Quantentheorie II Universität Hannover

SS 1999 **KLAUSUR** 17. Juli 1999

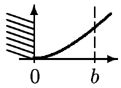
2 volle Stunden . Bei $\geq$ **9** Punkten wird der Klausurerfolg garantiert. Bitte Name auf j e d e s Blatt !

1) Groß–x–Asymptotik zu $(-\partial_x^2 + e^{2|x|})\,\varphi = E\,\varphi$. Zu $\varphi(x) = e^{-f(x)}$ bekommt φ'' zwei Terme. Welcher gibt den bei $x \to +\infty$ führenden Term von f, nämlich $f_{\mathrm{as}} = ?$ Um welchen Faktor war also der in φ'' vernachlässigte Term kleiner ? 2

2) In Bornscher Näherung soll zum Zentralpotential $V \sim r^{-2}$ der differentielle Streuquerschnitt $\sigma(\vartheta)$ ermittelt werden — und zwar ohne irgendwelche Vorfaktoren. Nur die Potenz von $\sin(\vartheta/2)$ interessiert ((wer viel weiß, braucht hier fast nur nachzudenken)) . 3

3) Der Operator $L \ := \ \partial_x + 2x$ ist nicht translationsinvariant. Die Greensche Funktion $G(x, x')$ soll gefunden werden, welche für $x < x'$ verschwindet. Probe ! Können Sie auch die allgemeine Lösung der G–Dgl aufschreiben, sowie jene mit $G(0, x') \equiv 0$? 3

4) WKB : für halbseitig unendliche Potentiale soll die Lösbarkeitsbedingung zu Papier, und zwar in der Form $\int_?^? dx \ ? \ = \hbar\pi \left(\ ? \ + n \right)$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$



Das Resultat des Anschließens bei b kann der Vorlesung entnommen werden.

Welche Energien E_n ergeben sich zum Halb–Oszillator ? $\int_0^b dx \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)} = \pi E/(2\omega)$ darf verwendet werden. Jedoch : welchen Wert hatte hier b ? 4

5) $H = \dfrac{1}{2m}\left(\vec{p} + q\vec{E}\,t\right)^2$, $\psi(\vec{r}, 0) = e^{i\vec{k}\vec{r}}$, $\psi(\vec{r}, t) = ?$ Der erste Schritt könnte eine Eichtransformation $\psi = e^{-i\,??}\,\varphi$ sein. Am Ende soll $\psi(\vec{r}, t)$ explizit dastehen. 4

6) Jemand will das Anderson mixing model (unten angegeben im Schrödinger–Bild) zu kleinen w_k störungstheoretisch behandeln : $H = H_0 + H_1$ mit

$$H_0 = \sum_k \varepsilon_k\, a_k^\dagger a_k + E\, c^\dagger c \quad \text{und} \quad H_1 = \sum_k w_k\,(a_k^\dagger c + c^\dagger a_k) \qquad (\ \{c, c^\dagger\} = 1 \ \text{ etc. })$$

(a) Dazu braucht er $H_1(t) = ?$ im Wechselwirkungsbild. $(\ \hbar = 1\ )$

(b) Für andere Fragen werden auch noch die Kommutatoren $[H, a_q] = ?$ und $[H, c] = ?$ benötigt. ((Zur Kontrolle ein Resultat: $[H, c] = -Ec - \sum_k w_k a_k$)) $\frac{5}{2} + \frac{5}{2} =$ 5

7) Photonen seien durch eine asymmetrische periodische Randbedingung (extrem eng in z–Richtung) auf die 2D xy–Ebene gezwungen. Bei Temperatur T gibt es nun in einem Flächenausschnitt L^2 $\quad N = \dfrac{\pi}{6}\left(\dfrac{L\,T}{\hbar\, c}\right)^2$ Photonen. Wie kommt das heraus ? (($\int_0^\infty dx\ x/(e^x - 1) = \pi^2/6$)) Können Sie auch zeigen, daß sich der 3D Ausdruck für die Photon–Anzahl im Limes $L_3 \to 0$ in der gewünschten Weise verändert ? 3

8) Die bekannte Matrix S, welche Dirac–Spinoren Lorentz–transformiert, soll speziell für Drehung um die x–Achse und in Dirac–Darstellung $\left(\ \ldots, \ \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ explizit gemacht werden : erst als e–hoch–Matrix und schließlich wirklich als 4×4–Matrix. Was widerfährt also dem Spinor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bei Drehung um $\vec{e}_1$? Und was insbesondere wenn der Drehwinkel $\varphi = 2\pi$ ist ? 3

9) Wenn jemand die Bewegungsgleichung $\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\,\phi + \alpha\,\phi^3 = 0$ eines Bose–Feldes ϕ kennt (und sonst nichts weiß), wie erhält er im Variations–Rückwärtsgang die Wirkung S seiner Physik ? 2

10) Zur ϕ^6–Theorie, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{6!}\phi^6$, will ein Selbstenergie–Diagramm zu sehen sein. 1

$\sum$ 30

LÖSUNGEN

1) $\varphi'' = (f'^{\,2} - f'')\, e^{-f}$, der erste (z.B. nach Blick auf P2-Lö.) , Dgl: $\varphi'' \approx e^{2x}\varphi$
$f'^{\,2} = e^{2x}$, $f' = e^x$, $f = (C)\, e^x$, $(C)\, f'^{\,2} e^{-x} = f''$.

2) $\sigma \sim |\,\widetilde{V}(\vec{k} - \vec{k}')\,|^2$, $\mathrm{FT}\left\{\frac{1}{r}\right\} \sim \frac{1}{k^2} \quad \curvearrowright \quad \mathrm{FT}\left\{\frac{1}{r^2}\right\} \sim \frac{1}{k} \quad \curvearrowright$
Verglichen mit Rutherford nur halb so viele Potenzen : $\sigma \sim \dfrac{1}{\sin^2(\frac{\vartheta}{2})}$.

3) $(\partial_x + 2x) G(x,x') = \delta(x - x')$, $G_{\text{hom}} = C(x') e^{-x^2}$, $G = \theta(x - x') C(x') e^{-x^2}$
$C(x') = e^{x'^{\,2}}$ damit Sprung 1. , Probe .... , $G_{\text{allg}} = f(x') e^{-x^2} + \theta(x - x')\, e^{x'^{\,2} - x^2}$
$0 \stackrel{!}{=} f(x') + \theta(-x')\, e^{x'^{\,2}}$, $G = e^{x'^{\,2}-x^2}\Big(\theta(x-x') - \theta(-x')\Big)$.

4) $\varphi_{\text{innen}} \sim \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\hbar}\int_x^b dx'\, p(x')\right) \stackrel{!}{=} 0$ bei $x = 0$, also cos–Inhalt = ungerade $\cdot \frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\hbar}\int_0^b \ldots = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot(2n+1)$ damit genau ab $n = 0$ positiv. Mit $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$ ist also
$\int_0^b dx\, p(x) = \hbar\pi\left(\frac{3}{4} + n\right)$, $\ldots \stackrel{!}{=} \frac{\pi E}{2\omega} \quad \curvearrowright \quad E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + [\,2n+1\,]\right)$, $b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$.

5) $i\hbar\dot{\psi} = H\psi$, $\psi = e^{-i\frac{q}{\hbar}\chi}\varphi \quad \curvearrowright \quad i\hbar\dot{\varphi} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\nabla\chi + q\vec{E}\,t\right)^2 \varphi - q\dot{\chi}\varphi$. Nun nahe–
liegende Wahl : $\chi = \vec{E}\,\vec{r}\,t \quad \curvearrowright \quad i\hbar\dot{\varphi} = \left[\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - q\vec{E}\,\vec{r}\right]\varphi$ Lösung s. Vorlesung,
woraufhin in ψ zwei e's kompensieren : $\psi = e^{-i\frac{q}{\hbar}\vec{E}\,\vec{r}\,t}\,(2.1) = e^{i\vec{k}\,\vec{r}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\, \frac{\hbar^2 \vec{k}^{\,2}(t')}{2m}}$.

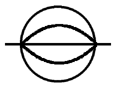
6) **(a)** $H_1(t) = e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t} = \sum_q w_q \Big(a_q^\dagger(t) c(t) + c^\dagger(t) a_q(t)\Big)$. Linkes e hat q–Term
mehr : $a_q^\dagger(t) = e^{it\sum \varepsilon_k a_k^\dagger a_k}\, a_q^\dagger\, e^{-it\sum\cdots} = e^{it\varepsilon_q}\, a_q^\dagger$, $a_q(t) = \left[a_q^\dagger(t)\right]^\dagger = e^{-it\varepsilon_q}\, a_q$. Raten :
$c^\dagger(t) = e^{itE}\, c^\dagger$, $c(t) = e^{-itE}\, c \quad \curvearrowright \quad H_1(t) = \sum_k w_k\Big(\, e^{i(\varepsilon_k - E)t}\, a_k^\dagger c \;+\; \text{h.c.}\Big)$.

(b) $a_q a_k^\dagger + a_k^\dagger a_q = \delta_{qk}$, $[\,H\,,\,a_q\,] = \sum_k \varepsilon_k\,[\,a_k^\dagger a_k\,,\,a_q\,]_1 + \sum_k w_k [\,a_k^\dagger c\,,\,a_q\,]_2$
$[\;]_1 = a_k^\dagger a_k a_q - (\delta_{qk} - a_k^\dagger a_q) a_k = -\delta_{qk} a_q$, $[\;]_2 = a_k^\dagger c a_q - (\delta_{qk} - a_k^\dagger a_q) c = -\delta_{qk} c \quad \curvearrowright$
$[\,H\,,\,a_q\,] = -\varepsilon a_q - w_q c$. $[\,H\,,\,c\,] = E\,[\,c^\dagger c\,,\,c\,]_3 + \sum_k w_k\,[\,c^\dagger a_k\,,\,c\,]_4$
$[\;]_3 = 0 - (1 - c^\dagger c) c = -c$, $[\;]_4 = c^\dagger a_k c - (1 - c^\dagger c) a_k = -a_k$, — OK .

7) $N = 2\sum_{\vec{k}}^{2\,\mathrm{D}} \frac{1}{e^{\beta\hbar c k} - 1} = 2\frac{L^2}{(2\pi)^2}\, 2\pi \int_0^\infty dk\, k\, \frac{1}{e^{\beta\hbar c k} - 1}$, Integral $= \left(\frac{1}{\beta\hbar c}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6}$, qed.
$N^{3\,\mathrm{D}} = 2\sum_{\vec{k}}^{2\,\mathrm{D}} \sum_{k_3} \frac{1}{e^{\beta\hbar c\sqrt{\vec{k}^{\,2} + k_3^2}} - 1}$, $k_3 = \frac{2\pi}{L_3} n_3 \to \infty$ außer zu $n_3 = 0$, $\sum_{k_3} \to$ nur dieser Term .

8) $S = \exp\left[\frac{i}{2}\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \ldots = \exp\left[\frac{i}{2}\varphi \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}\right]$
$c := \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, $s := \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, $S = c + i\,s\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} c & is \\ is & c \end{pmatrix}$.
Die oberen beiden Komponenten des Spinors werden $\begin{pmatrix} c \\ is \end{pmatrix}$ und zu 2π wie erwartet $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9) $0 = \int d^4x\left(\eta\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\eta\phi + \alpha\eta\phi^3\right) = \int d^4x\left(-(\partial_\mu\eta)\partial^\mu\phi + \left[\frac{m^2}{2}(\phi+\eta)^2 + \alpha\frac{1}{4}(\phi+\eta)^4\right]_{\eta^1}\right)$
$S = \int d^4x\left(-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)\partial^\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\alpha}{4}\phi^4\right)$ (oder auch alle drei Vorzeichen entgegengesetzt) .

10)  (Es sind zwar nur Beinstümpfe, aber najaa : den Korrektoren sei jede Länge recht.) .