MEHRTEILCHENSYSTEME

- Die meisten realistischen physikalischen Systeme setzen sich aus vielen Einzelteilchen zusammen, die miteinander wechselwirken. Typischerweise versucht man Aussagen über das Gesamtsystem abzuleiten. [Bemerkung: die Lösung von Mehrteilchensysteme ist im allgemeinen sehr kompliziert (sogar für 3 Teilchen!), aber wir können trotzdem einige allgemeine Eigenschaften erkennen.]
- Nehmen wir N Teilchen mit Masse m_j und Ortsvektor $\vec{r}_j$ $j=1\dots N$

Sei $\vec{F}_j$ die auf Teilchen j wirkende ~~äußere~~ Gesamtkraft.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

äußere Kräfte — Innere Kräfte (zwischen Teilchen)

Wegen des 3. Newton'schen Gesetzes $\rightarrow F_{ij} = -F_{ji}$; $F_{ii} = 0$

- Wir diskutieren zunächst einige wichtige Erhaltungssätze.

① Impulssatz

$$* \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{ij} \vec{F}_{ij}$$

$$\sum_{ij} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{ij} F_{ji} = 0$$

* Wir führen nun einige wichtige Begriffe ein:

- Gesamtmasse $\Rightarrow$ $M = \sum_i m_i$
- Schwerpunkt $\Rightarrow$ $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$
- Gesamtimpuls $\Rightarrow$ $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$
- Gesamtkraft $\Rightarrow$ $\vec{F}^{(ex)} = \sum_i \vec{F}_i^{(ex)}$

- Relative Koordinaten
  $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$

* Bemerkung: das erklärt, warum mehrmals die räumliche Ausdehnung eines Körpers vernachlässigen können. Wir müssen nur die Bewegung des Schwerpunktes folgen

* Der Schwerpunkt spielt eine sehr wichtige Rolle:

$$\boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(ex)}}$$

$\Downarrow$

Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt ist und alle äußeren Kräfte allein auf ihn wirken.

* Es ist klar, daß $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$

also $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(ex)} \longrightarrow$ Impulssatz

· Also: $\boxed{\vec{F}^{(ex)} = 0 \iff \vec{P} = \text{Konstante}} \longrightarrow$ Impulserhaltungssatz
(das ist nicht mehr als Newton 1 noch mal)

2 Drehimpulssatz

* Für jeden Teilchen j assoziieren wir ein Drehimpuls $\vec{L}_j$.
Der Gesamtdrehimpuls des N-Teilchensystems ist also:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

Dann

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ex)} + \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

$$\text{Aber: } \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right] \overset{\text{actio = reactio}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \overset{\vec{F}_{ij} \text{ ist Parallel zu } \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j}{=} 0$$

Dann

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ex)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{(ex)} = \vec{M}^{ex} \longrightarrow \text{Gesamter äußeres Drehmoment.}$$

· Also $\boxed{\vec{M}^{(ex)} = 0 \iff \vec{L} = \text{KONSTANTE}}$ Drehimpulserhaltungssatz

· Wir zerlegen nun den Drehimpuls in Relativ- und Schwerpunktanteil

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}_i') \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i') = \left(\sum_i m_i\right) \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i'$$
$$+ \left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right) \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i'\right)$$

$$\text{Aber } \sum_i m_i \vec{r}_i' = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = \sum_i m_i \vec{r}_i - \left(\sum_i m_i\right) \vec{R} = M\vec{R} - M\vec{R} = 0$$

$$\text{Also } \vec{L} = \underbrace{M\vec{R} \times \dot{\vec{R}}}_{\text{Drehimpuls des Schwerpunkten}} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i'}_{\text{Gesamtdrehimpuls der N Teilchen bezogen auf das Massenzentrum.}}$$

Also anders als $\vec{P}$, ~~...~~ $\vec{L}$ ist nicht ausschließlich durch Schwerpunkt + Koordinaten ausdrückbar.

③ Energiesatz

- Die gesamte kinetische Energie des N-Teilchen-Systems ist

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

- Für konservative Kräfte: $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$

(das Potential V ist nun eine Funktion aller Koordinaten)

- Dann $\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\sum_{i=1}^{N} (\vec{\nabla}_i V) \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(diss)} \cdot \dot{\vec{r}}_i$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T+V) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(diss)} \cdot \dot{\vec{r}}_i}$$ Energiesatz

- Und dann:

$$\boxed{T+V = E = \text{konstant} \quad \text{falls } \vec{F}_i^{(diss)} = 0 \text{ für alle } i}$$

- Nehmen wir nun an, daß die innere Kräfte $\vec{F}_{ij}$ konservativ sind (das ist der Fall für alle bekannte relevante Fälle) und daß die äußere Kräfte ebenfalls konservativ sind. Das Wechselwirkungs-potential V_{ij} assoziiert zu $\vec{F}_{ij}$ hängt nur von $|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ (Zentralkraft).

Dann $\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} = -\vec{\nabla}_{ij} V_{ij} = \vec{\nabla}_j V_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (actio = reactio)

Dann: $\sum_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{ij} V_{ij}$$

Und für die äußere Kräfte.

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ex)} \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\sum_i \vec{\nabla}_i V_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{d}{dt} \sum_i V_i$$

Dann $\frac{d}{dt}\left(T + \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}\right) = 0$

Also die gesamte Energie ist: $\boxed{E = \underbrace{T}_{\text{Gesamte kinetische Energie}} + \underbrace{\sum_i V_i}_{\text{äußeres Potential}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}}_{\text{Innere Wechselwirkungen}}}$

④ Virialsatz

- Der Virialsatz ist eine sehr nützliche Beziehung zwischen die zeitlichen Mittel von T und von V.

- Wie wir schon kennen

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \overset{\text{Konser. Kraft}}{=} -\sum_i \vec{\nabla}_i V \cdot \vec{r}_i$$

$$\| $$

$$\sum_i m_i \left[\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i \vec{r}_i) - \dot{\vec{r}}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right] = \sum_i m_i \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i \vec{r}_i) - \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}_{2T}$$

Dann $\sum_i \frac{d}{dt}[m_i(\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i)] = 2T - \sum_i \vec{\nabla}_i V \cdot \vec{r}_i$

Wir machen nun die zeitliche Mittelwert

(Bemerkung: zeitliche Mittelwert von $f(t)$

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,dt \quad)$$

$$\left\langle \sum_i \frac{d}{dt}[m_i(\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i)] \right\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \sum_i \int_0^\tau dt \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i)$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \sum_i [m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i]_0^\tau = 0$$

Wenn $\vec{r}_i$ und $\dot{\vec{r}}_i$ endlich bleiben, da $\tau \to \infty$

Dann $\boxed{2\langle T \rangle = \sum_i \langle \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i V \rangle}$ ⟶ Virialsatz

- Nehmen wir ein abgeschlossene System ($V_i^{ext} = 0$ für alle i).

Typischerweise $V_{ij} = \alpha_{ij} r_{ij}^{\alpha}$ (α ist ein Ganzzahl)

Dann

$$2\langle T\rangle = \sum_k \langle \vec r_k \cdot \vec\nabla_k V\rangle = \frac{1}{2}\sum_{k,i,j} \langle \vec r_k \cdot \vec\nabla_k V_{ij}\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,j} \langle \vec r_k (\vec\nabla_k V_{kj} + \vec\nabla_k V_{jk})\rangle =$$

$V_{kj} = V(\vec r_k - \vec r_j)$
$V_{jk} = V(\vec r_j - \vec r_k)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{kj} \langle (\vec r_k - \vec r_j)\, \vec\nabla_k V_{kj}\rangle = \frac{1}{2}\sum_{kj} \langle \vec r_{kj}\, \vec\nabla_{kj} V_{kj}\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{kj} \langle r_{kj} \frac{\partial}{\partial r_{kj}} [\alpha_{kj} r_{kj}^{\alpha}]\rangle = \frac{\alpha}{2}\sum_{kj} \langle \alpha_{kj} r_{kj}^{\alpha}\rangle = \alpha\langle V\rangle$$

Also $\boxed{\langle T\rangle = \frac{\alpha}{2}\langle V\rangle}$

- Das ist sehr nützlich.

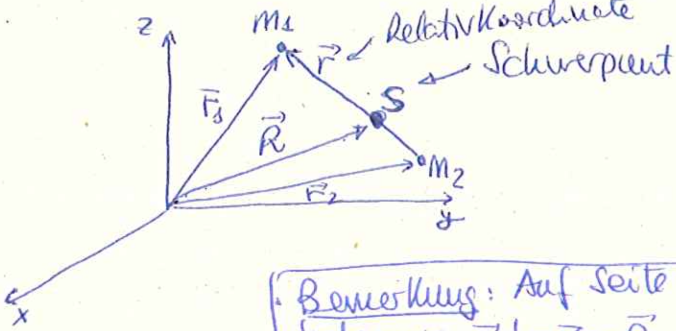
z.B. Harmonischer Oszillator $\longrightarrow \vec F = -k\vec r \Rightarrow V = \frac{1}{2}k\vec r^{\,2}$

$\longrightarrow \alpha = 2 \longrightarrow \boxed{\langle T\rangle = \langle V\rangle}$

ZWEI-TEILCHEN-SYSTEME

- Wir wollen nun ein System aus 2 Massenpunkten diskutieren $\rightarrow m_1, m_2$
- Die Teilchen haben Koordinaten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$
- Wir benutzen nun die schon eingeführte Ideen von Schwerpunkt und Relativkoordinate:

  * Schwerpunkt $\rightarrow \vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ (Sei $M = m_1+m_2$ die totale Masse)
  * Relativkoordinate $\rightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$



Also $\vec{r}_1 = \vec{R} + \dfrac{m_2}{M}\vec{r}$

$\vec{r}_2 = \vec{R} - \dfrac{m_1}{M}\vec{r}$

Bemerkung: Auf Seite 19 haben wir $\vec{r}_j{}' = \vec{r}_j - \vec{R}$ definiert

- Nach dem Schwerpunksatz

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(ex)}$$

und für die Relativkoordinate

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_1^{(ex)}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{(ex)}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} \underset{\text{actio-reactio}}{=}$$

$$= \frac{\vec{F}_1^{(ex)}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{(ex)}}{m_2} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}$$

Wir führen nun eine sehr nützliche Größe: die <u>Reduzierte Masse</u> (μ)

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_2+m_1}{m_1 m_2}$$

(**Bemerkung**: wenn z.B. $m_1 \ll m_2$, dann $\mu \simeq m_1$, wenn $m_1 \simeq m_2 = m \rightarrow \mu \simeq m/2$)

Dann $\ddot{\vec{r}} = \dfrac{1}{m_1}\vec{F}_1^{(ex)} + \dfrac{1}{m_2}\vec{F}_2^{(ex)} + \dfrac{1}{\mu}\vec{F}_{12}$.

- Wenn $\vec{F}_i^{(ex)} = 0$ (abgeschlossene Systeme) $\rightarrow$ $M\ddot{\vec{R}} = 0$, $\ddot{\vec{r}} = (1/\mu)\vec{F}_{12}$

Also die Gleichungen für den Schwerpunkt und die Relativkoordinate sind entkoppelt:

$$\boxed{\begin{aligned} \mu \ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{12} \\ M \ddot{\vec{R}} &= \text{KONSTANT} \end{aligned}}$$

- Die Gleichung der Relativkoordinate ist interessant. Sie ist eine Newtonische Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt mit Masse μ, Koordinate $\vec{r}$, und unter einer Kraft $\vec{F}_{12}$. Wir haben ein kompliziertes Problem mit 2 Teilchen in einem einfachen Problem mit einem einzigen Teilchen reduziert!

- Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{\text{Schwerpunkt } (T_S)} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2}_{\text{Relativbewegung } (T_R)}$$

- Nehmen wir an, daß die Kräfte konservativ sind:

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{i=1}^{2} V_i(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} V_{ij}(\vec{r}) \qquad \begin{pmatrix} \vec{F}_i^{(ex)} = -\vec{\nabla}_i V_i(\vec{r}_i) \\ \vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} \end{pmatrix}$$

Für $\vec{F}_i^{(ex)} = 0 \longrightarrow V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} V_{ij}(\vec{r}) = \frac{V_{12}(\vec{r}) + V_{21}(\vec{r})}{2} = V_{12}(\vec{r})$

und $E = E_S + E_R$

$$\left.\boxed{\begin{aligned} E_S &= T_S \\ E_R &= T_R + V_{12} \end{aligned}}\right\}$$ Also die Energie kann in Schwerpunkt- und Relativanteile zerlegt werden.

* Und genauso mit dem Drehimpuls

Definition von μ

$$\vec{L} = \vec{L}_S + \vec{L}_R$$

$$\vec{L}_S = \vec{R} \times \vec{P} \quad (\text{sieh } 20) \quad \begin{aligned} \vec{r}_1{}' &= \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{m_2}{M} \vec{r} = \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \\ \vec{r}_2{}' &= \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1}{M} \vec{r} = \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \end{aligned}$$

$$\vec{L}_R = \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i{}' = \sum_i m_i \left(\frac{\mu}{m_i}\right)^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu^2 \left(\sum_i \frac{1}{m_i}\right) \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

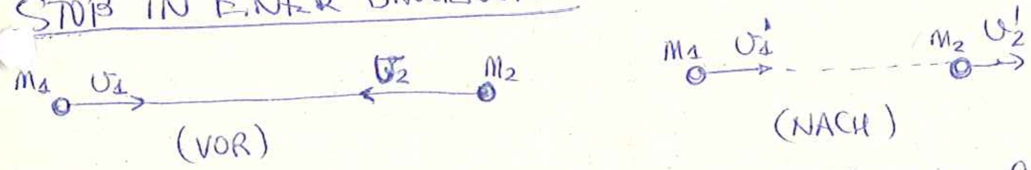
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{L}_S &= M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \\ \vec{L}_R &= \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \end{aligned}}$$

• <u>ZWEIKÖRPERSTOß</u>

• Ein wichtiges Problem der Zweikörperphysik ist das Problem des Zweikörperstoßes. In diesem Problem haben wir 2 Körper mit Massen m_1 und m_2. Die gehen zueinander mit Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, und die stoßen. Die Frage ist: wie ist die Bewegung der Teilchen nach dem Stoß?

* Wir werden erstmal das eindimensionale Problem studieren und dann das schwierigere Problem der 3D Stoß.

* <u>STOß IN EINER DIMENSION</u>



• Die 2 Teilchen bewegen sich nun auf eine Gerade (1D). Wir wollen die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' nach dem Stoß rechnen. Wir arbeiten erstmal im <u>Laborsystem</u>.

* In einem Stoß muß der Impuls erhaltet werden, also:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

* Ein Stoß ist <u>elastisch</u> wenn die kinetische Energie erhaltet wird. Das ist nicht immer der Fall → Wenn die kinetische Energie nicht erhaltet wird, dann spricht man von <u>inelastischen Stöße</u>.

• Gucken wir erstmal die <u>elastische Stöße</u>. Dann

$$m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 = m_1 v_1'^2/2 + m_2 v_2'^2/2$$

• Also $m_1(v_1' - v_1) = -m_2(v_2' - v_2)$

$$m_1(v_1'^2 - v_1^2) = -m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

Wir dividieren eine Gleichung durch die Andere, und man bekommt

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{v_2 - v_1 = -(v_2' - v_1')}$$ → Die Relativgeschwindigkeit wird in Absolutbetracht erhaltet ($|v_2 - v_1| = |v_2' - v_1'|$)

~~aber der Vorfaktor ändert~~

aber das Vorzeichnen ändert sich.

* Diese Ergebnis ist ganz einfach zu verstehen, wenn wir im Schwerpunktsystem arbeiten. Im Schwerpunktsystem bleibt der Schwerpunkt am Ursprung der Koordinaten (KLAR!)

Also $P = m_1 v_1 + m_2 v_2$ (Gesamtimpuls) ist immer Null

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0$$

$$\longrightarrow |p_1| = |p_2| = |p|$$
$$|p_1'| = |p_2'| = |p'|$$

Aber auch $\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \longrightarrow |p|^2 = |p'|^2 \longrightarrow |p| = |p'|$

Da $|p| = |p'|$, die Teilchen nach dem Stoß haben einfach $v_1' = -v_1$ und $v_2' = -v_2$:

(im Schwerpunktsystem!) (VOR) $\xrightarrow{v_1}$ $\xleftarrow{v_2}$ NACH $\xleftarrow{v_1}$ $\xrightarrow{v_2}$

Also $v_2 - v_1 = -(v_2' - v_1')$

(Die Relativgeschwindigkeit ist gleich für Laborsystem und für Schwerpunktsystem)

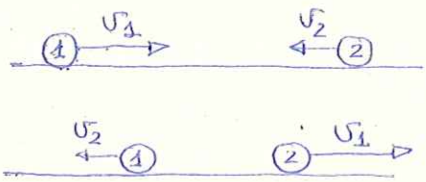
• Kehren wir zum Laborsystem. Wir können die Gleichungen ganz einfach lösen:

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2 m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2$$

$$v_2' = \left(\frac{2 m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2$$

* Wenn $m_1 = m_2$ (wie 2 identische Billiardkügel)

$v_1' = v_2$
$v_2' = v_1$



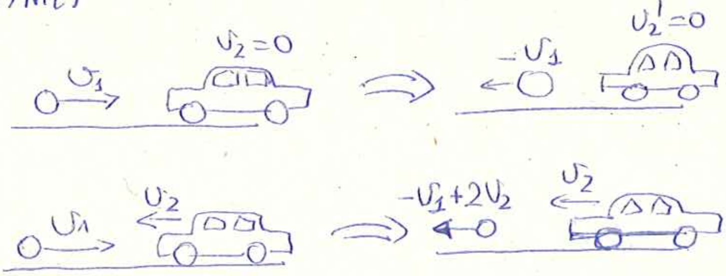
Die austauschen die geschwindigkeiten

* Sei $m_1 << m_2$:

$$v_1' = -\frac{(1 - m_1/m_2)}{(1 + m_1/m_2)} v_1 + \frac{2}{(1 + m_1/m_2)} v_2 \xrightarrow{m_1/m_2 \to 0} -v_1 + 2v_2$$

$$v_2' = \left(\frac{2m_1/m_2}{1 + m_1/m_2}\right) v_1 + \frac{(1 - m_1/m_2)}{(1 + m_1/m_2)} v_2 \xrightarrow{m_1/m_2 \to 0} v_2$$

z.B. $m_1 \equiv$ ein Tennisball
$m_2 \equiv$ ein Auto



(Ein Auto mit 40 km/h wurde ein Ball mit $v_1 = 0$ eine geschwindigkeit von 80 km/h geben. Moral: Nie vor ein kommendes Auto stehen!)

* Wenn der Stoß nicht elastisch ist:

$$m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 = m_1 v_1'^2/2 + m_2 v_2'^2/2 + Q$$

$Q > 0 \Rightarrow$ beschreibt inelastische endotherme Stöße (Kinetische Energie wird in ~~kinetische~~ innere Energie verwandelt.)

$Q < 0 \Rightarrow$ beschreibt inelastische exotherme Stöße (~~Kinetische~~ Innere Energie wird in Kinetische Energie verwandelt)

* Im Schwerpunktsystem $p_1 = -p_2$

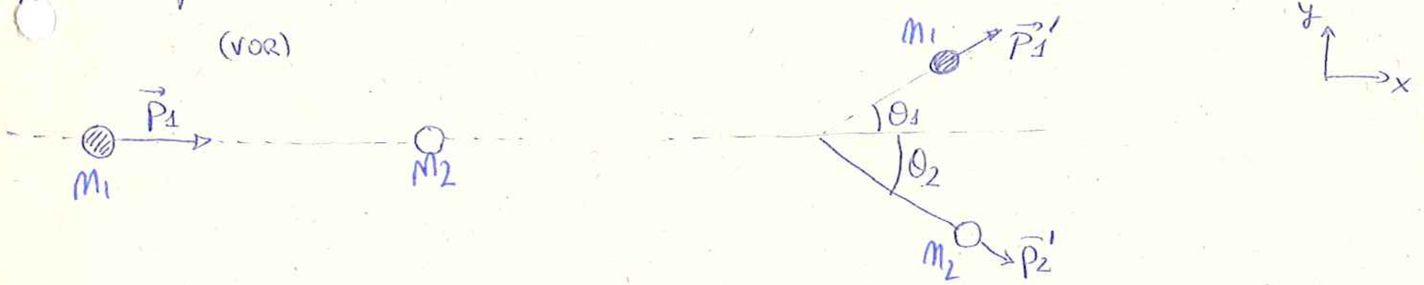
$p_1' = -p_2'$

Also $\longrightarrow$ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_1'^2 + Q$

$\longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2\mu} p_1^2 = \frac{1}{2\mu} p_1'^2 + Q}$ (Wenn $Q>0$ ist die kinetische Energie am Ende kleiner als am Anfang. Logisch!)

* DREIDIMENSIONALE STÖßE

- Wir betrachten nun die 2 Teilchen (m_1, m_2) aber diesmal in 3D.
- Der Einfachkeit halber betrachten wir den Fall $v_2 = 0$



Die Impulserhaltung verlangt

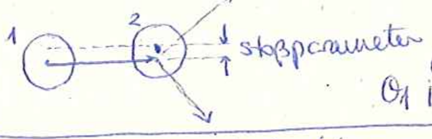
$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

(Bemerkung: der Stoß findet deswegen auf einer Ebene statt d.h. $\vec{p}_1$, $\vec{p}_1'$ und $\vec{p}_2'$ liegen auf einer Ebene)

Also $p_1 = p_1' \cos\theta_1 + p_2' \cos\theta_2$ $\longleftarrow$ x-Richtung

$0 = p_1' \sin\theta_1 - p_2' \sin\theta_2$ $\longleftarrow$ y-Richtung

Bemerkung: Der Winkel θ_1 hängt eigentlich vom sogen. Stoßparameter. Alle die Leute, die Billiard gespielt haben, haben eine Erfahrung damit.



Wir betrachten hier den Stoßparameter nicht, und deswegen θ_1 ist nicht bestimmt.

Für elastische Stöße:

$$p_1^2/2m_1 = p_1'^2/2m_1 + p_2'^2/2m_2$$

- Also wir haben 3 Gleichungen für 4 Unbekannten: p_1', p_2', θ_1 und θ_2. Sagen wir daß man θ_1 kennt (ein Detektor hat uns θ_1 ganz präzis ergeben).

Da $\vec{p}_1 - \vec{p}_1' = \vec{p}_2 \rightarrow (\vec{p}_1 - \vec{p}_1')^2 = \vec{p}_2^{\,2} \rightarrow \vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_1'^{\,2} - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1' = \vec{p}_2'^{\,2}$

$\rightarrow p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1' \cos\theta_1 = p_2'^2$

Aber auch $\rightarrow$ $p_2'^2 = \frac{m_2}{m_1}(p_1^2 - p_1'^2)$

$\rightarrow p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1 p_1' \cos\theta_1 = \frac{m_2}{m_1} p_1^2 - \frac{m_2}{m_1} p_1'^2$

$\rightarrow \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) p_1'^2 - (2p_1 \cos\theta_1) p_1' + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) p_1^2 = 0$

Also

$$\frac{p_1'}{p_1} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\theta_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \cos^2\theta_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2}}$$

* Und von hier können wir p_2' und θ_2 auch rechnen.

* Nehmen wir $m_1 > m_2$

$$p_1'/p_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 - \left(1 - m_2^2/m_1^2\right)}\right\}$$

Da p_1' darf nicht komplex sein, dann $\cos^2\theta_1 \geq 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}$

Das ergibt einen maximalen Winkel θ_m

$$\cos^2\theta_m = 1 - m_2^2/m_1^2 \qquad 0 < \theta_m < \pi/2$$

Wenn $m_1 \gg m_2 \rightarrow \theta_m$ ist sehr klein. Das ist natürlich logisch

• Für $\theta_1 < \theta_m$ gibt es 2 Lösungen.

z.B. für $\theta_1 = 0 \rightarrow p_1' = p_1$ oder $p_1' = p_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}\right)$

kein Stoß

$\downarrow$

$\theta_2 = 0$

$\downarrow$

$p_2' = p_1\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)$

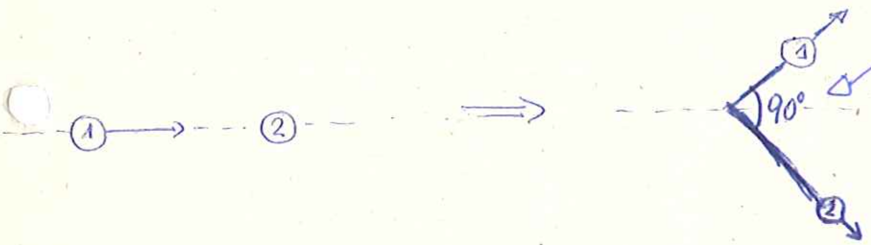
Also für $m_2 \longrightarrow v_2' = v_1 \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)$

$m_1 \longrightarrow v_1' = v_1 \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)$ wie in 1D (mit $\vartheta_2=0$)

Wenn $m_1 >> m_2 \longrightarrow v_2' \simeq 2v_1$, $v_1' \simeq v_1$ (wie in 1D-Stöße, da für $\theta_1=\theta_2=0$ wir haben ein 1D Stoß!)

• Wenn $m_1 = m_2$

$p_1' = p_1 \cos\theta_1 \longrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1 \longrightarrow \frac{p_2'}{p_1} = \sin\theta_1$



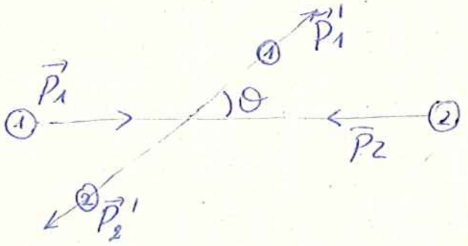
(Wenn $m_1=m_2$ ist der Relativwinkel $\pi/2 \equiv 90°$)

* Wenn $m_1 < m_2$ alle $0<\theta_1<\pi$ sind möglich

• Bisher haben wir nur im Laborsystem gearbeitet. Wie sieht es im Schwerpunktsystem aus?

• Im Schwerpunkt-System $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$; $\vec{p}_1{}' = -\vec{p}_2{}'$

(da immer $\vec{P}=0$ im Schwerpunkt-System).



Und für elastischen Stöße:

$$p_1^2 = p_1'^2$$

Und θ bleibt unbekannt.

* Also, zussamengefaßt:
  * Für Stöße sind Impuls- und Energieerhaltung entscheidend.
  * Im Schwerpunktsystem sieht alles typischerweise viel einfacher aus!

• PLANETENBEWEGUNG. KEPLER'SCHE GESETZE

* Nehmen wir 2 Körper mit Massen m_1 und m_2. Zwischen beide Körper wirkt die Gravitationskraft, deren Potential ist:

$$V(\vec r_1, \vec r_2) = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec r_{12}|} \qquad \text{wobei } \vec r_{12} = \vec r_1 - \vec r_2$$

$$\vec F_{12} = -\vec\nabla_1 V = -\vec\nabla_{12} V(\vec r_{12}) = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec r_{12}|^3}\vec r_{12}$$

• Wir vernachlässigen äußere Kräfte, dann $\vec P = 0$ (Gesamtimpuls)

und $\mu \ddot{\vec r}_{12} = \vec F_{12}$ wobei $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

[Bemerkung: Eigentlich $\vec P$ = konstant, aber wir können einfach $\vec P = 0$ annehmen]

Also $\boxed{\mu \ddot{\vec r}_{12} = -G\mu M \frac{\vec r_{12}}{r_{12}^3}}$ $(m_1 m_2 = \mu M)$

• Von nun an $\vec r_{12} \equiv \vec r$, $GM \equiv \gamma$

Also $\ddot{\vec r} = -\gamma\, \vec r / r^3$

Die Schwerkraft ist ein Beispiel einer Zentralkraft. Aus unserer Diskussion in S. 8 haben wir gesehen, daß für Zentralkräfte ist $\vec L$ eine Konstante, und daher liegen die Bahnen immer auf eine Ebene ($\vec L \cdot \vec r = 0$).

* Wir benutzen nun Polarkoordinaten auf der Bewegungsebene.

$\vec e_r = (\cos\phi, \sin\phi)$
$\vec e_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi)$

$$\vec r = r\vec e_r = r(\cos\phi, \sin\phi).$$

$$\dot{\vec r} = \dot r(\cos\phi, \sin\phi) + r\dot\phi(-\sin\phi, \cos\phi)$$

$$\ddot{\vec r} = \ddot r(\cos\phi, \sin\phi) + 2\dot r\dot\phi(-\sin\phi, \cos\phi) + r\ddot\phi(-\sin\phi, \cos\phi) - r\dot\phi^2(\cos\phi, \sin\phi)$$

$$= (\ddot r - r\dot\phi^2)\vec e_r + (2\dot r\dot\phi + r\ddot\phi)\vec e_\phi$$

Also $(\ddot r - r\dot\phi^2)\vec e_r + (2\dot r\dot\phi + r\ddot\phi)\vec e_\phi = -\frac{\gamma}{r^2}\vec e_r$

• Also $\ddot{r} - r\dot{\phi} = -\gamma/r^2$

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0$$

Also $r^2\dot{\phi}$ = KONSTANTE

• Andererseits:

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu (r\vec{e}_r) \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi) = \mu r^2\dot{\phi}(\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi) = \mu r^2\dot{\phi}\,\vec{e}_z$$

Also $\boxed{r^2\dot{\phi} = L/\mu} \longrightarrow \boxed{\dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2}}$

[• Bemerkung: μr^2 hat eine wichtige Bedeutung $\Rightarrow$ Trägheitsmoment. Mehr darüber in unserer Diskussion des starren Körpers.]

• Dann: $\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} = -\frac{\gamma}{r^2}$ — wir multiplizieren mal $\mu\dot{r}$ (TRICK!)

$$\mu\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2\dot{r}}{\mu^2 r^3} + \frac{\mu\gamma}{r^2}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left[\mu\dot{r}^2/2 + \frac{L^2}{2\mu^2 r^2} - \frac{\mu\gamma}{r}\right] = 0$$

Also die Energie ist der Form:

$$\boxed{E = \underbrace{\mu\dot{r}^2/2}_{\text{Kinetische Energie}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu^2 r^2}}_{\text{Zentrifugalpotential}} - \mu\gamma/r}$$

$\mu\gamma/r$ ← Schwerefeld

Wir wollen nun die Bahnen, also $r(\phi)$

* Sei $s = 1/r$; wir werden s als Funktion von ϕ bestimmen.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{d\phi} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\phi} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi} \end{aligned}\right\} \frac{dr}{dt} = -\frac{L}{\mu}\frac{ds}{d\phi}$$

→ das ist ein schönes Trick!

$$\text{Also } E = \frac{\mu}{2}\frac{L^2}{\mu^2}\left(\frac{ds}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu^2}s^2 - \mu\gamma s$$

$$= \frac{L^2}{2\mu}\left[\left(\frac{ds}{d\phi}\right)^2 + s^2\right] - \mu\gamma s$$

$$\frac{dE}{d\phi} = \frac{L^2}{2\mu}\left\{2\left(\frac{ds}{d\phi}\right)\left(\frac{d^2s}{d\phi^2}\right) + 2s\left(\frac{ds}{d\phi}\right)\right\} - \mu\gamma\frac{ds}{d\phi}$$

$$0 = \frac{dE}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\cdot\frac{dE}{d\phi} = \frac{L}{\mu}s^2\left(\frac{ds}{d\phi}\right)\left\{\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{d^2s}{d\phi^2} + s\right] - \mu\gamma\right\} = 0$$

• Also: $\frac{d^2 s}{d\phi^2} + s = \gamma \mu^2/L^2$

Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung.

• Die homogene Gleichung

$$\frac{d^2 s}{d\phi^2} = -s$$

hat als allgemeine Lösung $s(\phi) = \alpha \sin\phi + \beta \cos\phi$

• Eine spezielle Lösung ist

$$s(\phi) = \gamma \mu^2/L^2$$

Also die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung ist

$$s(\phi) = \alpha \sin\phi + \beta \cos\phi + \gamma \mu^2/L^2$$

• Die Parameter α und β werden durch Anfangsbedingungen festgelegt. So fordern wir, daß die maximale s (minimale r) bei $\phi = 0$ liegt:

* $\left(\frac{ds}{d\phi}\right)_{\phi=0} = 0 \longrightarrow \alpha = 0$

* $\left(\frac{d^2 s}{d\phi^2}\right)_{\phi=0} \leq 0 \longrightarrow -\beta \leq 0 \rightarrow \beta \geq 0$

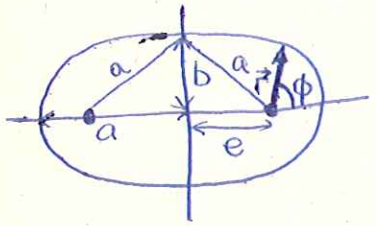
* Dann $s = \frac{1}{r} = \beta \cos\phi + \gamma \mu^2/L^2 = \frac{\gamma \mu^2}{L^2}\left(1 + \frac{\beta L^2}{\gamma \mu^2} \cos\phi\right)$

Sei $k = \frac{L^2}{\gamma \mu^2}$ und $\epsilon = \frac{\beta L^2}{\gamma \mu^2} > 0$

dann $\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \epsilon \cos\phi)}$ Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes in Polarkoordinaten

$$\left\{\begin{array}{l} \epsilon < 1 \longrightarrow \text{Ellipse} \\ \epsilon = 1 \longrightarrow \text{Parabel} \\ \epsilon > 1 \longrightarrow \text{Hyperbel} \end{array}\right\}$$

* Für $\varepsilon < 1$ haben wir eine Ellipse.
Wie ihr weisst, die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Abstände von 2 Brennpunkten konstant $(=2a)$ ist ($a \hat{=}$ große Halbachse der Ellipse)



$$a^2 = e^2 + b^2 \longrightarrow b^2 = a^2 - e^2$$

$$r_0 = \vec{r}(\phi = 0) = a - e = \frac{k}{1+\varepsilon}$$

$$r_1 = \vec{r}(\phi = \pi) = a + e = \frac{k}{1-\varepsilon}$$

Dann $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ ⟶ Nun haben wir ε und k als Funktion von a und e ausgedrückt.

$$r_0 = \frac{ka}{a+e} = a - e \Rightarrow k = \frac{(a-e)(a+e)}{a}$$

$$b^2 = (a+e)(a-e) = \cancel{\ldots} (a+e)\frac{ka}{(a+e)}$$

Also $\boxed{\dfrac{b^2}{a} = k = \dfrac{L^2}{\gamma\mu^2}}$ → Die Beziehung zwischen den ~~großen~~ Halbachsen wird von L gegeben.

* Da $\dot{r}(\phi = 0) = 0$ (wir haben genommen, daß $(dr/d\phi)_{\phi=0} = 0$)
Die kinetische Energie am Anfang ist also Null.

Dann

$$E = \frac{L^2}{2\mu r_0^2} - \frac{\gamma\mu}{r_0} = \gamma\mu\left[\frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0}\right]$$

E ist konstant

$$= \gamma\mu\left\{\frac{a^2-e^2}{2a(a-e)^2} - \frac{1}{(a-e)}\right\} = \gamma\mu\left\{\frac{a^2-e^2-2a^2+2ae}{2a(a-e)^2}\right\}$$

$$= -\gamma\mu\frac{\cancel{(a-e)^2}}{2a\cancel{(a-e)^2}} \longrightarrow E = \frac{-\gamma\mu}{2a} \longrightarrow \boxed{a = \frac{-\gamma\mu}{2E}}$$

- Die Energie E bestimmt die große Halbachse a, und damit

$\boxed{b = \dfrac{L}{\sqrt{-2\mu E}}}$ Damit ist der Bahn der Planeten vollständig beschreibt. ⟹

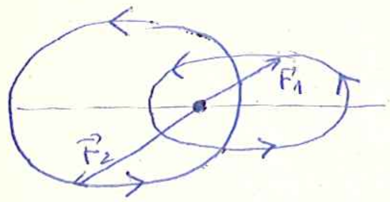
$$\Longrightarrow \boxed{r = \frac{k}{1+\varepsilon\cos\phi} \quad \text{wobei} \quad k = L^2/\gamma\mu^2, \quad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2L^2E}{\gamma^2\mu^2}}}$$

* Im Schwerpunktsystem $\vec{R}=0$ und

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Also die beiden Massen bewegen sich auf geometrisch ähnlichen, gleichsinnig durchlaufenen Ellipsen um den gemeinsamen Schwerpunkt, der mit jeweils einem der beiden Brennpunkte einer jeden Ellipse zusammenfällt



Die Bahnen der beiden Massen m_1 und m_2 sind dann Ellipsen mit Halbachsen

$$a_1 = -G\frac{\mu m_2}{2E} \quad ; \quad a_2 = -G\frac{\mu m_1}{2E}$$

also $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$

· Die Drehimpulse der beiden Massen sind auch Konstanten der Bewegung: $\vec{L}_i = \frac{\mu}{m_i}\vec{L}$

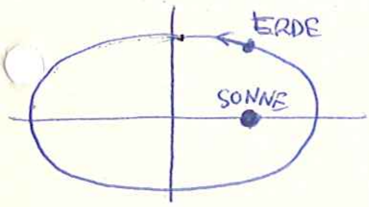
Damit sind die Umlaufzeiten natürlich <u>identisch</u>!

* Bisher haben wir m_1 und m_2 ganz allgemein angenommen. Nehmen wir nun an, daß $m_1 >> m_2$.

Das wäre z.B. der Fall $m_1 \equiv$ Sonne $\left(\frac{m_1}{m_2} \simeq 3{,}33 \times 10^5 \right)$
$m_2 \equiv$ Erde

Dann $\mu \approx m_2$
$a_1 << a_2$

Da $a_1 \approx 0 \rightarrow$ Die Sonne liegt auf einem Brennpunkt der Bahn der Erde.



Also, "die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht"
$\Longrightarrow$ 1. Keplersches Gesetz

• "Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen" $\Longrightarrow$ 2. Keplersches Gesetz

Das ist einfach der Flächensatz (s. 9) und kommt direkt aus dem Drehimpulserhaltungssatz.

• Kepler formulierte (in 1619 !!) noch ein 3. Gesetz
"Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie Kuben der großen Achsen der Ellipsen"
Das haben bisher noch nicht beweist. Die Gesamtfläche der Ellipse beträgt:

$S = \pi a b = \tau \frac{dS}{dt}$ wobei $\tau \equiv$ Umlaufzeit
$dS/dt \equiv$ "Flächengeschwindigkeit"

Aber $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m_p}$ (aus s. 9, wobei $m_p \equiv$ Masse des Planets)

Dann $S = \tau \frac{L}{2m_p} = \pi a b \rightarrow \tau = 2\pi a b \, m_p / L$

Also $\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 m_p^2 / L^2}{a^3} = 4\pi^2 \left(\frac{b^2}{a}\right) \frac{m_p^2}{L^2}$

[s. 36]

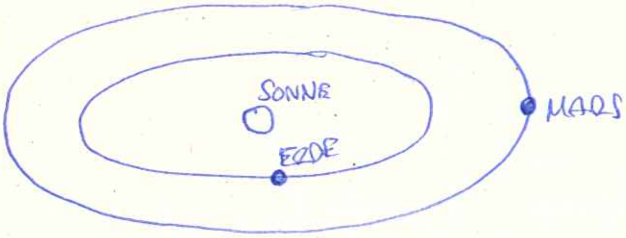
$= 4\pi^2 \cancel{K} \frac{m_p^2}{L^2} \stackrel{!}{=} 4\pi^2 \frac{\cancel{L^2}}{GM_s \cancel{m_p^2}} \frac{\cancel{m_p^2}}{\cancel{L^2}} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$ = KONSTANT

$K = \frac{L^2}{\gamma \mu^2} = \frac{L^2}{GM_s m_p^2}$

nun $M \cong M_{SONNE}$, $\mu \simeq m_p$

Also $\boxed{\frac{\tau^2}{a^3} = \text{KONSTANT}}$ wie Kepler gesagt hatte.

· Zum Beispiel:



· $a_{MARS} \approx 1.524 \, a_{ERDE}$

· Dann:

$\tau_{MARS} = \tau_{ERDE} \left(\frac{a_{MARS}}{a_{ERDE}}\right)^{3/2} \simeq 686.7$ Tage

Die astronomische Beobachtungen liefern (fast) genau das !!