Analytische Mechanik und spezielle Relativitätstheorie

2. Computerübung **WS 14/15 Abgabetermin: 27.1.2015**

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng

Hénon-Heiles System

Der Hénon-Heiles Hamiltonian beschreibt die Bewegung von Sternen um das Zentrum einer glatten zylindersymmetrischen Galaxie, wobei angenommen wird, dass die Bewegung auf die xy-Ebene beschränkt ist (wir wählen die Masse $m = 1$):

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y),$$

mit

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3$$

Im Jahre 1964 entdeckten die Astronomen Michel Hénon und Carl Heiles, dass dieses Potential, welches auch ein einfaches Modell für ein Paar von nichtlinear gekoppelten Oszillatoren darstellt, für manche Anfangsbedingungen reguläre Bahnen ergibt und irreguläre, chaotische Bahnen für andere Anfangsbedingungen. Folglich ist dieses Modell ein exzellentes Beispiel um das Eintreten von Chaos in konservativen Systemen zu studieren.

- Plotten Sie das Hénon Heiles Potential $V(x, y)$ in der Nähe des Nullpunktes $(0, 0)$. Sie können in Mathematica den Befehl ContourPlot oder Plot3D verwenden. Sie werden feststellen, dass das Potential ein Minimum bei $(0, 0)$ hat, und entlang der y-Richtung befindet sich ein Maximum der Energie bei $(0, 1)$. Sie können dies einfach sehen, indem Sie $V(0, y)$ mit Hilfe des Befehls Plot ausgeben. Welchen Wert hat die Energie an diesem Maximum? Was ist also das Kriterium, welches die Energie E des Systems erfüllen muss, so dass die Bahnen nicht aus der Nähe von $(0, 0)$ entweichen können?

Mit Hilfe der Hamilton Gleichungen erhält man zwei gekoppelte Differenzialgleichungen zweiter Ordnung für x und y:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - 2xy, \\ \ddot{y} &= -y - x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die Energie E eine Erhaltungsgröße ist. Um die obigen Gleichungen zu lösen, braucht man natürlich vier Anfangsbedingungen, und zwar $x(0)$, $y(0)$, $\dot{x}(0)$, und $\dot{y}(0)$. Für eine feste Energie E sind diese Anfangsbedingungen nicht unabhänging voneinander, da $E = \frac{1}{2}(\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2) + V(x(0), y(0))$.

- Schreiben Sie einen code um die Hénon-Heiles Gleichungen zu lösen. Dies kann exakt wie in der ersten Computerübung erfolgen, also indem man NDSolve in Mathematica oder Runge-Kutta in FORTRAN oder C benutzt.

Da der Phasenraum 4-dimensional ist, ist es sehr von Vorteil, die Idee der Poincaré-Schnitte anzuwenden. Man plottet dabei nur die Werte von y und $\dot{y}$ für $x = 0$. Diese Punkte bilden einen zweidimensionalen plot oder Poincaré-Schnitt.

- Plotten Sie den Poincaré-Schnitt (für $x = 0$) für $E = 1/8$ und $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, und $\dot{y}(0) = 0$ (siehe die zusätzlichen Hinweise am Ende). Was können Sie über die Bewegung sagen? Ist sie regulär (geschlossene elliptische Kurven) oder chaotisch (eine Ansammlung von irregulär verteilten Punkten)? Was ist mit $x(0) = 0$, $y(0) = 0.2$, und $\dot{y}(0) = 0.2$? Ist die Bewegung nun chaotisch oder regulär?

Für eine feste Energie E können Sie in einfacher Weise zufällig verteilte Anfangsbedingungen generieren, indem Sie den in den Hinweisen am Ende enthaltenen code benutzen. Indem man die Ergebnisse für verschiedene Anfangsbedingungen kombiniert, erhält man einen vollständigen plot des Poincaré-Schnittes, welcher im Allgemeinen Bereiche regulärer und chaotischer Bewegung enthält.

(Beachten Sie: Man sollte verschiedene Anfangsbedingungen benutzen, da besonders für niedriges E, falls man sich in einem regulären Bereich befindet, man nicht herausgehen kann (Sie sollten dies im letzen Punkt gesehen haben!) und man folglich nicht in der Lage ist, andere Bereiche des Poincaré-Schnittes zu erkunden. Man kann dieses Problem durch die Wahl verschiedener Anfangsbedingungen umgehen und so den gesamten Poincaré-Schnitt plotten.)

- Plotten Sie den Poincaré-Schnitt für $E = 1/12$. Sie sollten sehen, dass vier Bereiche mit elliptischen Bahnen existieren. Im Zentrum dieser Bereiche befindet sich ein elliptischer Fixpunkt. Können Sie näherungsweise die elliptischen Fixpunkte bestimmen?

- Sie sollten ebenfalls feststellen, dass man an der Grenze zwischen regulären Bereichen hyperbolische Punkte hat (einer dieser hyperbolischen Punkte liegt auf der Geraden $\dot{y} = 0$). Plotten Sie diesen hyperbolischen Bereich im Detail und überzeugen Sie sich, dass dies wirklich ein hyperbolischer Punkt ist.

- Plotten Sie nun den Poincaré-Schnitt für $E = 1/8$. Können Sie die Bereiche chaotischer und regulärer Bewegung bestimmen?

- Verfahren Sie genauso mit $E = 1/6$ (E kann nicht größer als $1/6$ sein, und Sie sollten nun wissen wieso). Sie sollten die (fast vollständige) Zerstörung der Bereiche regulärer Bahnen sehen (können Sie immer noch reguläre Bereiche sehen?).

Zusätzliche Hinweise

(i) Sie können den Poincaré-Schnitt in einfacher Weise mit Mathematica erstellen. Benutzen Sie dazu zuerst NDSolve, um die Lösung der Hénon-Heiles Gleichungen von $t = 0$ bis t_{max} zu bestimmen. Dann können Sie folgendes anwenden:

```
vec = {};
For[t0 = 0, t0 <= tmax, t0 + = tmax/nmax,
  {
  x0 = (Evaluate[x[t] /. sol] /. t -> t0)[[1]];
  If[Abs[x0] < ε,
    {
    y0 = (Evaluate[y[t] /. sol] /. t -> t0)[[1]];
    y0p = (Evaluate[y'[t] /. sol] /. t -> t0)[[1]];
```

```
    vec = Append[vec, {y0, y0p}];
    }];
  }];
```

In diesem code ist t_{max} die maximale Zeit, die in NDSolve berechnet wurde. n_{max} ist die Anzahl der Zeitschritte (wir berechnen den Poincaré-Schnitt nur an diesen Zeiten); ϵ ist eine sehr kleine Zahl, etwa 10^{-4}; der Vektor *vec* speichert die Punkte $(y, \dot{y})$ des Poincaré-Schnittes. *sol* speichert die Lösung von NDSolve, d.h. *sol=NDSolve[...]* (siehe erste Computerübung).

Sie können den Befehl *ListPlot[vec]* anwenden, um den Poincaré-Schnitt zu plotten.

(ii) Sie können in einfacher Weise Anfangsbedingungen, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0)$, $y(0)$, und $\dot{y}(0)$ auswerten, indem Sie den folgenden Mathematica sub-code verwenden:

```
pyi = (RandomReal[]*2 - 1.)*Sqrt[2*En];
yi = (RandomReal[]*2 - 1.)*2*Sqrt[2*En];
check = 2*En - pyi∧2 − yi∧2 + 2*yi∧3/3;
While[check < 0,
  {
  yi = (RandomReal[]*2 − 1.)*2*Sqrt[2*En];
  check = 2*En - pyi∧2 - yi∧2 + 2*yi∧3/3;
  }];
pxi=Sqrt[check];
```

wobei *En* die Energie des Systems ist, *pyi* ist $\dot{y}(0)$, *yi* ist $y(0)$, und *pxi* ist $\dot{x}(0)$ (wir fordern $x(0) = 0$). Beachten Sie, dass wir in diesem code verlangen, dass $\dot{x}(0) = \sqrt{2E - \dot{y}(0)^2 - 2V(x(0), y(0))}$ eine reelle Zahl ist. Sie sollten dann diese Anfangsbedingungen im NDSolve Befehl verwenden.