NEWTON'SCHE MECHANIK: DYNAMIK DES MASSENPUNKTES

• Wir werden unsere discussion der Mechanik mit einer Auffrischung der Newton'sche Mechanik anfangen.

* Einer Massenpunkt (mit vernachlässigbarer Ausdehnung) mit einer Masse m hat eine Dynamik charakterisiert durch

Ortsvektor $\longrightarrow \vec{r}(t)$

Geschwindigkeitsvektor $\longrightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

Beschleunigungsvektor $\longrightarrow \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

die Beschreibung dieser Vektoren erfolgt natürlich durch die Anwendung eines Koordinatensystems.

* Die Hauptsätze der Dynamik sind die sogen. Newton'sche gesetze und die bestimmen die Dynamik eines Massenpunktes:

① GALILEI'SCHES TRÄGHEITSGESETZ

"Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmigen Bewegung ($\vec{a}(t)=0$ für alle t), wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern"

• Oder vielleicht genauer:

"Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreier Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung verharrt. Solche Systeme sollen Inertialsysteme heißen". Wir werden später mehr über Inertialsysteme erfahren.

• Wenn eine Kraft geübt wird, dann wird der Körper beschleunigt. Aber es ist klar, daß dieselbe Kraft geübt an verschiedenen Körper verschiedenen Beschleunigungen ergibt. Es gibt einer Trägheitswiderstand gegen Bewegungsänderungen, der körperabhängig ist. Dieser Trägheitwiderstand wird durch die sogen. Träge Masse (m_t) charakterisiert.

- Das Produkt aus träger Masse und Geschwindigkeit heißt
<u>Impuls</u> $\Longrightarrow \vec{p} = m_t \vec{v}$

Der Impuls ist ein sehr wichtiger Begriff der Mechanik.

② <u>BEWEGUNGSGESETZ</u>

- Wie schon erwähnt, eine Kraft ändert die Bewegung eines Körpers. Die Frage ist natürlich, wie? Und hier kommt das 2. Newton'sche Gesetz:

Die Änderung des Impulses ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{P}} = \frac{d}{dt}(m_t \vec{v})}$$

- Falls die Masse m_t nicht zeitabhängig ist, dann

$$\boxed{\vec{F} = m_t \frac{d}{dt}\vec{v} = m_t \vec{a}}$$

(<u>Bemerkung</u>: das ist typischerweise der Fall, aber nicht immer!)

③ <u>REAKTIONSPRINZIP (ACTIO = REACTIO)</u>

- Nehmen wir 2 Körper. Sei $\vec{F}_{12}$ die Kraft des Körpers 2 auf Körper 1, und $\vec{F}_{21}$ die Kraft des Körpers 1 auf Körper 2.

Dann gilt: $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$

- Das 3. Prinzip hat wichtige Folgen, besonders die Impulserhaltung, die wir später für ein Mehrteilchensystem studieren werden.

- Letztendlich noch ein wichtiges Corollarium, das sog. <u>Superpositionsprinzip</u>: Wirken auf einen Massenpunkt mehrere Kräfte: $\vec{F}_1 \dots \vec{F}_n$, so addieren sich diese wie Vektoren zu einer <u>Resultanten</u>

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}$$

Beispiele von Kräfte

- Sehen wir nun einige wichtige Beispiele von Kräfte:
- Jeder Körper im Schwerefeld der Erde erfähr die <u>Schwerkraft</u> $\vec{F}_s = m_s \vec{g}$

wobei (für die Erde) $|\vec{g}| = 9.81\, m/s^2$

m_s ist die sogen. <u>schwere Masse</u>, und bestimmt wie ein Köpper durch die Schwerkraft beinflüßt wird.

Die Identität $m_s = m_t = m$ ist <u>keine Selbstverständlichkeit</u> und ist die sogen. <u>Einsteins Äquivalenzprinzip</u>. Dieses Prinzip bildet eigentlich die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.

(<u>Bemerkung</u>: Die Gültigkeit dieses Prinzip wird immer noch experimentell geprüft. Sehr präzise Experimente haben gezeigt, daß $m_s/m_t = 1 + \varepsilon$ wobei $|\varepsilon|$ ist mindestens kleiner als 10^{-13})

- In der Natur tretten sehr häufig Kräfte der Typ:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\, r\, \vec{u}_r \qquad (\text{wobei } \vec{u}_r = \vec{r}/|\vec{r}|, \text{ und } r = |\vec{r}|)$$

auf. Die sind die sogen. <u>Zentralkräfte</u>.

z. B.:
- Isotroper harmonischer Ostillator $f(r) = k < 0$ (konstant)
  (mehr über harmonische Ostillatoren später)
- Coulomb-kraft zwischen 2 Ladungen ($q_{1,2}$): $f(r) = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^3}$

- <u>Reibungskraft</u>: die Reibung wird von der Reibungskraft $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ gegeben (wobei α auch eine Funktion von $\vec{v}$ sein kann)

In Allgemeinen ist die Kraft eine Funktion $\boxed{\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}$

* Ein einfaches Beispiel Newton'scher Dynamik

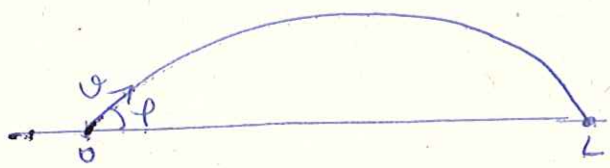
• Eine Kanone schießt ein Kugel am $\vec{r}=0$ mit Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$. Wir vernachläßigen die Reibung der Atmosphere und betrachten nur die Effekte der Schwerkraft.

$$\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$$

Aus der Bewegungsgesetz: $\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = -g\,\vec{e}_z = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Also $\vec{v} = \vec{v}_0 - gt\,\vec{e}_z = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Dann: $\vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{gt^2}{2}\vec{e}_z$
$(\vec{r}(0)=0)$



Also $x = v_{0x} t$
$z = v_{0z} t - gt^2/2$

* Unseres Ziel ist in $\vec{r} = L\vec{e}_x$, wie soll $\vec{v}_0$ sein, um das Ziel zu treffen?

Erstmal, am Ziel $z=0 \Rightarrow v_{0z}t - gt^2/2 = 0$

also $v_{0z} = gt/2 \rightarrow \boxed{t = 2v_{0z}/g} \rightarrow$ Flugzeit bis zum Ziel

Zweitens $\rightarrow$ am Ziel $x = L \rightarrow v_{0x}t = L \Rightarrow 2\frac{v_{0z}v_{0x}}{g} = L$

Also $2v_{0z}v_{0x} = gL$

Da $\left.\begin{array}{l} v_{0x} = v\cos\ell \\ v_{0z} = v\sin\ell \end{array}\right\}$ $\boxed{v^2\sin 2\ell = gL}$ $\rightarrow v^2 = \frac{gL}{\sin 2\ell}$

$\Downarrow$

$\frac{dv^2}{d\ell} = -2gL\frac{\cos 2\ell}{\sin^2 2\ell} = 0 \rightarrow \ell = \frac{\pi}{4}$

$\rightarrow$ ~~[illegible]~~ Die minimale Geschwindigkeit v um das Ziel am $L\vec{e}_x$ zu treffen, ist die für $\ell = \pi/4$, und nämlich $\boxed{v^2_{min} = gL}$

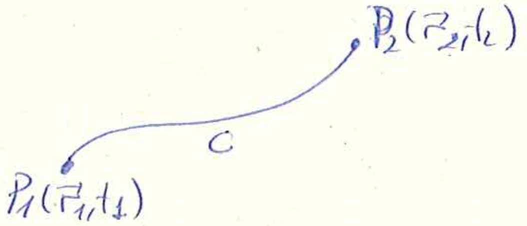
• ARBEIT / ENERGIE / KONSERVATIVE KRÄFTE

• Noch ein wichtiger Begriff ist die Idee von <u>Arbeit</u>. Für eine gegebene Kraft $\vec{F}$ und eine infinitesimale Verschiebung $d\vec{r}$, wird die Arbeit

$$\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

aufzuwenden sein.

• Für endliche Wegstrecken



$$W_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot d\vec{r}$$

Die Arbeit hängt ab von :
- $\vec{F}$
- Endpunkte P_1 und P_2
- Weg (C) [das ist nicht immer der Fall wie wir bald sehen werden]
- zeitlichen Bewegungsablauf (das ist nicht so wenn $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$)

. Die W_{21} ist also eine <u>Linienintegrale</u>

• <u>Mathematische Bemerkung</u>

• Ich erinnere euch nur kurz, wie man eine Linienintegrale macht.

• Man parametrisiert die Kurve C :

$$C: \vec{r} = \vec{r}(\alpha) \quad \text{wobei } \vec{r}(\alpha_1) = \vec{r}_1 \ ; \ \vec{r}(\alpha_2) = \vec{r}_2$$

Dann $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\alpha}(\alpha)\, d\alpha$

und $W_{21} = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\alpha}(\alpha)\, d\alpha$

z.B. $\vec{F} = (x, xy, xz)$; $\vec{r}_1 = (0,0,0)$; $\vec{r}_2 = (1,1,1)$

$C: \vec{r}(\alpha) = (\alpha, \alpha, \alpha) \rightarrow$ Eine gerade $\alpha: 0 \rightarrow 1$

$\frac{d\vec{r}}{d\alpha} = (1,1,1)$; $\vec{F}(\text{auf } C) = (\alpha, \alpha^2, \alpha^2) \longrightarrow \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\alpha} = \alpha + 2\alpha^2$

$\longrightarrow W_{12} = -\int_0^1 (\alpha + 2\alpha^2)\, d\alpha = -7/6$

- Assoziiert mit der Idee von Arbeit gibt es auch die Idee von Leistung:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{-\int \vec{F}\, d\vec{r}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{-\int_{t_0}^{t} F[\vec{r}(t'), \dot{\vec{r}}(t'), t']\frac{d\vec{r}}{dt'}(t')\, dt'\right\}$$

$$= -\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}$$

(Bemerkung: die Leistung hat die Dimension von Watts)

* Nehmen wir nun die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Longrightarrow \underbrace{m\ddot{\vec{r}}\,\dot{\vec{r}}}_{=\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{2}\right)} = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = -P$$

Man definiert $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{2} \longrightarrow$ Kinetische Energie

Also $\frac{d}{dt}T = -P \Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}T = -\int_{t_1}^{t_2} P\,dt$

$$T_2 - T_1 = -W_{21}$$

Also $W_{21} = T_1 - T_2 = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{r}}^{2}(t_1) - \dot{\vec{r}}^{2}(t_2)\right]$

Die Arbeit dient also dazu, den Bewegungszustand des Teilchens zu ändern. (ARBEIT = ÄNDERUNG DER KINETISCHEN ENERGIE)

* Es gibt Kräfte, die sogen. Konservative Kräfte, die erfüllen:

$$P = -\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{dV}{dt}$$

wobei $V(\vec{r})$ ist das sogen. Potential der Kraft $\vec{F}$ oder potentielle Energie.

Das ist nicht immer der Fall. Es gibt auch die sogen. dissipative Kräfte, die diese Bedingung nicht erfüllen.

* Die Idee von Konservativer Kraft ist wichtig, weil

wenn $\vec{F} = \vec{F}_{KONS} + \vec{F}_{diss} \Rightarrow -\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{dV}{dt} - \vec{F}_{diss}\,\dot{\vec{r}} = -\frac{dT}{dt}$

und dann: $\frac{d}{dt}(T+V) = \vec{F}_{diss}\cdot\dot{\vec{r}}$

Das führt uns direkt in die Idee der <u>Energie des Massenpunktes</u>

$$\boxed{E = T+V}$$

• Dann: $\boxed{\frac{dE}{dt} = \vec{F}_{diss}\cdot\dot{\vec{r}}}$ Energieerhaltungssatz

Wenn alle Kräfte Konservativ sind $\longrightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow E = \text{KONSTANT}$

* Gucken wir nun <u>ein bisschen genauer an der Idee von Konservativen Kräfte</u>:

$$\frac{dV}{dt}(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= \dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla}V$$

Also $-\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = \vec{\nabla}V\cdot\dot{\vec{r}} \longrightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}V}$

Damit ist $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0} \rightarrow$ Eigentlich ist das eine alternative Definition der Konservativen Kräfte.

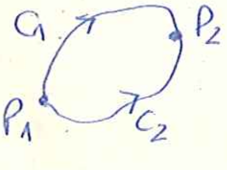
• Nehmen wir nun ein geschlossener Weg

$$-\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{\nabla}V\cdot d\vec{r} = \oint_C dV = V_{ENDE} - V_{ANFANG} = 0$$

ENDE = ANFANG

Also $\boxed{\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0 \Longleftrightarrow \vec{F} \text{ ist Konservativ}}$

Das hat eine wichtige Folge: $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{-C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} =$



$$= \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \boxed{\int_{C_1}\vec{F}\,d\vec{r} = \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

• <u>Die Arbeit ist wegunabhängig</u> → DAS IST SICHER NICHT IMMER SO!

* Also für eine konservative Kraft, man definiert das Potential ⑦

$$V(P) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

(wobei P_0 ist wirkurlich ausgewählt, da der Energieursprung ist, wie ihr schon weisst, wirkurlich.)

- Sehen wir ein Paar Beispiele

- Schwerkraft $\rightarrow \vec{F} = -mg\vec{e}_z$

$$V(z) = -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = +\int_0^z mg\,dz = mgz$$

- Harmonischer Oszillator

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$$

$$V(\vec{r}) = -\int_0^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,' = k\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (x'dx' + y'dy' + z'dz') = \frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2) = \frac{k}{2}r^2$$

$$V(\vec{r}) = \frac{k}{2}r^2$$

- Reibung $\longrightarrow \vec{F} = -\alpha\vec{v}$

Die Reibung ist wegen der $\vec{v}$ Abhängigkeit nicht konservativ.

Die Reibung ist wegen

$$\frac{d}{dt}E = -\alpha v^2$$

$\longrightarrow$ Die Energie des Massenpunkter nimmt wegen der Reibung ständig ab

(Das ist keine Überraschung, oder?)

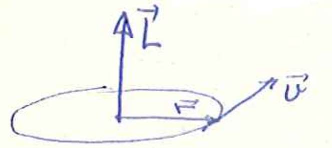
• DREHIMPULS

• Noch eine wichtige Idee ist die von Drehimpuls:

Definition $\Rightarrow$ $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}$ (Drehimpuls)

(Bemerkung: wegen der Eigenschaften des "$\times$"-Produkt, ist $\vec{L}$ orthogonal zu $\vec{r}$ und zu $\vec{p}$.)

z.B.



(Also: L_z ist mit der Drehung um z-Achse verknüpft)

$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \cancel{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$

* Aus der 2. Newton'schen Gesetz:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}}) = m\,\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \frac{dL}{dt}$$

Die Größe $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ heißt Drehmoment.

also $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$

Drehimpulserhaltungssatz

Natürlich $\vec{M} = 0 \Leftrightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{KONST.}$

z.B. Für ein zentral Feld: $\vec{F} = f(r, \vec{v}, t)\,\vec{e}_r$ $\longrightarrow \vec{M} = 0 \longrightarrow \vec{L} = \text{Konst.}$

$\vec{e}_r = \vec{r}/r$

• ZENTRALKRÄFTE ← Zentralkräfte sind ziemlich wichtig und tauchen oft auf. Gucken wir nun genauer die Eigenschaften, die besitzen.

• Eine Zentralkraft ist nur konservativ wenn $\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r$

wenn das der Fall ist, ist das assoziierte Potential $V = V(r)$

(Bemerkung $-\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$)

* Eine wichtige Eigenschaft der Zentralkräfte ist daß $\vec{L} = \text{Konst}$ (siehe oben)

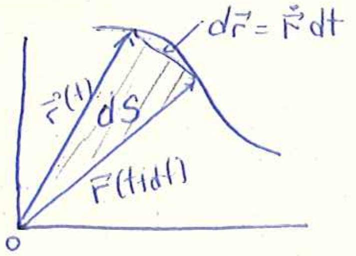
Da $\vec{L} \cdot \vec{r} = 0$, und $\vec{L}$ ist konstant:

$L_x x + L_y y + L_z z = 0 \longrightarrow$ Die Bahnen liegen immer auf einer Ebene (senkrecht zu $\vec{L}$).

Das ist die Gleichung einer Ebene

(BEISPIEL: die Ekliptikebene)

* Die Konstanz von $\vec{L}$ hat sehr wichtigen Folgen.



In der Zeit dt überstreicht der Vector $\vec r$ in der Bahnebene die Fläche

$$dS = \frac{1}{2}\,|\vec r(t) \times \vec r(t+dt)| \overset{\text{Taylor-Entwicklung}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\,|\vec r(t) \times (\vec r(t) + \dot{\vec r}(t)\,dt)| = \frac{1}{2}\,|\vec r(t) \times \dot{\vec r}(t)|\,dt$$

Also $\boxed{\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2m}|\vec L|}$

Bei Drehimpulserhaltung überstreicht der Radiusvektor des Massenpunktes in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Das ist der sogen. Flächensatz oder 2. Kepler'sche Gesetz

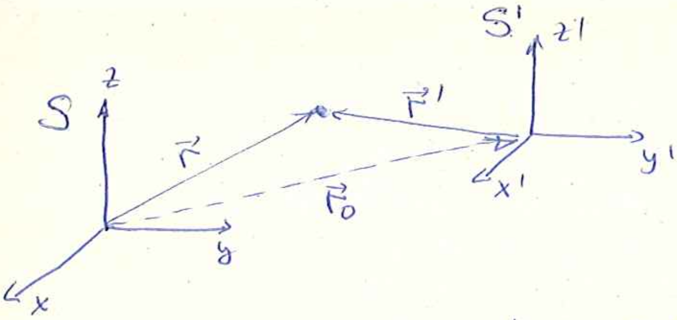
(Bemerkung: Die Kepler'sche Gesetze beschreiben die Bewegung der Planeten, mehr darüber später.)

Inertialsysteme. Galilei-Transformations

- Die Bewegung eines Körpers kann nur relativ zu einem Bezugssystem definiert werden.
- Bei der Auswahl des Bezugssystems sind der Willkür aber kaum Grenzen gesetzt.
- Die natürlichen Systeme der Mechanik sind die Inertialsysteme, in denen sich ein kräftfreier Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden bewegt. (Wir haben die Idee schon in S. 1 getroffen).
- Wir werden nun annehmen, daß es zumindest ein Inertialsystem (z.B. dasjenige, in dem die Fixsterne ruhen) gibt. Das ist allerdings die Newton'sche Idee von absoluten Raum (die durch die spezielle Relativitätstheorie verloren geht), aber für viele alltägliche Anwendungen ist es in Ordnung (mehr über die spezielle Relativitätstheorie später in dieser Vorlesungsreihe).
- Nehmen wir zwei verschiedene Koordinatensysteme S und S', wobei S ein Inertialsystem ist. S' ist ebenfalls ein Inertialsystem wenn aus $\vec{a} = 0$ auch $\vec{a}' = 0$ folgt (von nun an,

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a} \longrightarrow$ In S
$\vec{r}', \vec{v}', \vec{a}' \longrightarrow$ In S').

- Da keine relative Beschleunigung zwischen S und S' erlaubt ist, dann müssen wir unsere Untersuchungen auf Systeme mit parallelen Achsen beschränken.



Ganz klar:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$$

- Also die Transformation $S \Leftrightarrow S'$ ist vollständig durch $\vec{r}_0(t)$ charakterisiert.
- Da wenn $\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\,' = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_0(t) = 0$
- Nehmen wir, daß am $t = 0 \to S = S' \longrightarrow \vec{r}_0 = 0$

Also $\vec{r}_0(t) = \vec{v}_0\, t$ (wobei $\vec{v}_0$ ist eine Konstante Geschwind.)

- Also nun haben wir die Galilei-Transformation

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{v}_0 t \\ \vec{v}(t) = \vec{v}\,'(t) + \vec{v}_0 \\ \vec{a}(t) = \vec{a}\,'(t) \end{array}\right\}$$

Wir haben hier noch explizit angegeben, dass die Zeit nicht mittransformiert wird. Dies beinhaltet die Annahme einer absoluten Zeit (die auch in der speziellen Relativitätstheorie verloren geht).

- Also $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\vec{a} = m\vec{a}\,' = \vec{F}(\vec{r}\,', \vec{v}\,', t)$

Auch das 2. Newton'sche Gesetz bleibt von der Transformation unberührt.

- Das bringt uns zu dem Galilei'schen Invarianzprinzip
  - Die Gesetze der Mechanik sind invariant gegen Galilei'schen Transformationen.

* Dies Prinzip hat wichtige und relativ intuitive Folgen.
· Sagen wir, dass wir Experimente in einem Labor durchführen.
Aus den Ergebnisse dieses Experimente ist es prinzipiell unmöglich zu bestimmen, ob das Labor in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung ist. Eigentlich hat die Frage kein Sinn! (z.B. in einem Bahnhof, bewegt sich mein Zug oder der Zug im Gleis gegenüber?? Sicher habt Ihr das Gefühlt gehabt)

• NICHT-INERTIALE SYSTEME. SCHEINKRÄFTE

· Die Galileische Invarianz gilt für Bezugssysteme die sich zueinander gleichförmig geradlinig bewegen (also ohne Beschleunigung). Das ist natürlich nicht immer der Fall.

· Nehmen wir ein inertiales Bezugsystem S. Ein Körper erfährt eine Kraft $\vec{F}$ $\Big\}\ m\vec{a} = \vec{F}$

· Sei nun S' ein nicht-inertiales System. Sei also $\vec{a}_0$ die Beschleunigung von S' zu S.
Ein Beobachter in S' mißt eine Beschleunigung $\vec{a}'$!

Ganz klar: $\vec{a}' + \vec{a}_0 = \vec{a}$

Also $m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = \vec{F}$

$$\longrightarrow\ m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 = \vec{F} + \vec{F}_0$$

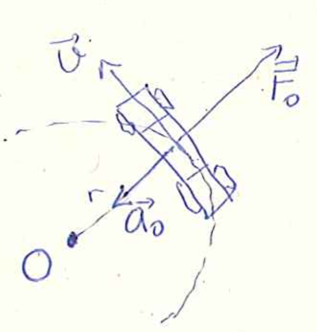
Also der Beobachter in S' erfährt eine zusätzliche Kraft (verursacht von der relativen Beschleunigung). Diese extra Kräfte sind die sogen. Scheinkräfte.

* Ihr habt alle alltägliche Erfahrungen mit Scheinkräfte.

z.B.:

- Zentrifugalkraft

* Man sitzt im Auto, und das Auto nimmt eine Kurve.



- Man erfährt dann eine Kraft "nach draussen"
- Wiesso? Wenn ein Auto eine Kurve nimmt, hat eine Beschleunigung ($\vec{a}_0$) in Richtung des Zentrums (O) der Krümmung der Kurve ($|\vec{a}_0| = v^2/r$)

- Die Scheinkraft $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$ geht also "nach draussen".

Diese Kraft ist die sogen. Zentrifugalkraft. (mehr über die Zentrifugalkraft später)

- Freifall

- Man steht auf einem Aufzug. Sagen wir, dass die Kabeln des Aufzugs brechen (also der Aufzug fällt hin). Der Aufzug hat eine Beschleunigung $\vec{a}_0 = \vec{g}$.

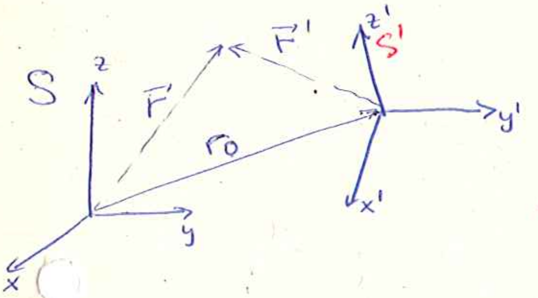
- Also der Beobachter im Aufzug fühlt nun 2 Kräfte
  - Die Schwerkraft $\vec{F}_S = m\vec{g}$
  - Die Scheinkraft $\vec{F}_0 = -m\vec{g}$
- Also $\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_0 = 0$. In einem freifallenden Aufzug fühlt man keine Schwerkraft (!!), man schwebt wie in Allraum!

- Diese Beobachtung war sehr wichtig für die Idee Einsteins der allgemeinen Relativitätstheorie.

· Wir werden nun die Scheinkräfte ganz allgemein studieren.
Wir betrachten 2 beliebig relativ zueinander beschleunigte Koordinatensysteme

$S: \quad \vec{r} = \sum_{j=1}^{3} x_j \vec{e}_j$ — Sei S ein Inertialsystem.

$S': \quad \vec{r}\,' = \sum_{j=1}^{3} x_j' \vec{e}_j\,'$ — S' bewegt sich relativ zu S
· Der Ursprung von S' bewegt sich ($\vec{r}_0(t)$)
· Die Achsen von S' drehen sich auch.



* Ganz klar:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,' = \vec{r}_0 + \sum_{j=1}^{3} \underbrace{x_j'}_{\text{Koordinaten in } S'} \underbrace{\vec{e}_j\,'}_{\text{Koordinatenachsen in } S'}$$

und dann

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{j=1}^{3} \left(\dot{x}_j' \vec{e}_j\,' + x_j' \dot{\vec{e}}_j\,' \right)$$

$\dot{\vec{r}}_0$: Relativgeschwindigkeit der Koordinatenursprünge

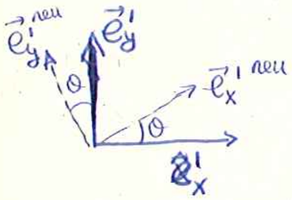
$\dot{x}_j' \vec{e}_j\,'$: Geschwindigkeit des Massenpunktes in S'

$x_j' \dot{\vec{e}}_j\,'$: Änderung der Achsenrichtungen.

$\left(\text{in } S' \quad \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{S'} = \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j' \vec{e}_j\,' \right)$ — Zeitableitung in S', die nur die Komponenten betrifft:

· Wir studieren nun genauer die Änderung der Achsenrichtungen.
· Wir studieren nun genauer die Änderung der Achsenrichtungen.

· Der Einfachheit halber wählen wir eine Drehung um den z'-axis.



Also $\vec{e}_x\,'^{\,neu} = \cos\theta\, \vec{e}_x\,' + \sin\theta\, \vec{e}_y\,' \overset{\theta \ll 1}{\simeq} \vec{e}_x\,' + \theta\, \vec{e}_y\,'$

$\vec{e}_y\,'^{\,neu} = -\sin\theta\, \vec{e}_x\,' + \cos\theta\, \vec{e}_y\,' \simeq -\theta\, \vec{e}_x\,' + \vec{e}_y\,'$

Sei $\theta = \omega t \quad$ ($\omega \equiv$ Winkelgeschwindigkeit)

Dann $\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{e}_x\,' &\simeq \omega\, \vec{e}_y\,' \\ \frac{d}{dt}\vec{e}_y\,' &\simeq -\omega\, \vec{e}_x\,' \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x'\frac{d}{dt}\vec{e}_x\,' + y'\frac{d}{dt}\vec{e}_y\,' &= x'\omega\,\vec{e}_y\,' - y'\omega\,\vec{e}_x\,' \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \quad \text{wobei } \vec{\omega} = \omega\, \vec{e}_z \end{aligned}$

* Dies Ergebnis ist gültig für eine beliebige Drehung der Achsen:

$$\sum_{j=1}^{3} x_j' \dot{\vec{e}}_j' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Also:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\left[\frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r}_0)\right]_S = \left[\frac{d}{dt}\vec{r}'\right]_S = \left[\frac{d}{dt}\vec{r}'\right]_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Diese Gleichung liefert ganz allgemein eine Vorschrift dafür, wie man in einem Inertialsystem S einen Vektor $\vec{R}$ zeitlich ableitet, der in einem rotierenden Koordinatensystem S dargestellt wird:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{R}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\vec{R}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

• Nun wollen wir die 2. Ableitung:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r} - \vec{r}_0)\right)_S = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r}_0)\right]_S = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d}{dt}\vec{r}'\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right]$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d}{dt}\vec{r}'\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right]\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \left[\left(\frac{d}{dt}\vec{r}'\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right]$$

$$= \left(\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}'\right)_{S'} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S'} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

(Bemerkung: da $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$, $(d\vec{\omega}/dt)_S = (d\vec{\omega}/dt)_{S'}$)

* In S': $m\left(\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}'\right)_{S'} = \vec{F}'$

In S: $m\left(\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}\right)_S = \vec{F}$

• Dann:

$$\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}' + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + m2\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

(Bemerkung: Wir werden diese Diskussion später in unserer Diskussion des starren Körpers anwenden)

Also:

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_0 + \vec{F}_{AZ} + \vec{F}_{COR} + \vec{F}_{ZE}$$

$$\vec{F}_0 \equiv -m\ddot{\vec{r}}_0$$

→ Beispiel: Kinderkarussel (beim Anfahren wird man nach hinten gedrückt; beim Anhalten nach vorne)

$$\vec{F}_{AZ} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' \longrightarrow$$ azimuthal Kraft (oder Euler-Kraft)

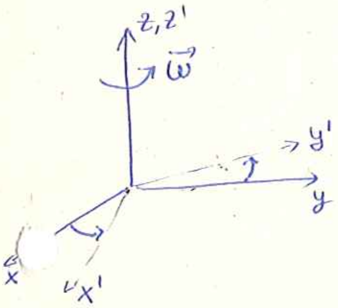
$$\vec{F}_{COR} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \longrightarrow$$ Coriolis-Kraft

$$\vec{F}_{ZE} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \longrightarrow$$ Zentrifugal Kraft

- Also verschiedene Scheinkräfte tauchen auf.

- Sehen wir nun ein Beispiel.

Nehmen wir an, daß wir auf eine kreisfomige Bühne stehen. Die Bühne ist auf die xy-Ebene, und dreht sich mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ um die z-Achse.



- Wir werfen ein Ball (wir vergessen nun die Schwerkraft) mit geschwindigkeit $\vec{v}\,'$ in $\vec{r}\,'$. Die Scheinkraft ist also

$$\vec{F}' = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

* Nehmen wir Zylindrische Koordinaten: $\vec{r} = (r, \phi, z)$

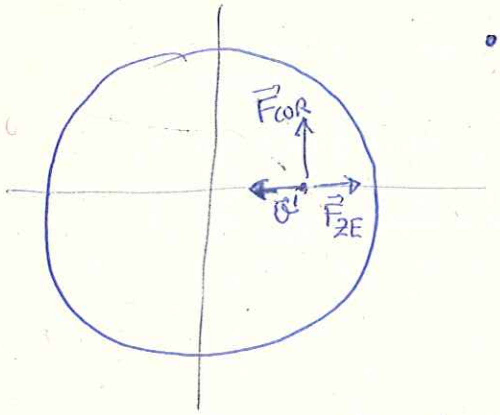
$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}\,' = (r', 0, 0) \\ \vec{\omega} = (0, 0, \omega) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{\omega} \times \vec{r}\,' = (0, \omega r', 0) \\ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = (-\omega^2 r', 0, 0) \end{array}$$

Sei

$$\vec{v}\,' = (v'_r, v'_\phi, 0) \longrightarrow \vec{\omega} \times \vec{v}\,' = (-\omega v'_\phi, \omega v'_r, 0)$$

Also: $$\vec{F}' = \overbrace{2m\omega\,(v'_\phi, -v'_r, 0)}^{\text{CORIOLIS}} + \underbrace{m\omega^2 (r', 0, 0)}_{\text{ZENTRIFUGAL}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} F'_r = 2m\omega v'_\phi + m\omega^2 r' \\ F'_\phi = -2m\omega v'_r \end{array}}$$



• Die Zentrifugalkraft zeigt immer "nach drausend"
(wir werden das als eine "Anziehung der Wände" erfahren)

• Die Coriolis-Kraft ist immer orthogonal zu der geschwindig-keit.

• Als Ergebnis, wenn wir eine Balle werfen sehen wir ziemlich Komische Effekten. Der Bahn des Balls ist keine gerade linie mehr.

Wenn ich das richtig mache, Komm der Balle zurück zu mir!!

• Die Coriolis-Kraft spielt eine wichtige Rolle in der Metheorologie. Die ergibt eine Ablenkung nach rechts (links) im Norden (Süden). Deswegen drehen sich Tiefe in verschiedenen Halbkügel. Deswegen drehen sich Tiefe in verschiedenen Richtungen auf dem Nord- und Sud-Halbkügel.

• Die Coriolis-Kraft spielt eine wichtige Rolle auch für Flüge oder interkontinentale Raketen.