LAGRANGE - MECHANIK

ZWANGSBEDINGUNGEN

Die Newton'sche Mechanik befasst sich mit Systemen ~~von~~ Massepunkten
eschrieben durch Gleichungen der Form

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \qquad \text{(sieh S. 19)}$$

Aber die typischen physikalischen Systeme unserer Umgebung sind jedoch
äufig keine typischen Teilchensysteme. Die Bewegung des Teilchen
st normalerweise eingeschränkt. (Bindekräfte, Fadenspannungen).
s gibt gewisse geometrische Bindungen der Teilchen miteinander

Bemerkung: so was haben wir schon gesehen. Ich erinnere euch, daß ein
tarrer Körper ~~von~~ der Bedingung $r_{ij} = \text{const}$ definiert wird.)

Man nennt Zwangsbedingungen die Bedingungen, die die freie
Bewegung der Teilchen einschränken.

Zwangskräfte sind Kräfte, die die Zwangsbedingungen bewirken
ese Kräfte sind im Allgemeinen unbekannt. Man kennt nur ihre
uswirkungen (also die Zwangsbedingungen).

Natürlich, wegen der Zwangsbedingungen sind die Teilchenkoordinaten
$\vec{r}_i$ nicht unabhängig voneinander.

Die Tatsachen, daß die Zwangskräfte unbekannt sind, und die
bhängigkeit der $\vec{r}_i$ voneinander, machen die Beschreibung der
typischen mechanischen Systeme nur mit Newton'schen Mechanik
ehr schwierig oder sogar fast unmöglich. Man muß die Zwangsbedingungen
n der Beschreibung der Mechanik korrekt einbauen. Das
ist genau was die Lagrange'sche Mechanik tut.

HOLONOME ZWANGSBEDINGUNGEN

· Wie gesagt, die Zwangsbedingungen spielen eine entscheidende Rolle. Es ist deshalb sinnvoll, die verschieden Arte von Zwangsbedingungen zu charakterisieren.

<u>Holonome Zwangsbedingungen</u> sind Verknüpfungen der Teilchenkoordinaten und eventuell der Zeit in der folgenden Form

$$\boxed{f_\nu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \qquad \nu = 1, \dots, p}$$

$p \equiv$ Anzahl von Zwangsbedingungen

Nicht alle Zwangsbedingungen können in dieser Form geschrieben werden. Wir werden später auch die sogen. nicht-holonome Zwangs--bedingungen studieren.

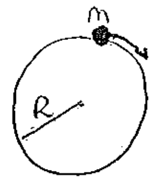
Wir können die holonome Zwangsbedingungen in 2 Familien spalten:

* <u>Holonom-skleronome Zwangsbedingungen</u>

· Das sind holonome Zwangsbedingungen, die nicht explizit zeitabhängig sind.

Also $\boxed{\dfrac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0 \qquad \nu = 1, \dots, p}$

· z.B.: Ein Teilchen auf einer Kugeloberfläche



$$x^2+y^2+z^2 = R^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2-R^2 = 0$$

$$\longrightarrow f_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2 \longrightarrow \text{eine Zwangsbedingung}$$

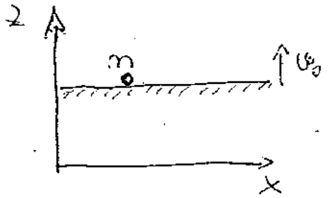
Ganz klar, f_1 is nicht explizit zeitabhängig.

* <u>Holonom-rheonome Zwangsbedingungen</u>

· Das sind holonome Zwangsbedingung mit expliziter Zeitabhängigkeit

$$\boxed{\frac{\partial f_\nu}{\partial t} \neq 0}$$

· z.B. <u>ein Teilchen im Aufzug</u> $\Longrightarrow$



$$z(t) = v_0(t-t_0) + z_0$$

$$f_1(z,t) = z - z_0 - v_0(t-t_0) = 0$$

Generalisierte Koordinaten

Holonome Zwangbedingungen reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade. Ein N-Teilchensystem hat ohne Zwang 3N Freiheitsgrade, bei p holonomen Zwangsbedingungen dann nur noch

$$\boxed{S = 3N - p}$$

Mit Hilfe der p Zwangbedingungen können wir p der 3N Koordinaten eliminieren, und für den Rest die Newton'schen Bewegungsgleichungen integrieren. (* Bemerkung: das war z.B. der Fall in unserer Diskussion der S. 39 bezgl. des starren Körpers)
Das ist zwar möglich, aber mühsam und nicht sehr elegant.
Eleganter und wirkungsvoller ist die Einführung der sogen. generalisierten Koordinaten: $q_1, q_2, \dots, q_s$.

Die generalisierten Koordinaten müssen 2 Bedingungen erfüllen:

- Die Konfiguration des System ist eindeutig durch $q_1, \dots, q_s$ festgelegt. Also für alle Teilchen
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_s, t)$$
- Die q_j sind unabhängig voneinander.

Die generalisierten Koordinaten spannen einen S-dimensionalen Raum auf, der sogen. Konfigurationsraum.
Jeder Punkt des Konfigurationsraums
$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_s) \equiv \text{Konfigurationsvektor}$$
entspricht einem möglichen Zustand des Systems.

Die Zeitableitung der generalisierten Koordinaten ergibt die sogen. generalisierten Geschwindigkeiten
$$\dot{\vec{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$$

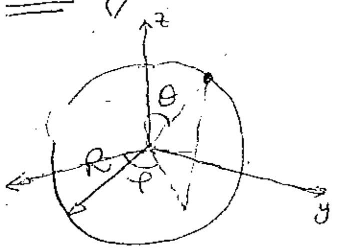
- Dann, wenn wir $\vec{q}(t_0)$ und $\dot{\vec{q}}(t_0)$ für eine gewisse Zeit t_0 kennen, dann kennen wir den Zustand des Systems für alle Zeiten.

Bemerkung: die Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen 2. Ordnung, und damit wird die Bewegung für alle Zeiten (vollständig definiert) von 2 Anfangsbedingungen (pro Freiheitsgrad)

Noch ein Paar Bemerkungen über die generalisierte Koordinaten

- Die Zahl S der Freiheitsgrade ist für einen gegebenen Problem bekannt, aber die konkrete Wahl der größen $q_1, \ldots, q_S$ ist nicht eindeutig (aber es ist trotzdem typischerweise klar durch die physikalische Problemstellung)
- Die $\{q_i\}$ sind nicht unbedingt Längen. Sie können z.B. Winkel sein.

z.B. Suchen wir noch mal unseren Beispiel der Seite 65



- $x^2+y^2+z^2-R^2=0 \longrightarrow$ eine Zwangsbedingung
- $S = 3-1 = 2 \longrightarrow$ 2 Freiheitsgrade
- Wir brauchen 2 generalisierte Koordinaten

$$q_1 = \theta \;;\quad q_2 = \varphi \quad \text{(also 2 Winkel)}$$
$$\theta: 0 \to \pi \qquad \varphi: 0 \to 2\pi$$

- Also: $x = R \sin q_1 \cos q_2$

$y = R \sin q_1 \sin q_2$

$z = R \cos q_1$

- Wie gesagt, der Wahl von $q_{1,2}$ ist nicht eindeutig, z.B. $q_1 = z \; (-R \le z \le R)$, $q_2 = \varphi \; (0 \le \varphi < 2\pi)$

$x = \sqrt{R^2-q_1^2}\cos q_2$

$y = \sqrt{R^2-q_1^2}\sin q_2$

$z = q_1$

DAS D'ALEMBERT'SCHE PRINZIP

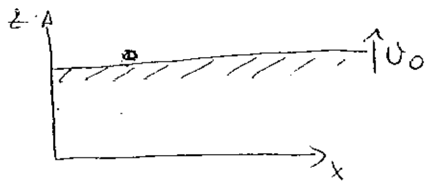
Wir werden nun sehen, wie die Lagrangesche Mechanik schafft, die unbekannten Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren

Wir werden erstmal ein Paar wichtiger Definitionen einführen

- **Virtuelle Verrückung** ($\delta \vec{r}_i$)

Virtuelle infinitesimale Koordinatenänderung, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist und momentan ($\delta t = 0$) durchgeführt wird

Bemerkung: $\delta \vec{r}_i$ haben im Prinzip nichts mit der tatsächliche Bewegung zu tun. z.B. fürs Teilchen in Aufzug



$$z = z_0 + v_0(t - t_0) \longrightarrow dz = v_0 dt$$

Also $d\vec{r} = (dx, dz) = (dx, v_0 dt)$

aber, da $\delta t = 0 \longrightarrow \delta \vec{r} = (\delta x, \delta z) = (\delta x, 0)$

Ab nun an: δ heißt virtuelle Verrückung

d heißt tatsächliche Verrückung.

- **Virtuelle Arbeit** (δW_i)

Auf S. 4 haben wir die Idee von Arbeit eingeführt. Für die virtuelle Verrückung gibt es eine virtuelle Arbeit der Form:

$$\delta W_i = -\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

wobei $\vec{F}_i$ ist die auf Teilchen i wirkende Kraft

$$\vec{F}_i = \underbrace{\vec{K}_i}_{\text{Treibende Kraft}} + \underbrace{\vec{Z}_i}_{\text{Zwangskraft}}$$

* Aus der Newton'schen Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i$$

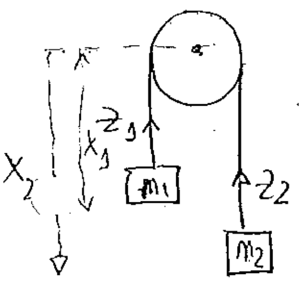
Also $$\sum_i (\vec{K}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \vec{Z}_i\cdot\delta\vec{r}_i}_{\text{Arbeit geleistet von den Zwangskräfte.}} = 0$$

Nun formulieren wir das sogen. <u>Prinzip der virtuellen Arbeit</u>

$$\boxed{\sum_i \vec{Z}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0}$$ ⇒ <u>Die Zwangskräfte leisten keine Arbeit!</u> (bei jeder gedachten Bewegung, die mit den Zwangsbedingung verträglich ist)

Das ist physikalisch (nicht mathematisch) motiviert.

z.B. <u>die Atwood'sche Maschine</u>



Die Zwangskräfte sind die Fadenspannungen

$$Z_1 = Z_2$$

Also die virtuelle Arbeit (nur für diese Kräfte) ist

$$\delta W = -\vec{Z}_1\cdot\delta\vec{x}_1 - \vec{Z}_2\cdot\delta\vec{x}_2$$
$$= Z_1(\delta x_1 + \delta x_2) = Z_1\,\delta(x_1+x_2)$$

Aber $x_1 + x_2 = \text{const}$ (gesamte Länge) also $\delta(x_1+x_2)=0$

und $\delta W = 0$ im Einklang mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit.

· Damit: $$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (\vec{K}_i - \dot{\vec{P}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0}$$ ⟶ <u>D'Alembert'sche Prinzip</u>

· Nun sind die Zwangskräfte eliminiert!

DIE LAGRANGE-FUNKTION

Die virtuelle Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ sind aber abhängig voneinander (wegen der Zwangsbedingungen). Wir müssen alles als Funktion der virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten umschreiben:

- $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1,\dots,q_s,t) \qquad i=1,\dots,N$
- $\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\vec{r}_i \underset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \dot{\vec{r}}_i(q_1,\dots,q_s,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_s,t)$

Ganz klar $\boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}$ → Wir werden diese Eigenschaft sofort anwenden.

- $\underset{\text{Virtuelle Verrückung}}{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$

Also → $\sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i\,\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} \vec{K}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right]}_{Q_j}\delta q_j$

$\boxed{Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}$ → generalisierte Kraftkomponent
(Bemerkung: Die Größe von Q_j ist aber nicht unbedingt eine Kraft)

- $\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$

$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j \;=$

$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j$

$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s} m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right]\delta q_j$

$= \sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right\}\delta q_j$

$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j\partial t}$

$= \frac{\partial}{\partial q_j}\left\{\sum_{l=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right\}$

$= \frac{\partial}{\partial q_j}\dot{\vec{r}}_i$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T) \right\} \delta q_j$$

wobei $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \equiv$ Kinetische Energie.

· Also

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i)\,\delta\vec{r}_i = 0$$

wird

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

(holonome Zwangsbedingungen)

· Da die Koordinaten q_j sind unabhängig! dann können wir alle δq_j bis auf eine gleich Null stellen.
Dies bedeutet, daß jeder Summand verschwindet:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

· Nehmen wir nun ein konservatives System an. Für so ein System existiert ein Potential (s. ⑤)

$$V = V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$$

solch daß $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$

Also $Q_j = \sum_{i=1}^{N} (-\vec{\nabla}_i V)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \overset{\text{Kettenregel}}{=} -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

da V nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ abhängt

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Also: $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V)\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}(T-V)=0}$$

An diesem Punkt führen wir eine extrem wichtige Definition

$$\boxed{L(q_1 \dots q_s, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s, t) = T(q_1 \dots q_s, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s, t) - V(q_1 \dots q_s)}$$

→ Das ist die sogen. Lagrange-funktion

*Bemerkung: diese Idee ist extrem wichtig, nicht nur für die klassische Mechanik!

und dann das D'Alembert'sche Prinzip wird der Form:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0} \qquad j=1\dots s \qquad \left(\begin{array}{c}\text{LAGRANGE-}\\ \text{-GLEICHUNGEN}\\ \text{(2. Art)}\end{array}\right)$$

Damit werden die Zwangskräfte vollständig aus den Bewegungsglei-
-chungen eliminiert!!

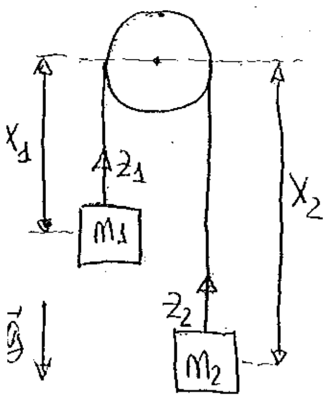
Die Lagrange-gleichungen ersetzen in der Lagrange'schen Mechanik die Newton'schen Bewegungsgleichungen.

Wir werden nun ein Beispiel der Anwendung der Lagrange-Gleichungen diskutieren.

Aber der Algorithmus zur Lösung von Problemen (mit holonomen Zwangsbedingungen und konservative Kräfte) mit Hilfe der Lagrange-gleichungen ist immer gleich

i) Zwangsbedingungen formulieren
ii) Generalisierte Koordinaten $\vec{q}$ festlegen
iii) Lagrange-Funktion $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)=T-V$ aufstellen
iv) Lagrange-Gleichungen lösen
v) Rücktransformation auf „anschauliche" Koordinaten.

Gucken wir noch mal die Atwood'sche Fallmaschine



* Wir haben hier ein konservatives System mit 5 holonom-skleronomen Zwangsbedingungen, und zwar:

1) $x_1 + x_2 = \ell = const$ → Das Seil hat eine konstante Länge
2) $y_1 = 0$
3) $y_2 = 0$
4) $z_1 = 0$
5) $z_2 = 0$

(2)–(5): Die Bewegung findet nur in X-Richtung statt

* 2 Massen haben 6 Freiheitsgrade im Prinzip, aber wegen der 5 Zwangsbedingungen gibt es nur $S = 6 - 5 = 1$ Freiheitsgrad.

Wir brauchen also eine einzige generalisierte Koordinate.

* Eine passende generalisierte Koordinate wäre:

$$q = x_1$$

Da $x_1 + x_2 = \ell \longrightarrow x_2 = \ell - q$

Gucken wir erstmal die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left[\frac{d}{dt} q\right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{d}{dt}(\ell - q)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2$$

Wir brauchen noch die potentielle Energie:

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -m_1 g q - m_2 g (\ell - q)$$

* Also die Lagrange-Funktion ist der Form:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + (m_1 - m_2) g q + m_2 g \ell$$

Also $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2)\dot{q} \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{q}$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 - m_2) g$$

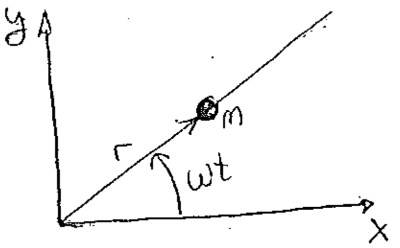
• Also die Lagrange-Gleichung ist der Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \longrightarrow (m_1+m_2)\ddot q - (m_1-m_2)g = 0$$

Also $\boxed{\ddot q = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)g}$ Bewegungsgleichung für q.

Aufpassen: für diese Rechnung haben wir die Zwangskräfte (also die Fadenspannungen in diesem Fall, Z_1 und Z_2) nicht benutzt. Der Lagrange-Formalismus braucht die nicht mehr!

• Wir werden nun noch ein Beispiel sehen: eine gleitende Perle auf einer Stange. Die Stange rotiert auf der xy-Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω.



* Wir haben 2 holonome Zwangsbedingungen:
  - Skleronom: $z=0$ (die Bewegung findet auf der xy-Ebene statt)
  - ~~Rkleonom~~ Rheonom: $y = x\tan\omega t$ (die Bewegung findet auf der rotierenden Stange statt)

• Ein Teilchen hat im Prinzip 3 Freiheitsgrade, aber wir haben 2 holonome Zwangsbedingungen, also es gibt wirklich nur $s=3-2=1$ Freiheitsgrad.

Als generalisierte Koordinate wählen wir $q=r$ aus.

Also
$$x = r\cos\omega t = q\cos\omega t \longrightarrow \dot x = \dot q\cos\omega t - \omega q\sin\omega t$$
$$y = r\sin\omega t = q\sin\omega t \longrightarrow \dot y = \dot q\sin\omega t + \omega q\cos\omega t$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2) = \frac{m}{2}\left[\dot q^2+\omega^2 q^2\right] \\ V &= 0 \quad (\text{Wir betrachten keine Kräfte}) \end{aligned}\right\} L = \frac{m}{2}(\dot q^2+\omega^2q^2)$$

Also $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{q}$

$\frac{\partial L}{\partial q} = m\omega^2 q$

$\left.\right\} m\ddot{q} - m\omega^2 q = 0 \;\downarrow\; \ddot{q} = \omega^2 q$

$\longrightarrow q(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$$\left.\begin{array}{l} q(0) = r_0 = A+B \\ \dot{q}(0) = 0 = \omega(A-B) \longrightarrow A=B \end{array}\right\} A = \frac{r_0}{2} = B$$

$\longrightarrow q(t) = \frac{r_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = r_0 \cosh \omega t$

Also $r(t)$ wächst ohne Ende. Die Perle gleitet nach draussen mit wachsender Beschleunigung.

• MECHANISCHEN EICHTRANSFORMATIONEN

Wir haben gesehen, daß für holonomen Zwangsbedingungen und konservative Kräfte, die Physik des Systems durch die Lagrange-gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{gegeben wird.}$$

Also was wichtig ist, sind diese gleichungen. In diesem Sinn ~~[illegible]~~ ist die Lagrange Funktion L nicht ganz vollständig definiert. Wir können eine sogen. Mechanische Eichtransformation machen:

$L \longrightarrow L' = L + L_0$ wobei $L_0(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{d}{dt} f(\vec{q}, t)$

(+ Bemerkung: so was ähnliches habt Ihr schon in der Elektrodynamik gesehen. Ich komme gleich zu dieser Ähnlichkeit zurück!)

und $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0$ also genau dieselbe gleichungen.

Beweis: $\frac{\partial L_0}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d}{dt} f = \frac{\partial}{\partial q_j}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_e \frac{\partial f}{\partial q_e}\dot{q}_e\right\} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} + \sum_e \dot{q}_e \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_e}$

$\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_e \frac{\partial f}{\partial q_e}\dot{q}_e\right)\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} + \sum_e \dot{q}_e \frac{\partial^2 f}{\partial q_e \partial q_j}$

Also $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial q_j} = 0$ (für alle j) und daraus folgt $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0$

z.B. Sei $L = A\dot{q}^2 + B\dot{q} + F(q)$

$$L_0 = \frac{d}{dt} f(q) \qquad f(q) = -Bq$$

Dann $L' = L + L_0 \longrightarrow L' = A\dot{q}^2 + F(q)$

Ganz klar L' und L ergeben dieselbe Lagrange-Gleichung.
(Das könnte mehrmals sehr nützlich sein)

· <u>BESONDERE FÄLLE</u>

Bisher haben wir nur holonome Zwangsbedingungen und konservative Kräfte. Wir werden nun auch dissipative Kräfte berücksichtigen.
Wir kehren nun an unserer Diskussion der S. 71 zurück. Für holonomen Za.bedingungen, aber nicht-unbedingt konservative Kräfte:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

wobei $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ waren die generalisierte Kraftkomponenten und

· Für konservative Kräfte (S. 71): $Q_j = \frac{-\partial V}{\partial q_j}$, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

damit haben wir die Lagrange-Gleichungen in S. 72 hergeleitet.

· Das ist aber nicht immer der Fall. Sehen wir <u>2 besondere Fälle</u>

① <u>Verallgemeinerte Potentiale</u>

· Für manche Fälle: $Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}$ $\qquad j = 1 \dots s$

wobei $U = U(q_1 \dots q_s ; \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s ; t) \equiv$ <u>verallgemeinerte Potentiale</u>

· Dann können wir die verallgemeinerte Lagrange-Funktion $L = T - U$ definieren, und die Lagrange-Gleichungen bleiben formal unverändert

· Ein wichtiges Beispiel ist die sogen. Lorentz-Kraft für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld: $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Man führt das Vektorpotential und das Skalarpotential ein: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
Dann, können wir $U = Q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$ als verallgemeinertes Potential anwenden. Noch was ⇒ aus der Elektrodynamik kennen wir die <u>Eichtransformation</u>:
$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, $\varphi \to \varphi - \dot{\chi} \implies L \to L + \frac{d}{dt}(Q\,\chi(\vec{r},t)) \rightarrow$ <u>mechanische Eichtransformation</u>

2) Reibung

* Die Reibung ist eine der wichtigsten dissipativen Kräfte.

Die Reibungskräfte sind geschwindigkeitsabhängig (s. ③)

$\vec{F} = -\alpha(\vec{v})\vec{v}$, und die lassen sich nicht aus einem verallgemeinerten Potential U ableiten.

· Aus S. ㉑ :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \left(\underbrace{\vec{K}_i^{(K)}}_{\substack{\text{konservativ} \\ -\vec{\nabla}_i V}} + \underbrace{\vec{K}_i^{(R)}}_{\text{Reibung}}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\underset{L=(T-V)}{\Rightarrow}: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i^{(R)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \equiv Q_j^{(R)}$$

Einer phenomenologischer Ansatz für $Q_j^{(R)}$ ist (sieh oben)

$$Q_j^{(R)} = -\sum_{l=1}^{S} \beta_{jl}\, \dot{q}_l \longrightarrow \text{die Kraft hängt nur der } \dot{q}_l \text{ ab.}$$

Sei $D = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{S} \beta_{lm}\, \dot{q}_l \dot{q}_m \equiv$ Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

Dann $Q_j^{(R)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}$

Also $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad j = 1 \dots S}$$

Modifizierte Lagrange-Gleichungen

* z.B. Ein Teilchen mit Masse m fällt vertikal in dem Schwerfeld der Erde.

Die Reibungskräfte treten gemäß einer Dissipationsfunktion

$D = \alpha v^2/2$ auf, wobei $v = \dot{z}$.

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \\ V = -mgz \end{array}\right\} L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + mgz$$

$\partial L/\partial z = mg$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \longrightarrow m\ddot{z} - mg + \alpha \dot{z} = 0$

$\partial D/\partial \dot{z} = \alpha v$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m\ddot{z} = \underbrace{mg}_{\text{Schwerkraft}} \underbrace{- \alpha \dot{z}}_{\text{Reibungskraft}}}$$

Also die Newton-Gleichung die wir schon kennen

Man kann beweisen (Übung) daß

$$\frac{d}{dt}(T+V) = -2D$$

Bemerkung, in S. 7 $\frac{dE}{dt} = -\alpha v^2$, also $\frac{dE}{dt} = -2D$)

Also 2D spielt die Rolle der <u>Energiedissipation</u>

NICHT-HOLONOME SYSTEME

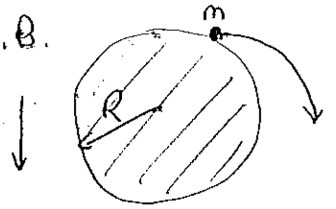
Bisher haben wir nur holonome Zwangsbedingungen. Die waren der Form $f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$.

Aber nicht alle Zwangsbedingungen sind dieser Form. Zum Beispiel:

① <u>Ungleichungen</u>

· Die Zwangsbedingungen sind Ungleichungen anstatt Gleichungen

z.B.



Ein Teilchen mit Masse m auf einer Kugeloberfläche im Schwerfeld. Da der Kugel hart ist

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$$

Die freie Bewegung des Teilchens ist eingeschränkt, aber wir können diese Ungleichung nicht benutzen, um überflüssige Koordinaten zu eliminieren (wie wir für holonome Zwangsbedingungen gemacht haben).

② <u>Zwangsbedingungen in differentieller, nicht integrierbarer Form</u>

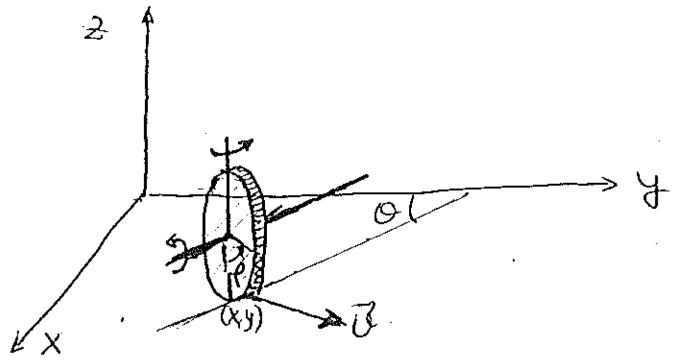
· Dies sind insbesondere Zwangsbedingungen, die Teilchengeschwindigkeiten enthalten. Sie sind der Form

---

$$\underbrace{\sum_{m=1}^{3N} f_{im}\, dx_m + f_{it}\, dt = 0}_{} \qquad i = 1 \dots p$$

dies läßt sich nicht integrieren, d.h. daß es keine Funktion $F(x_1 \dots x_{3N}, t)$ gibt, solch daß $f_{im} = \frac{\partial F_i}{\partial x_m}$, $f_{it} = \frac{\partial F_i}{\partial t}$

z.B. Nehmen wir eine Radscheibe, solch daß die Scheibenebene stets vertikal steht. Die Radscheibe rollt auf der xy-Ebene



* Rollbedingungen (Betrag von $\vec{v}$)
  $|\vec{v}| = R\dot{\varphi}$
* Richtung: $\vec{v} \Rightarrow$ immer senkrecht zur Radachse

Also $\dot{x} = v_x = v\cos\theta = R\dot{\varphi}\cos\theta$
$\dot{y} = v_y = v\sin\theta = R\dot{\varphi}\sin\theta$

Dann $\left\{\begin{array}{l} dx - R\cos\theta\, d\varphi = 0 \\ dy - R\sin\theta\, d\varphi = 0 \end{array}\right\}$

Diese 2 Bedingungen sind nicht integrabel. Man braucht $\theta = \theta(t)$ aber $\theta(t)$ liegt nur nach vollständiger Lösung des Problems vor!

---

* Für diese 2. Sort von nicht holonomen Problemen gibt es ein Lösungsverfahren, nämlich <u>die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren</u>

Wir werden nun diese Methode diskutieren.

Nehmen wir ein System mit $\bar{p}$ Zwangsbedingungen, davon $p \leq \bar{p}$ in der nicht-holonomen Form:

$$\sum_{m=1}^{3N} f_{im}(x_1, \ldots, x_{3N}, t)\, dx_m + f_{it}(x_1 \ldots x_{3N}, t)\, dt = 0 \qquad i = 1 \ldots p$$

+ Erstmal benutzen wir die $(\bar{p}-p)$ holonome Zwangsbedingungen um die tatsächlichen Freiheitsgrade zu verringen:

$$j = 3N - (\bar{p} - p)$$

Wir benutzen also j generalisierte Koordinaten $q_1 \ldots q_j$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \ldots q_j)$$

<u>Bemerkung</u> $\rightarrow$ Wegen der p nicht-holonomen Zwangsbedingungen sind nun die generalisierten Koordinaten nicht ganz unabhängig.

Wir schreiben nun die nicht-holonomen Zwangsbedingungen als Funktion der generalisierten Koordinaten

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im}\, dq_m + b_{it}\, dt = 0 \qquad i = 1 \dots p$$

Für virtuelle Verrückungen (δq_m , und $\delta t = 0$)

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im}\, \delta q_m = 0 \qquad i = 1 \dots p$$

Wir führen nun die so genannte <u>Lagrange'sche Multiplikatoren</u> λ_i ein. Die sind $\vec{q}$-unabhängig aber vielleicht t-abhängig.

$$\sum_{m=1}^{j} a_{im}\, \delta q_m \xrightarrow[\text{klar}]{\text{ganz}} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{m=1}^{j} a_{im}\, \delta q_m = 0$$ (wir benutzen das sofort)

Bemerkung: Wir haben so viele Lagrange-Multipli. wie nicht-holonomen Zwangsbedingungen)

Ich erinnere euch daß (in Allgemeinen) (sieh S. 71)

$$\sum_{m=1}^{j} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} - Q_m \right\} \delta q_m = 0$$ wobei Q_m die generalisierte Kräfte waren.

Bemerkung: da die δq_m sind nun nicht voneinander unabhängig, es is nicht mehr wahr, daß jeder Summand auch verschwinden muß)

Für konservative Kräfte $\quad Q_m = -\dfrac{\partial V}{\partial q_m} \quad , \quad \dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_m} = 0$

also

$$\sum_{m=1}^{j} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right\} \delta q_m = 0$$

Dies kombinieren wir mit der Gleichung der Lagrange-Multiplikatoren:

$$\sum_{m=1}^{j} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im}}_{\bar{Q}_m} \right\} \delta q_m = 0$$

(<u>Bemerkung</u>: $\bar{Q}_m = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im}$ spielt die Rolle eine <u>generalisierte Zwangskraft</u> die die nicht-holonomen Zwangsbedingungen realisiert. Natürlich $\sum_{m=1}^{j} \bar{Q}_m \delta q_m = 0$ (S. 69))

* Wie gesagt, wegen der nicht holonomen Zwangsbedingungen die q_m's sind nicht voneinander unabhängig in Allgemeinen.

Eigentlich von allen der j Freiheitsgrade nur $j-p$ sind wirklich frei wählbar (wegen der p nicht-holonomen Zwangsbedingung).

* Wir legen nun fest:

q_m : $m = 1 \dots j-p$ → die sind unabhängig

q_m : $m: j-p+1 \dots j$ → die sind abhängig

Die Lagrange-Multiplikatoren λ_i sind noch unbestimmt. Wir wählen sie so, daß

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} = 0 \qquad m = j-p+1, \dots, j$$

Das sind p Gleichungen für p unbekannte λ_i.

Damit

$$\sum_{m=1}^{j} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} \right\} \delta q_m = \sum_{m=1}^{j-p} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} \right\} \delta q_m = 0$$

Aber diese q_m sind nun voneinander unabhängig, also jeder Summand muß auch verschwinden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im} = 0 \qquad m: 1, \dots, j-p$$

Also insgesamt:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{im}} \qquad \text{für alle } m: 1 \dots j$$

↓

<u>Lagrange'sche Bewegungsgleichungen (1. Art)</u>

: Diese Methode läßt sich am Besten mit einem Beispiel verstehen.

· Wir nehmen nun noch mal die Radscheibe der S. 79.

Die „Generalisierte" Koordinaten sind:

$q_1 = x \; ; \; q_2 = y \; ; \; q_3 = \varphi \; ; \; q_4 = \theta$

Die Rollbedingungen waren:

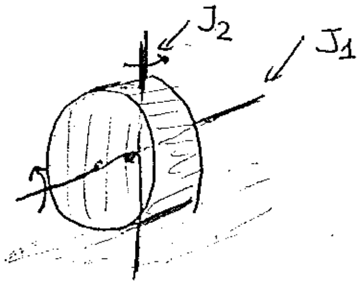
$$\left.\begin{aligned} \dot{x} - R\cos\theta\,\dot{\varphi} = 0 &\longrightarrow dq_1 - R\cos q_4\, dq_3 = 0 \\ \dot{y} - R\sin\theta\,\dot{\varphi} = 0 &\longrightarrow dq_2 - R\sin q_4\, dq_3 = 0 \end{aligned}\right\} \text{2 }\underline{\text{nicht-holonomen Zwangsbedingungen}}$$

Also $a_{11} = 1 \,,\; a_{12} = 0 \,,\; a_{13} = -R\cos q_4 \,,\; a_{14} = 0$ (Notation der S. 80)

$a_{21} = 0 \,,\; a_{22} = 1 \,,\; a_{23} = -R\sin q_4 \,,\; a_{24} = 0$

Die generalisierte Zwangskräfte $\overline{Q}_m = \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i a_{im}$ (siehe Bemerkung in S. 80)

sind also $\overline{Q}_1 = \lambda_1 \; ; \; \overline{Q}_2 = \lambda_2 \; ; \; \overline{Q}_3 = -R\cos q_4\, \lambda_1 - R\sin q_4\, \lambda_2 \; ; \; \overline{Q}_4 = 0$



· Die kinetische Energie der Radscheibe ist:

$$T = \underbrace{\frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}_{\text{TRANSLATION}} + \underbrace{\frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2}_{\text{ROTATION}}$$

$J_1 \to$ Trägheitsmoment um die Radachse

$J_2 \to$ Trägheitsmoment um die durch Scheibenmittelpunkt und Auflagepunkt verlaufende Achse.

Wir nehmen an, daß die Radscheibe im kräftefreien Raum bewegt, also $V = 0$, und daher $L = T$

· Die Lagrangesche Gleichungen 1. Art sind der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \overline{Q}_m$$

$$L = \frac{M}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{J_1}{2}\dot{q}_3^2 + \frac{J_2}{2}\dot{q}_4^2$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = M\dot{q}_1 \quad \Big\| \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = J_1 \dot{q}_3 \quad \Big\| \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial L}{\partial q_3} = \frac{\partial L}{\partial q_4} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = M\dot{q}_2 \quad \Big\| \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} = J_2 \dot{q}_4 \quad \Big\|$

Also $\left\{\begin{aligned} M\ddot{q}_1 &= \lambda_1 \\ M\ddot{q}_2 &= \lambda_2 \\ J_1\ddot{q}_3 &= -R\cos q_4\,\lambda_1 - R\sin q_4\,\lambda_2 \\ J_2\ddot{q}_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$ Lagrange-Gleichungen 1. Art

Damit $\ddot{q}_4 = 0 \longrightarrow q_4 = \omega t$ wobei $\omega = \text{const}$ (wir nehmen $q_4(0)=0$ an)

Aus den Zwangsbedingungen

$$\dot{q}_1 - R\cos q_4\,\dot{q}_3 = 0 \rightarrow \dot{q}_1 - R\cos\omega t\,\dot{q}_3 = 0 \rightarrow \ddot{q}_1 + R\omega\sin\omega t\,\dot{q}_3 - R\cos\omega t\,\ddot{q}_3 = 0$$

$$\dot{q}_2 - R\sin q_4\,\dot{q}_3 = 0 \longrightarrow \dot{q}_2 - R\sin\omega t\,\dot{q}_3 = 0 \longrightarrow \ddot{q}_2 - R\omega\cos\omega t\,\dot{q}_3 - R\sin\omega t\,\ddot{q}_3 = 0$$

Also $\left.\begin{aligned} \ddot{q}_1 = \frac{\lambda_1}{M} &= -R\omega\sin\omega t\,\dot{q}_3 + R\cos\omega t\,\ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_2 = \frac{\lambda_2}{M} &= R\omega\cos\omega t\,\dot{q}_3 + R\sin\omega t\,\ddot{q}_3 \end{aligned}\right\}$ Damit liegen λ_1 und λ_2 fest

Wir müssen noch die 3. Lagrange-Gleichung benutzen

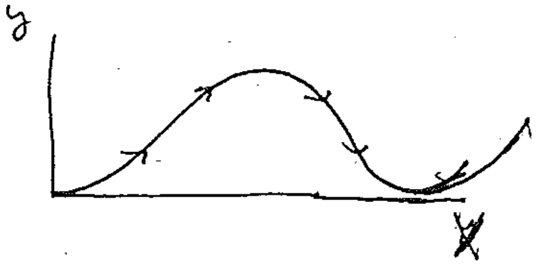
$$\begin{aligned} J_1\ddot{q}_3 &= -MR\cos\omega t\left[-R\omega\sin\omega t\,\dot{q}_3 + R\cos\omega t\,\ddot{q}_3\right] \\ &\quad -MR\sin\omega t\left[R\omega\cos\omega t\,\dot{q}_3 + R\sin\omega t\,\ddot{q}_3\right] \\ &= -MR^2\ddot{q}_3 \longrightarrow (J_1 + MR^2)\ddot{q}_3 = 0 \end{aligned}$$

Also $\dot{q}_3 = \dot{\varphi} \equiv \text{const} = \Omega$

Damit $\ddot{x} = \ddot{q}_1 = -R\Omega\omega\sin\omega t$

$\ddot{y} = \ddot{q}_2 = R\Omega\omega\cos\omega t$

Also $\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x0}t + R\frac{\Omega}{\omega}\sin\omega t \\ y(t) &= y_0 + v_{y0}t - R\frac{\Omega}{\omega}\cos\omega t \end{aligned}\right\}$



(Versuch es mal mit einer Münze!)

Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen

- Die Newton-Gleichungen sind, wie wir schon wissen, nicht forminvariant gegenüber Koordinatentransformationen.

Die Lagrange-Gleichungen sind dagegen forminvariant gegenüber Punkttransformationen der Form

$$(q_1 \dots q_s) \longrightarrow (\bar{q}_1 \cdots \bar{q}_s)$$

D.h. wenn $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1 \dots s$

dann für $\begin{cases} q_j' = q_j'(q_1 \cdots q_s, t) \;;\; q_j = q_j(q_1' \cdots q_s', t) \\ L'(\vec{q}', \mathring{\vec{q}}', t) = L(\vec{q}(\vec{q}', t), \mathring{\vec{q}}(\vec{q}', \mathring{\vec{q}}', t), t) \end{cases}$

gilt $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \mathring{q}_j'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_j'} = 0 \qquad j = 1 \dots s$

Also genau die gleiche Form! → [Das ist (neben der Eliminierung der Zwangskräfte) ein sehr großer Vorteil der Lagrange-Mechanik.]

BEWEIS: $q_j = q_j(q_1' .. q_s', t)$

$$\mathring{q}_j = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial q_j}{\partial q_l'} \mathring{q}_l' + \frac{\partial q_j}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial \mathring{q}_j}{\partial \mathring{q}_l'} = \frac{\partial q_j}{\partial q_l'}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_l'} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q_l'} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_j} \frac{\partial \mathring{q}_j}{\partial q_l'} \right)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathring{q}_l'} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_j} \frac{\partial \mathring{q}_j}{\partial \mathring{q}_l'} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial q_l'}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \mathring{q}_l'}\right) = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_j}\right) \frac{\partial q_j}{\partial q_l'} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_j} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial q_l'}\right) \right\} = \sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_j}\right)\right] \frac{\partial q_j}{\partial q_l'} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_j} \frac{\partial \mathring{q}_j}{\partial q_l'}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \mathring{q}_l'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_l'} = \sum_j \underbrace{\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right\}}_{0} \frac{\partial q_j}{\partial q_l'} = 0$$

• DAS HAMILTON'SCHE PRINZIP

Bisher haben wir das D'Alembert-Prinzip und die assoziierten Ideen von virtueller Verrückung und virtueller Arbeit benutzt, um die Bewegungsgleichungen der Lagrange-Mechanik (also die Lagrange-gleichungen) herzuleiten.

Man kann die Lagrange-Mechanik in einer anderen alternativen Form herleiten, und zwar mit dem sogen. Hamilton'schen Prinzip. Diese alternative Form ist extrem wichtig nicht nur für die Mechanik sondern als allgemeinere Idee der gesamten Physik, und deswegen sollen wir sie hier diskutieren.

Auf S. 66 haben wir die Idee von Konfigurationsraum eingeführt, zu s-dimensionalen Raum ($s \equiv$ tatsächliche Freiheitsgrade), dessen Achsen durch die generalisierten Koordinaten $q_1, \dots, q_s$ gebildet werden.

Die Kurve im Konfigurationsraum, der der Zustand des Systems im Laufe der Zeit folgt, heißt Konfigurationsbahn: $\vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_s(t))$ Teilchenbahnen,

Bemerkung: die Konfigurationsbahn ergibt die tatsächlichen Teilchenbahnen, hat im Prinzip natürlich nicht die geringste Ähnlichkeit mit den Teilchenbahnen

Für die folgende Diskussion beschränken wir uns auf holonome, konservative Systeme.

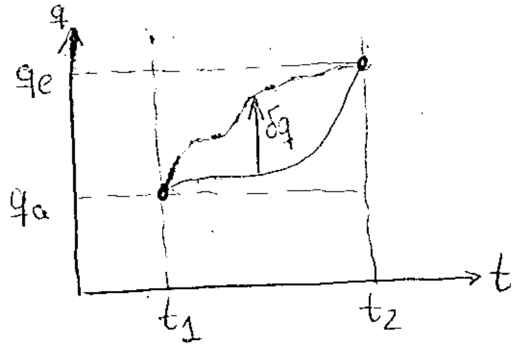
Die Lagrange-Funktion ist der Form $L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$ (S. 72).

Wir definieren nun eine extrem wichtige Idee:

$$\boxed{S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t]\, dt} \longrightarrow \text{Wirkungsfunktional}$$

Die Wirkung hängt von
- Anfangszeit und Endzeit (t_1 und t_2)
- der Bahn $\longrightarrow \vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)$

· Bei festen (t_1, t_2) wird jeder Bahn $\vec{q}(t)$ eine Zahl $S[\vec{q}(t)]$ zugeordnet. Dies nennt man ein Funktional (eine Funktion einer Funktion).



· Es ist klar, daß für feste $\vec{q}_a = \vec{q}(t_1)$ und $\vec{q}_e = \vec{q}(t_2)$ es viele (unendlich viele eigentlich) Konfigurationsbahnen gibt, die diese Randbedingungen erfüllen. (siehe Abbildung)

· Alle die Konfigurationsbahnen $M = \{\vec{q}(t)$ solch daß $\vec{q}(t_1) = \vec{q}_a, \vec{q}(t_2) = \vec{q}_e\}$ nennen den Konkurrenzschar.

Natürlich jeder Bahn $\vec{q}(t) \in M$ wird ~~[illegible]~~ eine Wirkung $S[\vec{q}(t)]$ zugeordnet.

· Jeder Konfigurationsbahn $\vec{q}(t) \in M$ kann durch virtuelle Verrückungen $\delta\vec{q}$ aus einer anderen Bahn entstehen (Natürlich wegen der Randbedingungen $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$)

· Das Hamilton'sche Prinzip (oder Prinzip der stationären Wirkung) lautet, daß die Systembewegung so erfolgt, dass $S[\vec{q}(t)]$ extremal wird, also von allen Bahnen $\vec{q}(t) \in M$, die tatsächliche Bahn ist die, die S extremal macht. D.h. $\boxed{\delta S = 0}$ extrem wichtig!

· Dieses Prinzip ist sehr elegant, kurz und extrem wichtig. Wir werden nun sehen, daß dies Prinzip und das D'Alembert'sche Prinzip äquivalent sind.

· Auf S. 69 haben wir das D'Alembert'sche Prinzip formuliert

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{K}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\left[\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right] - \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i =$$

$$= \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i) - \frac{1}{2}\delta\left[\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right]$$

$\delta\left[\frac{d}{dt}\vec{r}_i^{\,2}\right] = 2\frac{d}{dt}\vec{r}_i\, \delta\left[\frac{d}{dt}\vec{r}_i\right]$ (also δ funktioniert wie eine Ableitung.

(mit „δ" können wir genauso wie mit „d" umgehen)

Also

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i) - \frac{m_i}{2} \delta(\dot{\vec{r}}_i^{\,2}) - \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right] \right)$$

Aber

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i) \, dt = \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

$\leftarrow$ und $\delta q_j(t_{1,2}) = 0$

die Anfang- und Endpunkte bleiben fest

Ausserdem:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \overset{\text{s. 70}}{=} \sum_{j=1}^{s} Q_j \, \delta q_j \overset{\text{Konservative Kräfte}}{=} - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j = -\delta V$$

Also

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-\delta \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right]}_{T} + \delta V \right] \Rightarrow 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \; \delta(T - V) = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta L$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} L \, dt \right] = 0} \longrightarrow \boxed{\delta S = 0}$$

it = 0 per Definition der virtuellen Verrückung (s. 68)

Also, für alle in der Natur ablaufenden Prozesse nimmt die Wirkung einen Extremwert gegenüber allen virtuellen Nachbarbahnen an, die zwischen denselben Zeitpunkten t_1 und t_2 und denselben Endkonfigurationen $\vec{q}_a$ und $\vec{q}_b$ ~~durch~~ laufen werden.

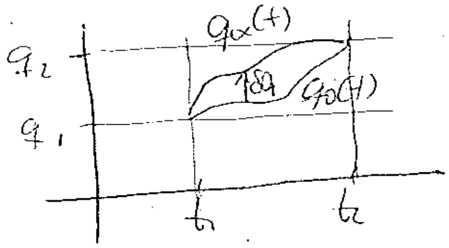
Das Hamilton-Prinzip spielt eine sehr wichtige Rolle in der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie. Die Idee des Feynmann-Pfadintegral kommt eigentlich aus dieser Idee.

• VARIATIONSPROBLEME / DIE LAGRANGE GLEICHUNGEN

· Das Hamilton'sche Prinzip $\delta S = 0$ ist ein Beispiel eines sogen. Variationsproblem. Bevor wir aus der Bedingung $\delta S = 0$ die Lagrange-Gleichungen bekommen, sollten wir erstmal kurz erläutern, wie diese Variationsprobleme eigentlich gelöst werden können.

Der Einfachkeit halber, werden wir ein 1D Fall annehmen

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$



wobei $\begin{Bmatrix} q(t_1) = q_1 \\ q(t_2) = q_2 \end{Bmatrix}$

· wir charakterisieren die Kurven $q(t) \in M$ durch einen Scharparameter α solch daß:

$$q_\alpha(t) = q_0(t) + \alpha\, \eta(t)$$

wobei $\left[\begin{array}{l} q_0(t) \text{ die gesuchte extremale Bahn ist.} \\ \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0 \text{, also } \begin{Bmatrix} q_\alpha(t_1) = q_0(t_1) \\ q_\alpha(t_2) = q_0(t_2) \end{Bmatrix} \text{ Randbedingungen.} \\ \text{(sonst beliebig)} \end{array} \right.$

Die Verschiebung δq der Bahn, die bei einer Veränderung des Parameters α von $\alpha = 0$ auf $d\alpha$ einsetzt:

$$\delta q = q_{d\alpha}(t) - q_0(t) = \eta(t)\, d\alpha$$

das ist wirklich eine virtuelle Verrückung, weil hier die Zeit festgehalten ist.

· Die Variation des Funktionals (in diesem Fall die Wirkung) ist also:

$$\delta S = S[q_{d\alpha}(t)] - S[q_0(t)] = \left(\frac{dS(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q_{d\alpha}, \dot{q}_{d\alpha}, t) - L(q_0, \dot{q}_0, t) \right] dt$$

* Da $q_0(t)$ ist die gesuchte extremale Bahn, muß

$$\left(\frac{d S(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 \quad \text{für beliebige } \eta(t)$$

(Bemerkung: das ist nun wie eine normale Minimierung / Maximierung eines Funktion.)

Also

$$\frac{d}{d\alpha} S(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_{t_1}^{t_2} L[q,\dot{q},t]\,dt \overset{\text{Kettenregeln}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right\}$$

Aber $\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \eta(t)$

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\alpha \dot{\eta}(t)\right) = \dot{\eta}(t)$$

Also $\frac{d}{d\alpha} S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}(t) \right\} dt$

Aber

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\eta(t)}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\eta(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] dt}_{= \left[\eta(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]_{t_1}^{t_2} = 0 \ (\text{weil } \eta(t_1)=\eta(t_2)=0)} - \int_{t_1}^{t_2} \eta(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) dt$$

Also

$$\frac{d}{d\alpha} S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right\} \eta(t)\,dt = 0$$

Dies muß so sein für jede beliebige Funktion $\eta(t)$, also

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0}$$

→ Wir bekommen also die <u>Lagrange-Gleichungen (2. Art)</u>

(<u>Bemerkung</u>: die Ideen von Variationsprobleme sind ganz allgemeine.

Sei zB $f(y,y',x)$ wobei $y=y(x)$, $y'=dy/dx$; sei $J = \int dx\, f(y,y',x)$

dann $\delta J = 0 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \longrightarrow 0.$

In der Theorie der Variationsprobleme diese Gleichung heißt <u>Euler-Gleichung</u>.)

Bemerkung (II)

* Die Diskussion kann für mehrere Dimensionen verallgemeinert werden

Sei $f(y_1 \dots y_s; y'_1 \dots y'_s; t)$ und $J = \int dt\, f(y_1 \dots y_s; y'_1 \dots y'_s; t)$

$\Rightarrow \delta J = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0 \quad {\scriptstyle i=1..s} \longrightarrow$ Euler-Lagrange Gleichungen

* Für die Wirkung

$L(q_1 \dots q_s; \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s; t) \longrightarrow S = \int dt\, L(q_1 \dots q_s; \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s; t)$

$\Rightarrow \delta S = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad {\scriptstyle i=1..s}} \Longrightarrow$ Lagrange-Gleichungen 2. Art.

* Man kann genauso gut zeigen, dass der D'Alembert-Prinzip und der Hamilton-Prinzip auch für nicht-konservative Kräfte und nicht-holonome Randbedingungen völlig äquivalent sind, d.h. die beide führen zu dieselbe Lagrange-Gleichungen.

---

* ZYKLISCHE KOORDINATEN

* Im Prinzip sind alle q_j und $\dot{q}_j$ zeitabhängig. Man kann aber auch finden, dass einige q's oder $\dot{q}$'s (oder Kombinationen davon) bei der Bewegung konstant bleiben, und nur von den Anfangsbedingungen bestimmt sind. Gewisse Bewegungskonstante ergeben sich im Zusammenhang mit den sogen. zyklischen Koordinaten:

Df: Eine generalisierte Koordinate q_j ist zyklisch, wenn

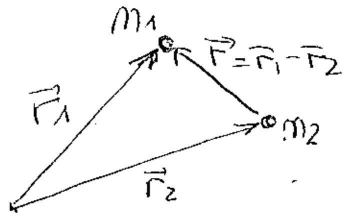
$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \longrightarrow$ dann aus der Lagrange-Gleichungen

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{Konstante}}$

[* Bemerkung: $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ sind die sogen. generalisierte Impulse. Mehr davon in unserer Diskussion der Hamilton-Mechanik]

* Wenn man Bewegungskonstante identifizieren kann, dann wird die Rechnung stark vereinfacht. Daher, sollte man immer die generalisierte Koordinate so auswählen, dass möglichst viele q_j zyklisch sind.

* Gucken wir ein <u>Beispiel</u>: <u>Zweikörperproblem</u>



* Wir nehmen zwei Körper mit Massen m_1 und m_2
* Die gegenseitige Wechselwirkung hängt nur von Abstand ab:

$$V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=V[|\vec{r}_1-\vec{r}_2|]=V(r)$$

* Wir führen die Schwerpunkt-Koordinaten ein:

$$\vec{R}=\frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2)\equiv(X,Y,Z) \qquad (M=m_1+m_2)$$

und die Relativkoordinaten $\vec{r}$

* Wir werden die Relativkoordinaten in Kugelkoordinaten schreiben: $\vec{r}=r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

<u>Bemerkung</u>: das ist eine gute Idee, weil $V=V(r)$)

* Dann nehmen wir als generalisierte Koordinaten:

$$q_1\equiv X\ ;\ q_2\equiv Y\ ;\ q_3\equiv Z\ ;\ q_4\equiv r\ ;\ q_5\equiv\theta\ ;\ q_6\equiv\varphi$$

* Die Kinetische Energie ist der Form (s. 25):

$$T=\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2=\frac{M}{2}[\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2] + \frac{\mu}{2}[\dot{q}_4^2+q_4^2\dot{q}_5^2+q_4^2\sin^2q_5\,\dot{q}_6^2]$$

* Dann

$$L=\frac{M}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+\frac{\mu}{2}(\dot{q}_4^2+q_4^2\dot{q}_5^2+q_4^2\sin^2q_5\,\dot{q}_6^2)-V(q_4)$$

* Ganz klar: $\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial L}{\partial q_3} = \frac{\partial L}{\partial q_6} = 0$

$\longrightarrow$ also q_1, q_2, q_3 und q_6 sind zyklisch.

Dann
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= M\dot{q}_1 = M\dot{x} = \text{Konstante} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= M\dot{q}_2 = M\dot{y} = \text{Konstante} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} &= M\dot{q}_3 = M\dot{z} = \text{Konstante} \end{aligned}\right\} M\dot{\vec{R}} = \text{Konstant}$$

Das ist nicht mehr als der Schwerpunktsatz (S. 19), da es keine äußere Kraft gibt.

Außerdem: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_6} = \mu q_4^2 \sin^2 q_5\, \dot{q}_6 = \mu r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} = L_z = \text{Konstante}$

z-Komponente des Relativ-Drehimpulses

(• Bemerkung: eigentlich, da alle Richtungen sind gleich (isotropes Raum) dann $\vec{L} \equiv$ Konstant)

* Also anstatt 6 Variabeln, nun haben wir nur 2. Das ist eine klare Vereinfachung. Wenn wir anstatt diese 6 generalisierte Koordinaten, die Kartesische Koordinaten der beiden Teilchen benutzt hätten, dann:

$$L = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - V\left[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2\right]$$

und dann hätten wir keine zyklische Koordinate. Die Physik letztendlich muss gleich sein, aber die Rechnungen sind VIEL aufwendiger!

---

* FUNDAMENTELLE ERHALTUNGSSÄTZE:

BEZIEHUNG ZWISCHEN ERHALTUNGSSÄTZE UND SYMMETRIEN

* Wir haben gerade gesehen, dass Konstante der Bewegung die Rechnungen stark vereinfachen können. Es gibt aber fundamentelle Erhaltungssätze (Energie, Impuls, Drehimpuls)

die wir schon kennen, und die man auch in der Lagrange-Mechanik wiederfinden können. Wir werden nun lernen, dass diese Erhaltungssätze eine direkte Konsequenz fundamentaler Symmetrien sind. Diese Idee ist extrem wichtig (für die gesamte Physik).

- Homogenität der Zeit $\longleftrightarrow$ Energieerhaltung

* Ein System ist zeitlich homogen, wenn seine Eigenschaften invariant gegen Zeittranslationen sind.
* Sei $\vec{q}(t)$ die Konfigurationsbahn (S. 85), die das System zwischen den Zeiten t_a und t_e durchläuft:

$$\vec{q}(t_a) = \vec{q}_a \longrightarrow \text{Anfangskonfiguration}$$
$$\vec{q}(t_e) = \vec{q}_e \longrightarrow \text{Endkonfiguration}$$

Für zeitlich homogene Systeme erfasst die zeitlich-verschobene exakt dieselbe Konfigurationsbahn zwischen $t_a + \Delta t$ und $t_e + \Delta t$ Punkt auf den Konfigurationsraum wenn $\vec{q}(t_a+\Delta t) = \vec{q}_a$ und $\vec{q}(t_e+\Delta t) = \vec{q}_e$.

* Das muss bedeuten, dass die Lagrange-Funktion des Systems nicht explizit zeitabhängig ist $\longrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

- Dann:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] = \sum_{j=1}^{s}\left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right]$$

$$\overset{!}{=} \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right]$$

Dann $\boxed{\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right] = 0}$

Dann $\sum_{j=1}^{s}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$ ist eine Konstante der Bewegung.

(Bemerkung: Wir werden bald sehen, dass diese Konstante eigentlich die sog. Hamilton-Funktion ist, die für holonom-skleronome konservative Systeme einfach die Energie ist!)

- Homogenität des Raumes $\longleftrightarrow$ Impulserhaltung

- Ein System ist räumlich homogen, wenn seine Eigenschaften unabhängig vom Ort sind, also eine Translation ändert nichts.
  (Bemerkung: daher heißen diese Systeme auch translationsinvariante Systeme. Das ist z.B. der Fall wenn die Kräfte nur von Teilchenabstände abhängen)

- Sei q_j eine generalisierte Koordinate, solch dass Δq_j einer Translation des gesamten Systems entsprich
  (Bemerkung: typischerweise würden wir Koordinaten des Schwerpunkts annehmen.)

Dann, räumliche Homogenität $\longleftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow$ also q_j ist zyklisch $\Longrightarrow$

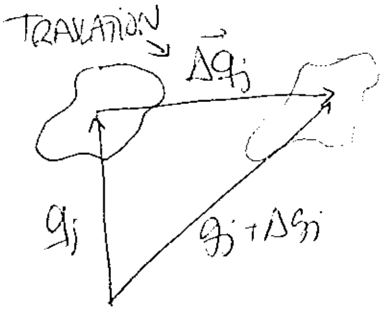
$$\Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{Konstante}$$

- Für konservative Systeme $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$, dann

s. (*) $\Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \text{Konstante}$$



Sei $\vec{n}_j$ der Einheitsvektor in Translationsrichtung. Alle Teilchenkoordinaten ändern sich um den gleichen Vektor:

$$\vec{\Delta q_j} = \Delta q_j \, \vec{n}_j$$

$$\text{Dann: } \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{\Delta q_j \to 0} \frac{\vec{r}_i(q_j + \Delta q_j) - \vec{r}_i(q_j)}{\Delta q_j} = \lim_{\Delta q_j \to 0} \frac{\Delta q_j \vec{n}_j}{\Delta q_j} = \vec{n}_j$$

$$\text{Also: } \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i\right] \cdot \vec{n}_j = \vec{n}_j \cdot \underbrace{\vec{P}}_{\text{Gesamtimpuls}} = \text{Konstante.}$$

* Wenn der Raum homogenen in allen Richtungen ist, dann wird $\vec{P}$ insgesamt erhaltet.
* Also Homgeneität des Raumes $\longleftrightarrow$ Impulserhaltung

---

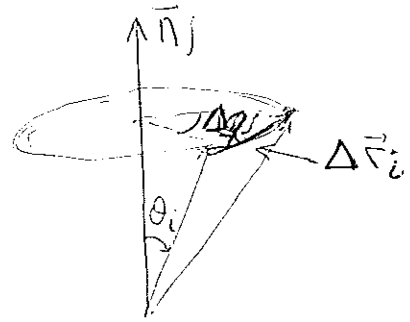
• Isotropie des Raumes $\longleftrightarrow$ Drehimpulserhaltung

· Ein System ist räumlich isotrop, wenn beliebige Drehungen die Eigenschaften des Systems nicht ändern.

· Sei q_j eine generalisierte Koordinate! (ein Winkel hier) solch daß Δq_j einer Drehung des Systems um den Winkel $\Delta\varphi$ um die Achse $\vec{n}_j$ entspricht. Für allen Teilchenkoordinaten gilt dann:

$$|\Delta\vec{r}_i| = \Delta q_j \, r_i \sin\theta_i$$

$$\Delta\vec{r}_i = \Delta q_j \, \vec{n}_j \times \vec{r}_i$$



· Räumliche Isotropie $\longleftrightarrow \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{Konstante}$$

Da für konservative Systeme $\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$

S. (94) $\longrightarrow$ $$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \text{Konstante}$$

Aber nun: $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \lim\limits_{\Delta q_j \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta q_j} = \vec{n}_j \times \vec{r}_i$

Dann $$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{n}_j \times \vec{r}_i) = \vec{n}_j \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right] = \underbrace{\vec{n}_j \cdot \vec{L}}_{\text{Konstante}}$$

Also die Komponente des Gesamtdrehimpulses $\vec{L}$ in $\vec{n}_j$-Richtung wird erhaltet.

· Wenn das System vollständig isotrop ist, dann ist $\vec{L}$ insgesamt erhaltet.

Also: Isotropie des Raumes $\longleftrightarrow$ Drehimpulserhaltung

(Bemerkung: mehrmals sind die Systeme vielleicht nicht vollständig isotrop, aber die zeigen zB zylindrische Symmetrie, d.h. das das System invariant gegen Drehungen um einer Achse ist. In dem Fall wird nur die entsprechende Komponente des Drehimpulsvektors erhaltet.)

• <u>NOETHER-THEOREM</u>

· Also, wenn wir die Symmetrien des Systems kennen, dann aus diese Symmetrien können wir Erhaltungssätze herleiten. Das ist genau die Idee des sogen. Noether-Theorems, formuliert 1918 bei der deutschen Mathematikerin <u>Emmy Noether</u>.

· Der Noether-Theorem besagt das folgende:

Sagen wir, dass die Lagrange-Funktion L sich nicht ändert, wenn man eine Transformation $q \rightarrow q(s)$ macht

(<u>Bemerkung</u>: das könnte eine Zeitverschiebung, eine Translation, eine Drehung, oder egal was; das Parameter s parametrisiert die Transformation)

[<u>Bemerkung</u>: der Einfachkeit halber betrachte ich hier nur eine generalisierte Koordinate]

Dann: $\frac{d}{ds} L\left(q(s), \dot{q}(s)\right) = 0$

dann: $C = p \frac{d}{ds} q(s)$ ist eine <u>Erhaltungsgröße</u>, also $\frac{dC}{dt} = 0$

mit $p = \partial L / \partial \dot{q}$

* Der Beweis ist eigentlich sehr einfach:

$$\frac{dC}{dt} = \mathring{p}\,\frac{d}{ds}q(s) + p\,\frac{d\mathring{q}}{ds} \;\stackrel{!}{=}\quad \mathring{p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (\text{Lagrange-Gleichung})$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}\right)\frac{dq(s)}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}\,\frac{d\mathring{q}(s)}{ds} \;\stackrel{!}{=}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q}\,\frac{dq(s)}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \mathring{q}}\,\frac{d\mathring{q}(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left[L[q(s),\dot{q}(s)]\right]$$

Also $\frac{dC}{dt} = 0 \iff \frac{dL}{ds} = 0$ Q.E.D.

z.B. Translationsinvarianz: $q(s) = q + s \longrightarrow \frac{dq}{ds} = 1$

$\Longrightarrow C = p =$ Konstant

$\quad \longrightarrow$ Impulserhaltung

· Diese extrem wichtige Idee ist einer der fundamentalen Werkzeuge der modernen theoretischen Physik. Der Noether-Theorem verknüpft Symmetrien mit Gesetze der Natur (wie die Erhaltung der Energie).