

DER STÄRKE KÖRPER

- Bisher haben wir die Dynamik des Massenpunktes studiert.
Aber bei einem makroskopischen Festkörper (mit 10^{23} Teilchen/cm³) ist das Konzept des Massenpunktes fragwürdig (zu viele Teile zu betrachten!). Von einem makroskopischen Standpunkt aus erscheint der Festkörper als Kontinuum, als makroskopische Einheit.
- Wir modellieren den Festkörper als ein System von N Massenpunkten, deren Abstände unter allen Umständen konstant bleiben

$$r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{konstant}$$

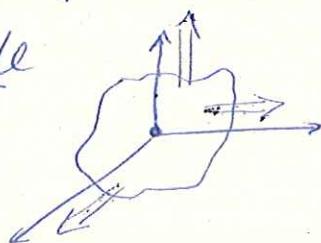
Der starke Körper ist also per definitionem nicht deformierbar.
(Bemerkung: das ist eigentlich eine gute Idealisierung, aber für manche Materialien ist die Elastizität natürlich wichtig)

- Freiheitsgrade eines starken Körpers

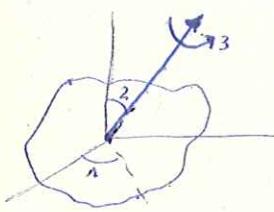
- Nehmen wir mal 3 (nicht auf einer geraden liegenden) Punkte. Zu ihrer Beschreibung benötigen wir je 3 kartesische Koordinaten, also 9 Koordinaten. Aber wir haben 3 Zwangsbedingungen da r_{12}, r_{13} und r_{23} konstant bleiben müssen.

- 
- Frei wählbar sind also nur sechs Größen.
 - Jeder weitere Massenpunkt bringt 3 neue Koordinaten aber auch 3 neue Zwangsbedingungen (r_{12}, r_{13}, r_{23} sind konstant).
 - Also, der starke Körper hat 6 Freiheitsgrade

- Translation eines mit dem Körper starr verbundenen Punktes
 \rightarrow 3 Freiheitsgrade



- Rotation um eine Achse durch einen (mit dem Körper starr verbundenen) Punkt. Das bedeutet 3 Freiheitsgrade, nämlich zwei Winkelangaben zur Festlegung der Achse und ein Drehwinkel



- Vom N-Teilchen-System in das Kontinuum

- Wir haben für N-Teilchensysteme einige wichtige Größen eingeführt

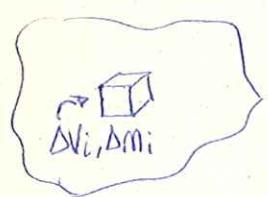
- Gesamtmasse: $M = \sum_i m_i$

- Schwerpunkt: $\vec{Q} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

- Gesamtimpuls: $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$

usw.

- Wir werden nun diese Größen für das Kontinuum berechnen.



- Man zerlegt den starren Körper in kleine Teilvolumina $\Delta V_i(\vec{r}_i)$, in denen die Masse $\Delta m_i(\vec{r}_i)$ enthalten ist.

- Dann: $M = \sum_i \Delta m_i = \sum_i \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} \Delta V_i$

- Wir lassen nun $\begin{cases} \Delta V_i \rightarrow 0 \\ \Delta m_i \rightarrow 0 \end{cases}$

und kommen damit zur Definition der Massendichte

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V(\vec{r})}$$

$\rho(\vec{r}) d^3 r$ = Masse im Volumenelement

- Dann $M = \int d^3 r \rho(\vec{r})$

$$\vec{R} = \int d^3 r \rho(\vec{r}) \vec{r}$$

$$\vec{P} = \int d^3 r \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r})$$

usw.

Bemerkung: Integriert wird jeweils über den Raumbereich des starren Körpers.

• Rotation um eine Achse

- Wir untersuchen zuerst die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse (später werden wir allgemeinere Bewegungsformen studieren).



Das System besitzt dann nur einen Freiheitsgrad, nämlich den Drehwinkel φ um die Achse.

- Wir werden annehmen, daß alle äußeren Kräfte konzentrisch sind.
- Die kinetische Energie ist

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2$$

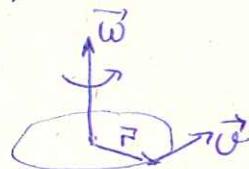
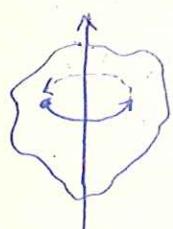
- Wir setzen eine räumliche Achse, sagen wir die z-Achse.

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega) \rightarrow \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

- Jeder Punkt des starren Körpers führt eine Kreisbewegung aus, und zwar mit Geschwindigkeit

$$\dot{r}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega(-y_i, x_i, 0) = \omega \vec{e}_\theta$$



Also die kinetische Energie ist:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 (x_i^2 + y_i^2) = \frac{\omega^2}{2} \left[\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \right]$$

Wir führen nun die wichtige Idee von Trägheitsmoment ein:

$$J = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Dann:
$$\boxed{T = \frac{1}{2} J \omega^2}$$

- Für das Kontinuum

$$J = \int p(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy dz$$

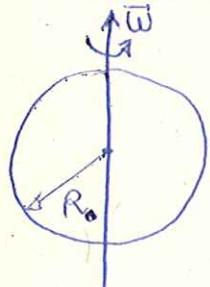
oder allgemeiner:

$$J = \int d^3r \rho(r) \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{r} \right)^2$$

→ Das Trägheitsmoment hängt ab von:
 • Massenverteilung
 • Richtung und konkrete Lage der Drehachse (42)

* Beispiel

- Nehmen wir eine Kugel mit homogener Massenverteilung $\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$ sonst



$$\cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \vec{e}_z \rightarrow \vec{e}_z \times \vec{r} = -y \vec{e}_x + x \vec{e}_y$$

$$|\vec{e}_z \times \vec{r}|^2 = x^2 + y^2$$

- Am besten arbeiten wir in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \sin^2\theta \\ &= r^2 \end{aligned} \right.$$

$$\text{Also: } J = \int_0^{R_0} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin\theta \rho_0 r^2 \sin^2\theta$$

$$= \rho_0 \underbrace{\left[\int_0^{R_0} r^4 dr \right]}_{R_0^{5/2}} \underbrace{\left[\int_0^\pi \sin\theta \sin^2\theta d\theta \right]}_{4/3} \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} d\phi \right]}_{2\pi}$$

$$= \left(\frac{4\pi}{3} \rho_0 R_0^3 \right) \frac{2}{5} R^2$$

$$\text{Aber } M = \int d^3r \rho_0 = \rho_0 \left(\frac{4\pi}{3} R_0^3 \right)$$

$$\text{Also } J = \frac{2}{5} M \alpha_0^2 \rightarrow \underline{\text{TRÄGHEITSMOMENT EINES KEGELS}}$$

- Die Energie des Systems ist der Form

$$E = T + V = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad \begin{array}{l} \text{→ Die Energie bleibt erhalten} \\ \text{da alle äußere Kräfte konservativ sind} \end{array}$$

(Da es nur ein Rotationsfreiheitsgrad gibt, kann V nun von φ abhängen, $V = V(\varphi)$)

* Also $\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{J} (E - V(\ell))$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{J} (E - V(\ell))}} = dt \rightarrow t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\frac{2}{J} (E - V(\ell))}}$$

Diese Gleichung ergibt $t = t(\ell)$ deren Umkehrung $\ell = \ell(t)$
legt die Bewegung des sturen Körpers eindeutig und vollständig fest.

* Gucken wir nur was passiert mit dem Drehimpuls.

• Der Drehimpuls \vec{L} ist in allgemeinen nicht parallel zu $\vec{\omega}$ (^{mehr über das später})

• Wir wollen hier nur die Komponente um \vec{L} ; die Parallel zu $\vec{\omega}$ ist

$$L_\omega = \vec{L} \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) = \sum_i m_i \left(\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) \times \vec{r}_i \right) \cdot \vec{r}_i \\ = \sum_i m_i \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{r}_i \right) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \left[\sum_i m_i \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{r}_i \right)^2 \right] \omega = J\omega$$

Also $L_\omega = J\dot{\varphi}$

• Wir müssen schon, daß (s. ⑩)

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}^{(ex)} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(Drehimpulssatz)} \\ \text{(Natürlich wenn } \vec{u}^{(ex)} = 0 \rightarrow \vec{L} \text{ Konstante)} \end{array}$$

Dann $J\ddot{\varphi} = \frac{dL_\omega}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}^{(ex)}) \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \right)$

$$\boxed{J\ddot{\varphi} = \frac{1}{\omega} \sum_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{F}_i^{(ex)}} \quad \begin{array}{l} \text{Ein Beispiel dieser Gleichung liegt auf S. ⑭.} \\ \text{auf S. ⑭.} \end{array}$$

Dies ist eine Bewegungsgleichung für ℓ .

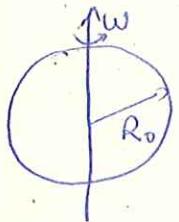
• Ganz klar, wenn $M_\omega = \vec{M}^{(ex)} \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) = 0$ \rightarrow $L_\omega = \text{Konstante}$,
wenn $\vec{M}^{(ex)}$ konstant ist, $\omega = \text{Konstante}$, und $T = \text{Konstante}$

Wir müssen ein Drehungsmoment um die Achse üben, wenn wir die Drehung ändern wollen, logisch, oder?

* Wenn $M_w^{(ex)} = 0 \rightarrow L_w$ ist konstant.

Dann $L_w = Jw$ ist konstant; manchmal ist J aber keine Konstante!

* Nehmen wir unser Beispiel einer Kugel



$$J = \frac{2}{5} M R_0^2$$

$$\text{Also, } L = \frac{2}{5} M R_0^2 w$$

* Wenn R_0 abnimmt und aufgrund der Erhaltung des Drehimpulses beschleunigt sich die Rotation der Kugel

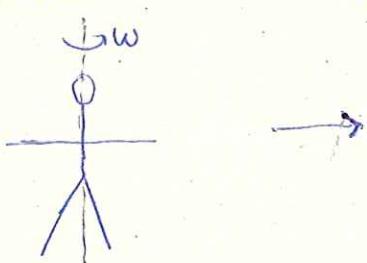
$$R_0^2 w = R_1^2 w' \rightarrow w' = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 w \xrightarrow{R_0 > R_1} w' > w$$

* Das passt z.B. im Allraum, z.B. in den sogen. Pulsars. Eine starke Verkleinerung der räumlichen Ausdehnung beschleunigt die Rotation eines Neutronsterns so stark, dass die Rotationsdauer ausstatt mehrerer Tage nur noch Sekunden oder sogar Sekundenbruchteile beträgt!!

z.B. PSR J1748-2446 ad rotiert pro Sekunde 716 mal. (!!)

(Radius < 16 Km)

* Etwas ähnliches passt mit einem Eis Skater



$$w' > w$$

Mit gestreckten Armen steht der Skater langsam, ~~langsam~~
mit gestreckten Armen steht der Skater langsam, ~~langsam~~
du hast das sicher schon gesehen oder sogar erfahren!

* Seien wir ein Beispiel \rightarrow Pendel

- Wir betrachten nun einen starren Körper im homogenen Schwerkeld der Erde:

$$\vec{F}_i^{(ex)} = m_i g \vec{e}_x$$

- Der starre Körper ist um eine horizontale Achse (entlang z) drehbar: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

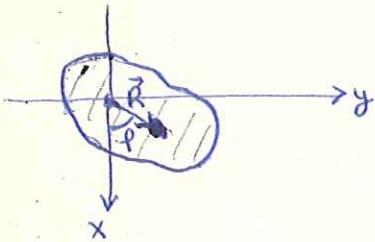
Also: $J \ddot{\varphi} = \sum_i (\vec{e}_z \times \vec{F}_i) \cdot m_i g \vec{e}_x = \sum_i (-m_i g y_i)$

$$= -g \left[\sum_i m_i y_i \right] = -M g R_y$$

wobei $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$ ~~ist die Schwerpunktkoordinaten~~
ist der Schwerpunktvektor.

- Wie wählen den Nullpunkt auf der Drehachse:

$$\vec{R} = R(\omega \varphi, R_{\text{auf}}, 0) \rightarrow R_y = R_{\text{auf}}$$



Dann:

$$J \ddot{\varphi} = -M g R_{\text{auf}} \rightarrow \boxed{J \ddot{\varphi} = -M g R_{\text{auf}}} \rightarrow \underline{\text{Bewegungsgleichung}}$$

Dies ist die Gleichung eines Pendels

$$\text{Für } \varphi \ll 1 \rightarrow \sin \varphi \approx \varphi \rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{M g R}{J} \sin \varphi \approx -\frac{M g R}{J} \varphi$$

$$\rightarrow \varphi(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{M g R}{J}}$ \Rightarrow Kreisfrequenz

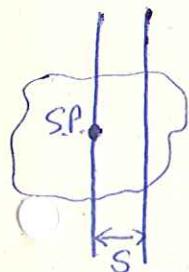
Steiner'scher Satz

• Wenn man das Trägheitsmoment um eine gegebene Achse durch den Schwerpunkt kennt, dann kann man sehr einfach das Trägheitsmoment^(J) um alle anderen Achsen parallel dazu.

$$J = J_S + M S^2$$

Steiner'scher Satz

wobei $S = \text{senkrechter Abstand des Schwerpunktes von der Metakurve} \Rightarrow \text{Abstand der beiden Achsen.}$



• Beweis: $J_S = \sum_i m_i (\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2) \rightarrow \tilde{x}_i, \tilde{y}_i \rightarrow \text{Koordinaten in Bezugssystem bei Schwerpunkt.}$

$$J = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \rightarrow \text{Drehung um } z \text{-Achse.}$$

$$\begin{aligned} J &= \sum_i m_i [(x_i + R_x)^2 + (y_i + R_y)^2] \\ &= \sum_i m_i [\tilde{x}_i^2 + R_x^2 + 2\tilde{x}_i R_x + \tilde{y}_i^2 + R_y^2 + 2\tilde{y}_i R_y] \\ &= J_S + M (R_x^2 + R_y^2) + (\sum_i m_i \tilde{x}_i) 2R_x + (\sum_i m_i \tilde{y}_i) 2R_y \end{aligned}$$

In Bezugssystem
des Schwerpunktes O
 $\vec{R} = 0 - \sum_i \tilde{x}_i \hat{x} - \sum_i \tilde{y}_i \hat{y} = 0$

Also $J = J_S + M S^2 \quad \text{Q.E.D.}$

• Der Steiner'sche Satz ist sehr nützlich, weil normalerweise es relativ einfach J_S zu rechnen (wegen Symmetriegründen).

TRÄGHEITSTENSOR

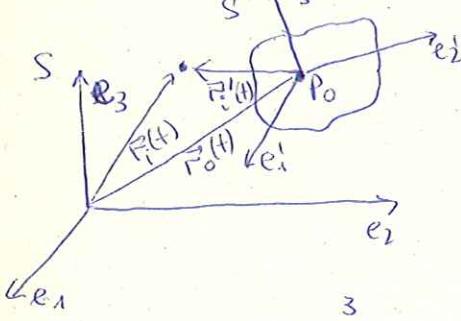
- Bisher haben wir die Bewegung des starren Körpers um feste Achsen diskutiert. Aber, was passiert, wenn die Drehachse eine zeitlich veränderliche Richtung hat? Diese Diskussion wird uns zu dem wichtigen Begriff des Trägheitstensors führen.
- Wir betrachten die Bewegung eines starren Körpers. Dafür führen wir zwei Bezugssysteme ein:

$S \rightarrow$ Raumfestes Bezugssystem. Es möge sich um ein Inertialsystem handeln.

Achsen $\rightarrow e_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3$

$S' \rightarrow$ Körperfestes Bezugssystem mit dem Körperfesten Ursprung P_0

Achsen $\rightarrow e'_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3$



Die Diskussion ist ähnlich wie unsere Diskussion der Schenkkräfte (siehe S. 15)

Für jeden Punkt i des starren Körpers haben wir:

$$\vec{F}_i(t) = \sum_{\alpha=1}^3 x_{i\alpha}(t) \vec{e}_\alpha \quad (\text{in } S)$$

$$\vec{F}'_i(t) = \sum_{\alpha=1}^3 x'_{i\alpha} \vec{e}'_\alpha \quad (\text{in } S')$$

Die Koordinaten $x'_{i\alpha}$ in S' sind nach Definition des starren Körpers zeitunabhängig & größer

$$\text{und ganz klar } \rightarrow \vec{F}_i(t) = \vec{F}_0(t) + \vec{r}'_i(t)$$

* Ich erinnere euch unsere Diskussion der Schenkkräfte.

Damals haben wir gezeigt, daß

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{R} \right)_S = \left(\frac{d}{dt} \vec{R} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

für alle Vektoren \vec{R} .

$$\text{Also } \left(\frac{d}{dt} \vec{F}_i \right)_S = \left(\frac{d}{dt} \vec{F}_0 \right)_S + \left(\frac{d}{dt} \vec{r}'_i \right)_{S'} = \left(\frac{d}{dt} \vec{F}_0 \right)_S + \left(\frac{d}{dt} \vec{r}'_i \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

Also

$$\boxed{\vec{F}_i = \vec{F}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i}$$

- Dies ist ein wichtiges Ergebnis. Es besagt, daß sich zu jedem Zeitpunkt die Bewegung eines starren Körpers in die Translationsbewegung ($\vec{F}_0(t)$) des Ursprungs P_0 in Körperfestem System und die Drehung um die momentane Achse $\vec{\omega}(t)$ zerlegen lässt.

(wobei die Drehachse durch P_0 geht)

(wobei die Geschwindigkeit der Körper schreiben:

* Nun können wir die kinetische Energie des starren Körpers schreiben:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i [\vec{r}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i']^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_0^2}_{M} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i')^2 + \underbrace{\sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i') \cdot \dot{\vec{r}}_0}_{\sum_i m_i \vec{r}_i' \cdot (\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{\omega})} \end{aligned}$$

* Nun, es gibt 2 typische Fälle:

- Ein Punkt des Körpers bleibt rauumfest, während der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ rotiert

Dann $\rightarrow \vec{r}_0 = 0$ (konstant)

- Es gibt kein rauumfesten Punkt, so löst man üblicherweise den Ursprung P_0 in den Schwerpunkt. Also $\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$ (denn S' = Schwerpunktssystem, und in Schwerpunktssystem ist der Schwerpunkt natürlich 0)

Also für beide Fälle gibt es eine kleine Trennung in der kinetischen Energie:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^2}_{\text{Translationsanteil } (T_T)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i')^2}_{\text{Rotationsanteil } (T_R)}$$

Translationsanteil (T_T) Rotationsanteil (T_R)

* Gucken wir den Rotationsanteil genauer. Wegen rektangulären Eigenwerten:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_i')^2 = \omega^2 \vec{r}_i'^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i')^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) (x_{i1}^{12} + x_{i2}^{12} + x_{i3}^{12}) - (\omega_1 x_{i1}^1 + \omega_2 x_{i2}^1 + \omega_3 x_{i3}^1)$$

• Also

$$2T_R = \omega_1^2 \sum m_i (x_{i2}^{i2} + x_{i3}^{i2}) - \omega_1 \omega_2 \sum m_i x_{i1}^i x_{i2}^i - \omega_1 \omega_3 \sum m_i x_{i1}^i x_{i3}^i$$

$$- \omega_2 \omega_3 \sum i m_i x_{i2}^i x_{i1}^i + \omega_2^2 \sum i m_i (x_{i1}^{i2} + x_{i3}^{i2}) - \omega_2 \omega_3 \sum i m_i x_{i2}^i x_{i3}^i$$

$$- \omega_3 \omega_1 \sum i m_i x_{i3}^i x_{i1}^i - \omega_3 \omega_2 \sum i m_i x_{i3}^i x_{i2}^i + \omega_3^2 \sum i m_i (x_{i1}^{i2} + x_{i2}^{i2})$$

$$= (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} \sum_i m_i (x_{i2}^{i2} + x_{i3}^{i2}) & - \sum_i m_i x_{i1}^i x_{i2}^i & - \sum_i m_i x_{i1}^i x_{i3}^i \\ - \sum_i m_i x_{i2}^i x_{i1}^i & \sum_i m_i (x_{i1}^{i2} + x_{i3}^{i2}) & - \sum_i m_i x_{i3}^i x_{i2}^i \\ - \sum_i m_i x_{i3}^i x_{i1}^i & - \sum_i m_i x_{i1}^i x_{i2}^i & \sum_i m_i (x_{i1}^{i2} + x_{i2}^{i2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \hat{J} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \vec{\omega}^T \cdot \hat{J} \cdot \vec{\omega}$$

Die Matrix \hat{J} ist der sogen. Trägheits tensor

Also

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 J_{lm} \omega_l \omega_m$$

Die Komponenten des Trägheits tensor lassen sich in einer kompakten Form darstellen:

$$J_{lm} = \sum_i m_i (\vec{r}_i^{i2} \delta_{lm} - x_{ie}^i x_{im}^i)$$

$l, m = 1, 2, 3$

Wenn die Masse kontinuierlich verteilt ist (Massendichte $p(\vec{r}')$)

$$\text{geht man von der Summation zur Integration über:}$$

$$J_{lm} = \int d^3 r' p(\vec{r}') [\vec{r}'^{i2} \delta_{lm} - x_{ie}^i x_{im}^i]$$

Für den Fall einer festen Achse, wir definieren den Einheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} = (n_1, n_2, n_3) \rightarrow$$

$$\vec{\omega} = (n_1, n_2, n_3) \omega$$

$$\text{Also } T_R = \frac{1}{2} \left[\sum_{l,m=1}^3 J_{lm} n_l n_m \right] \omega^2$$

* Aber ich erinnere euch, daß wenn wir eine feste Achse haben,

$$T_R = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad \text{wobei } J \text{ der Trägheitsmoment war.}$$

Der Vergleich liefert den folgenden wichtigen Zusammenhang zwischen dem Trägheitsmoment (bezogen auf eine feste Achse) und dem Trägheitstensor

$$\boxed{J_{\vec{n}} = \sum_{e,m} I_{em} n_e n_m} \rightarrow J_{\vec{n}} = \vec{n}^T \cdot \hat{J} \cdot \vec{n}$$

* Durch den Trägheitstensor \hat{J} wird jeder Raumrichtung \vec{n} ein Trägheitsmoment $J_{\vec{n}}$ zugeordnet.

Hauptträgheitsachsen

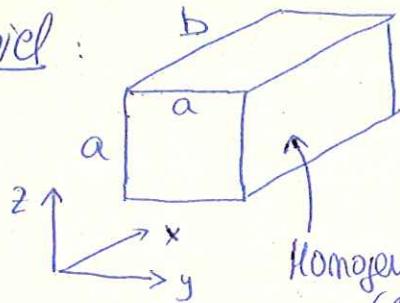
• Die Matrix \hat{J} ist reell ($I_{em} = I_{em}^*$) und symmetrisch ($I_{em} = I_{me}$). Wir können die Matrix diagonalisieren und die Eigenwerte sind also reelle Zahlen.

• Die Diagonalisierung des Trägheitstensors \hat{J} ist die sog. Hauptachsentransformation. Die entsprechenden Eigenwerte sind die Hauptträgheitsmomente, und die Eigenvektoren, die Hauptträgheitsachsen.

$$\hat{J} \xrightarrow{\text{Hauptachsentransf.}} \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A, B, C \rightarrow \text{Hauptträgheitsmomente} \\ \xi, \eta, \zeta \rightarrow \text{Hauptträgheitsachsen} \end{matrix}$$

• Wir werden später diese Notation benutzen.

• Beispiel:



Im Schwerpunktsystem sind die Kanten des Parallelepipseds in $x = \pm b/2, y = \pm a/2, z = \pm c/2$

Homogene Dichte
(ρ_0)

$$J_{11} = \int d^3r \rho_0 (y^2 + z^2) = \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-b/2}^{b/2} dz \int_{-c/2}^{c/2} dx \rho_0 (y^2 + z^2) = \frac{\rho_0 a^4 b}{6}$$

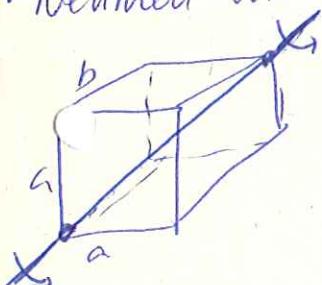
aber $M = \rho_0 a^2 b$. Also $J_{11} = \frac{Ma^2}{6}$

Genauso $J_{22} = \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-b/2}^{b/2} dz \int_{-c/2}^{c/2} dx \rho_0 (x^2 + z^2) = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) = J_{33}$

Wegen Symmetriegründen $J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$

Also $J = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$ Hauptträgheitsmomente
 $A = \frac{Ma^2}{16} \rightarrow \vec{e}_x = \vec{e}_x$
 $B = C = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} \rightarrow \vec{e}_y = \vec{e}_y$
 $\vec{e}_z = \vec{e}_z$

• Nehmen wir die Diagonallinie $\Rightarrow \vec{n} = \frac{(-b, a, a)}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$



$$J_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2a^2 + b^2}} (-b, a, a) \frac{M}{12} \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{M}{6} a^2 \left[\frac{a^2 + 2b^2}{b^2 + 2a^2} \right]$$

(So was könnten wir direkt aus der Definition von Trägheitsmoment rechnen, aber es wäre viel aufwendiger!)

• Mit der Hilfe der Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente können wir den Rotationsanteil der kinetischen Energie in der Form

$$T_R = \frac{1}{2} (A \omega_x^2 + B \omega_y^2 + C \omega_z^2)$$

schreiben, wobei

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z$$

* Drehimpuls

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls (\vec{L}) und dem Trägheitsmoment (\hat{J}) eines starren Körpers aufsuchen.

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}'_i) \times [\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i] \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \\ &\quad + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)}_{\text{Für die Fälle } \vec{r}_0 = 0 \text{ oder } \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0 \text{ (siehe Diskussion in S. 47)}} + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}_0 (+)\end{aligned}$$

Für die Fälle $\vec{r}_0 = 0$ oder $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$ (siehe Diskussion in S. 47)
sind diese beiden Glieder Null.

Aber $\vec{L} = \underbrace{M \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0}_{\vec{L}_s \equiv \text{Drehimpuls des im Schwerpunkt vereinigten gesamtmasse } M} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)}$

$\vec{L}_s \equiv \text{Drehimpuls des im Schwerpunkt vereinigten gesamtmasse } M$

$\vec{L}' \equiv \underline{\text{Körpereigener Drehimpuls}}$

* Wir sind in dem Körpereigenen Drehimpuls interessiert:

$$\vec{L}' = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \sum_i m_i (r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i)$$

Aber $\vec{\omega} \cdot \vec{L}' = \sum_i m_i (r_i^2 \omega^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})^2) = 2 T_R$

$$T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}'$$

Aber $T_R = \frac{1}{2} \vec{\omega} (\hat{J} \vec{\omega})$ (siehe S. 48)

und damit $\boxed{\vec{L}' = \hat{J} \vec{\omega}}$

Bemerkung: Ich erinnere euch, daß für die Bewegung um eine feste Achse: $L_\omega = J \omega$ (S. 43).

- Im Hauptachsensystem wird die Beziehung zwischen $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}'$ und \vec{L}' besonders einfach:

$$\boxed{\vec{L}' = (A\omega_x \vec{\xi} + B\omega_y \vec{\eta} + C\omega_z \vec{\zeta})}$$

Bemerkung: Man kann ziemlich klar sehen, daß $\vec{\omega}'$ und $\vec{\omega}$ nur parallel sind, wenn die Rotation um eine der Hauptträgheitsachsen erfolgt

• KREISELTHEORIE

- Ab jetzt setzen wir voraus, daß der starre Körper einen räumlichen festen Punkt aufweist, den wir zum Ursprung des Körperfesten Systems S' machen (siehe Abbildung auf S. (52!))

- * Wir kennen schon daß

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (\text{Drehimpulssatz}) \quad (\underbrace{\vec{M} = \vec{M}^{(\text{ext})}}_{\text{äußeres Drehmoment}})$$

In dieser Form gilt der Drehimpulssatz nur im Inertialsystem S . Zweckmäßiger ist es aber den Drehimpulssatz im mitrotierenden, Körperfesten Bezugssystem S' zu formulieren, wobei wir als Koordinatenachsen die Hauptträgheitsachsen wählen.

$$\text{Winkelgeschwindigkeit: } \vec{\omega} = p \vec{e}_x + q \vec{e}_y + r \vec{e}_z$$

$$\text{Drehimpuls (in } S'): \vec{L}' = Ap \vec{e}_x + Bq \vec{e}_y + Cr \vec{e}_z$$

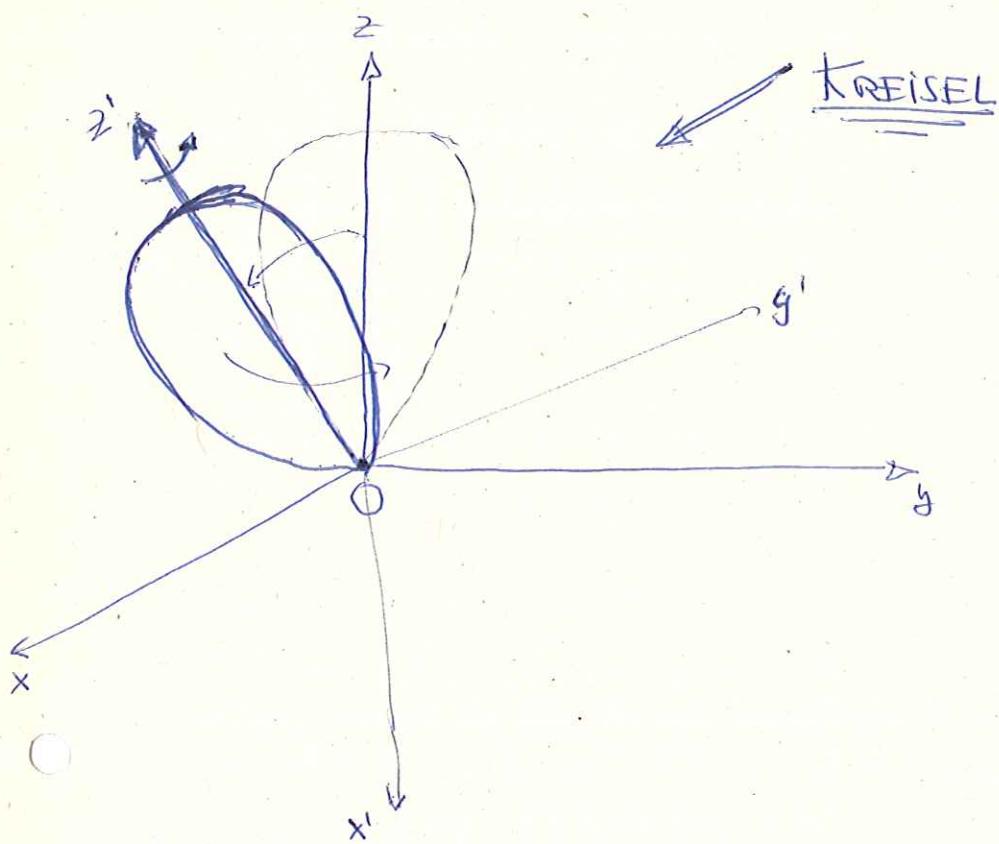
- Wie immer lautet die Transformation zwischen S und S' :

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_S = \left(\frac{d}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times$$

$$\text{Also } \vec{M} = \left(\frac{d}{dt} \vec{L} \right)_S = \left(\frac{d}{dt} \vec{L}' \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{L}' \rightarrow \vec{M} = \vec{L}' + \vec{\omega} \times \vec{L}'$$

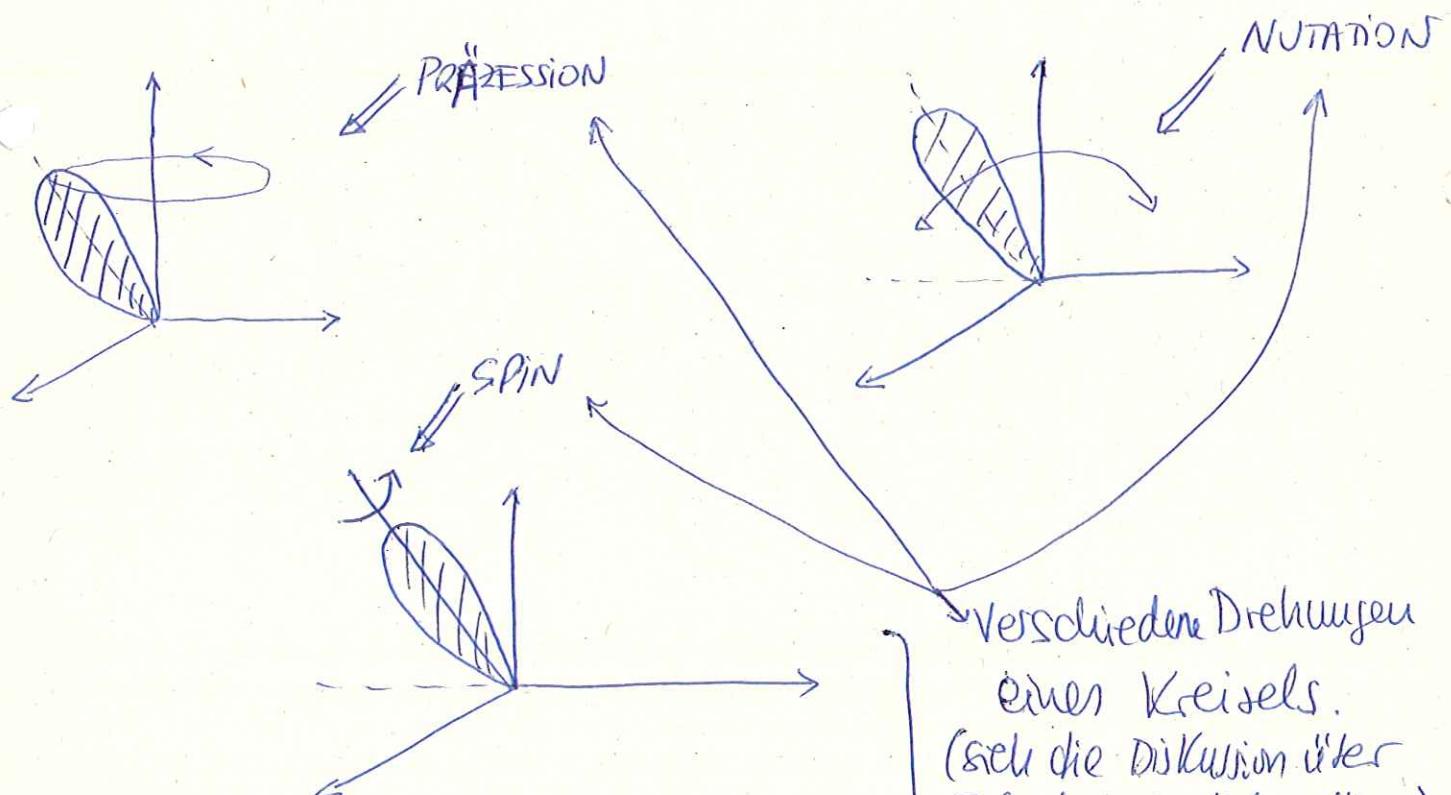
$$\vec{M} = [Ap \vec{e}_x + Bq \vec{e}_y + Cr \vec{e}_z] + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix}$$

$$= M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y + M_z \vec{e}_z$$



- $S \rightarrow$ Raumfeste Achse

- $S' \rightarrow$ Körperfeste Achse (\equiv Hauptachsen system)



- Eine allgemeine Bewegung ist eine Kombination dieser Drehungen

Verschiedene Drehungen
eines Kreisels.
(siehe die Diskussion über
Euler'sche Winkel später)

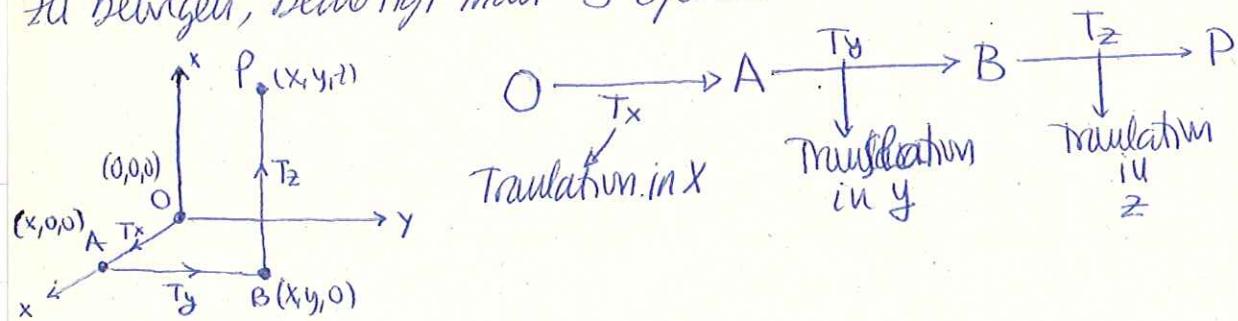
Also

$$\left. \begin{array}{l} M_x = A\ddot{\varphi} + (C-B)\dot{\varphi}\dot{\gamma} \\ M_y = B\ddot{\gamma} + (A-C)\dot{\gamma}\dot{\varphi} \\ M_z = C\ddot{\varphi} + (B-A)\dot{\varphi}\dot{\gamma} \end{array} \right\} \text{Man nennt diese Gleichungen die Euler'schen Gleichungen}$$

- Die Euler'schen Gleichungen stellen ~~die~~ bei bekannten Drehmomenten \vec{M} ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen für $\varphi, \gamma, \dot{\varphi}$ dar. Es sind die Bewegungsgleichungen für die Drehbewegung des starrer Körpers.

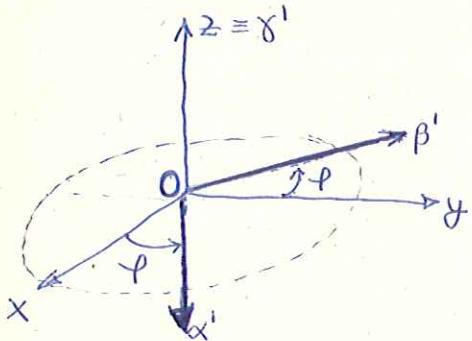
• Die Euler'sche Winkel

- Zum konkreten Auswertung des Gleichungssystems benötigt man die Komponenten von \vec{M} bezüglich der Hauptträgheitsachsen. Aber \vec{M} wird durch äußere Kräfte bewirkt, und deswegen auf der linken Seite werden wir Größen haben, die in raumfesten System S definiert sind.
- Wir brauchen deswegen eine Beziehung zwischen raumfesten und Körperfesten Bezugssystemen. Dafür benutzt man die sogenannten Euler'schen Winkel. Wir werden nun die Einzelheiten dieser wichtigen Idee kennenzulernen.
- Um einem Punkt P von Ursprung der Koordinaten $(0,0,0)$ bis in M (x_1, y_1, z_1) zu bewegen, benötigt man 3 Operationen



Die Idee von Euler war, dass man etwas ähnliches machen kann, um ein System S in einem Bezugssystem S' zu transformieren. Man braucht diesmal 3 verschiedene Rotationen.

① Drehung um die z-Achse (φ)

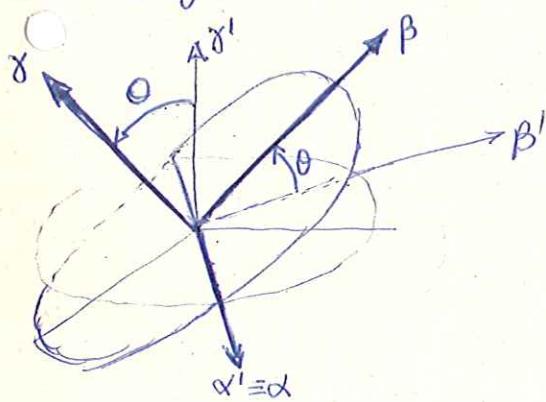


- von $\underbrace{(x,y,z)}_{\vec{X}}$ -Achse zu $\underbrace{(\alpha', \beta', \gamma')}_{\vec{A}'}\text{-Achse}$

$$\vec{A}' = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} = R_3(\varphi) \vec{X}$$

Drehungsmatrix
um die z-Achse

② Drehung um die α' -Achse (θ)

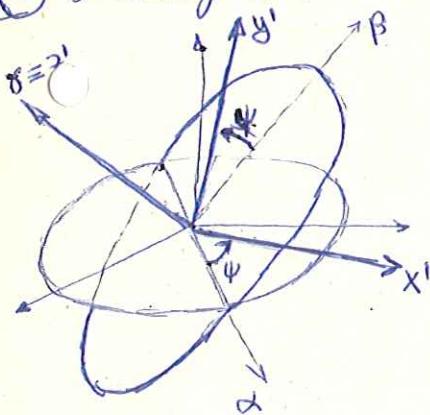


- von $\underbrace{(\alpha', \beta', \gamma')}_{\vec{A}'}\text{-Achse zu } \underbrace{(\alpha, \beta, \gamma)}_{\vec{A}}\text{-Achse}$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \vec{A}' = R_1(\theta) \vec{A}'$$

(Bemerkung: Die Linie $o\alpha = o\alpha'$ ist die sogen. Knotenlinie)

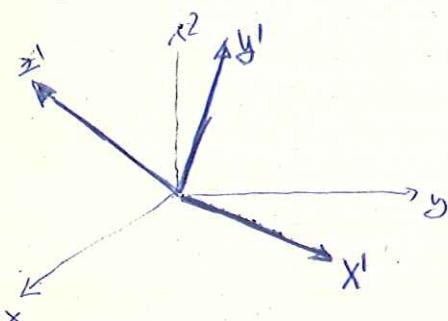
③ Drehung um die γ -Achse (ψ)



- von $\underbrace{(\alpha, \beta, \gamma)}_{\vec{A}}\text{-Achse zu } \underbrace{(x', y', z')}_{\vec{X}'}\text{-Achse}$

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{A} = R_3(\psi) \vec{A}$$

* gesamte Drehung



$$\vec{X}' = \underbrace{R_3(\psi) R_1(\theta) R_3(\varphi)}_{R(\psi, \theta, \varphi)} \vec{X}$$

wobei

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\psi & \sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\psi & \sin\phi \sin\psi \\ -\cos\phi \sin\psi - \sin\phi \cos\psi & -\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \sin\phi \cos\psi \\ \sin\phi \sin\psi & -\cos\phi \sin\psi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

- * Die 3 Winkel (ψ, θ, φ) sind die sogen. Euler'sche Winkel
- * Also 3 Drehungen bringen das System S in das System S'.
genauso wie 3 Translationen bringen O in P. Es gibt aber ein Unterschied, weil die Drehungen kommutieren nicht miteinander.
Also die Ordnung der Drehungen ist wichtig.
- * Alle möglichen Rotationsen des starrn Körpers können als eine Änderung der Winkel (φ, θ, ψ) zerlegt werden.

Es gibt also 3 Winkelgeschwindigkeiten:

$$\vec{\omega}_z = \dot{\varphi} \vec{e}_z \quad (\text{Prezession}) \quad \text{(Ich erinnere euch unsere Diskussion)}$$

$$\vec{\omega}_x = \dot{\theta} \vec{e}_x \quad (\text{Nutation}) \quad \text{(der Seite 52)}$$

$$\vec{\omega}_y = \dot{\psi} \vec{e}_y \quad (\text{Spin})$$

Die gesamte Winkelgeschwindigkeit ist dann die Vektorsumme dieser

3 Beiträge: $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_x + \dot{\psi} \vec{e}_y$

Wir können die verschiedene Vektoren bezüglich der Körperfesten Achsen $(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ zerlegen:

$$\vec{e}_z = \sin\theta \sin\psi \vec{e}_{x'} + \sin\theta \cos\psi \vec{e}_{y'} + \cos\theta \vec{e}_{z'}$$

$$\vec{e}_x = \cos\psi \vec{e}_{x'} - \sin\psi \vec{e}_{y'}$$

Also, wenn wir vereinbaren, daß das Körperfesten System gleich dem Hauptachsensystem: $\vec{e}_x' = \vec{e}_\xi$; $\vec{e}_y' = \vec{e}_\eta$; $\vec{e}_z' = \vec{e}_\zeta$
dann:

$$\vec{\omega} = [\ddot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi] \vec{e}_\xi + [\ddot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi] \vec{e}_\eta + [\dot{\varphi} \cos \vartheta + \psi] \vec{e}_\zeta$$

$$= p \vec{e}_\xi + q \vec{e}_\eta + r \vec{e}_\zeta$$

Also hat man (p, q, r) aus den Euler'schen Gleichungen bestimmt, so sind dann Bewegungsgleichungen für die Euler'sche Winkel bekannt, über die schließlich die Lage des staren Körpers relativ zum Raumfesten System (S) bestimmt ist.

* Also dies ist das allgemeine Verfahren

- Euler'sche Gleichungen: bestimmen (p, q, r) für gegebenen \vec{M}
- Euler'sche Winkel: erlauben uns, die Bewegung im System S zu beschreiben.

* Wir werden nun diese allgemeine Theorie an einem Spezialfall testen.

• KÖRPERROTATIONEN UM FREIE ACHSEN

* Wir nehmen nun an, daß $\vec{M} = 0$ (Keine äußere Drehmomente). Dann die Euler'sche Gleichungen werden der Form:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \ddot{p} + (C-B) qr = 0 \\ B \ddot{q} + (A-C) rp = 0 \\ C \ddot{r} + (B-A) pq = 0 \end{array} \right.$$

Gleichungen des
kräftefreien Kreisels

• Es ist einfach zu zeigen (Übung), daß aus der Gleichungen nun bekannt

$$\cdot \frac{d}{dt} \bar{T}_R = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) \right\} = 0 \quad (\text{Energieerhaltung})$$

$$\cdot \frac{d}{dt} |\bar{\tau}|^2 = \frac{d}{dt} \left\{ A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 \right\} = 0$$

Der Betrag $|\bar{\tau}|$ ist also im Körperfesten System eine Erhaltungsgröße

Bemerkung

$$\cdot \text{Da } \bar{M} = 0, \left(\frac{d\bar{\tau}}{dt} \right)_S = 0 \quad (\text{sieh S. (52)}) \quad (s')$$

• Aber die Richtung von $\bar{\tau}$ in Körperfesten System ist nicht konstant in Allgemeinen.

• Soll auch die Richtung von $\bar{\tau}$ konstant sein, so

$$\bar{\tau} = (A \dot{p}, B \dot{q}, C \dot{r}) \rightarrow \left(\frac{d\bar{\tau}}{dt} \right)_{S'} = (A \ddot{p}, B \ddot{q}, C \ddot{r}) = (0, 0, 0)$$

\vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_z
 Richtung Richtung Richtung ~~richtung~~

$$\text{Also } A \ddot{p} = (B - C) \dot{q} \dot{r} = 0$$

$$B \ddot{q} = (C - A) \dot{r} \dot{p} = 0$$

$$C \ddot{r} = (A - B) \dot{p} \dot{q} = 0$$

Wenn wir annehmen, daß (A, B, C) paarweise verschieden sind, so müssen 2 der Komponenten $(\dot{p}, \dot{q}, \dot{r})$ Null sein, d.h.:

$$\bar{\omega} = \dot{p} \vec{e}_x \quad \text{oder} \quad \bar{\omega} = \dot{q} \vec{e}_y \quad \text{oder} \quad \bar{\omega} = \dot{r} \vec{e}_z$$

also $\bar{\omega}$ liegt in Richtung einer Hauptträgheitsachse.

und $\bar{\tau}$ und $\bar{\omega}$ sind parallel.

Da \vec{I} auch im außensten System (S') konstant ist, gilt das auch für $\vec{\omega}$. Die Richtung der Drehachse ist also sowohl in S' als auch in S konstant.

Man nennt solche Achsen freie Achsen

• Ein starrer Körper, der um eine freie Achse rotiert, schlängt nicht.

• Ist die Rotation um eine freie Achse stabil? Wir werden nun sehen, daß die Stabilität hängt davon ab, welche ~~Hauptträgheitsachse~~ Hauptträgheitsachse wir als freie Achse auswählen.

• Bemerkung: Wir werden nur eine sogen. Stabilitätsanalyse machen. Diese Analyse sind sehr wichtig in der Mechanik, und in Allgemeinem in der gesamten Physik.

Die Stabilitätsanalyse gehen folgenderweise. Man betrachtet eine kleine Störung, man entwickelt (Taylor) die Gleichungen bis zum 1. Ordnung in der Störung, und man löst die Gleichungen.

Z.B. möge die Drehung um die Achse \vec{e}_z sein.

Also ohne Störung $\vec{\omega}_0 = p_0 \vec{e}_z$

Wir betrachten nun eine Störung $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\Delta\omega}$

wobei $\vec{\Delta\omega} = (\Delta p_0, \Delta q, \Delta r)$

wobei $\Delta p_0, \Delta q, \Delta r$ sind alle sehr klein.

• Also $p = p_0 + \Delta p_0$

$$q = \Delta q$$

$$\Gamma = \Delta \Gamma$$

$$A \ddot{p} + (C-B) \ddot{q} \Gamma = A \ddot{\Delta p}_0 + (C-B) \underbrace{[\Delta q][\Delta \Gamma]}_{\substack{\text{Das ist 2. Ordnung} \\ \text{in der Störung}}} \simeq A \ddot{\Delta p}_0 = 0$$

Also $\boxed{\ddot{\Delta p}_0 = 0}$

$$B \ddot{q} + (A-C) \ddot{\Gamma} p = B \ddot{\Delta q} + (A-C) \Delta \Gamma (p_0 + \Delta p_0) \simeq B \ddot{\Delta q} + (A-C) p_0 \Delta \Gamma = 0$$

$$C \ddot{\Gamma} + (B-A) \ddot{p} q = C \ddot{\Delta \Gamma} + (B-A) (p_0 + \Delta p_0) \Delta q \simeq C \ddot{\Delta \Gamma} + (B-A) p_0 \Delta q = 0$$

• Also $\begin{cases} B \ddot{\Delta q} = (C-A) p_0 \Delta \Gamma \\ C \ddot{\Delta \Gamma} = (A-B) p_0 \Delta q \end{cases}$

Wir leiten die 1. Gleichung ab: \swarrow wegen der 2. Gleichung

$$B \ddot{\Delta q} = (C-A) p_0 \ddot{\Delta \Gamma} \stackrel{\leftarrow}{=} (C-A) p_0 \frac{1}{C} (A-B) p_0 \Delta q$$

$$\ddot{\Delta q} = -\frac{(A-C)(A-B) p_0^2}{BC} \Delta q = -D^2 \Delta q$$

Umgekehrt $\ddot{\Delta \Gamma} = -D^2 \Delta q$

* Diese Gleichungen haben 2 mögliche Lösungen:

* Wenn $D^2 > 0 \rightarrow \Delta q = \alpha \cos Dt + \beta \sin Dt$

$$\Delta \Gamma = \tilde{\alpha} \cos Dt + \tilde{\beta} \sin Dt$$

Wenn $\Delta q, \Delta \Gamma$ auf Anfangs klein waren, dann bleiben sie auch klein. Die Achse ist deshalb stabil

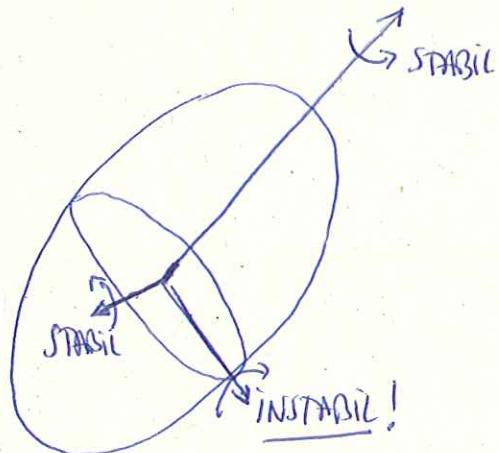
(Die Störung wächst nicht) \swarrow

- Wenn $D^2 < 0 \rightarrow Aq = \alpha e^{Dt} + \beta e^{-Dt}$
 $\Delta r = \tilde{\alpha} e^{Dt} + \tilde{\beta} e^{-Dt}$

Die exponentiell ansteigende Lösungen bedeuten, dass die Führung mit der Zeit zunimmt, und deswegen ist die Achse instabil.

- Also $D^2 > 0 \rightarrow (A-C)(A-B) > 0 \rightarrow \begin{cases} A > C \\ A > B \end{cases}$ A ist der größte Hauptträgheitsmoment
 \downarrow stabil
 $\rightarrow \begin{cases} A < C \\ A < B \end{cases}$ A ist der kleinste Hauptträgheitsmoment

$$D^2 < 0 \rightarrow (A-C)(A-B) < 0 \rightarrow \begin{cases} B < A < C \\ C < A < B \end{cases}$$
 A ist der mittlere Hauptträgheitsmoment



KRÄFTEFREIER SYMMETRISCHER KREISEL

- Vorher haben wir aufgenommen, daß (A, B, C) paarweise verschieden waren.
Nun werden wir den Fall eines symmetrischen Kreisel studieren:

$A = B \neq C \rightarrow$ Achsen $\vec{\xi}, \vec{\eta}; \vec{z}$ ^{sogen.} Figurachse

- Es ist klar um unseren Diskursum der freien Achsen, daß wenn $A = B \neq C$ kann $\vec{\omega}$ nicht fest bleiben.

- Die Gleichungen des Kräftefreien Kreisels (s. S.) werden der Form:

$$A\dot{p} + (C-A)q\tau = 0$$

Die Komponente von $\vec{\omega}$ auf die Figurachse bleibt konstant

$$A\dot{q} + (A-C)r\dot{p} = 0$$

$$Cr = 0 \rightarrow r = r_0 = \text{const.}$$

Also $\dot{p} = \frac{(A-C)r_0}{A}q \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \ddot{p} = -\Omega^2 p \end{array} \right\}$ Ableitung $\quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \ddot{q} = -\Omega^2 q \end{array} \right\}$ wobei $\Omega^2 = \left(\frac{A-C}{A}\right)^2 r_0^2$

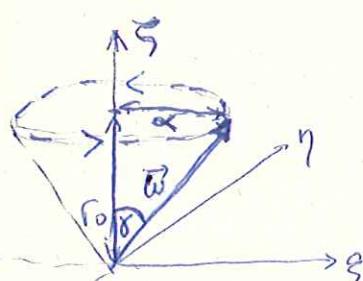
$$\dot{q} = -\left(\frac{A-C}{A}\right)r_0 p$$

Also p und q erfüllen Schwingungsgleichungen mit Lösungen der Form

$$p = \alpha \sin(\Omega t + \beta) \quad \text{wobei } \alpha, p = \text{const.}$$

$$q = \alpha \cos(\Omega t + \beta)$$

$$\text{Also } I\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \alpha^2 + r_0^2 \Rightarrow \text{Konstante}$$



$\vec{\omega}$ beschreibt also einen Kreiskegel um $\vec{\xi}$ mit Winkel γ :

$$\tan \gamma = \frac{\alpha}{r_0}$$

(Polkegel)

Z.B. die Erde ist ungefähr ein symmetrischer Ellipsoid. Der geometrische Nordpol (Figurachse) und die Drehachse (kinematischer Nordpol) fallen nicht genau zusammen.



- * Der kinematische Nordpol beschreibt einen Kreis mit Radius $\approx 6\text{ m}$ um den geometrischen Nordpol mit Periode ≈ 433 Tagen (Polbewegung oder Chandler-Effekt)

Bewegung: diese Bewegung ist nicht 100% genau was die Theorie der sturen Körpers vorausgesetzt, weil die Erde nicht ganz starr ist (Atmosphäre, z.B.).) (Die Bewegung der Erde ist eigentlich viel komplizierter wegen der Einfluss der Sonne und des Mondes, die verschiedene Nutzungen und Präzessionskomponenten verursachen)

• Nun kennen wir die Bewegung in $S' = (\xi, \eta, \varsigma)$. Wir müssen nun die Euler'sche-Winkel-Theorie benutzen, um auf das Raumfestes System zu transformieren.

• Einerseits, $\ddot{\vec{M}} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_S = 0$. Also \vec{L} ist eine Konstante in S .

Nehmen wir z.B. $\vec{L} = L \vec{e}_z$

$$\text{Da } \vec{e}_z = \sin\theta \sin\psi \vec{e}_x + \sin\theta \cos\psi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \text{dann } \vec{L} &= L \sin\theta \sin\psi \vec{e}_x + L \sin\theta \cos\psi \vec{e}_y + L \cos\theta \vec{e}_z \\ &= A_p \vec{e}_x + A_q \vec{e}_y + C_r \vec{e}_z \end{aligned} \quad (S.61)$$

• Andererseits aus S. 56:

$$P = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \quad \stackrel{!}{=} \alpha \sin(\Omega t + \beta)$$

$$Q = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \quad = \alpha \cos(\Omega t + \beta)$$

$$R = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi} \quad = R_0$$

* Also: $A\dot{\varphi} \sin \omega t + A\dot{\theta} \cos \omega t = L \sin \omega t \quad (1)$
 $A\dot{\varphi} \sin \omega t + A\dot{\theta} \sin \omega t = L \cos \omega t \quad (2)$
 $C\dot{\varphi} \cos \theta + C\dot{\psi} = L \cos \theta \quad (3)$

(1) $\rightarrow (A\dot{\varphi} - L) \sin \omega t = -A\dot{\theta} \cos \omega t \quad \left. \begin{array}{l} \dot{\theta} = 0 \\ \theta = \theta_0 \equiv \text{const} \end{array} \right\}$
(2) $\rightarrow (A\dot{\varphi} - L) \sin \omega t = A\dot{\theta} \sin \omega t \quad \left. \begin{array}{l} \dot{\varphi} = \frac{L}{A} t + \varphi_0 \\ \theta = \frac{L}{A} t + \theta_0 \end{array} \right\}$

Also:

* $P = \alpha \mu (\Omega t + \beta) = \frac{L}{A} \sin \omega t \quad \left. \begin{array}{l} \tan(\Omega t + \beta) = \tan \psi \\ \psi = \Omega t + \beta \end{array} \right\}$
 $q = \alpha \omega (\Omega t + \beta) = \frac{L}{A} \sin \omega \theta \quad \rightarrow \boxed{\psi = \Omega t + \beta} \quad \boxed{\beta = \psi_0}$

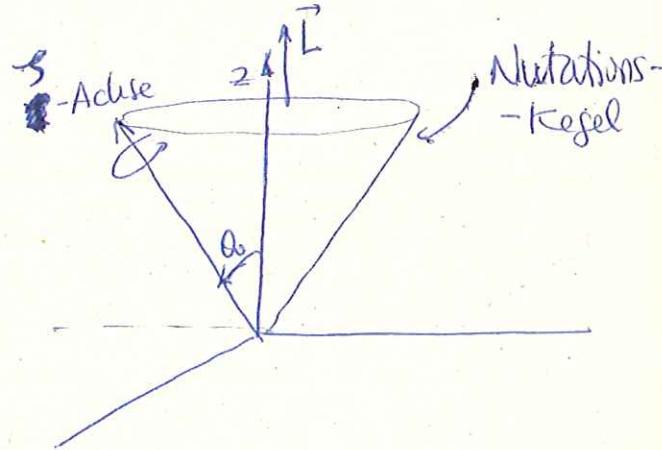
* $\boxed{\theta = \frac{L}{A} \sin \theta_0}$

* $\Omega = \frac{L}{A} \sin \theta_0 + \Omega_0 \rightarrow \sin \theta_0 = \frac{A}{L} (\theta_0 - \Omega_0)$

* $R_0 = \frac{L}{A} \sin \theta_0 + \Omega_0 \rightarrow \sin \theta_0 = \frac{A}{L} \left[\frac{C}{A} \right] R_0 = \frac{C}{L} R_0 \rightarrow \boxed{\sin \theta_0 = \frac{R_0 C}{L}}$

* Also, zusammengefasst:

- $\varphi(t) = \frac{L}{A} t + \varphi_0$
- $\theta(t) = \arccos \left(\frac{R_0 C}{L} \right) = \text{const}$
- $\psi(t) = \left(\frac{A-C}{A} \right) R_0 t + \psi_0$



Also die Figurenachse (ζ) bewegt sich mit Konstantem
Offnungsinkel $\theta = \theta_0$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um
die Richtung von \vec{L} (diesmal \vec{E}_2). Außerdem dreht der Körper
um die Figurenachse mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ (auch Konstant).