

Über den Regenbogen

Die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Frequenz nennt man Dispersion. Sie hat verschiedene Brechung und somit unterschiedlich starke Ablenkung von Licht verschiedener Wellenlängen durch das Prisma zur Folge. Für transparente, nichtabsorbierende Stoffe gilt, daß der Brechungsindex für langwellige Strahlen (niedrige Frequenz) kleiner ist als für kurzwellige (hohe Frequenz), d. h. rotes Licht wird weniger stark gebrochen als blaues.

Die Dispersion bei der Brechung ist auch die Hauptursache der Buntheit des Regenbogens; aber hier liegen die Dinge doch ein bißchen verwickelter als beim Prisma.

Die geometrischen Verhältnisse, wie beim Betrachten eines Regenvorhanges auf der der Sonne abgewandten Seite ein Regenbogen zustande kommt, sind in Bild 1 gezeigt.

Es ist eingezeichnet, wie an jedem Tröpfchen das Licht verschiedener Wellenlängen (durch Strichlängen angedeutet) unter anderen Winkeln zurückgeworfen wird. Der Beobachter, der die einzelnen Tropfen nicht unterscheiden kann, sieht einen bunten Bogen in unbestimmter Entfernung, mit dem Gegenpunkt der Sonne als Mittelpunkt und einem „Radiuswinkel“ (halber Öffnungswinkel des Kegels) von ca. 42° .

Untersuchen wir zuerst, wie es zur Bevorzugung eines Streuwinkels bei vorgegebener Wellenlänge des Lichts kommt. Der Strahlengang eines Bündels parallel einfallender Lichtstrahlen ist in Bild 2 veranschaulicht. Ein auf die Tropfenmitte treffender Lichtstrahl wird in sich selbst zurückgeworfen; je weiter die einfallenden Strahlen sich von der Achse entfernen, desto größer wird zunächst der Winkel zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl, bis dieser ein Maximum erreicht und dann wieder abnimmt. In der Abbildung sieht man, daß die reflektierten Strahlen in der Umgebung

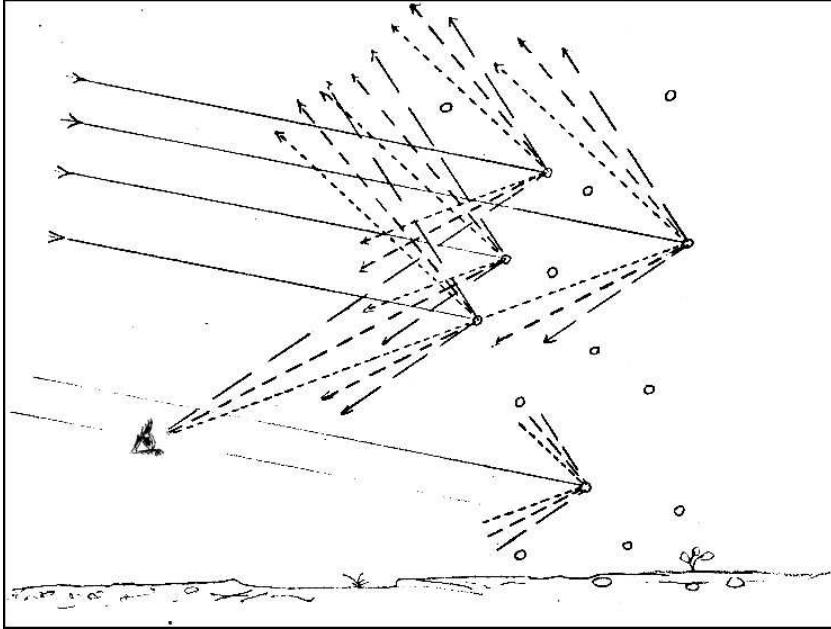


Bild 1: Die Entstehung des Regenbogens: Die Tropfen in einem Regenvorhang streuen das lang- mittel- und kurzwellige Licht unter etwas verschiedenen Winkeln zurück.

des Maximalwinkels sehr dicht liegen, und wohl auch, daß in einen kleinen Winkelbereich innerhalb des Maximalwinkels die meiste Intensität gestreut wird. Diese Erklärung des Regenbogens wurde von Descartes im Jahre 1637 angegeben. (Den „strahlenoptischen Regenbogenwinkel“ berechnet man, indem man in der angedeuteten Extremwertaufgabe den maximalen Ablenkungswinkel bestimmt. Man erhält für eine innere Reflexion

$$\Theta_0 = 4 \arcsin \left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \right) - 2 \arcsin \left(\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \right), \quad (1)$$

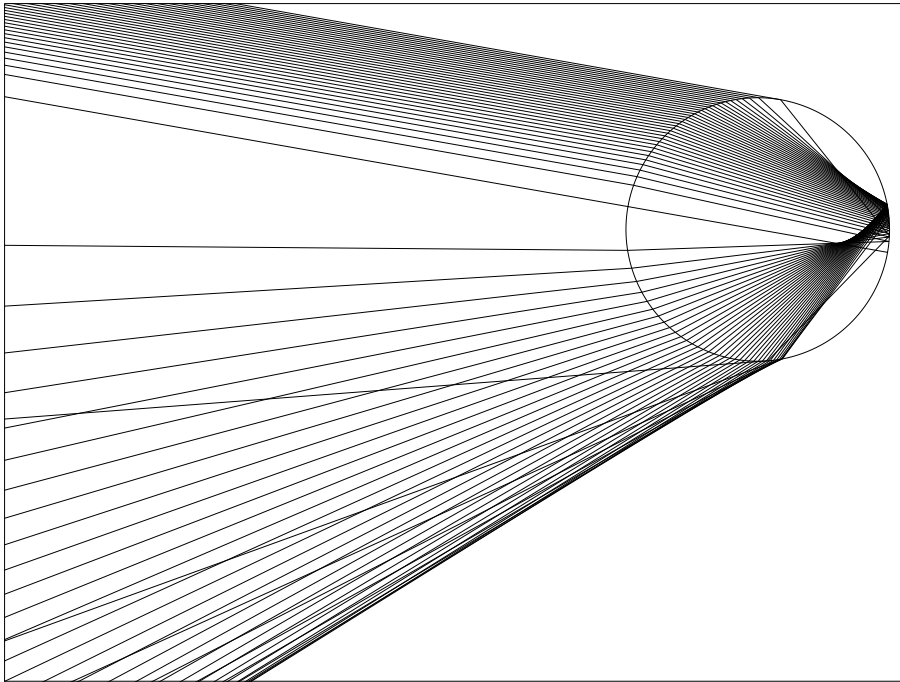


Bild 2: Geometrisch-optische Erklärung des Regenbogens. Von links oben fällt Licht ein, veranschaulicht durch ein Bündel paralleler Strahlen, von dem nur der obere Teil gezeichnet ist. Die reflektierten Strahlen erfüllen das Innere eines Kegels, dessen halber Öffnungswinkel der Regenbogenwinkel ist.

daraus erhält man für Wasser mit $n = 1,333$ den Winkel $\Theta_0 = 42^\circ$).

In Bild 3 ist qualitativ die zugehörige Intensitätsverteilung angegeben, die sich aus der obigen Überlegung ergibt. Aber diese Intensitätsverteilung ist mit der Wellennatur des Lichts unverträglich. So wie es auf einer Wasseroberfläche keine Wellen wie in Bild 4 gezeichnet gibt, so gibt es auch ohne materielle Begrenzung keine scharf abgeschnittenen elektromagnetischen Wellen.

Bemerkenswert ist die Abfolge von Helligkeitsmaxima und Mi-

4

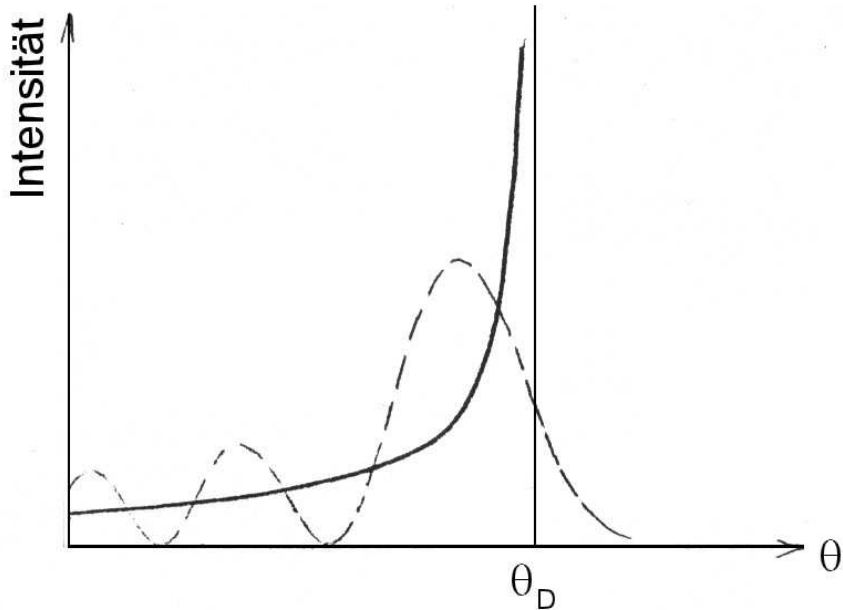


Bild 3: Nur qualitativ: Intensitätsverteilung im Regenbogen nach Descartes (durchgezogene Linie) und Airy (gestrichelt)

nima innerhalb des Regenbogens. Der Grund dafür ist, daß es hier jeweils zwei verschiedene geometrisch-optische Strahlen gibt, die unter dem gleichen Winkel zurückgeworfen werden, siehe Bild 2, die aber verschiedene optische Weglängen durchlaufen. Mit abnehmendem Winkelabstand (vom Gegenpunkt der Sonne aus gemessen) wird der Wegunterschied zwischen den beiden Strahlen immer größer, und so kommt es abwechselnd zur gegenseitigen Verstärkung oder Abschwächung. Bild 3 zeigt gestrichelt auch die unter Berücksichtigung der Wellennatur von Airy 1838 näherungsweise berechnete Intensitätsverteilung. Im Gegensatz zur Descartesschen

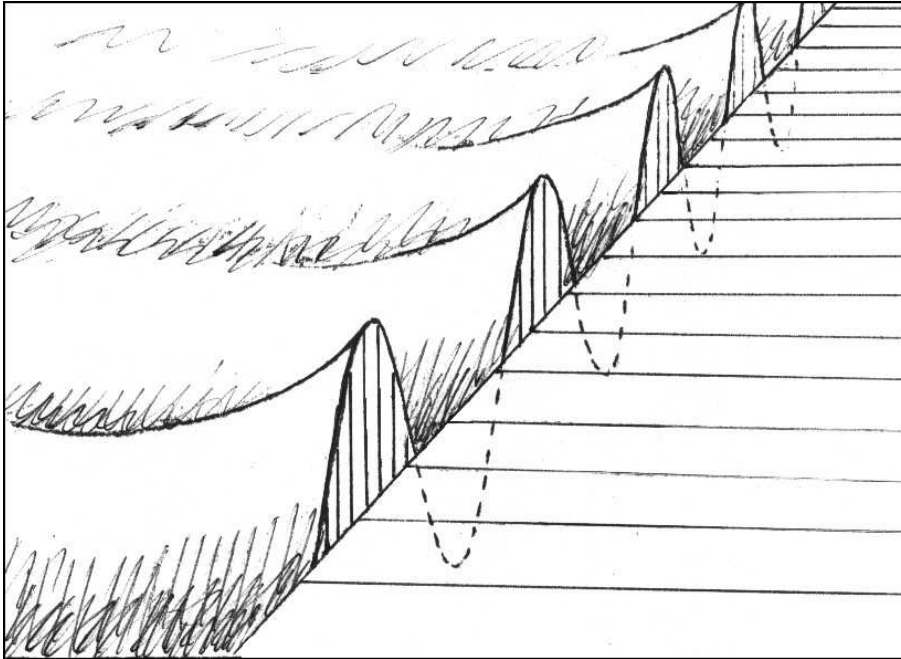


Bild 4: Ohne äußere Begrenzung scharf abgeschnittene Wellen sind unmöglich

hängt die von Airy berechnete Verteilung von der Tropfengröße ab.

Da der maximale Streuwinkel vom Brechungsindex abhängt, und dieser wieder von der Wellenlänge, ergibt sich eine Aufspaltung des Bogens in verschiedene Farben.

Das ganze Bild verwischt sich noch etwas wegen der endlichen Winkelausdehnung der Sonne: Regenbogenfarben sind keine Spektralfarben! (Weitere Faktoren, die das Bild des Regenbogens komplizieren, sind uneinheitliche Tropfengrößen, bei größeren Tropfen Abplattung durch den Luftwiderstand.)

Der Himmel innerhalb des Hauptregenbogens ist heller als außerhalb, und manchmal sieht man knapp innerhalb des Bogens wei-

tere grünliche und rötliche überzählige Bögen infolge der Nebenmaxima der Airy-Funktion. Diese sind nur unter günstigen Bedingungen zu sehen. Häufiger kann man den zweiten Regenbogen beobachten (unter einem Winkel von ca. $52\frac{1}{2}^\circ$), der durch zweimalige innere Reflexion des Lichts im Tropfen zustande kommt. Für den zweiten Bogen ist der Regenbogenwinkel der minimale Ablenkungswinkel, d. h. außerhalb des zweiten Bogens ist der Himmel wieder heller, erster und zweiter Bogen sind durch einen dunklen Bereich getrennt (Goethe schreibt „verbunden“).

Beugung und Interferenz: Das Huygenssche Prinzip

Eine Erklärung der Beugungsphänomene liefert das Huygenssche Prinzip, demzufolge man sich alle Punkte einer Wellenfläche als Ausgangspunkte von neuen Kugelwellen denken kann, deren Einhüllende dann die Wellenfläche zu einem späteren Zeitpunkt darstellt. Fresnel änderte das Verfahren ab: wieder ist jeder Punkt einer herausgegriffenen Wellenfläche als Ursprung neuer Wellen zu verstehen, und diese sind an dem betrachteten Ort, unter Berücksichtigung ihrer Phasenverschiebung gegeneinander, zu addieren. Die mathematische Form dieser mehr intuitiv gefundenen Vorschrift stammt von Kirchhoff und ist doch noch ein bißchen komplizierter, als man nach den Fresnelschen Vorstellungen denken würde, obwohl auch hier noch Näherungsannahmen nötig sind. Für uns wichtig ist ein Faktor $k = 2\pi/\lambda$ (λ ist die Wellenlänge) vor dem Ausdruck für die Amplitude, auf den man allein aus den Huygens-Fresnelschen Vorstellungen nicht ohne weiteres kommt. (Der daran interessierte Leser findet die Kirchhoffsche Formel in Lehrbüchern der theoretischen Physik, Optik oder Elektrodynamik.)

Eine numerische Näherungsrechnung

Versuchen wir jetzt, die Huygens-Fresnel-Kirchhoffschen Vorstellungen zu verwenden, um die Farben des Regenbogens tatsächlich auszurechnen. Wir betrachten nur einen Wassertropfen und das von ihm zurückgeworfene Licht. Die Amplitude dieses Lichtes muß sich als Überlagerung der von einem kreisförmigen Scheibchen mit der Querschnittsfläche des Tropfens ausgehenden „Sekundärwellen“ schreiben lassen. Ich wähle als Kontrollfläche einen aus der Tangentialfläche senkrecht zum einfallenden Strahl geschnittenen Kreis: auf diesem sind die Amplituden und Phasen konstant. An der Innenseite des Tropfens erfolgt eine Reflexion (wir beschränken uns hier auf die Betrachtung des Hauptregenbogens; der Nebenregenbogen kommt durch zweimalige Reflexion zustande).

Die einzelnen Sekundärwellen legen verschieden lange Wege im Tropfen zurück, das hat Phasenunterschiede in den letztlich auf den Beobachter zulaufenden Wellen zur Folge. Für die Phasenunterschiede ist die optische Weglänge maßgeblich, also Weg mal Brechungsindex. Um die Unterschiede in der optischen Weglänge zu berechnen, führe ich eine zweite Kontrollfläche ein, ab der alle Wege ins Auge des Beobachters wieder gleich lang sind.

Entlang derjenigen „Strahlen“, die dem von der geometrischen Optik vorgeschriebenen Weg folgen (in Bild 5 rot gezeichnet), kann man die optische Weglänge leicht ausmessen (oder ausrechnen), aber wir wollen alle von der ersten Kontrollfläche (K1) ausgehenden Elementarwellen aufsammeln, also auch die, die, wenn sie der geometrischen Optik folgten, nicht in das Auge des Beobachters gelangten.

Nach den Huygensschen Vorstellungen sind es jeweils diejenigen Teilwellen, die am schnellsten vorankommen, also den kürzesten optischen Weg (unter den benachbarten Wegen) zurücklegen, deren Einhüllende wir zur Konstruktion der sich ergebenden

8

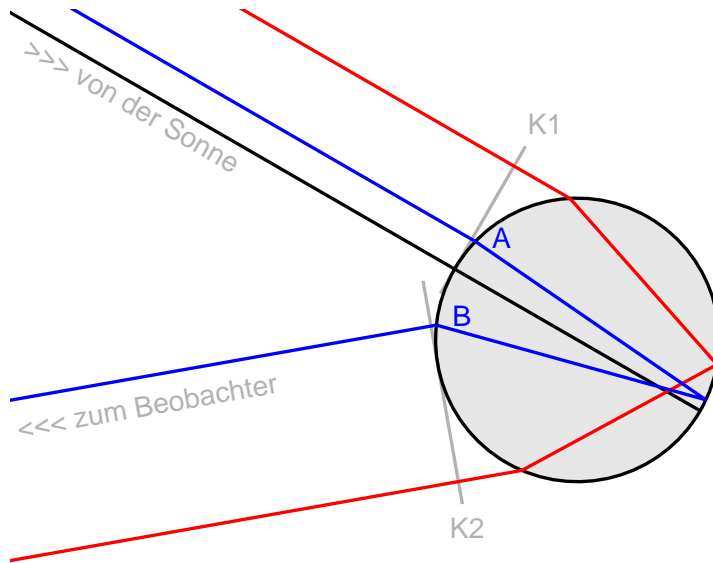


Bild 5: Versucht man bei der Berechnung der optischen Weglänge dem Brechungsgesetz Genüge zu tun (Punkt A), so muß man später doch einen diesem widersprechenden Knick im Strahlengang einführen (Punkt B)

Wellenflächen verwenden. Die „Nachzügler“ interferieren sich weg. (Genau genommen sind es nicht nur die jeweils kürzesten Wege von einem Punkt zum anderen, denen die Lichtstrahlen folgen. Auch die längsten Wege unter den benachbarten kommen in Frage, oder, noch genauer ausgedrückt, alle Wege, deren Länge sich bei einer „infinitesimal“ geringen Abweichung vom Weg nicht ändert.) Wenn wir für den in der Skizze blau gezeichneten Strahl den geometrisch-optischen Weg verfolgen, müssen wir an irgend einer Stelle einen Knick einbauen; die entlang dieses Weges ausgemessene optische „Entfernung“ zwischen den Kontrollflächen ist aber bestimmt nicht die, die bei festgehaltenem Abstand vom Zentralstrahl und fest-

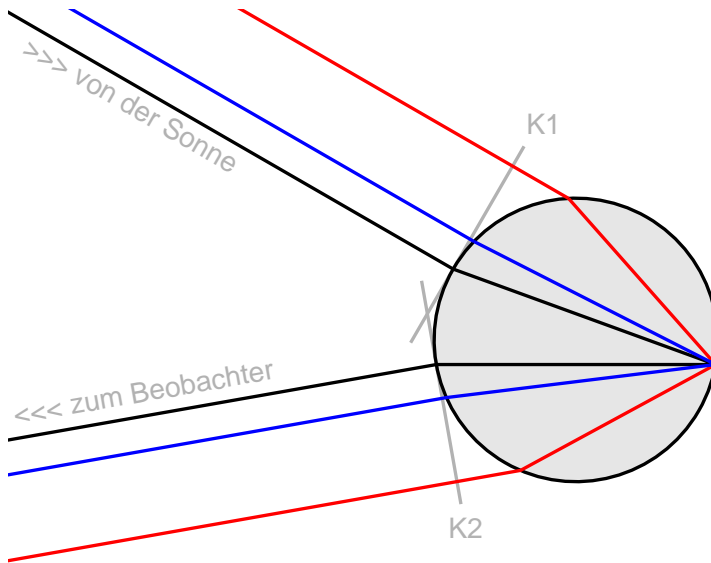


Bild 6: Skizze zur Berechnung des Regenbogens: Zur Bestimmung der von den einzelnen zu überlagernden Teilwellen zurückzulegenden optischen Weglängen zeichnen wir die Wege gerade vom Eintrittspunkt in den Tropfen bis zum Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der hinteren Fläche des Tropfens und von dort spiegelbildlich weiter, ohne am Übergang Luft-Wasser das Snellsche Brechungsgesetz zu beachten.

gehaltener Ausstrahlrichtung die kürzeste (bzw. extremal) ist. Wir messen daher die von den einzelnen Teilwellen zurückzulegenden Wege entlang von Pfaden, die in Bild 6 verdeutlicht werden.

Nach diesen Vorüberlegungen ist die Rechnung nicht besonders kompliziert. Es sind die von der ersten Kontrollfläche K1 ausgehenden Teilwellen mit den Phasen, wie sie in der zweiten Kontrollfläche K2 ankommen, zu summieren (integrieren), das Ergebnis ist zu quadrieren und der zeitliche Mittelwert zu bilden, dann erhält man

die in Richtung des Streuwinkels Θ abgestrahlte Intensität – bei gegebener Wellenlänge des Lichts und gegebenem Brechungsindex.

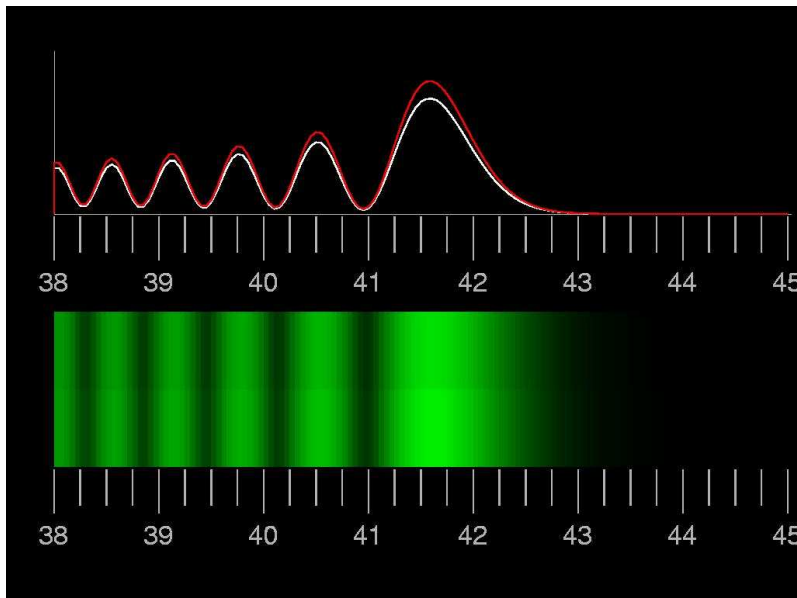


Bild 7: Intensitätsverteilung des Streulichts (in willkürlichen Einheiten), berechnet für $\lambda = 550 \text{ nm}$ und Tropfendurchmesser 0.5 mm , im Bereich des Regenbogenwinkels. Die Rechnungen für dreidimensionale Geometrie (Weiße Kurve und obere Hälfte des Streifens) und für ebene Geometrie (rote Kurve) unterscheiden sich kaum (abgesehen von der willkürlichen Normierung). Die Skala gibt den Winkel, vom Gegenpunkt der Sonne aus gemessen.

Genau genommen müßte man mit dreidimensionalen Tröpfchen rechnen. Das habe ich gemacht und dann das Ergebnis mit der einfacheren Rechnung in der Ebene verglichen: der Unterschied ist gering (siehe Bild 7), aber die Rechenzeiten unterscheiden sich erheblich, daher habe ich für die bunten Bilder nur zweidimensional gerechnet.

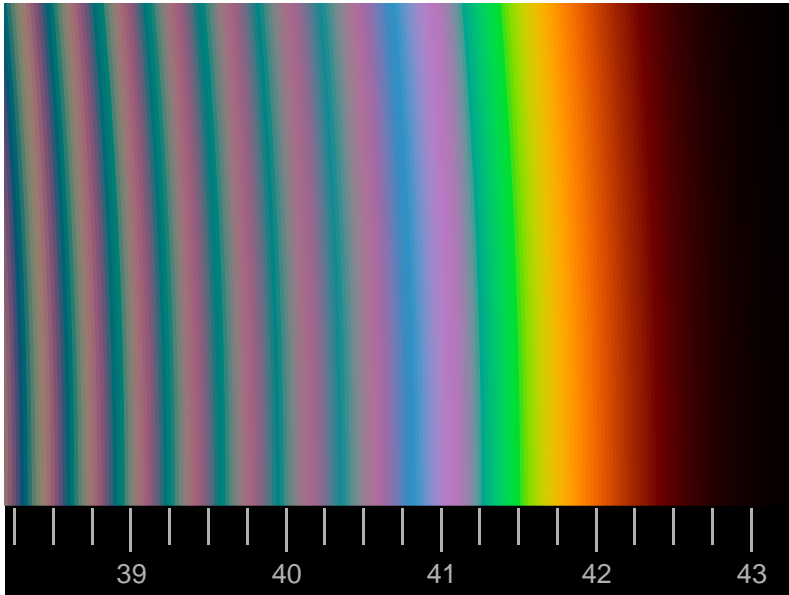


Bild 8: Regenbogen, berechnet für eine punktförmige Lichtquelle und Tropfendurchmesser 1 mm. Skala: Winkel Θ , vom Gegenpunkt der Sonne aus gemessen.

Um zu einem bunten Regenbogen zu kommen, muß die Rechnung für „alle“ Wellenlängen des sichtbaren Lichtes durchgeführt werden, und zwar mit Berücksichtigung der Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex. Dieser ist im sichtbaren Bereich (in grober Näherung) durch

$$n(\lambda) = n_0 + \frac{C}{\lambda - \lambda_0} \quad (2)$$

gegeben, mit $C = 7.382 \text{ nm}$, $\lambda_0 = 112.78 \text{ nm}$ und $n_0 = 1.3175$. Es werden also für jeden interessierenden Winkel Θ die gestreute Intensität als Funktion der Wellenlänge bestimmt (Strahlungsfunkti-

on), und daraus, wie im Kapitel „Farbmetrik“ beschrieben, die Farbmaßzahlen. Das Ergebnis für Tropfen von 1 mm Durchmesser zeigt Bild 8.

Noch nie hat jemand so einen Regenbogen am Himmel gesehen. So sieht er vor schwarzem Hintergrund für eine punktförmige Lichtquelle aus. Die Sonne erscheint uns aber nicht punktförmig, sondern als Scheibchen von durchschnittlich 32 Bogenminuten Durchmesser. Es ist als letztes also noch über die Winkelausdehnung der Sonne zu mitteln. Bild 9 zeigt das Ergebnis, das jetzt schon recht realistisch wirkt. Geringfügig uneinheitliche Tropfengrößen würden die noch andeutungsweise sichtbare Streifung im Inneren des Bogens zum Verschwinden bringen.

Die Abhängigkeit der Erscheinung von der Tropfengröße wird deutlich. Je kleiner die Tropfen, desto klarer werden die Interferenzstreifen als „überzählige Bögen“ sichtbar.

Näherungsannahmen und Rechnung

Das Ziel war, den Regenbogen einschließlich der Beugungs- und Interferenzerscheinungen zu verstehen. Dabei wurden eine ganze Reihe von Näherungsannahmen gemacht, die erst zum Teil besprochen worden sind:

- Statt in drei Dimensionen wurde in der Ebene gerechnet.
- Es wurden nur relative Intensitäten berechnet, die Helligkeit wurde an die Darstellbarkeit auf dem Bildschirm angepaßt.
- Die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens vom Einfallswinkel wurde vernachlässigt.
- Die direkte Reflexion des Lichts an der Tropfenoberfläche wie auch mehrmalige innere Reflexionen wurden vernachlässigt.

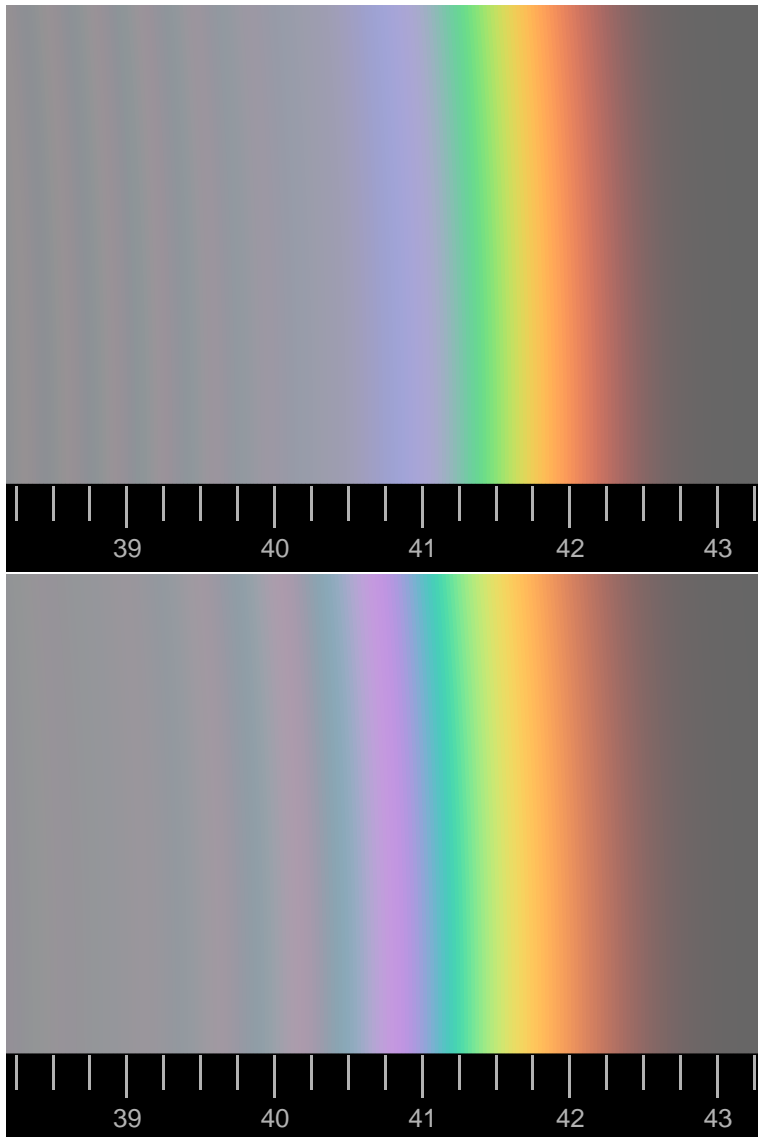


Bild 9: Regenbogen vor einem grauen Hintergrund. Oberes Bild: Tropfendurchmesser 1 mm, unteres Bild: Tropfendurchmesser 0.7 mm

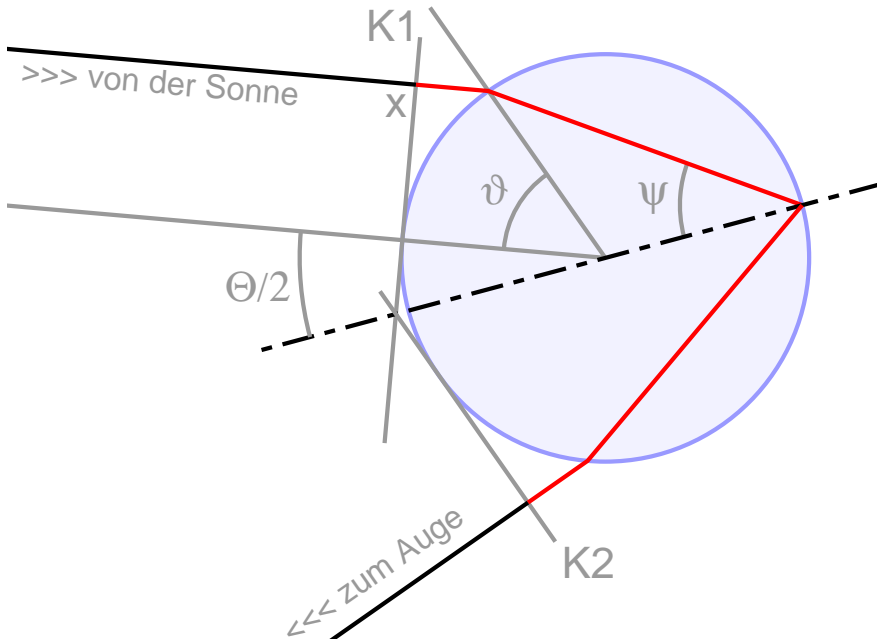


Bild 10: Der an der Stelle x die Kontrollfläche $K1$ passierende Strahl legt bis zur Kontrollfläche $K2$ den rot gezeichneten Weg zurück; die eingezeichneten Winkel braucht man für dessen Berechnung: Θ ist der Beobachtungswinkel, über ϑ wird integriert; $\psi = \Theta/4 + \theta/2$. Die Wegstücke innerhalb des Tropfens sind bei der Bestimmung der optischen Weglänge mit dem Brechungsindex zu multiplizieren.

Sei R der Tropfenradius, Θ der Beobachtungswinkel vom Gegenpunkt der Sonne aus gemessen. In der ebenen Geometrie ist die Kontrollfläche, über die integriert wird, einfach ein Geradenstück, ein Abschnitt der Tangente an den Kreis. Auf diesem Geradenstück werde die einfallende Welle durch $A \cos(-\omega t)$ beschrieben. Mit der Definition

$$k = 2\pi/\lambda \quad (3)$$

erhält man dann die Summe der in der Kontrollfläche K2 ankommenden Teilwellen proportional zu

$$Ak \int_{-R}^R \cos(ks_{\text{opt}} - \omega t) dx, \quad (4)$$

wobei s_{opt} von x abhängt. Der Faktor k vor dem Integral ergibt sich aus der Kirchhoffschen Formel, wie bei der Diskussion des Huygensschen Prinzips besprochen. Wir führen den Winkel ϑ als neue Integrationsvariable ein und erhalten mit $x = R \sin \vartheta$ und $dx = R \cos \vartheta d\vartheta$

$$s_{\text{opt}} = 2R (1 - \cos \vartheta + 2n_{\text{H}_2\text{O}} \cos(\vartheta/2 + \Theta/4)) \quad (5)$$

Der Cosinus in Gleichung (4) läßt sich umformen zu dem Ergebnis $\cos(ks_{\text{opt}}) \cos(\omega t) - \sin(ks_{\text{opt}}) \sin(\omega t)$. Die unter dem Winkel Θ abgestrahlte Intensität ist durch den zeitlichen Mittelwert des Quadrates der Amplitude (4) gegeben und ist somit proportional zu

$$\frac{1}{2} A^2 R^2 k^2 \left[\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(ks_{\text{opt}}) d\vartheta \right)^2 + \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(ks_{\text{opt}}) d\vartheta \right)^2 \right], \quad (6)$$

dabei steckt die Abhängigkeit von der Wellenlänge in k (Gl. 3) und die von Θ in s_{opt} (Gl. 5).

Für die hier gezeigten Bilder wurde als Intensitätsverteilung des eingestrahnten Lichtes die Strahlungsfunktion eines Schwarzen Körpers der Temperatur 5000 K verwendet, wie sie der tiefstehenden Sonne entsprechen könnte. Die Spektralwertfunktionen, die man zur Berechnung von Farbmaßzahlen braucht, liegen in Tabellenform vor, z. B. beginnend bei $\lambda = 360$ nm in Schritten von 5 nm. Bei festgehaltenem Θ berechnet man an den gleichen Stützstellen die Farbreizfunktion (6) und daraus die Farbmaßzahlen, und dies für alle interessierenden Werte von Θ .