

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

Hausübung, Blatt 07

WS 14/15 Abgabetermin: 12.12.2014

Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng

[H16] Teilchen auf Ebene

4 Punkte

Eine Masse m bewegt sich auf der xy -Ebene im Potential $V(\rho) = -\gamma/\rho$ wobei $\gamma > 0$ eine Konstante ist und $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion von der Form

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} - \frac{\gamma}{\rho}$$

ist, wobei p_ρ und p_φ die kanonisch konjugierten Variablen von ρ bzw. φ (Polarkoordinaten) sind. (2 Punkte)

b) Stellen Sie die Hamilton-Gleichungen auf.

Bestimmen Sie die Gleichung für $\ddot{\rho}$ (ohne diese zu lösen). (1 Punkt)

c) Berechnen Sie $\{A_x, H\}$ für

$$A_x = m\rho^2 \dot{\varphi} (\dot{\varphi} \rho \cos \varphi + \dot{\rho} \sin \varphi) - \alpha \cos \varphi.$$

Für welche Wahl der Konstanten α ist A_x eine Erhaltungsgröße? (1 Punkt)

Bemerkung: A_x ist die x -Komponente des Runge-Lenz-Vektors $\vec{A} = \vec{L} \times \vec{v} - \alpha \vec{e}_\rho$ (vgl. [P9]).

[H17] Hamiltonfunktion in Zylinderkoordinaten

4 Punkte

Die potentielle Energie eines Teilchens der Masse m sei in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) formuliert:

$$V(\rho) = V_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad V_0 = \text{const.}, \quad \rho_0 = \text{const.}$$

a) Formulieren Sie die Lagrangefunktion und bestimmen Sie die Hamilton-Funktion. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. (1 Punkt)

c) Finden Sie drei Erhaltungsgrößen. (1 Punkt)

[H18] Poisson-Klammern des Drehimpulses

2 Punkte

Seien $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ die kartesischen Koordinaten eines Teilchens und $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ die korrespondierenden Impulse. Ferner sei $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$.

a) Bestimmen Sie $\{L_z, q_k\}$ und $\{L_z, p_k\}$ jeweils mit $k \in \{x, y, z\}$. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie $\{L_x, L_y\}$, $\{L_x, L_z\}$, $\{L_y, L_z\}$ und drücken Sie die Ergebnisse jeweils als Funktion der Drehimpulskomponenten aus. (1 Punkt)

Bitte wenden

Bitte geben Sie auf jeder Ausarbeitung der Hausübungen ihren Namen,
Matrikelnummer und Studiengang an!

Die Ausarbeitungen können in der Handbibliothek am ITP (Appelstr.2) im
Postfach von Andreas Deser abgegeben werden. Die Abgabe ist bis Freitags
VOR der Vorlesung, d.h. bis 10:15 Uhr. Eine spätere Abgabe ist nicht
möglich!