 2000, unveröffentlicht

[14] Friedemann Brandt, Norbert Dragon und Maximilian Kreuzer, The Gravitational Anomalies, Nucl. Phys. B 340 (1990) 187

[15] E. Calabi and L. Markus, Relativistic Space Forms, Annals of Mathematics, 75 (1962) 63 – 76

[16] Ignazio Ciufolini and Erricos Pavlis, A Confirmation of the General Relativistic Prediction of the Lense-Thirring Effect, Nature 431 (2004) 958

[17] Ignazio Ciufolini and John Archibald Wheeler, Gravitation and Inertia, Princeton Series in Physics, 1995

[18] John F. Clausner, Michael A. Horne, Abner Shimony and Richard A. Holt, Proposed experiment to test local hidden-variable theories, Phys. Rev. Lett 23 (1969) 880 – 884

[19] W. J. Cocke, Relativistic Corrections for Terrestrial Clock Synchronisation, Physical Review Letters, 16 (1966) 662 – 664, Errata 779, 1233

[20] Richard Courant und David Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik II, Springer-Verlag, Berlin, 1968

[21] Norbert Dragon and Friedemann Brandt, BRST symmetry and cohomology, in Strings, Gauge Fields, and the Geometry behind, ed. Anton Rebhan et al., World Scientific, New Jersey (2013) 3 – 86

[22] Norbert Dragon und Nicolai Mokros, Relativistischer Flug durch Stonehenge, http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon/, 1999

[23] S. Eidelman et al., The Review of Particle Physics, Phys. Lett. B 592 (2004) 1 http://pdg.lbl.gov

[24] Gert Eilenberger, Reguläres und chaotisches Verhalten Hamiltonscher Systeme, 14. Ferienkurs Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, Kernforschungsanlage Jülich, 1983

[25] C. W. F. Everitt et al., Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity, Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 221101

[26] Michel Frœschlé, François Mignard and Frédéric Arenou, Determination of the PPN Parameter γ with the Hipparcos Data, Proceedings from the Hipparcos Venice '97 symposium, 49 – 52 (1997)
http://astro.estec.esa.nl/hipparcos/venice-proc/poster01_03.ps.gz

[27] http://www.geo600.uni-hannover.de/

[28] Domenico Giulini, Special Relativity A First Encounter, Oxford University Press, 2005

[29] J. C. Hafele and Richard E. Keating, Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains, Science 177 (1972) pp. 166 – 167; Around-the-world atomic clocks: observed relativistic time values, Science 177 (1972) pp. 168 – 170

[30] Stephen William Hawking and George Francis Rayner Ellis, The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, Cambridge, 1973

[31] Sigudur Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, San Diego, 1978

[32] John David Jackson and Lev Borisovich Okun, Historical roots of gauge invariance, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 663 – 680

[33] Klaus Jänich, Vektoranalysis, Springer-Verlag, Berlin, 1992

[34] Rudolf Kippenhahn, Light from the Depths of Time, Springer-Verlag, Berlin, 1987

[35] Friedrich Kottler, Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie, Annalen der Physik, Vierte Folge, 56 (1918) 401 – 461, p. 443

[36] Martin D. Kruskal, Maximal extension of Schwarzschild metric, Phys. Rev. 119 (1960) 1743 – 1745

[37] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Killing.html

[38] Lew Landau and Evgeny Lifshitz, Klassische Feldtheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1973, §101

[39] Dierck-Ekkehard Liebscher and Peter Brosche, Aberration and relativity, Astron. Nachr. 319 (1998) 309 – 318

[40] http://www.ligo.caltech.edu/

[41] http://lisa.jpl.nasa.gov/

[42] Wilhelm Klingenberg, Eine Vorlesung über Differentialgeometrie, Springer-Verlag, Berlin, 1973

[43] Ludvig Valentin Lorenz, On the Identity of the Vibrations of Light with Electrical Currents, Phil. Mag. ser. 4, 34 (1867) 287 – 301

[44] Jürgen Moser, Stable and Random Motion in Dynamical Systems, Princeton University Press, Princeton, 1973

[45] http://www.mpe.mpg.de/~amueller/lexdt.html

[46] Tristan Needham, Visual Complex Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1997

[47] http://www.ohg-sb.de/lehrer/nemec/relativ.htm

[48] Emmy Noether, Invariante Variationsprobleme, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse (1918) 235 – 257

[49] Peter J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1986

[50] Achille Papapetrou, Spinning test-particles in general relativity. I, Proc. R. Soc. London A 209 (1951) 248 – 258

[51] Roger Penrose, The apparent shape of a relativistically moving sphere, Proc. Camb. Phil. Soc. 55 (1959) 137 – 139

[52] Roger Penrose and Wolfgang Rindler, Spinors and space-time, Cambridge University Press, Cambridge, 1984

[53] Volker Perlick, Ray Optics, Fermat's Principle, and Applications to General Relativity, Springer-Verlag, Berlin, 1999

[54] Stefan Schlamminger, Eugen Holzschuh, Walter Kündig, Frithjof Nolting und Jürgen Schur, Determination of the Gravitational Constant, in C. Lämmerzahl, C. W. Everitt, F. W. Hehl (ed.), Gyros, Clocks, Interferometers . . . : Testing Relativistic Gravity in Space, Lecture Notes in Physics 562, Springer-Verlag, Berlin, 2001, pp. 15 – 28

[55] Bernd Schmidt, Isometry Groups with Surface-Orthogonal Trajectories, Z. Naturforschg. 22a (1967) 1351

[56] Bernd Schmidt, Differential Geometry from a Modern Standpoint, in Werner Israel (ed.), Relativity, Astrophysics and Cosmology, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1973, pp. 289 – 322

[57] Ulrich Schreiber, Ringlasertechnologie für geowissenschaftliche Anwendungen, Mitteilungen aus dem Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, Band 8, Frankfurt a. M., 2000, ISBN 3-88648-092-5, http://www.wettzell.ifag.de/publ/publ.html

[58] Karl Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massepunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitz.-Ber. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. (1916) 189 – 196

[59] Gunter Seeber, Satellite Geodesy: Foundations, Methods, and Applications, de Gruyther, New York, 1993
B. Parkinson, J. Spilker Editors, Global Positioning System: Theory and Applications Volume I, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, DC, 1996

[60] Leo Stodolsky, The speed of light and the speed of neutrinos, Phys. Lett. B 201 (1988) 353

[61] John Lighton Synge,[1] Relativity: The General Theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964

[1]Der Name Synge wird Ssing gesprochen.

[62] George Szekeres, On the singularities of a Riemann manifold, Publ. Mat. Debrecen 7 (1960) 285 – 301

[63] James Terrell, Invisibility of Lorentz Contraction, Phys. Rev. 116 (1959) 1041 – 1045

[64] Hans Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie, Physikalische Zeitschrift 19 (1918) 33 – 39
Josef Lense und Hans Thirring, Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Mondes nach der Einsteinschen Gravitationstheorie, Physikalische Zeitschrift 19 (1918) 156 – 163

[65] William Paul Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton University Press, Princeton, 1997

[66] V. S. Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations, Springer-Verlag, New York, 1984

[67] Wolfgang Walter, Einführung in die Potentialtheorie, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971

[68] Hermann Weyl, Über die statischen, kugelsymmetrischen Lösungen von Einsteins „kosmologischen“ Gravitationsgleichungen, Phys. Z. 20 (1919) 31 – 34

[69] Clifford M. Will, Theory and Experiment in Gravitational Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1993
Clifford M. Will, The Confrontation between General Relativity and Experiment, http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2001-4/

[70] Nicholas M. J. Woodhouse, Special Relativity, Lecture Notes in Physics m6, Springer-Verlag, Berlin, 1992

Index