* HAMILTON-JACOBI-THEORIE

* Wir haben gerade die Idee von kanonischen Transformationen untersucht. Wir haben gesehen, dass mit Hilfe einer passenden Transformation die Lösung des physikalischen Problems möglichst einfach, vielleicht fast trivial wird.
* Die Hamilton-Jacobi-Theorie geht genau in diese Richtung. Man wähle eine kanonische Transformation solch dass die neuen Variablen $\vec{q}\,'$ und $\vec{p}\,'$ zeitlich konstant werden

$$\left.\begin{aligned} q_j' &= \beta_j = \text{KONSTANTE} \\ p_j' &= \alpha_j = \text{KONSTANTE} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} \vec{q} &= \vec{q}(\vec{\beta},\vec{\alpha},t) \\ \vec{p} &= \vec{p}(\vec{\beta},\vec{\alpha},t) \end{aligned}\right.$$

und das wäre schon die Lösung, wobei $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden.

* Die Frage ist natürlich, wie finden wir die passende Transformation.

---

* HAMILTON-JACOBI-GLEICHUNG

· Wir suchen also eine kanonische Transformation, solch dass $\vec{q}\,'$ und $\vec{p}\,'$ sind Konstanten. Das geht sicher, wenn die Transformation $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ ergibt (wobei F die erzeugende Funktion ist)

Dann: $\dot{q}_j' = \frac{\partial H'}{\partial p_j'} = 0 \longrightarrow q_j' = \beta_j$

$\dot{p}_j' = -\frac{\partial H'}{\partial q_j'} = 0 \longrightarrow p_j' = \alpha_j$

· Es ist zweckmäßig (aber nicht notwendig) die erzeugende Funktion in der Form: $F = f_2(\vec{q}, \vec{p}\,', t)$ zu wählen.

Dann (S. 116): $p_j = \frac{\partial f_2}{\partial q_j}$; $q_j' = \frac{\partial f_2}{\partial p_j'}$

· Dann:

$$\boxed{H\left(q_1,\dots,q_s,\frac{\partial f_2}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial f_2}{\partial q_s},t\right) + \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0}$$

Hamilton-Jacobi Gleichung

Aus dieser Gleichung müssen wir die erzeugende Funktion f_2 bestimmen.

* Welche physikalische Bedeutung hat die Lösung F_2 der Hamilton-Jacobi-Gleichungen?

$$\frac{dF_2}{dt} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_2}{\partial p_j'} \dot{p}_j' \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Aber, per Definitionem $\rightarrow$ $\frac{\partial F_2}{\partial q_j} = p_j$, $\dot{p}_j' = 0$; $\frac{\partial F_2}{\partial t} = \bar{H} - H \overset{\bar{H}=0}{=} -H$

Dann $\frac{dF_2}{dt} = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H = L$

Also $F_2 = \int L\,dt + \text{KONSTANTE}$ $\longrightarrow$ Wirkung !

Aus diesen Gründen heisst F_2 die Hamiltonische Wirkungsfunktion

* Um die Hamiltonische Wirkungsfunktion zu finden, müssen wir dann eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung (die HJ-Gleichung) lösen, was im Allgemeinen nicht ganz einfach ist. Die Gleichung bestimmt nur die $\vec{q}$ und t-Abhängigkeit von $F_2(\vec{q}, \vec{p}', t)$, und macht damit keine Aussage über $\vec{p}'$. Aber da wir $\vec{p}'$ konstant wollen, dann können wir die Integrationskonstanten ($\vec{\alpha}$) mit den neuen Impulsen identifizieren: $p_j' = \alpha_j$ $j = 1..s$.

* Bemerkung: Die HJ-Gleichung ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung in (s+1) Variablen ($q_1, .. q_s, t$). Aber die Gleichung nur die Ableitungen von F_2 enthält, und daher F_2 + Konstante auch eine Lösung wäre. Dann ist eine Integrationskonstante unbedeutend, und nur s sind relevant: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$].

* Wir werden nun die Schritte für die Lösung eines Problems mit der Hamilton-Jacobi-Theorie diskutieren; später werden wir diese Schritte im Rahmen eines Beispiels diskutieren.

* Lösungsverfahren der Hamilton-Jacobi-Theorie

(a) Man formuliert $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$, setze $p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}$ ein und stelle die HJ-Gleichung auf.

(b) Man löst die HJ-Gleichung für F_2

$$F_2 = S(q_1 \ldots q_s, t \,|\, \alpha_1 \ldots \alpha_s)$$

und identifiziere die Integrationskonstante mit den neuen Impulsen:

$$p_j' = \alpha_j \qquad j = 1 \ldots s$$

c) Man setzt:

$$q_j' = \frac{\partial S(\vec{q}, t \,|\, \vec{\alpha})}{\partial \alpha_j} = q_j'(\vec{q}, t \,|\, \vec{\alpha}) = \beta_j \qquad j = 1 \ldots s$$

Das sind s Gleichungen. Wir können dann die $\{q_j\}$ als Funktion der Konstanten $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ schreiben:

$$q_j = q_j(t \,|\, \vec{\beta}, \vec{\alpha})$$

(d) Man berechnet die Impulse aus:

$$p_j = \frac{\partial S(\vec{q}, t \,|\, \vec{\alpha})}{\partial q_j} = p_j(\vec{q}, t \,|\, \vec{\alpha})$$

und setzt $q_j(t \,|\, \vec{\beta}, \vec{\alpha})$ dann ein:

$$p_j = p_j(t \,|\, \vec{\beta}, \vec{\alpha})$$

(e) Die Anfangsbedingungen $q_j^{(0)} = q_j(t = t_0)$; $p_j^{(0)} = p_j(t = t_0)$ ergeben: $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t_0 ; \vec{p}^{(0)}, \vec{q}^{(0)})$ und aus $q_j(t \,|\, \vec{\beta}, \vec{\alpha})$ ist ebenfalls $\vec{\beta}(t_0 ; \vec{p}^{(0)}, \vec{q}^{(0)})$ auch bestimmt.

(f) Wir setzen $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ in $q_j(t \,|\, \vec{\beta}, \vec{\alpha})$ und $p_j(t \,|\, \vec{\beta}, \vec{\alpha})$ ein, und damit haben wir das Problem gelöst!

* **Beispiel: Harmonischer Oszillator**

* Wir wollen nun das HJ-Lösungsverfahren im Rahmen unseres Lieblingsproblems, der Harmonischer Oszillator, illustrieren.

(a) Wie immer, die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators ist:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega^2 q^2$$

Wir suchen nach $F_2 = S(q, p', t)$ mit $p = \frac{\partial S}{\partial q}$, und $H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

Daher: $$\boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\Omega^2}{2} q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \longrightarrow \text{Hamilton-Jacobi-Gleichung}$$

(b) Wir müssen nun diese Gleichung lösen. Wir wählen den folgenden Lösungsansatz (Separationsansatz)

$$S(q, p', t) = W(q|p') + V(t|p')$$

(Wir werden gleich mehr über diese Separation der Variablen sagen.)

Dann: $$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\Omega^2}{2} q^2}_{\text{nur } q\text{-abhängig}} = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{nur } t\text{-abhängig}}$$

Dann die beide Seiten müssen gleich und konstant sein; dann haben wir 2 Gleichungen:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{m\Omega^2}{2} q^2 = \alpha \rightarrow \left(\frac{dW}{dq}\right)^2 = m^2\Omega^2\left[\frac{2\alpha}{m\Omega^2} - q^2\right]$$

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha \longrightarrow V(t) = -\alpha t + \underbrace{V_0}_{\text{unbedeutend}}$$

Dann $$W(q|\alpha) = m\Omega \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\Omega^2} - q^2}$$

und damit $$S(q, \alpha, t) = m\Omega \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\Omega^2} - q^2} - \alpha t$$

$$= m\Omega \left\{ \frac{q}{2}\sqrt{\frac{2\alpha}{m\Omega^2} - q^2} + \frac{\alpha}{m\Omega^2} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\Omega^2}{2|\alpha|}}\right)\right\} - \alpha t + \text{Konstante}$$

Wir identifizieren $p' = \alpha$

(c) Wir setzen $q' = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta \Rightarrow$ KONSTANTE

Dann
$$\beta = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[m\Omega \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\Omega^2} - q^2} - \alpha \cdot t\right] = \frac{1}{\Omega}\int dq \left[\frac{2\alpha}{m\Omega^2} - q^2\right]^{-1/2} - t$$

Also
$$\beta + t = \frac{1}{\Omega}\arcsin\left(q\,\Omega\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\right)$$

und daher:
$$q = \frac{1}{\Omega}\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\sin(\Omega(t+\beta)) = q(t|\beta,\alpha)$$

(d) Dann:
$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{dW}{dq} = m\Omega\sqrt{\frac{2\alpha}{m\Omega^2} - q^2} = \sqrt{2\alpha m}\cos(\Omega(t+\beta)) = p(t|\beta,\alpha)$$

(e) Wir wählen die folgenden Anfangsbedingungen

$$\left.\begin{array}{l} t = t_0 = 0 \\ p^{(0)} = 0 \\ q^{(0)} = q_0 \neq 0 \end{array}\right\}\quad p^{(0)} = 0 = m\Omega\sqrt{\frac{2\alpha}{m\Omega^2} - q_0^2} \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}m\Omega^2 q_0^2$$

Da das System am Umkehrpunkt q_0 nur potentielle Energie besitzt ($p^{(0)}=0$) ist $\alpha = E$ die Gesamtenergie

Auch $\beta = \frac{1}{\Omega}\arcsin\left[q_0\Omega\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\right] = \frac{1}{\Omega}\arcsin(1) = \frac{\pi}{2\Omega}$

β ist also eine Konstante Zeit (Ω ist eine Frequenz).

Also die neue generalisierte Koordinate $q' = \beta$ ist eine Zeit und $p' = \alpha$ ist die Gesamtenergie.

Also: Energie und Zeit sind kanonisch konjugierte Variable!

Dies hat eine sehr große Bedeutung in der Quantenmechanik!

(f) Und zum Schluß:

$$q(t|\beta,\alpha) \Rightarrow q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\Omega^2}} \cos\Omega t$$
$$p(t) = -\sqrt{2Em}\,\sin\Omega t$$

} die bekannte Lösung des harmonischen Oszillators

* Bemerkung: wir können nun überprüfen, dass S tatsächlich die Wirkung des Problems ist:

$$dq = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \cos[\Omega(t+\beta)]\,dt \overset{2\beta = \pi/2}{=} -\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sin[\Omega t]\,dt$$

$$S(q,\alpha,t) = \int dq\, p - \alpha t =$$

aus (b) und (d); $\alpha = E$; $p = -\sqrt{2\alpha m}\,\sin\Omega t$

$$= 2E \int dt\, \sin^2\Omega t - Et$$

Andererseits: $L = T - V = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m\Omega^2 q^2 = E\sin^2\Omega t - E\cos^2\Omega t = 2E\sin^2\Omega t - E$

Damit $S = \int L\,dt$.]

---

* HAMILTONSCHE CHARAKTERISTISCHE FUNKTION

* Im letzten Beispiel haben wir den Separationsansatz der S. 123 eingeführt. So eine Trennung zwischen q- und t-Abhängigkeit macht immer Sinn, wenn die ursprüngliche Hamilton-Funktion nicht explizit zeitabhängig ist: $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \overset{S.\,102}{\Longleftrightarrow} H \equiv$ Bewegungskonstante.

Dann ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$H\left[\vec{q}; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

→ die Zeitabhängigkeit ist nur hier

Dann nehmen wir den Separationsansatz

$$S(\vec{q}, \vec{p}', t) = W(\vec{q}, \vec{p}') - Et \Longrightarrow \boxed{H\left(\vec{q}; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = E}$$

Hamilton-Jacobi Gleichung.

(Bemerkung: Bei skleronome Zwangsbedingungen $E \equiv$ Gesamtenergie (S. 102))

Die W Funktion ist die sogen. Hamiltonsche charakteristische Funktion

* Die Energie $E = E(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ $\quad (p'_j = \alpha_j)$
(* Im letzten Beispiel $E = \alpha$)
* Die Kanonische Transformation ist dann

$$q'_j = \frac{\partial S}{\partial p'_j} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} - \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha_j}\right) t$$

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j}$$

* Bemerkung: ein System ist integrabel wenn es solch eine kanonische Transfo. W gibt, oder anders ausgedrückt, wenn wir s Bewegungskonstante $(\vec{\alpha})$ für s Freiheitsgrade finden können. $(E = E(\vec{\alpha}))$

: Eigentlich könnten wir $W(\vec{q}, \vec{p}')$ als eigenständige erzeugende Funktion anwenden (also ohne $-Et$). Wenn wir so machen, dann

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} \;;\; q'_j = \frac{\partial W}{\partial p'_j} \;;\quad H' = H \quad (\text{und nicht mehr } H' = 0)$$

wobei $H = E = \text{const.}$ voraussetzen.
Wir finden von W dass alle q'_j zyklisch (und nicht mehr constant) sind $\longrightarrow$ und damit $p'_j = \alpha_j = \text{const} \to H\left(\vec{q}; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = E(\vec{\alpha}) \Rightarrow$ HJ-gleichung

Da $H' = H'(\vec{p}') = E(\vec{\alpha}) \longrightarrow \dot{q}'_j = \frac{\partial H'}{\partial p'_j} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} = \omega_j = \text{const} \to \underbrace{q'_j(t) = \omega_j t + \beta_j}_{\text{die Bewegungsgleichungen lassen sich trivial integrieren.}}$

: Separation der Variablen

* Die Hamilton-Jacobi-gleichung ist besonders nützlich wenn man alle Variablen separieren kann. Wir haben die Idee der Separation der Variablen schon vorher getroffen. Nun werden wir diese wichtige Idee ein bisschen detaillierter untersuchen.
Wir werden wir annehmen, daß $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Dann führen wir
* Wie vorher werden wir annehmen, daß $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Dann führen wir die Hamiltonsche charakteristische Funktion ein, und stellen wir die HJ-Gleichung:

$$H\left(\vec{q}; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = E$$

Sagen wir dass H der Form: $H\left[q_2, \dots, q_s; \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}; \overset{\text{eine Funktion}}{\overbrace{f\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right)}}\right]$ ist
Wir können nun den Separationsansatz:

$$W(\vec{q}, \vec{p}') = W'(q_2, \dots, q_s; \vec{p}') + W_1(q_1, \vec{p}') \qquad \text{nehmen.}$$

- Dann: $H\left(q_2,\dots q_s;\frac{\partial W'}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial W'}{\partial q_s};f\left(q_1,\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)\right)=E=\text{const.}$

Dass muss für alle q_1 gelten. Aber da q_1 nur in $f(\cdot)$ eingeht,
dann: $f\left(q_1,\frac{dW_1}{dq_1}\right)=C_1=\text{constant}$ → gewöhnliche Differentialgleichung für W_1

- Bemerkung: $W_1(q_1,\vec{p}')$ aber $\vec{p}'$ sind constant, daher dW_1/dq_1)

- Daher: $H\left(q_2,\dots,q_s;\frac{\partial W'}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial W'}{\partial q_s};C_1\right)=E$ → Partielle Differentialgleichung aber mit einer Variable weniger.

Besonders interessant ist wenn wir sukzessiv alle Koordinaten abtrennen können:

$$W=\sum_{j=1}^{s}W_j(q_j;\vec{\alpha})$$

und dann haben wir S gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$H_j\left(q_j,\frac{dW_j}{dq_j};\vec{\alpha}\right)=\alpha_j$$

(So bekommen wir S Bewegungskonstanten)

- Ob so eine vollständige Separation möglich ist hängt stark von der Wahl der generalisierten Koordinaten und natürlich auch vom Problem ab.

- Suchen wir nun ein einfaches Beispiel, wo das möglich ist, nämlich die Bewegung eines Teilchens in einem Zentralfeld: $V=V(r)$

In Kugelkoordinaten (r,θ,φ) nehmen wir die Bewegung auf der Ebene $\theta=\text{const}$ (ich erinnere euch dass in einem Zentralfeld finden die Bahnen auf einer Ebene statt). Dann haben wir eine skleronome Zwangsbedingung, und daher nehmen wir 2 generalisierte Koordinaten: $q_1=r$ und $q_2=\varphi$

- Die Hamilton-Funktion ist: $H=\frac{1}{2m}\left[p_r^2+p_\varphi^2/r^2\right]+V(r)$

Bemerkung: $L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-V(r)$ → $p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r}$; $p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}$

→ $H=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+V(r)=\frac{1}{2m}(p_r^2+p_\varphi^2/r^2)+V(r)$

* φ ist also zyklisch $\longrightarrow$ $p_\varphi = \alpha_\varphi = \text{const}$ $\nwarrow$ Bahndrehimpuls.

* Sei $W = W_1(r) + \alpha_\varphi \varphi$ (Wir haben auf S. 125 etwas ähnliches mit der Energie gemacht)

Dann

$$E = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] + V(r)$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}\right] + V(r)$$

Dann: $\dfrac{dW_1}{dr} = \sqrt{2m(E - V(r)) - \dfrac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}$

Und damit:

$$W(r,\varphi;\alpha_\varphi,E) = \alpha_\varphi \varphi + \int dr \sqrt{2m(E-V(r)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}$$

* Sei $\alpha_1 = E$, dann $q_1' = t + \beta_1$ (S. 124)

$$t + \beta_1 = q_1' = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W}{\partial E} = \int dr \frac{m}{\sqrt{2m(E-V(r)) - \alpha_\varphi^2/r^2}}$$

[Bemerkung: q_2' ist eine Konstante weil $E = \alpha_1$, dann $\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} = 0 = \partial H / \partial p_2'$ $\Rightarrow$ also $\dot{q}_2' = 0$]

* Sei $\alpha_2 = \alpha_\varphi$, q_2' ist eine Konstante (β_2): ein Winkel

$$\beta_2 = q_2' = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi} = -\int dr \frac{\alpha_\varphi / r^2}{\sqrt{2m(E-V(r)) - \alpha_\varphi^2/r^2}} + \varphi$$

Sei $\beta_2 = \varphi_0$; $s = 1/r$; $\alpha_\varphi = L$, dann:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 - \int \frac{ds}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}(E-V) - s^2}}}$$

Für $V(r) = -\mu\gamma/r$ (Kepler-Problem) bekommen wir $E = \dfrac{L^2}{2m}\left[\left(\dfrac{ds}{d\varphi}\right)^2 + s^2\right] - \mu\gamma s$

also genau was wir (nach einer längeren Rechnung) auf S. 33 bekommen haben.

* Bemerkung: Separation von Variablen in Zentralpotentialen spielt eine sehr wichtige Rolle in z.B. die Beschreibung der atomaren Zustände in der Quantenmechanik!]

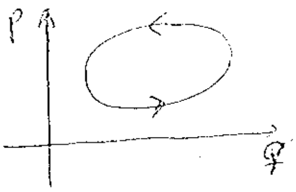
* Wirkungs- und Winkelvariable

- Wir werden nun eine Umformulierung der Hamilton-Jacobi-Theorie untersuchen, die (wie wir später sehen werden) eine wichtige Rolle in der Theorie chaotischer Systeme und in dem Übergang zwischen klassische und Quantenmechanik spielt.

- Diese Umformulierung gilt für periodische Systeme, also Systeme die nach einer Zeit τ (Periode des Systems) den Ausgangszustand wieder erreichen.

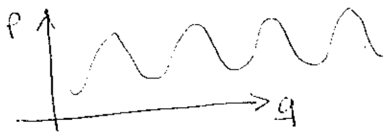
Es gibt 2 Typen periodischer Bewegung.

* Libration: die Phasenbahn ist eine geschlossene Kurve $\begin{cases} q(t+\tau)=q(t) \\ p(t+\tau)=p(t) \end{cases}$

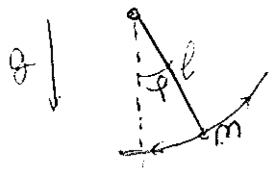


* Rotation: $p(t+\tau)=p(t)$ aber $q(t+\tau)=q(t)+q_0$

Die Phasenbahn ist nun offen, aber p ist eine periodische Funktion von q



- Beispiel: Pendel



- Die Hamiltonfunktion des Pendels ist

$$H=\frac{p_\varphi^2}{2m}-mgl\cos\varphi = E$$

wobei $p_\varphi = ml^2\dot{\varphi} = \sqrt{2ml^2(E+mgl\cos\varphi)} \equiv$ Drehimpuls des Pendels

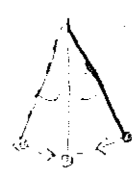
Wir verlangen $\cos\varphi \geq \frac{-E}{mgl}$

* Falls $E>mgl$ dann sind alle φ möglich

Das Pendel überschlägt sich $\Rightarrow$ Rotation

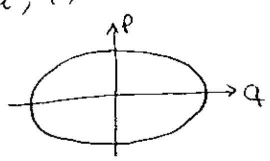
* Fall $E<mgl$ dann $\varphi\in[-\varphi_0,\varphi_0]$ mit $\cos\varphi_0=\frac{-E}{mgl}$

Das ist nun eine Libration.



Bemerkung: für kleine Winkel, φ, wird das Pendel ein harmonischer Oszillator

(S. (103))



* Für Systeme mit $s>1$ Freiheitsgrade ist die Bewegung periodisch falls die Projektion der Phasenbahn auf jede (q_j, p_j)-Ebene periodisch ist. Die Frequenzen der periodischen Bewegung für die verschiedene (q_j, p_j) müssen nicht unbedingt gleich sein, und daher ist die Bahn im $2S$-dimensionalen Phasenraum nicht notwendig periodisch. Wenn die Frequenzen nicht in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, so ergibt sich eine offene Phasenraumbahn.

(Bemerkung: die Idee von verschiedenen Frequenzen, und die entsprechende rationale oder irrationale Verhältnisse spielt eine wichtige Rolle in der Chaostheorie, wie wir später sehen werden.)

* In unserer Diskussion der Hamilton-Jacobi-Theorie haben wir die charakteristische Funktion W, so dass $P_j' = const\ \forall j$ und q_j' ist zyklisch. Die W ist die Lösung der Hamilton-Jacobi-gleichung mit Integrationskonstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, die wir mit den neuen Impulsen identifiziert haben: $p_j' = \alpha_j$
* Man hätte genauso gut andere Funktionen der $\{\alpha_j\}$ mit den p_j' gleichsetzen können.
* Wir führen nun die sogen. <u>Wirkungsvariablen</u> ein:

$$J_j = \oint p_j \, dq_j$$

Integriert wird über eine Periode der Libration oder der Rotation

* Wir nehmen nun an, dass die Hamilton-Jacobi-gleichung völlig separabel ist: $W = \sum_{j=1}^{s} W_j(q_j; \vec{\alpha})$

(integrablen System)

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = \frac{dW}{dq_j} = p_j(q_j; \vec{\alpha})$$

Daher:

$$J_j = \oint \frac{dW_j(q_j; \vec{\alpha})}{dq_j} dq_j = J_j(\vec{\alpha})$$

$\rightarrow$ J_j ist nur eine Funktion von $\vec{\alpha}$, und daher ist sie als neuer Impuls P_j' brauchbar.

(Bemerkung: J_j sagt uns, wie W_j wächst pro q_j-Umlauf)

* Umgekehrt $\alpha_0 = \alpha_j(\vec{J})$ und daher $W = W(\vec{q};\vec{J})$

also $H = H' = H'(\vec{J})$

* Wir führen nun die sogen. Winkelvariablen (w_j) ein

Die sind die konjugierte Variable zu J_j:

$$p_j' = J_j \longleftrightarrow q_j' = w_j \qquad (w_j = \partial W/\partial J_j)$$

Da $H' = H'(\vec{J})$ dann sind alle q_j' zyklisch

$$\Longrightarrow \dot{w}_j = \frac{\partial H'(\vec{J})}{\partial J_j} = \nu_j(\vec{J}) = \text{const}$$

also $\Longrightarrow \boxed{w_j = \nu_j t + \beta_j}$ (so was ähnliches haben wir schon auf S. 126 gesehen.)

* Fragen wir nun wie ist die Änderung von w_i bei einer Änderung der Koordinaten q_j über einen vollen Zyklus:

$$\Delta_j w_i = \oint_j dw_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \oint \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial W}{\partial J_i}\right) dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = \delta_{ij}$$

Also w_i ändert sich nur wenn $q_j = q_i$, und dann gerade um 1.

Wenn τ_i die Periode von q_i ist $\rightarrow \Delta_i w_i = \nu_i \tau_i$ (da $w_i = \nu_i t + \beta_i$)

* Dann $\boxed{\nu_i = 1/\tau_i}$ ist einfach die Frequenz der periodischen Bewegung von q_i (das ist NICHT selbstverständlich, da q_i die ursprüngliche Koordinaten sind!!)

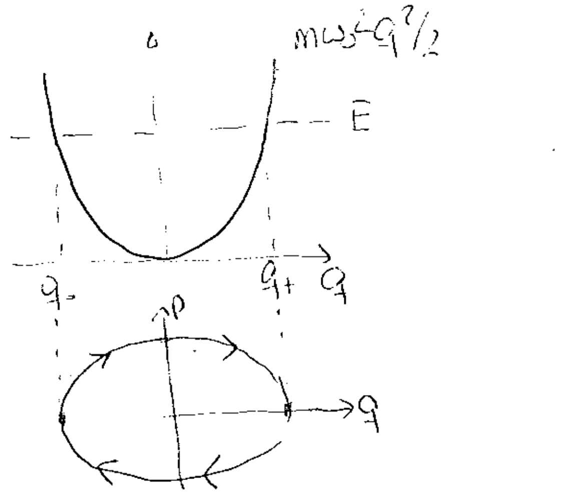
Das ist eigentlich sehr nützlich, weil wir die Bewegungsfrequenzen bestimmen können, ohne die vollständige Lösung berechnen zu müssen.

* Beispiel: Harmonischer Oszillator

• $H' = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 = E = \alpha_1$

$$\rightarrow p = \pm m\omega_0 \underbrace{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega_0^2} - q^2}}_{} = \frac{dW}{dq}$$

$$\hookrightarrow q_\pm = \pm \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega_0^2}} \equiv \text{Umkehrpunkte}$$



* Wirkungsvariable:

$$J = \oint p\,dq = 2\int_{q_-}^{q_+} p\,dq = 2m\omega_0 \int_{q_-}^{q_+} \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega_0^2} - q^2}\, dq$$

$$= 2m\omega_0 \left[\frac{q}{2}\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega_0^2} - q^2} + \frac{\alpha_1}{m\omega_0^2} \arcsin \frac{q}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega_0^2}}}\right]_{q_-}^{q_+} = \frac{2\pi}{\omega_0}\alpha_1$$

* Dann $\nu_1 = \frac{\omega_0}{2\pi} J \Longrightarrow H' = \frac{\omega_0}{2\pi} J$ → Ich erinnere euch an S. 117

also $\nu = \frac{\partial H'}{\partial J} = \frac{\omega_0}{2\pi} \longrightarrow \boxed{\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}}$

(In diesem Beispiel das ist natürlich klar, aber für andere Beispiele könnte sehr hilfreich sein)

* Noch einen Kommentar

$$H' = J\nu$$

Dieser Ausdruck erlaubt uns eine direkte Brücke zwischen Klassische- und Quantenmechanik zu bauen. In einem quanten-mechanischen harmonischen Oszillator (S. 113):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2}\hat{q}^2$$

Die möglichen Energien des quantenmechanischen harmonischen Oszillators sind (außer eine Konstante): $E = nh\nu$, $n = 0, 1, \dots$

d.h. dass die Wirkung J nicht alle mögliche Werte annehmen darf, sondern nur $J = nh$, also ein Mehrfach der Planckschen Konstante ($h = 2\pi\hbar$, sieh S. 112). Man sagt dass die Wirkung quantisiert wird. (Bemerkung: die n Zahlen sind ein Beispiel der sogen. Quantenzahlen)

* Noch ein wichtiges Beispiel einer Quantisierung ist die sogen. Bohr-Sommerfeld-Atomtheorie.

Man betrachtet den Wasserstoffatom als ein Kepler-Problem

* $V(r) = -\frac{K}{r}$ mit $K = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$

* Die Lösung des Keplerproblems mit Hilfe der Wirkungs- und Winkelvariable ist ein bisschen aufwendig, und die werden wir hier nicht machen. Wichtig für unsere jetzige Diskussion ist die Tatsache, dass die Energie der Form:

$$E = -\frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 J^2} \Rightarrow \text{wobei } J \text{ eine sogen. Eigenwirkung ist.}$$

ist.

* Wenn man die Quantenhypothese einführt: $J = nh$
dann bekommt man als mögliche Energien des Wasserstoffatoms:

$$E_n = \frac{-E_R}{n^2} \qquad n = 1, 2, \dots$$

wobei $$E_R = \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^2} = 13{,}61\ \mathrm{eV} \equiv \underline{\text{Rydberg-Energie}}.$$

* Diese Form (E_n) entspricht exakt dem korrekten quantenmechanischen Resultat.

* Hier sehen wir noch mal, dass die analytische Mechanik eine Brücke zwischen Klassischen und Quantenmechanik baut.
(Bemerkung: Wir haben gesehen, dass die Poisson-Klammer-Struktur der Hamilton-Mechanik zu die "Matrizenformulierung" (Heisenberg-Bild) der Quantenmechanik führt (s. 112). Die Hamilton-Jacobi-Theorie führt zu die sogen. Wellenformulierung der Quantenmechanik (Schrödinger Bild). Aber wir werden hier nicht tiefer gehen.)

---

* <u>CHAOS</u>

* Zum Schluss unserer Diskussion der Hamilton-Jacobi-Theorie werden wir ganz kurz über Chaos und chaotische Systeme sprechen.

* Chaos spielt eine wichtige Rolle in der modernen Physik, und taucht in vielen physikalischen Systemen auf, von Laserphysik bis zum Biophysik.

* Es gibt verschieden Formen chaotischer Systeme. Hier werden wir nur konservative Systemen untersuchen.

* Nehmen wir ein integrables System (S. 126) in dem wir eine charakteristische Funktion $W(\vec{q},\vec{J})$ finden können

$$\vec{q},\ \vec{p}=\frac{\partial W}{\partial q} \Longleftrightarrow \vec{J},\ \vec{\theta}=\frac{\partial W}{\partial \vec{J}}$$

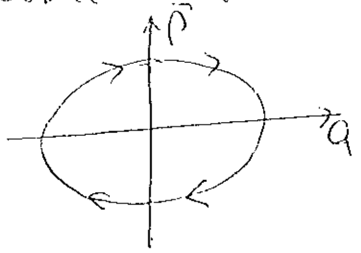
solch dass $H_0(\vec{p},\vec{q}) \Rightarrow H_0'(\vec{J})$

$\vec{J} \equiv$ Wirkungen (Konstanten)

$\dot{\vec{\theta}}=\frac{\partial H}{\partial \vec{J}}=\vec{\omega}(\vec{J}) \rightarrow \vec{\theta}=\vec{\omega}t+\vec{\delta}$ (Winkel)

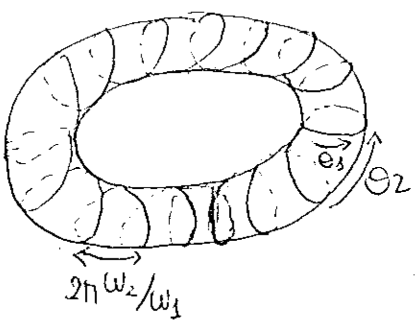
$\vec{\omega}$: Frequenzen

* Im Prinzip ist der Phasenraum 2S-dimensional $(q_1 \dots q_s;\ p_1 \dots p_s)$. Aber wir haben S Bewegungskonstante $(J_1 \dots J_s)$. Daher findet die Bewegung in S-Dimensionen. Zum Beispiel, für den harmonischen Oszillator findet die Bewegung auf einer Ellipse



* Hier $S=1 \rightarrow$ 2-dimensionaler Raum. Aber hier gibt's eine Bewegungskonstante. Die periodische Bewegung findet also in einer Dimension (also auf der Ellipse).

* Wir werden von nun an ein integrables System mit $S=2$ Freiheitsgrade. Das System hat 2 Bewegungskonstante (J_1 und J_2), mit 2 entsprechenden Winkelvariablen θ_1 und θ_2, mit respektive Frequenzen ω_1 und ω_2. Die Bewegung findet dann auf einem Torus (und nicht auf einer Ellipse wie in dem harmonischen Oszillator):



* Geschlossene Phasenraumbahnen gibt es nur, wenn die Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen (S. 130):

$$n\,2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}=2\pi m \qquad m,n=1,2,3\dots$$

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{m}{n}} \longrightarrow \text{Rationale Frequenzverhältnis}$$

[* Bemerkung: für irrationale Verhältnisse wird die Bahn sich nie wiederholen, und die Bewegung ist ergodic $\Rightarrow$ der gesamte Torus wird irgendwann besucht]

[* Bemerkung II: Die Idee von Ergodizität spielt später eine wichtige Rolle in die Statistische Mechanik.]

* Gucken wir nun was passiert wenn wir das System stören

$$H_0'(\vec{J}) \longrightarrow H(\vec{J},\vec{\theta}) = H_0'(\vec{J}) + \epsilon H_1(\vec{J},\vec{\theta}) \longrightarrow \epsilon \ll 1 \text{ (kleine Störung)}$$

Wir werden nun versuchen, diese neue Hamilton-Funktion zu integrieren, d.h. wir werden versuchen, die entsprechende Hamilton-Jacobi-gleichung zu lössen:

$$H\left[\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \vec{\theta}}, \vec{\theta}\right] = E(\vec{J}')$$

wobei $\vec{J}'$ die neue Wirkungsvariablen (also die neue Bewegungskonstanten) wären.

Wir schreiben die neue charakteristische Funktion $\tilde{W}(\vec{J}',\vec{\theta})$ in der Form:

$$W(\vec{J}',\vec{\theta}) = \vec{\theta}\cdot\vec{J}' + \varepsilon W_1(\vec{J}',\vec{\theta})$$

und wir entwicklen die Hamilton-Jacobi-gleichung bis zur Ordnung ϵ:

$$H_0'(\vec{J}') + \underbrace{\epsilon \frac{\partial H_0'}{\partial \vec{J}} \cdot \frac{\partial W_1(\vec{J}',\vec{\theta})}{\partial \vec{\theta}} + \epsilon H_1(\vec{J}',\vec{\theta})}_{\text{Das muss Null sein, da die rechte seite der gleichung } \theta\text{-unabhängig ist}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = E(\vec{J}')$$

$\vec{\omega} = \partial H_0'/\partial \vec{J}$

$$\vec{\omega}\cdot\frac{\partial W_1}{\partial \vec{\theta}} = -H_1(\vec{J}',\vec{\theta})$$

* Da W_1 und H_1 periodische Funktionen von $\vec{\theta}$ sind, dann können wir für die beide die entsprechende Fourier-Reihe schreiben:

$$\left.\begin{aligned} W_1(\vec{J}',\vec{\theta}) &= \sum_{\vec{k}\neq 0} W_{1\vec{k}}(\vec{J}')\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{\theta}} \\ H_1(\vec{J}',\vec{\theta}) &= \sum_{\vec{k}\neq 0} H_{1\vec{k}}(\vec{J}')\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{\theta}} \end{aligned}\right\} \quad \text{wobei } \vec{k} = 2\pi\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad n_{1,2}\in\mathbb{Z}$$

Dann: $i\vec{\omega}\cdot\vec{k}\, W_{1\vec{k}}(\vec{J}') = -H_{1\vec{k}}(\vec{J}') \longrightarrow W_{1\vec{k}}(\vec{J}') = \dfrac{i H_{1\vec{k}}(\vec{J}')}{\vec{k}\cdot\vec{\omega}(\vec{J}')}$

und damit: $\boxed{\tilde{W}(\vec{J}',\vec{\theta}) = \vec{\theta}\cdot\vec{J}' + i\varepsilon \sum_{\vec{k}\neq 0} \frac{H_{1\vec{k}}(\vec{J}')}{\vec{k}\cdot\vec{\omega}(\vec{J}')} e^{i\vec{k}\cdot\vec{\theta}}}$

* Es ist klar, dass der Nenner (und damit $\tilde{w}$) divergiert, wenn $\vec{k}\cdot\vec{\omega} = 2\pi(n_1\omega_1 + n_2\omega_2) = 0$

also wenn $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-n_2}{n_1}$ → also wenn die Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen

* Das gestörte System kann mit Hilfe der Störungstheorie nicht integriert werden, wenn das Frequenzverhältnis rational ist !! Man hat Resonanzen ($n\omega_2 = m\omega_1$) und die Störungseffekte sind daher sehr stark.

* Was passiert wenn ein integrables System mit $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ in der Nähe einer irrationalen Wert gestört wird? Diese Diskussion bringt uns zu dem wichtigen Kolmogorov-Arnold-Moser-Theorem (KAM-THEOREM)

* Ich erinnere euch, dass assoziiert mit jeder $\{\omega_1, \omega_2\}$ Satz gibt es ein Torus (S (134)). Der KAM-Theorem sagt uns, grob formuliert, dass unter sehr allgemeine Bedingungen für eine kleine Störung ϵ die Mehrheit der Tori der ungestörten Hamilton-Funktion überleben.

* Genauer formuliert (für $S=2$): wenn die Matrix $M_{ij} \equiv \frac{\partial\omega_i}{\partial J_j}$ ist solch dass $\det(M_{ij}) \neq 0$, dann die Tori mit irrationalen Verhältnisse ω_1/ω_2, solch dass

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m}{n}\right| > \frac{K(\epsilon)}{n^{5/2}} \qquad \left[\begin{array}{l} K(\epsilon\to 0)\to 0 \\ m,n \text{ sind ganzzahlig} \\ \text{und teilerfremd} \end{array}\right] \quad (\text{sei } \omega_1/\omega_2 < 1)$$

sind stabil für eine Störung ϵH_1 in dem Limes $\epsilon \ll 1$.

* Also, um jeder rationale Zahl m/n gibt es ein Intervall mit Länge $K(\epsilon)/n^{5/2}$ wo die obengenannte Bedingung nicht erfüllt wird.

$$\underset{0}{\vdash} \quad 1/5 \quad 1/4 \quad 1/3 \quad 2/5 \quad 1/2 \quad 3/5 \quad 2/3 \quad 3/4 \quad 4/5 \quad \underset{1}{\dashv}$$
$$\xrightarrow{\omega_1/\omega_2}$$

Das ist genau, was wir oben gesagt haben. Also dass die Mehrheit der Tori erhaltet bleibt, wenn $\epsilon \to 0$ geht.

* Wenn wir alle diese Intervallen addieren, dann die gesamte Länge, L, erfüllt:

$$\Longrightarrow \quad L < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K(\epsilon)}{n^{3/2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Anzahl von } m \text{ Werten} \\ \text{mit } m/n \leq 1}}{n} = K(\epsilon) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}}_{\text{konst.}} \xrightarrow{\epsilon \to 0} \underset{\substack{\uparrow \\ K(\epsilon)\to 0 \\ \text{wenn } \epsilon \to 0}}{0}$$

* Es sollte aber auch klar sein, dass für $\epsilon \to 0$ der Intervall voll von Löcher (um jeder m/s) ist. Das heisst, dass beliebig nah zu stabilen Tori finden wir instabilen Tori (wir werden gleich sehen, was mit den instabilen Tori passiert)

Die Menge der stabilen Tori hat also eine komische Struktur im Phasenraum, eigentlich eine sogen. Fraktale-Struktur

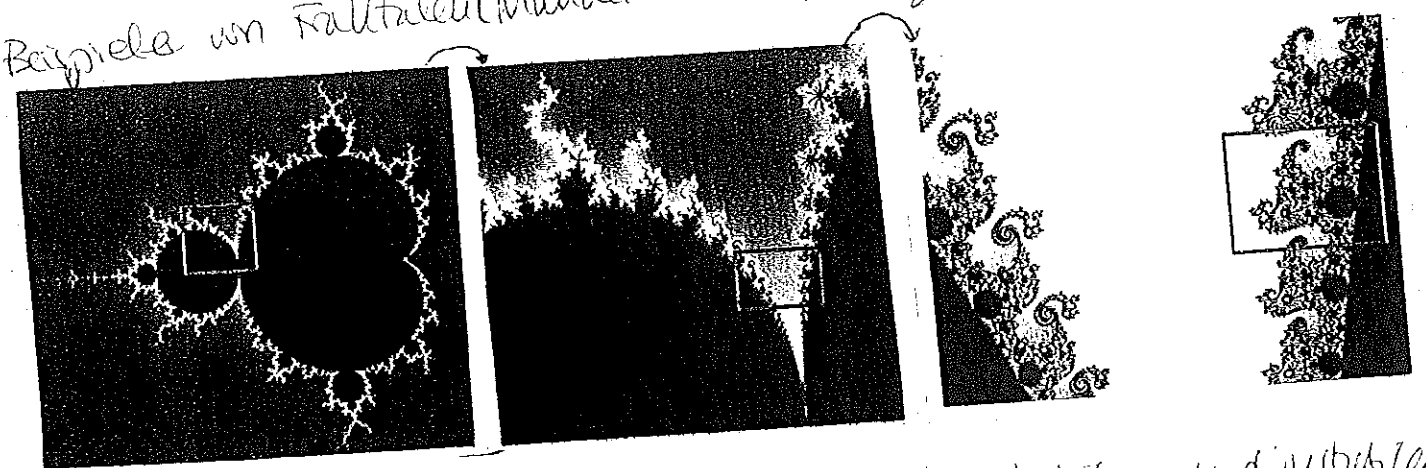
* Bemerkung: Natürlich wenn ϵ gross ist, dann werden eventuell alle Tori zerstört. Der letzte ist der Tori mit $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \to$ goldener Schnitt.

Dieser Zahl ist also der "irrationalsten" aller Zahlen.]

* Bemerkung II: Fraktalen sind selbstähnliche Strukturen die überall in der Natur auftauchen. Die spielen eine wichtige Rolle in der modernen Mathematik, mit Anwendungen in allen Feldern, von Biologie und Ökonomie, bis Komputeranimierten Filmen. Die Ideen von Chaos und Fraktalen sind eng miteinander verknüpft, wie wir nun sehen werden.]

* Beispiele von Fraktalen (Mandelbrot-Menge)

die Komplexität hat keine Ende...

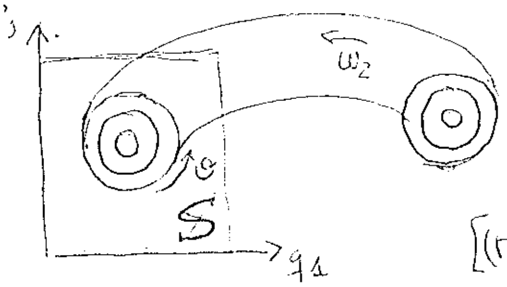


* Wir werden nun die komplizierte Struktur der stabilen und instabilen Tori untersuchen.

• INSTABILE TORI: POINCARÉ-BIRKHOFF-THEOREM

• Wenn ω_1/ω_2 rational ist, dann ist der Torus instabil. Wir werden nun sehen, dass der Torus in kleinere und kleinere Tori zerlegt wird, bis eine ganz komplizierte fraktale Struktur auftaucht.

* Wir betrachten zuerst das Problem ohne Störung.
Wir machen nun einen sogen. Poincaré-Schnitt des Torus. Der Poincaré-Schnitt wird von den Schnittpunkte der Phasenbahn mit einer Hyperebene gegeben. In unserem Fall werden wir die Schnittpunkte mit der Ebene $S = \{q_1, p_1\}$ untersuchen.



* Sei $r_i = r\left(t = i\frac{2\pi}{\omega_2}\right)$ der Torus-Radius nach i Perioden $\frac{2\pi}{\omega_2}$.
* Sei $\theta_i = \theta\left(t = i\frac{2\pi}{\omega_2}\right)$ der Winkel nach i Perioden.

[$(r,\theta) \equiv$ Polarkoordinaten des Schnitts]

Nach einer Periode: $r_i \longrightarrow r_{i+1} = r_i$ (ohne Störung bleibt man auf dem selben Torus)

$\theta_i \longrightarrow \theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}$ (der Winkel hat sich geändert)

[Bemerkung: Wenn $\omega_1 = \omega_2$ wäre die Abbildung die Identität, und der Poincaré-Schnitt wäre ein Punkt. Für $\omega_1 \neq \omega_2$ baut die Abbildung eine Kurve (ein Kreis) her)]

• Bemerkung: das ist ein Beispiel einer sogen. Abbildung]
(genauer: eine konservative Abbildung: Flächen werden erhaltet)

* Das Frequenzverhältnis hängt nur vom Radius r ab:

$$\omega_j = \frac{\partial H_0'(\vec{J})}{\partial J_j} \longrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = f(\vec{J})$$

aber $H_0'(J_1, J_2) = E = \text{const} \longrightarrow J_2 = J_2(J_1)$

aber $J_1 = \oint p_1 dq_1 \equiv$ Fläche des Schnittes $\equiv \pi r^2$

} J_1 und J_2 hängen nur von r ab, und daher auch ω_1/ω_2

Also $\omega_1/\omega_2 = \alpha(r)$

• Damit wird die Abbildung $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r' = r \\ \theta' = \theta + 2\pi\alpha(r) \end{array}\right\} \equiv T\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$ → Twist-Abbildung

* Wenn $\alpha(r) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n} \longrightarrow \underbrace{T \cdot T \cdot \ldots T}_{n \text{ Mal}} \equiv T^n$ erfüllt

$$T^n\begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{cases} r_0 \\ \theta_0 + 2\pi\frac{m}{n}n = \theta_0 + 2\pi m = \theta_0 \end{cases}$$

Alle Punkte des Kreises mit Radius r_0 sind Fixpunkte von T^n

* Gucken wir nun was passiert wenn es eine Störung gibt (ϵH_1).

Die Twist-Abbildung wird nun gestört:

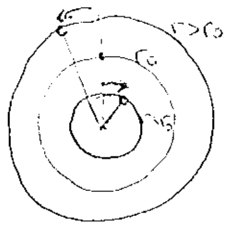
$$T_\varepsilon \begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix} = \begin{cases} r_{i+1} = r_i + \epsilon f(r_i,\theta_i) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\alpha(r_i) + \epsilon g(r_i,\theta_i) \end{cases}$$

wobei $f(r_i,\theta_i)$ und $g(r_i,\theta_i)$ von H_1 abhängen.

Wir sind nun an den Fixpunkte von T_ε^n interessiert.

* Nehmen wir an, dass $\alpha(r)$ eine milde wachsende Funktion von r in der Nähe von $r_0 = m/n$ ist. Gucken wir ~~erstmal~~ zuerst für $\epsilon = 0$.

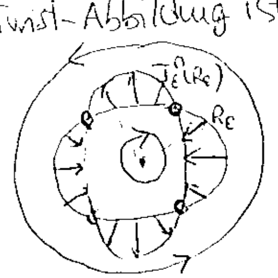
Für $r = r_0 \rightarrow T^n\begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$; für $r > r_0 \rightarrow T^n\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \theta' > \theta \end{pmatrix}$; für $r < r_0 \rightarrow T^n\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \theta' < \theta \end{pmatrix}$



* $r > r_0 \rightarrow$ Gegenuhrzeiger-Drehung
* $r < r_0 \rightarrow$ Uhrzeiger-Drehung
* $r = r_0 \rightarrow$ Keine Drehung

* Für eine kleine Störung ($\varepsilon \ll 1$) ist diese Überlegung immer noch ok, aber die radiale Koordinate wird von T_ε^n auch mitgeändert. Es gibt immer noch eine Kurve R_ε in der Nähe des Kreises mit $r = r_0$, wo es keine Drehung gibt. Diese Kurve ist nicht mehr ein Kreis wegen der Störung. Für diese Kurve ist die Abbildung nur radial $R_\varepsilon = \begin{pmatrix} r(\theta) \\ \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{T_\varepsilon^n} \begin{pmatrix} r'(\theta) \\ \theta \end{pmatrix} \equiv R'_\varepsilon$

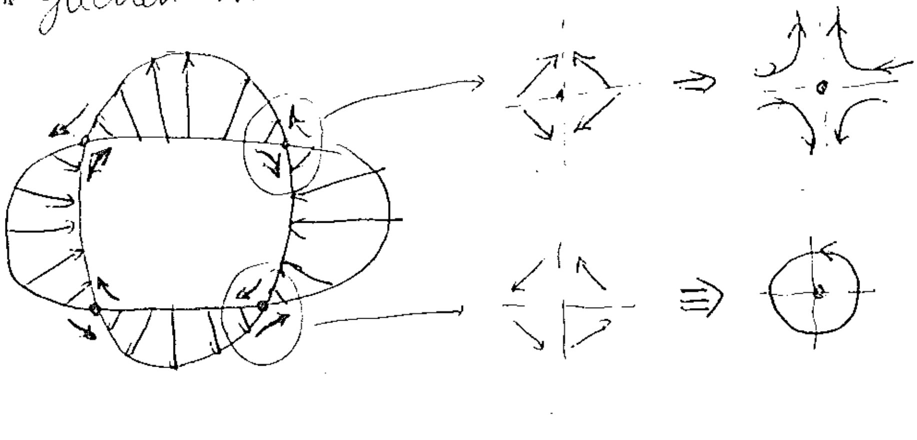
(die Twist-Abbildung ist konservativ)



↳: Die neue Kurve R'_ε hat dieselbe Fläche wie R_ε, und im allgemeinen hat man daher eine gerade Zahl von Schnittpunkte zwischen R_ε und R'_ε.

* Diese Schnittpunkte sind die <u>Fixpunkte</u> von T_ε^n

* Gucken wir nun diese Fixpunkte etwas genauer.



<u>Hyperbolische Punkte</u>

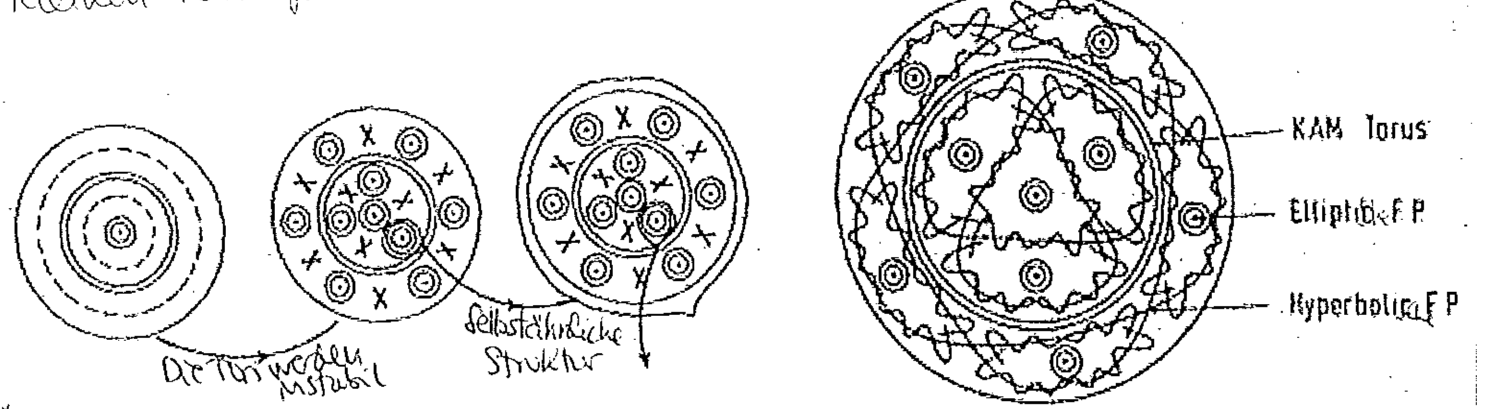
<u>Elliptische Punkte</u>

* Die Tori mit rationalen Frequenzverhältnis werden also zerstört, aber nicht vollständig: einige Fixpunkte (eine gerade Zahl davon) bleiben da. Das ist der sogen. Poincaré-Birkhoff-Theorem.

* Die elliptische Punkte bauen neue Kreise die Poincaré-Schnitte kleiner Tori sind. Zu diesen Tori können wir noch mal dieselbe Argumente noch mal anwenden (also KAM-Theorem + Poincaré-Birkhoff) und so weiter...

* Die hyperbolische Punkte bauen eine extrem komplexe Netz die zu eine chaotische Bewegung führt

Die Struktur von elliptischen und hyperbolischen Fixpunkte wiederholt sich ad infinitum, und baut eine fraktale Struktur mit kleinen Tori plus chaotische Bereiche, ganz verschränkt miteinander!



*

* Also, zusammengefasst. Für ein integrables System haben wir reguläre Bahnen (die KAM-Tori im Phasenraum) mit Anfangsbedingungen $\vec{J}, \vec{\delta}$. Wenn wir nun eine nicht-integrable Störung üben, dann reguläre oder ganz irreguläre (chaotische Bewegung) folgt, und ob die eine oder die andere folgt hängt sehr sensitiv von Anfangsbedingungen ab. Eine kleine Änderung der Anfangsbedingungen führt zu eine ganz andere Dynamik nach einer gewissen Zeit.

* Bisher war unsere Diskussion ziemlich abstrakt. Wir werden nun alle diese Ideen im Rahmen eines Beispiels sehen, das sogen. Henon-Heiles-System, das die Bewegung von Sterne um Galaxienkernen beschreibt

Das Hénon-Heiles-System hat 2 harmonischen Oszillatoren, (und damit integrable Systemen), die durch nicht-integrablen Zusatzgliedern gekoppelt sind:

Ohne das hätte man einfach ein 2D harmonischer Oszillator

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + \left[q_1^2 q_2 - q_2^3/3\right]$$

Natürlich die Energie E ist eine Konstante der Bewegung.

Wir können diese ~~Gleichung~~ Bewegung ganz einfach untersuchen.

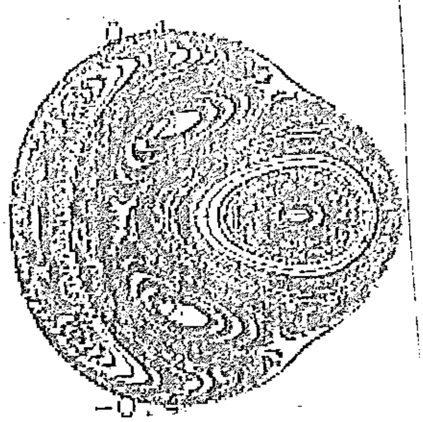
$p_j = \dot{q}_j$ ($m = 1$ hier), $V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + q_1^2 q_2 - q_2^3/3$

und die Newton'sche Bewegungsgleichungen sind (mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$)

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -q_1 - 2q_1 q_2 \\ \ddot{q}_2 = -q_2 - q_1^2 + q_2^2 \end{cases}$$

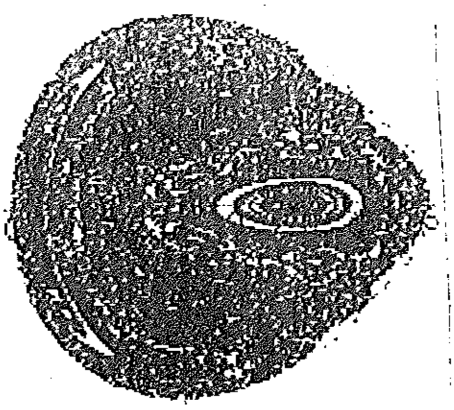
Wir können diese Gleichung für gegebenen Anfangsbedingung z.B. mit Runge-Kutta lösen. Damit bestimmen wir die entsprechende Bahnen. Wir werden nun die Poincaré-Schnitte ($q_1 = 0$) auf der q_2-p_2-Ebene untersuchen, und zwar für verschiedenen E-Werten.

- Gucken wir erstmals niedrige Energien ($E = 1/12$)



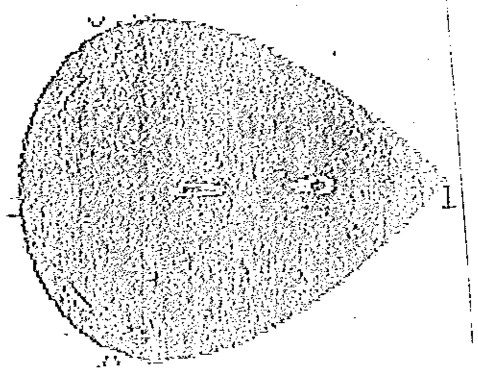
- Wir sehen 4 Bereiche mit elliptischen Orbiten.
- Im Zentrum dieser Bereiche gibt es einen elliptischen Fixpunkt
- Die Grenze der Bereiche treffen sich in hyperbolischen Punkten.

- Gucken wir nun $E = 1/8$

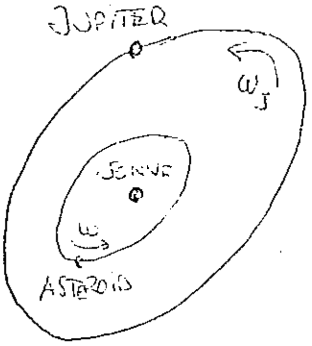


- Wir sehen immer noch reguläre Inseln aber die Regionen zwischen den Inseln sind nun von chaotischen Bahnen gefüllt

* gücken wir neu für $E = 1/6$. Nun die chaotische Bahnen füllen fast den gesamten Phasenraum

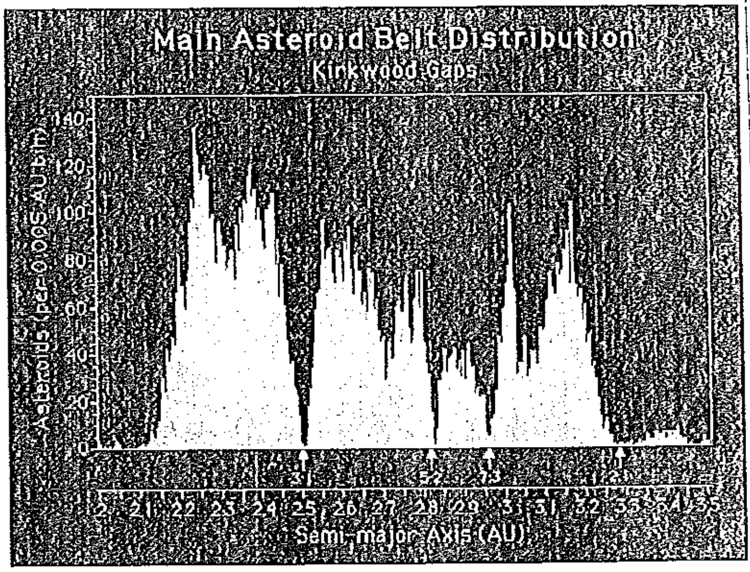


Noch ein Beispiel der wichtigen Rolle der Resonanzen wird uns bei Satelliten und Asteroiden Bewegung gegeben. Nehmen wir einen Asteroid, der um die Sonne geht. Der Asteroid wird von der Sonne, aber auch von Jupiter gravitationell beeinflusst.

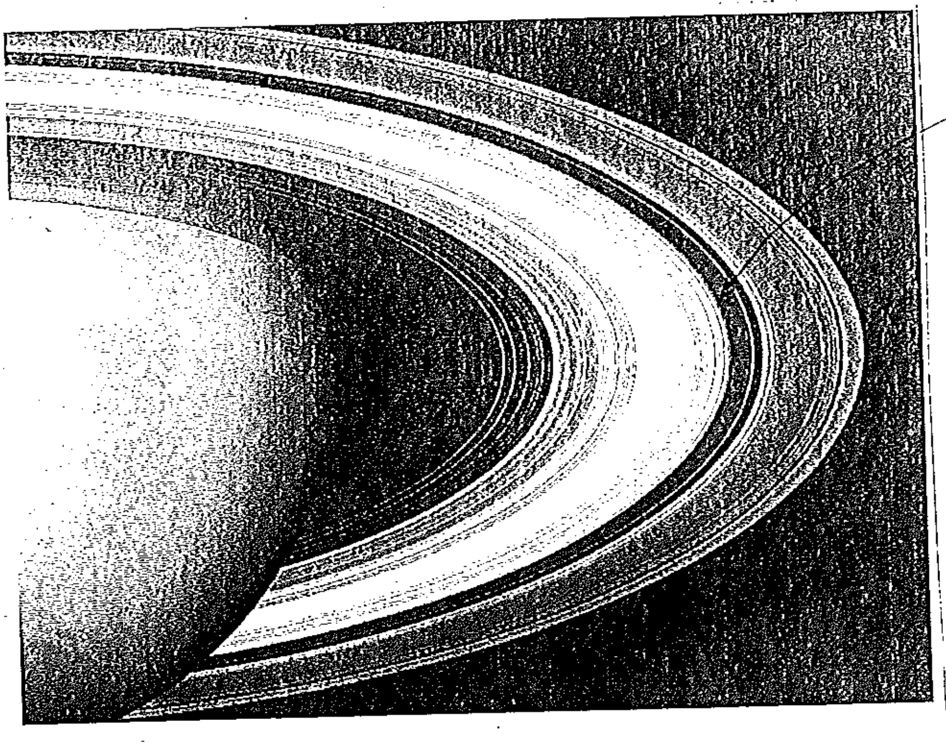


* Der Asteroid geht um die Sonne mit Frequenz ω (ohne Störung von Jupiter) und Jupiter geht um die Sonne mit Frequenz ω_J.
* Die Jupiter-Sonne und Asteroid-Sonne Probleme sind 2-Körper Probleme, die eigentlich Integrabel sind (ich erinnere euch an den Kepler-Gesetze). Aber wenn man die gravitationelle Effekte von Jupiter auf dem Asteroid untersucht, dann haben wir ein 3-Körper-Problem und das ist nicht mehr integrabel!!
* Der Einfluss von Jupiter ist natürlich viel kleiner als der der Sonne, aber wenn ω/ω_J rationell ist, dann erwarten wir einen großen Einfluss wegen der Resonanzen. Wir erwarten also, dass für diese Resonanzen chaotische Bewegung auftritt. Daher, erwarten wir Lücken in der Asteroide Verteilung, da die Asteroide die chaotisch werden, werden rausgeworfen.

* Wir können die Existenz von Lücken (aber auch von regulärer Bewegung als KAM vorhergesagt) in der Asteroidenverteilung zwischen Mars und Jupiter beobachten (die sind die sogen. <u>Kirkwood-Lücken</u>):



* Noch ein spektakulärer Beispiel der Kraft der Resonanzen sind die Saturnringe, die viele Lücke aufweisen.



Cassini-Division
↓
2:1 Resonanz mit dem Mond Mimas