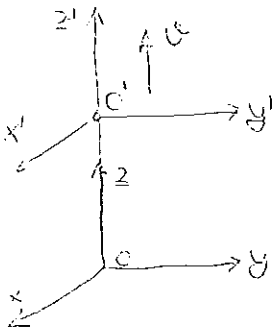
Spezielle Relativitätstheorie

- Am Anfang dieser Vorlesungsreihe haben wir die Idee von Inertialsystem und Galilei-Transformation eingeführt.

  - Inertialsystem: ein Bezugsystem in dem das Newtonsche Trägheitsgesetz ($F = ma$) ohne Mitwirkung von Scheinkräfte gilt.

  - Galilei-Transformation (S. 11):
    Sei S ein Inertialsystem. Sei S' ein Bezugssystem, der sich relativ zu S geradlinig gleichförmig bewegt (zur $t=0$, $S=S'$) [also S' ist auch ein Inertialsystem].



  - Wir nehmen die konstante Geschwindigkeit parallel zur z-Achse
  - Dann lautet die Galilei-Transformation $S \Leftrightarrow S'$ (S. 12)

$$\left\{\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= z' + vt \\ t &= t' \end{aligned}\right\}$$

- Die Zeit wird also nicht mittransformiert.
- Diese Transformation sieht (für unseren alltäglichen Erfahrungen) sehr intuitive. Sie ist aber falsch in allgemeinen.
- Die Probleme für die Galilei-Transformation haben in dem XIX Jahrhundert mit den elektromagnetischen Wellen (also mit der Licht) angefangen. Damals hat man eine Analogie zwischen EM-Wellen und Schallwellen gemacht. Schall ist wie wir wissen einfach eine Druckwelle. Diese Welle verbreitet sich in der Luft, sie braucht also ein "Substrat" (also die Luft). Wir können dann die Schall-geschwindigkeit im Bezugssystem der ruhende Luft definieren. Genauso dachte man, dass es eine Substanz gab, das sogen. Äther, in dem die EM-Wellen sich verbreiteten. Da die Licht

bewegte sich sehr schnell, müsste der Äther sehr dicht sein. Andrerseits, setze der Äther der Bewegung materieller Körper kein Widerstand entgegen.

· Nehmen wir nun eine Lichtquelle im Ursprung, O, von S. Die sendet Kugelwellen die sich mit der Lichtgeschwindigkeit, c, sich verbreiten: $\dot{\vec{r}} = c\vec{e}_r$; $\vec{e}_r \equiv \vec{r}/r$

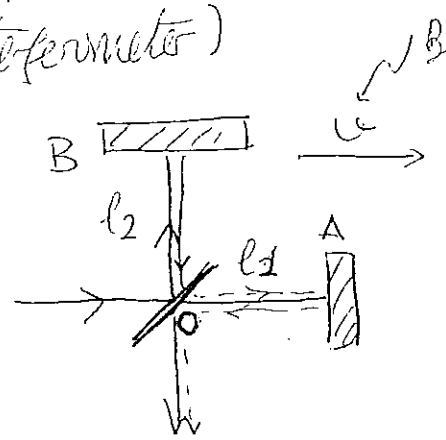
Aus der Galilei-Transform wird die Lichtgeschwindigkeit transformiert $\rightarrow$ $\dot{\vec{r}}' = c\vec{e}_r - \vec{v}$

Ganz klar $\rightarrow$ $|\dot{\vec{r}}'| \neq c$ $\rightarrow$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum fürs S' wäre also nicht c.

· In Analogie zur Schallwellen könnten wir einen absoluten Raum definieren. Es wäre gerade jenes Bezugssystem in dem $|\dot{\vec{r}}| = c$ betrachtet würde (das wäre das Bezugssystem des Äthers).

· Aber wenn das so wäre, dann könnte man folgendes machen. Man könnte die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen relativ zur Bewegung der Erde messen, und die Differenz stellen.

· Das ist genau was Michelson und Morley Ende des XIX Jahrhunderts gemacht haben. Das Experiment war ziemlich einfach. Sie bauten einen Interferometer (sog. Michelson-Morley Interferometer)

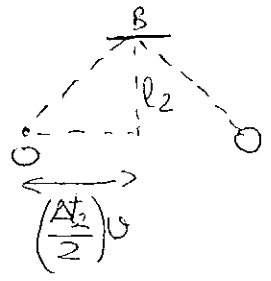


· Laufzeit O-A-O:

$$\Delta t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{(1-v^2/c^2)}$$

· Laufzeit O-B-O

$$\Delta t_2 = \frac{2}{c}\left[l_2^2 + \left(\frac{\Delta t_2}{2}\right)^2 v^2\right]^{1/2}$$



also: $$\Delta t_2 = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

* Die optischen Weglängen sind also $c\Delta t_1$ und $c\Delta t_2$, und die Differenz wäre:

$$\delta = c(\Delta t_2 - \Delta t_1) = 2\left(\frac{l_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{l_1}{1-v^2/c^2}\right)$$

die δ bestimmt den Interferenzmuster des Interferometers

Wenn man die Apparatur 90° dreht:

$$\delta' = 2\left(\frac{l_2}{1-v^2/c^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

Die Differenz der Interferenzmustern der beiden Messungen wird von: $S \equiv \delta' - \delta$ gegeben:

$$S = 2(l_1+l_2)\left[\frac{1}{1-v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] \overset{v \ll c}{\approx} (l_1+l_2)\frac{v^2}{c^2}$$

Man sollte also eine Differenz in dem Interferenzmuster feststellen die messbar mit der Interferometer von Michelson und Morley war. Die haben aber <u>nichts</u> beobachtet. Das war genauso ein halbes Jahr später wenn die Erde in die Gegenrichtung sich bewegte.

Die Schlussfolge war (für die Wissenschaftler am Ende des <u>XIX</u> Jahrhunderts) schockierend:

Die Lichtgeschwindigkeit hängt <u>nicht</u> von der relativen Geschwindigkeit der Lichtquelle ab!

Wie war das überhaupt möglich? Die Geschwindigkeit ist natürlich Abstand durch Zeitintervall. Also entweder sind die Maßstäbe von S und S' anders oder die Uhren in S und S' ticken anders, oder beide! Die Galilei-Transformation ist also falsch, und insbesonders die Zeit könnte auch mittransformiert werden.

* Die Galilei-Transformation ist natürlich nicht vollständig falsch. Die funktioniert sogar für alle unsere alltägliche Erfahrungen. Die ist ok für $v \ll c$. Wir sollten also verlangen, dass die korrekte Transformation die Galilei-Transformation als $v \ll c$ Limes entspricht.
* Die Tatsache dass alle unsere Intuitionen evolutiv für $v \ll c$ sich entwickelten haben, wird nun gegen uns spielen, da wenn wir die richtige Transformation anwenden, werden wir sehr komische und anti-intuitive Folgen bekommen.

* DIE EINSTEIN-POSTULATE

* Die neue Relativitätstheorie (Spezielle Relativitätstheorie) basiert sich auf 2 Postulaten:

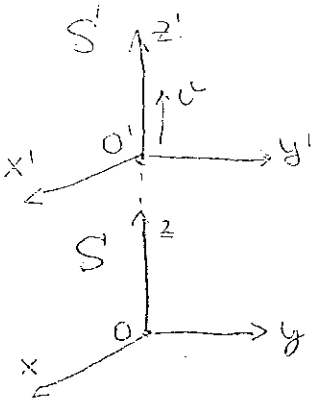
① Alle physikalische Gesetze und Resultate aller Experimente sind in allen gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegten Systeme gleich $\Longrightarrow$ Äquivalenzpostulat.

Dies Postulat kennen wir schon aus der Galilei-Transformation (S. 12).
Das 2 Postulat ist neu:

② Die Lichtgeschwindigkeit hat im Vakuum zu allen Zeiten und an allen Orten den konstanten Wert c und ist insbesondere von der Bewegung der Lichtquelle unabhängig.

* DIE LORENTZ-TRANSFORMATION

* Wir werden nun sehen dass der 2. Postulat radikale Folgen für die Transformation zwischen 2 Inertialsysteme hat.
* Wie vorher, betrachten wir 2 Inertialsysteme S und S'



* Zur Zeit $t=0 \rightarrow S = S'$
* Zur Zeit $t=0$ sendet eine Lichtquelle im Ursprung, O, um S ein Signal aus. Das ergibt in S eine sich mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreitende Kugelwelle ($\vec{r} = c\vec{e}_r$), also:

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

* Aus dem 2. Postulat, in S' hat man auch:

$$c^2 (t')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$$

* Von nun an werde ich die folgende Schreibweise anwenden:

$$\left\{\begin{array}{l} x^0 \equiv ct \\ x^1 \equiv x \\ x^2 \equiv y \\ x^3 \equiv z \end{array}\right\} \text{ in } S \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}^0 \equiv ct' \\ \tilde{x}^1 \equiv x' \\ \tilde{x}^2 \equiv y' \\ \tilde{x}^3 \equiv z' \end{array}\right\} \text{ in } S'$$

* <u>Bemerkung</u>: Alle Koordinaten $x^{\mu=0,1,2,3}$ haben Einheiten von Länge. Diese Schreibweise wird später in dieser Vorlesungsreihe eine bedeutende Rolle spielen)

* Das Resultat des Michelson-Morley-Experiments lässt sich als eine Invarianzbedingung formulieren:

$$(x^0)^2 - \sum_{\mu=1}^{3} (x^\mu)^2 = (\tilde{x}^0)^2 - \sum_{\mu=1} (\tilde{x}^\mu)^2$$

* Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten in S und S' muss linear sein:

$$\tilde{x}^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} L_{\mu\lambda} x^\mu$$

(Bemerkung: Sonst eine gleichförmige Bewegung in S wäre keine gleichförmige Bewegung in S', was dem Äquivalenzprinzip widersprechen würde.)

Die Matrix $L_{\mu\lambda}$ ist die so genannte Transformationsmatrix

Da v in z-Richtung geht, werden $\tilde{x}^1 = x^1$ und $\tilde{x}^2 = x^2$

Die Komponenten $\tilde{x}^0$ und $\tilde{x}^3$ sind von x^1 und x^2 unabhängig, da ein Punkt der x^1-x^2-Ebene ausgezeichnet ist.

Also $\tilde{x}^0 = L_{00} x^0 + L_{03} x^3$

$\tilde{x}^3 = L_{30} x^0 + L_{33} x^3$

Die Invarianzbedingung lautet nun $(x^0)^2 - (x^3)^2 = (\tilde{x}^0)^2 - (\tilde{x}^3)^2$

$$= [L_{00} x^0 + L_{03} x^3]^2 - [L_{30} x^0 + L_{33} x^3]^2$$

$$= (L_{00}^2 - L_{30}^2)(x^0)^2 - (L_{33}^2 - L_{03}^2)(x^3)^2 + 2(L_{00}L_{03} - L_{30}L_{33}) x^0 x^3$$

Also
$$\left\{ \begin{aligned} L_{00}^2 - L_{30}^2 &= 1 \\ L_{33}^2 - L_{03}^2 &= 1 \\ L_{00}L_{03} - L_{30}L_{33} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Diese Gleichungen werden durch den folgenden Ansatz gelöst:

$L_{00} = L_{33} = \cosh \chi$

$L_{30} = L_{03} = -\sinh \chi$

(Das "−" in $L_{30} = L_{03}$ ist so, weil später für $v \ll c$ wir die Galilei-Transformation zurück bekommen müssen)

(Bemerkung: Wir benutzen hier, dass $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$)

Wir müssen χ noch bestimmen. Betrachten wir die Bewegung des Ursprungs des Bezugssystems S' ($\tilde{x}^1 = \tilde{x}^2 = \tilde{x}^3 = 0$)

Also $0 = \tilde{x}^3 = L_{30} x^0 + L_{33} x^3 = -\sinh\chi \; x^0 + \cosh\chi \; x^3$

$$= -\sinh\chi \, (ct) + \cosh\chi \; z \longrightarrow \tanh\chi = \frac{z}{ct}$$

Von S ausgesehen gilt für den Ursprung von S' $\Rightarrow z = vt$

Also $\tanh\chi = \frac{v}{c}$

Aus der Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen bekommen wir

$$\cosh\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\sinh\chi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Wir benutzen von nun an die Notation

$$\beta = v/c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Dann $L_{00} = L_{33} = \gamma$

$L_{30} = L_{03} = -\beta\gamma$

Damit

$$\boxed{\begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}$$

oder anders geschrieben:

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{t} &= \gamma (t - \beta z/c) \\ \tilde{x} &= x \\ \tilde{y} &= y \\ \tilde{z} &= \gamma (z - \beta c t) \end{aligned}} \Longrightarrow \underline{\underline{\text{LORENTZ-TRANSFORMATION}}}$$

* Diese Transformation ist das A und Z der speziellen Relativitätstheorie.

* Suchen wir eine alternative (und ganz kurze!) Herleitung.
Ich bin S und Du bist S'; zur Zeit $t=0$ $S=S'$, aber später du bewegst dich mit Geschwindigkeit v relativ zu mir.
Ich sende ein Puls zur Zeit $t=0$. Zur Zeit t ist (für mich) der Puls in z. Wenn ich die Galilei-Transformation anwenden würde, würde ich sagen

$$z' = z - vt$$

Aber nun glaube ich nicht mehr, dass dein Massstab und mein Massstab gleich sind. Ich setze also ein Korrektur:

$$z' = \gamma(z - vt)$$

* Du machst das gleiche. Aus Galileo: $z = z' + vt'$, aber nun du glaubst mich nicht: $z = \gamma(z' + vt')$

[* Bemerkung: aus Postulat ① γ muss die gleiche für uns beide sein).

* Aber aus Postulat ②: $z = ct$ und $z' = ct'$. Dann:

$$zz' = \gamma^2(zz' - vtz' + vt'z - v^2tt')$$

$$1 = \gamma^2\left(1 - v\frac{t}{z} + v\frac{t'}{z'} - v^2\frac{t}{z}\frac{t'}{z'}\right) \overset{z=ct,\ z'=ct'}{=} \gamma^2(1 - v^2/c^2) \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Also $$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Außerdem: $$z' = ct' \rightarrow t' = \frac{z/c - vt/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \overset{z=ct}{=} \frac{t - vz/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

* Wir bekommen die Lorentz-Transformation also in 2 Zeilen. Die Mathematik ist also sehr einfach. Die physikalische Folgen sind ~~ins~~ gesamtlich gewaltig!

- Diese Transformation ersetzt nun die Galilei-Transformation. Besonders wichtig ist es hier, dass die Zeit auch mittransformiert wird.

- <u>Was passiert für $v \ll c$?</u>

Dann $\beta \ll 1$

$$\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots$$

Dann $\tilde{t} \approx t$, $\tilde{z} \approx z - vt$ } Wir bekommen (als erwünscht) die <u>Galilei-Transformation zurück</u>!

- Was passiert für $v > c$?

$$\tilde{z} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left[t - \frac{v}{c^2}z\right] \longrightarrow \text{für } v>c \quad \tilde{z} \text{ wird imaginär}$$

Das kann nicht sein, also c ist offensichtlich die maximale Relativgeschwindigkeit.

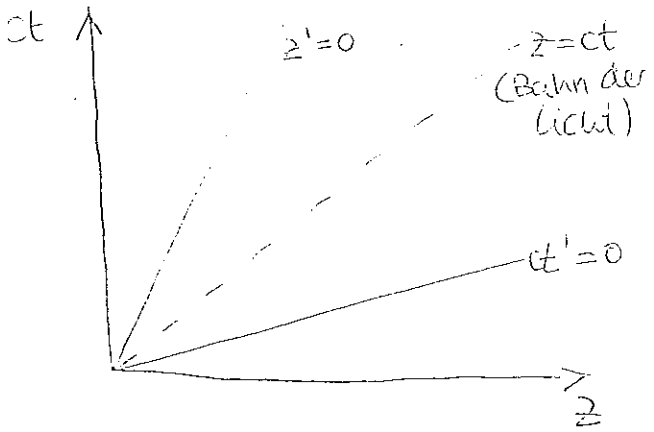
- Die Inversmatrix $L^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Das könnten wir erwarten, da sich S von S' aus gesehen mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt, und damit $\beta \to -\beta$ und $\gamma \to \gamma$.

- Nun haben wir die erwünschte Transformation. Nun werden wir die (aus unserer Sicht) komische Folgen dieser Transformation untersuchen.

* MINKOWSKI - DIAGRAMME

* Bevor wir mit der Folgen der Lorentz-Transformation anfangen, suchen wir kurz eine nützliche graphische Darstellung der Lorentz-Transformation.

* Wir betrachten ein (ct)-z Diagramm wie in der Abbildung



* Wir wollen die Kurve (ct)(z) bestimmen, wobei dass für diese Kurve $z'=0$:

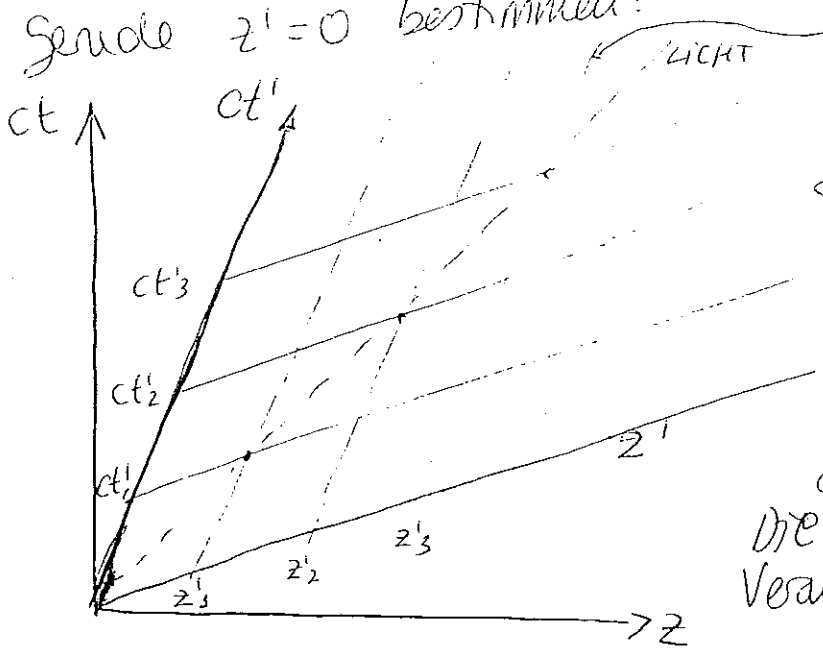
$$z' = \gamma(z - vt) \rightarrow z = vt$$
$$\downarrow$$
$$(ct) = \beta^{-1} z$$

- Da $\beta < 1$ steht diese Gerade wie in der Abbildung

- Die Kurve $ct' = 0$ erfüllt $\rightarrow$ $0 = \gamma[ct - \beta z] \Rightarrow (ct) = \beta z$ und die steht wie in der Abbildung

- Die Bahn der Licht erfüllt $z = ct$ $\rightarrow$ Also die Gerade mit 45° Steigung auf der Abbildung

- Genauso wie die z-Achse die Gerade $ct = 0$ entspricht, und die ct-Achse die Gerade $z = 0$ ist, dann können wir die z'-Achse als die Gerade $ct' = 0$ und die ct'-Achse als die Gerade $z' = 0$ bestimmen:



alle diese Punkte haben dieselbe z' Koordinate (parallele Geraden zur Achse ct')

alle diese Punkte haben dieselbe ct'-Koordinate (parallele Geraden zur Achse z')

* Diese Raumzeitdiagramme sind die rog. Minkowski-Diagramme. Die können sehr nützlich für die Veranschaulichung der Effekte der SRT.

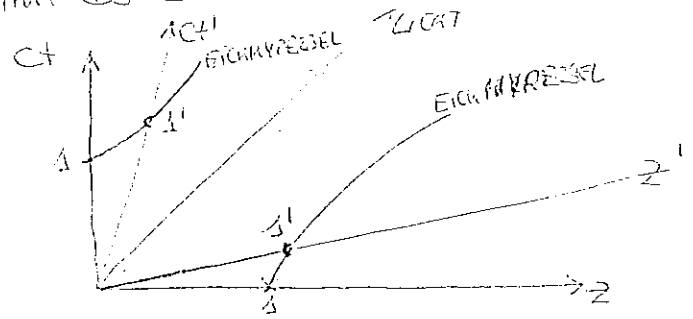
Noch ein Punkt betrgl. Minkowski-Diagramme. (Eichung der Achse)

Bei der Lorentz-Transformation ändert sich natürlich auch die Skalierung der Achse. Gucken wir das.

Wir wissen dass (Invarianzbedingung): $\sigma = (ct)^2 - z^2$ eine konstante (Lorentz-Invariant) ist. Also $\sigma = (ct)^2 - z^2 = (ct')^2 - (z')^2$

Sei $\sigma = -1 \rightarrow z^2 = (ct)^2 + 1 \Rightarrow$ Hyperbel die die z-Achse ($t=0$) in $z = 1$ schneidet. (Eichhyperbel)

Aber auch $(z')^2 = (ct')^2 + 1 \rightarrow$ damit legt der Schnittpunkt der Eichhyperbel mit der z'-Achse die Maßeinheit $z' = 1$ fest



+ Ganz analog, hier legt der Schnittpunkt der Eichhyperbel mit $\sigma = +1 \rightarrow (ct)^2 = z^2 + 1$ mit der (ct')-Achse ($z' = 0$) die Zeiteinheit

Diese Reskalierung der Achse macht manchmal die Interpretation mit Hilfe Minkowski-Diagramme etwas kompliziert.

TRANSFORMATION DER GESCHWINDIGKEITEN

- Mit der Lorentz-Transformation können wir zwischen (x,y,z,t) in S und (x',y',z',t') in S' transformieren. Wir werden nun sehen, wie man die Geschwindigkeiten transformiert.

- Die Geschwindigkeit im Bezugssystem S ist $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \equiv$

$$\equiv \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

- Nehmen wir 2 Ereignisse (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2).

Wir definieren $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$; $\Delta z = z_2 - z_1$; $\Delta t = t_2 - t_1$:

Aus der Lorentztransformation:

$$\left.\begin{cases} x'_j = x_j \\ y'_j = y_j \\ z'_j = (z_j - vt_j)/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ t'_j = (t_j - vz_j/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2} \end{cases}\right\} \text{für } j=1,2 \xrightarrow{\text{dann}} \begin{cases} \Delta x' = \Delta x \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = (\Delta z - v\Delta t)/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ \Delta t' = (\Delta t - v\Delta z/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2} \end{cases}$$

- Das gilt für alle beliebige $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$. Auch für infinitesimal kleine Änderungen:

$$\left\{\begin{cases} dx' = dx \\ dy' = dy \\ dz' = (dz - v\,dt)/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ dt' = (dt - v\,dz/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2} \end{cases}\right\}$$

- Dann:

$$\boxed{\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt - v\,dz/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{u_x}{1-\frac{v}{c^2}u_z}\sqrt{1-v^2/c^2} \\ u'_y &= \frac{u_y}{1-vu_z/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2} \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz - v\,dt}{dt - v\,dz/c^2} = \frac{u_z - v}{1-\frac{vu_z}{c^2}} \end{aligned}}$$

<u>Aufpassen</u>: die $u'_{x,y}$ werden auch transformiert, weil die Zeit mittransformiert wird!

- Für die Galilei-Transformation, wenn Du auf einem Zug bist (mit Sagen wir Geschwindigkeit $v = \frac{3}{4}c$) und Du wirfst ein Ball mit Geschwindigkeit $\frac{3}{4}c$, dann sollte ich den Ball mit Geschwindigkeit $1.5\,c$ sehen. Wie sieht's aus nun?

Aus meiner Sicht sehe ich (ich muss $v \to -v$ nehmen)

$$u_{ICH} = \frac{u_{DU} + v}{1 + \frac{v u_{DU}}{c^2}} = \frac{\frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}c}{\frac{25}{16}} = \frac{48}{50}c = \frac{24}{25}c$$

Also auch für mich $u_{ICH} < c$, wie es sein sollte!

- Sogar wenn Du Licht emittieren würdest, und $v = c$, dann:

$$u_{ICH} = \frac{c + c}{1 + c^2/c^2} = c$$

$\rightarrow$ wie wir aus dem 2. Postulat verlangen haben.

- Was passiert wenn $v \ll c$, dann:

$$u_x' \cong u_x \left(1 + \frac{v u_z}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \approx u_x$$

$$u_y' \approx u_y$$

$$u_z' \cong (u_z - v)\left(1 + \frac{v u_z}{c^2}\right) \approx u_z - v$$

Und wir bekommen, was wir sollten, die Galileische Transformation der Geschwindigkeiten (S. 12)

GLEICHZEITIGKEIT

* In der Lorentz-Transformation wird die Zeit mitTransformiert. Das hat wichtige Folgen für die Idee von Gleichzeitigkeit. Wir werden nun sehen, dass jedes Inertialsystem ein eigenes Gleichzeitigkeitskriterium hat. Die Absolute Zeit gibt's nicht!

* Wir sitzen im Bezugssystem S, und wir beobachten 2 Ereignisse, die in z_1 zur Zeit t_1, und in z_2 zur Zeit t_2 passieren; Abstand: $\Delta z = z_2 - z_1$
Zeitintervall: $\Delta t = t_2 - t_1$

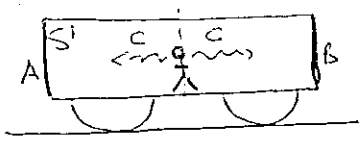
Sei $\Delta t = 0$, also für uns in S sind beide Ereignisse gleichzeitig. Was passiert in S'?

* Aus unsere Diskussion von S. 154:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{-\frac{v}{c^2}\Delta z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \neq 0 \qquad (!!)$$

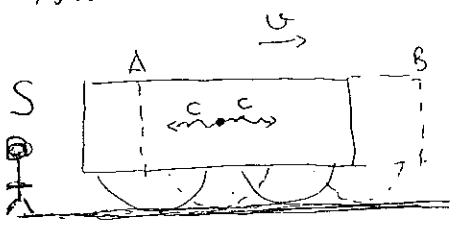
* Die beide Ereignisse sind für S' nicht mehr gleichzeitig! Das widerspricht (noch mal) unser alltägliche Erfahrung.

* Man kann die Verletzung der Gleichzeitigkeit am besten mit einem klassischen Beispiel verstehen:



. Sagen wir, dass wir auf einem Zug stehen (nun sind wir S'). Eine Lichtquelle ist genau auf der Mitte des Zuges. Lichtpulsen werden genau zur Zeit $t' = 0$ in beide Richtungen strahlt. Ganz klar erreicht die Licht beide Wände gleichzeitig.

* Nun sind wir draussend, auf dem Gleis (nun sind wir S)

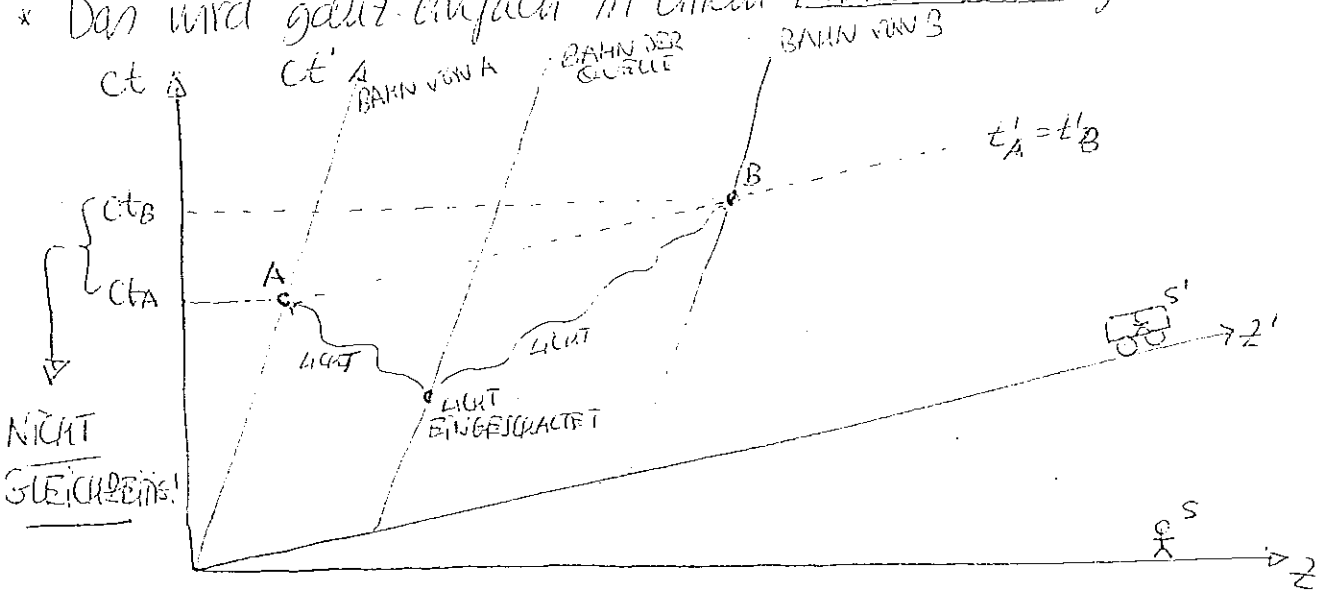


* Aus dem 2. Postulat ist die Lichtgeschwindigkeit (auch für S!) immer noch S.

* Als Folge wir (in S) sehen dass der Ereignis A ≡
≡ "Kontakt mit der Wand A" vor dem Ereignis B ≡
≡ "Kontakt mit der Wand B" passiert.

Die Gleichzeitigkeit ist also relativ.

* Das wird ganz einfach in einem Minkowski-Diagram verstanden:



* Da die Gleichzeitigkeit verletzt wird, dann könnte sich man überlegen, ob man die Kausalität verletzen könnte, d.h. ob man die Reihenfolge Ursache → Folge umkippen könnte. Das wäre natürlich ein neuges Problem!

* Wir betrachten in S 2 Ereignisse in (z_1, t_1), $(z_2, t_2 > t_1)$

Dann $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta z\right)$. Die 2 Ereignisse sind kausal miteinander verknüpft. So erfolgt der Informationsvorgang, der Ursache und Wirkung verbindet, mit endlicher Geschwindigkeit $v \leq c$. Dann $t_2 - t_1 = \frac{z_2 - z_1}{v} \geq \frac{z_2 - z_1}{c} \rightarrow \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta z\right) =$

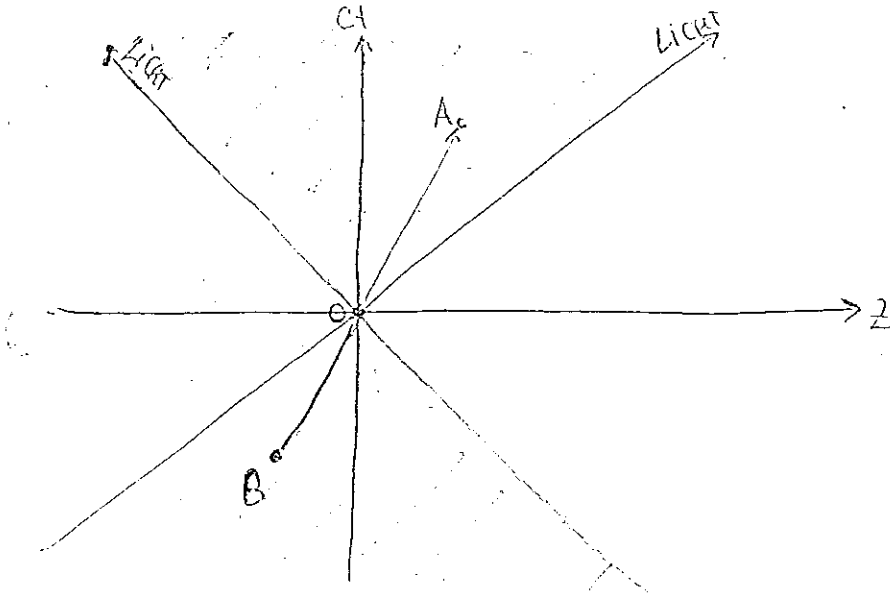
$$= \Delta t\, \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right) \geq \Delta t\left(1 - \frac{v}{c}\right) \geq 0 \rightarrow \Delta t' \geq 0$$

und damit Ursache und Wirkung lassen sich in S' nicht vertauschen. Die Kausalität ist also gerettet!

Lichtkegel

Verknüpft mit der Idee der Kausalität führen wir die Idee vom Lichtkegel.

In einem Minkowski-Diagramm



Ein Punkt A auf dem Raum-Zeit-Diagramm ist mit O kausal verknüpft wenn ein Signal von O A mit einer Geschwindigkeit $v \leq c$ erreichen kann.

Ganz klar das passiert nur wenn A innerhalb des gestrichenen Bereiches liegt.

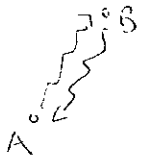
Der Punkt A liegt ganz klar in der <u>Zukunft</u> von O, (also A kann eine Folge von O sein).

Genauso ein Punkt B (siehe Abbildung) ist auch mit O kausal verknüpft, aber diesmal in der <u>Vergangenheit</u> (also B kann die Ursache von O sein).

Die Lichtbahnen bauen also einen so genannten <u>Lichtkegel</u>. Innerhalb des Kegels (gestrichener Bereich) liegt die Kausalitätszone.

Die Relativität der Gleichzeitigkeit führt natürlich zu Problemen für die Synchronisierung von Uhren.

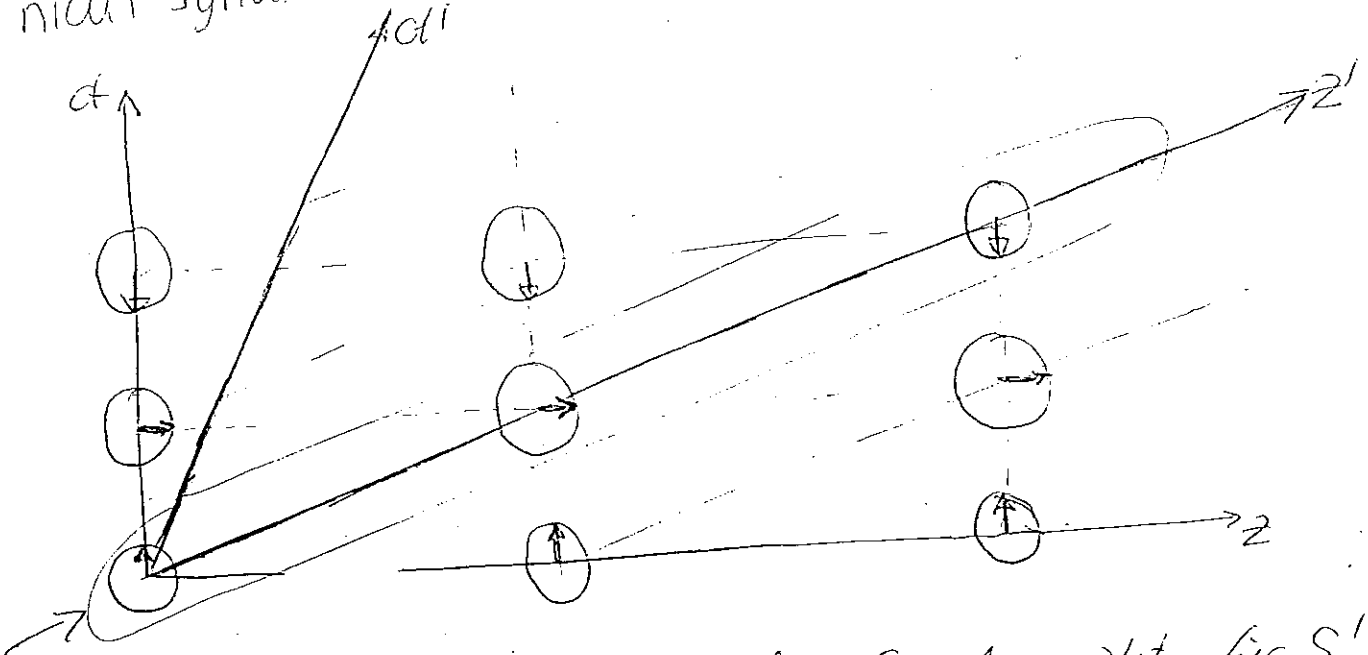
Wenn alle Zeitmessungen im selben Inertialsystem durchgeführt würden, dann gäbe es kein Problem. Wir könnten Uhren an verschiedenen Orten durch ein Lichtsignal synchronisieren.



- A schickt ein Signal zu B, wo die Licht reflektiert wird. Die Zeit $t_{ABA} = 2t_{AB} = 2t_{BA}$ wird in der A-Uhr gemessen.

- Umgekehrt. B schickt ein Signal zu A, und wird auch da reflektiert. Und die Laufzeit wird mit der B-Uhr gemessen. Da für die Licht die Strecken ABA und BAB mit Geschwindigkeit c gemacht werden, dann messen beide Uhren dieselbe Zeit $t_{ABA} = t_{BAB}$ und somit können synchronisiert werden, d.h. die Tickern mit derselben Frequenz.

Die Sache ist natürlich problematischer wenn man Uhren betrachtet, die sich in verschieden Inertialsysteme befinden. Synkronisierte Uhren in einem Bezugssystem werden als nicht synkronisiert in einem anderen Bezugssystem aussehen:



Die Uhren sind synkronisiert für S aber nicht für S'!

Das führt uns direkt zur Idee der Zeitdilatation.

* ZEITDILATATION

Eine komische Folge der Relativität der Gleichzeitigkeit ist die sogen. Zeitdilatation.

- Sagen wir dass ich eine Uhr habe, und ich das Bezugssystem S bin. Die Uhr tickt mit Periode Δt; d.h. meine Uhr ist in $z=0$, und die tickt zur Zeit $t_1=0$, und nochmal später zur Zeit $t_2=\Delta t$
- Gucken wir was passiert im Bezugssystem S'; ich habe 2 Ereignisse mit Koordinaten auf S $\rightarrow$ $(z_1=0, t_1=0)$, $(z_2=0, t_2=\Delta t)$

Für S' $\rightarrow$ $\Delta t' = \dfrac{\Delta t - v\Delta z/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > \Delta t$

Also eine Person im Bezugssystem S' sieht dass die Uhr von S geht nach! Das ist die sogen. Zeitdilatation (Ich sehe die bewegte Uhr langsamer!)

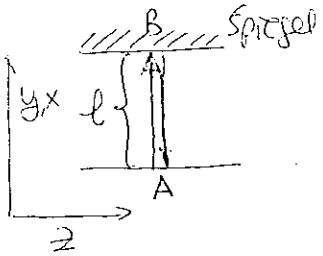
- Natürlich, das gleiche gilt für eine Uhr auf S'. Für eine Uhr auf S' $\rightarrow$ $\Delta z'=0$; $\Delta t = \dfrac{\Delta t' + v\Delta z'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Also die Person im S sieht dass die Uhr von S' geht nach!

- Wie können wir so was verstehen??

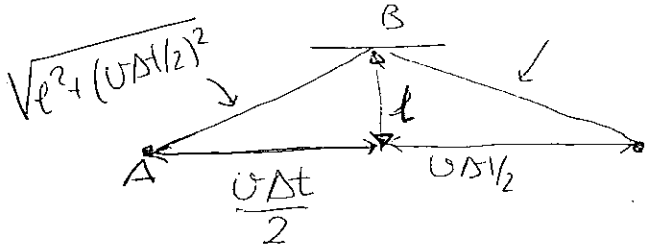
Bemerkung: Obwohl die Lichtuhr eine spezielle Art von Uhr ist, wir können alle andere Uhren (auch biologische Uhren) mit dieser Uhr (im selben Bezugssystem) synkronisieren

Wir modelieren eine Uhr so. Wir nehmen einen Spiegel.



- Licht geht von A bis B und zurück. Wenn die Licht zurückkehrt haben wir ein "Klick". So können wir eine Uhr mit Periode $\Delta t' = \dfrac{2l}{c}$ bauen. (nun sitzt die Uhr auf S')

- Was sieht S?



- Die Umlaufzeit ist nun:

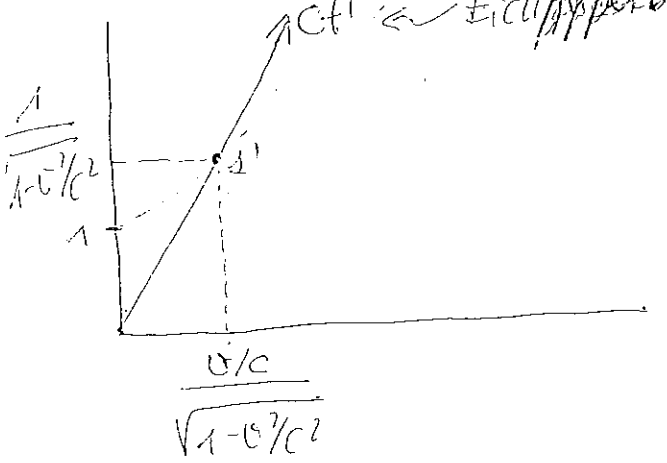
$$\Delta t = \frac{2\sqrt{l^2+(v\Delta t/2)^2}}{c}$$ (da die Lichtgeschwindigkeit immer c ist!)

dann $\Delta t = \dfrac{2l/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

also die Zeitdilatation!

* Kurze Bemerkung

· Die Zeitdilatation kann auch in einem Minkowski-Diagramm untersucht werden, aber wir müssen mit der Eichung aufpassen



* Die Zeiteinheit 1' ist gleichzeitig (in S) mit einer ct Zeit:

$$ct = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

* Also $\Delta t' = 1 \longrightarrow \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

also genau die Zeitdilatation.

* Die Zeitdilatation spielt eine wichtige Rolle in viele Experimente, z.B. in Teilchenbeschleuniger.
* z.B.: man kann den radioaktive Zerfall instabiler Teilchen für Zeitmessungen anwenden. Wenn wir das Zerfallgesetz kennen, und wir wissen wie viele Teilchen wir zur Zeit $t_i = 0$ und später zur Zeit t_f haben, dann können wir sehr genau diese t_f bestimmen.
* Aber → das Zerfallgesetz funktioniert mit der eigenen Zeit der Teilchen (also im Bezugssystem des Teilchens). Die Zeit die wir messen, kann tatsächlich viele länger sein!
* z.B. μ-Mesonen entstehen beim Eindringen der Kosmische Strahlung in die Atmosphäre

$$\mu^{\pm} \xrightarrow[\text{Zerfall}]{} e^{\pm} + \nu_1 + \bar{\nu}_2$$

Neutrino, Antineutrino

Man kennt das Zerfallgesetz. Die Geschwindigkeit der Mesonen is $v \simeq 0.994\,c$.

Die Beobachtung ist dass man viel mehr Muonen misst, als man erwarten hätte, wenn man die Wegzeit (t_w) durch die Atmosphäre bis den Detektor misst.

* Die Erklärung ist, dass wir müssen die Eigenzeit der Muonen betrachten: $\tau_w = \frac{t_w}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx \frac{t_w}{9}$

Der Zerfall ist also viel langsamer als erwartet!

* Wenn es 10^6 Muonen auf eine Höhe von 10 km, nicht relativistisch nur etwa 3 erreichen die Erdoberfläche (also fast nichts). Relativistisch bekommt man etwa 49000 !!

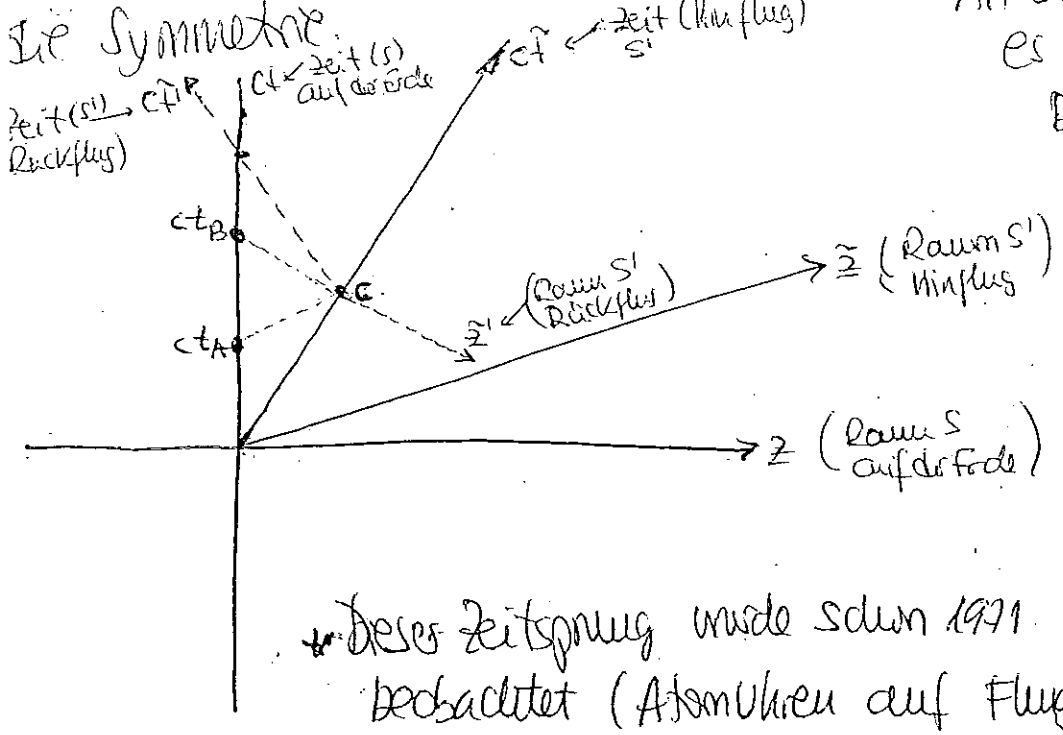
Zwillingsparadoxon

Die Zeitdilatation ist komisch, und führt zu scheinbare Paradoxen. Das bekannteste Paradoxon ist das sogen. Zwillingsparadoxon.

Sagen wir, dass einer von zwei Zwillingen mit Nahezu Lichtgeschwindigkeit zu einem fernen Stern fliegt, und kehrt anschließend mit derselben Geschwindigkeit zurück. Nach unseren Betrachtungen der Zeitdilatation schließt jeder Zwilling, dass für der andere die Zeit langsamer vergeht (u. damit der Bruder ist jünger).

Die Frage ist natürlich, was passiert wenn der Raumschiff zurück kehrt? Der Antwort lautet... Der Bruder auf der Erde ist älter! Die Frage nun ist natürlich, wie ist das möglich? Wo haben wir die Symmetrie gebrochen? Soll nicht alles relativ sein?

Der entscheidende Punkt ist, dass der Bruder auf dem Raumschiff fliegt mit konstanter Geschwindigkeit raus, aber in einer Punkt muss er zurückkehren, und das bricht natürlich die Symmetrie.



An der Umkehrpunkt gibt es eine Änderung der Definition der Gleichzeitigkeit

Hinflug: C ist gleichzeitig mit ct_A

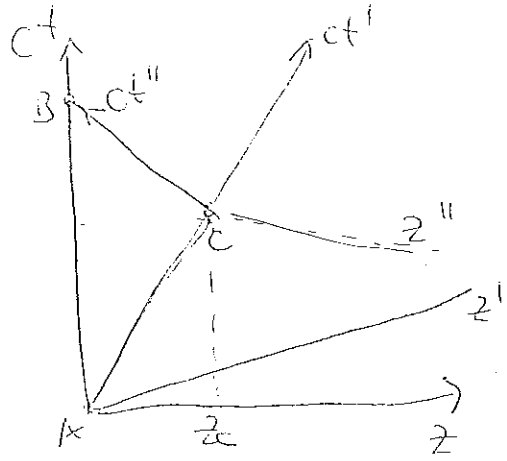
Rückflug: C ist gleichzeitig mit ct_B

↓

Dieser Zeitsprung erklärt das Paradoxon!

Dieser Zeitsprung wurde schon 1971 beobachtet (Atomuhren auf Flugzeuge!)

* Die Berechnung ist ziemlich einfach:



$$t' = \frac{t - vz/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

· HINFLUG (bis $z = z_c$) $\longrightarrow t_c = z_c/v$

$$t'_c = \frac{t_c - v z_c/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{(1-v^2/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\, t_c = \sqrt{1-v^2/c^2}\; t_c$$

· RÜCKFLUG: $v \to -v$; $\Delta z = -z_c$

$$t''_c = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t_c + v(-z_c)/c^2\right) = \sqrt{1-v^2/c^2}\; t_c$$

TOTAL $\longrightarrow 2\sqrt{1-v^2/c^2}\; t_c = \left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)(2t_c)$

Zeit auf der Erde

$$\boxed{T_{RAKETE} = \sqrt{1-v^2/c^2}\; T_{ERDE}}$$

* Für $v = 0.994\,c \longrightarrow T_{RAKETE} = \frac{T_{ERDE}}{9}$

Zeitumkehrreise sind also möglich

aber nur <u>one-way</u>!

Längenkontraktion

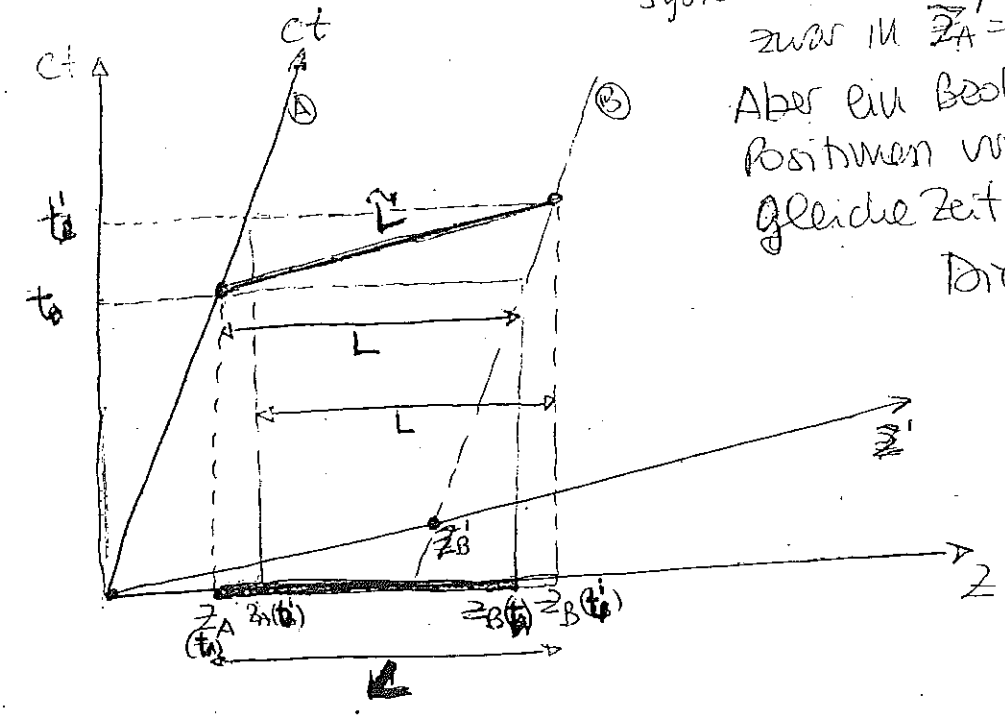
Sehen wir nun noch eine komische Folge der Relativität der Gleichzeitigkeit.

Was heißt, wenn wir sagen das z.B. eine Stange eine gewisse Länge hat. Das heißt, dass wir die 2 Endpunkte messen und zwar zur gleichen Zeit) und die Länge ist die Differenz. Normalerweise (für unseren Alltag) brauchen wir nicht diese "zur gleichen Zeit". Aber hier, noch mal, ist die Gleichzeitigkeit entscheidend!

Machen wir folgendes. Ein Beobachter (S') in einem Zug mißt die Länge des Zuges. Unser Beobachter in S' mißt eine Länge L'. Ein Beobachter steht auf dem Gleis. Welche Länge L mißt der Beobachter? Noch mal, das heißt:

* S' mißt die Länge L' für seine Gleichzeitigkeit.
* S mißt die Länge L für seine Gleichzeitigkeit.

Nennen wir A und B die 2 Wände des Zuges. Im Bezugs-System S' sind die Wände fest, und zwar in $z_A' = 0$, z_B'.



Aber ein Beobachter S mißt die Positionen von A und B für seine gleiche Zeit, also er mißt $z_A^{(1)}$ und $z_B^{(1)}$.

Diese Länge L ist deutliche kürzer als L'.

⇓

Längenkontraktion

· Gucken wir genauer mit der Lorentz-Transformation:

$$t' = \gamma(t - \beta z/c) \longrightarrow t = \gamma(t' + \beta z'/c)$$

$$z' = \gamma(z - \beta c t) \longrightarrow z = \gamma(z' + \beta c t')$$

S macht die Messungen zur gleichen Zeit t (Sagen wir $t=0$).

Also $0 = \gamma(t' + \beta z'/c) \longrightarrow t' = -\beta z'/c$

$$z = \gamma(z' - \beta^2 z) = \gamma(1-\beta^2) z' = \sqrt{1-v^2/c^2}\, z'$$

Also $(z_B - z_A) = \sqrt{1-v^2/c^2}\,(z'_A - z'_B)$

$$\boxed{L = \sqrt{1-v^2/c^2}\, L' < L'} \longrightarrow$$ Längenkontraktion (auch genannt Lorentz-Kontraktion)

· Natürlich alles ist noch mal relativ...

Sagen wir, dass S eine Stange mißt (die Stange ist in Ruhe in S). S mißt eine Länge L. Noch mal A und B sind die Endpunkte der Stange. S' macht die Messung zur gleichen Zeit t' (Sagen wir $t'=0$).

Also $0 = \gamma(t - \beta z/c) \longrightarrow t = \beta z/c$

$$z' = \gamma(z - \beta c t) = \gamma(1-\beta^2) z = \sqrt{1-v^2/c^2}\, z$$

Also $(z'_B - z'_A) = \sqrt{1-v^2/c^2}\,(z_B - z_A)$

$$\boxed{L' = \sqrt{1-v^2/c^2}\, L < L}$$ Nun beobachtet S' eine Längenkontraktion!

* Also Objekte in Bewegung scheinen kürzer als wenn wir die Messungen in Ruhe machen. (nur in der Richtung der Bewegung!!)

Das Garagen-Paradoxon

* Die Lorentz-Kontraktion verursacht ebenfalls scheinbare Paradoxen. Vielleicht die bekannteste dieser Paradoxen ist das so genannte Garagen-Paradoxon ("Pole-Barn paradox" auf Englisch).

Nehmen wir eine Garage (S) und ein Auto (S').
In Ruhesystem der Garage (S) hat die Garage eine Länge L_G, und im Ruhesystem des Autos (S') hat das Auto eine Länge L'_A. Sei $L'_A > L_G$ (Also die Länge in Ruhe des Autos ist länger als die Länge in Ruhe der Garage). Das Auto bewegt sich mit Geschwind. v im Bezugssystem der Garage.

* Nun fürs System S → Das Auto hat eine scheinbare Länge $L_A = \sqrt{1-v^2/c^2}\, L'_A < L'_A$

Sei $L_A < L_G$ → Für jemand im Bezugssystem der Garage (im S) es sieht so aus, dass das Auto rein in der Garage paßt!

* Nun fürs System S' → Die Garage hat eine scheinbare Länge $L'_G = \sqrt{1-v^2/c^2}\, L_G < L_G$

Da L'_A sowieso größer als L_G war, dann $L'_A > L'_G$ → das Auto paßt also auf keinen Fall da rein!!

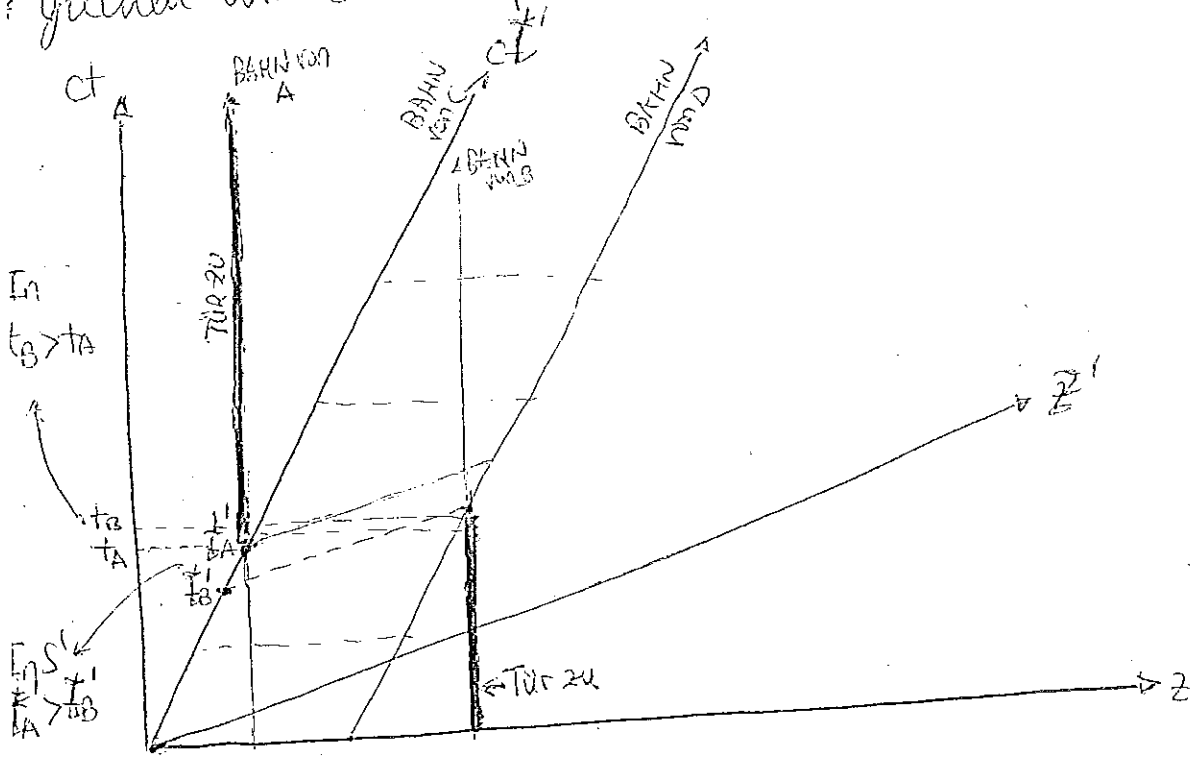
* Das ist das so genannte Garage-Paradoxon!

* Das Problem liegt wie immer an der Definition von Gleichzeitigkeit. Um das zu sehen, machen wir das folgende Gedankenexperiment. Die Garage hat 2 Türen, die vordere Tür (A) und die hintere Tür (B). ~~Wenn das Auto der hintere Teil des Autos B~~ B bleibt geschlossen, bis der vordere Teil (A) des Autos B erreicht, dann wir die Tür B geöffnet (wir wollen

nicht, dass das Auto gegen die Wand B stößt, weil sonst hätten wir, dass das Auto bremsen würde, und damit wären die Bezugssysteme nicht Inertialsysteme).

Wenn der hintere Teil (G) des Autos A erreicht, dann wird die Tür A geschlossen.

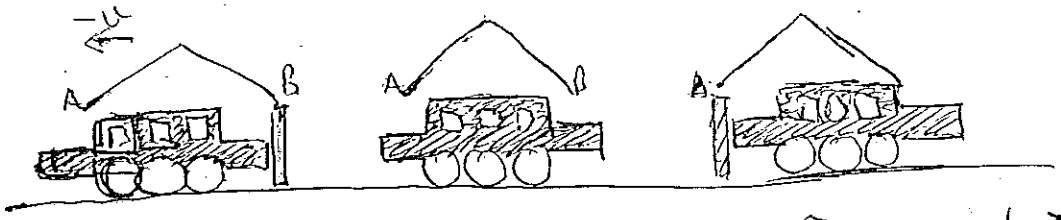
Gucken wir das auf einem Raum-Zeit-Abbildung



Ah... es gibt keine Paradoxon. Im Bezugssystem (S') des Autos, wenn der andere Teil B erreicht (t'_B) ist die Tür A immer noch offen, und wenn der hintere Teil A erreicht ($t'_A > t'_B$) ist ein Teil des Autos schon raus aus der Garage

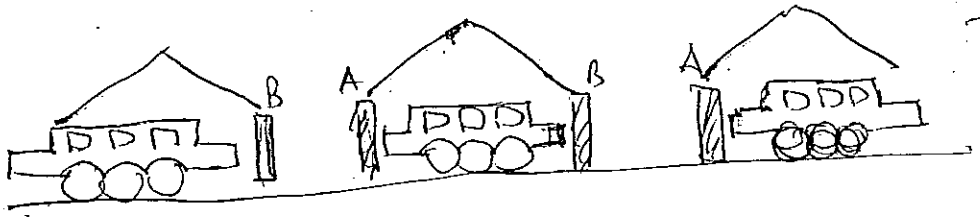
$t'_A > t'_B$

in S' ⇒



$t_A < t_B$

in S



* Sagen wir, dass die Länge der Garage (L) ist genau $L = \gamma L'$ ($L' \equiv$ Länge des Autos).

Der Beobachter im System S (die Garage) schließt die Türen nur sehr kurz (zu zeigen dass er das machen kann) ~~wenn~~ (für ihn) wichtig! das Auto rein ist. Dann öffnet er sofort beide Türen sonst, wie gesagt haben wir ein Stoß und das wollen wir nicht).

: Was sieht der Beobachter im Auto (S')?

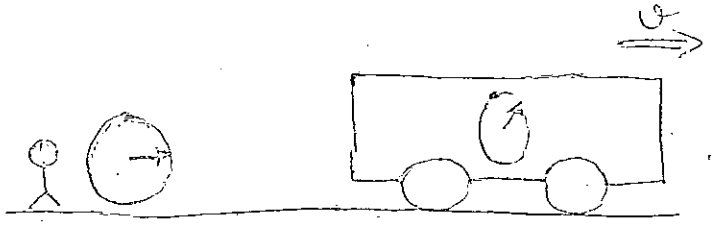
$$\left.\begin{aligned} t'_B &= \gamma(t - \beta z_B/c) \\ t'_A &= \gamma(t - \beta z_A/c) \end{aligned}\right\} t'_B - t'_A = -\frac{\gamma\beta}{c}(z_B - z_A) = -\frac{\gamma\beta}{c} L$$

$\longrightarrow$ Also $t'_A - t'_B > 0 \longrightarrow \boxed{t'_A > t'_B}$ Man schließt die A-Tür nach der B-Tür

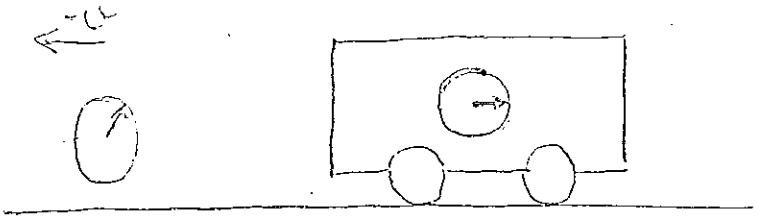
Es gibt keine Paradoxon!

* Zusammengefasst, in Vergleich zu mir, Ich sehe dass für alle andere Systeme in relative Bewegung mit mir:

  * Die Zeit geht langsamer
  * Die Länge (in Richtung der Bewegung) ist kürzer



Natürlich wenn ich in der Bahn bin...



Alles ist eine Frage der Perspektive.

Diese sind die <u>kinetische Folgen</u> der Relativität der Gleichzeitigkeit!

* Jedes Beobachter definiert bezogen auf sein System eine <u>Eigenzeit</u> ($\Delta\tau$). In einem bewegten System hat man $\Delta\tilde{\tau} = \gamma \Delta\tau$.

* Die Eigenzeit spielt eine wichtige Rolle in unserer Diskussion der relativistischen Mechanik. Die Eigenzeit ist Lorentz-invariant. Wenn die Uhr in Ruhe ist dann zeigt die Eigenzeit.